ストゥルムの定理とその周辺

高崎金久（大阪公立大学数学研究所）

概 要

Sturm は 1829 年の論文において，実対称行列の固有値問題に関して今日「交錯定理」と呼ばれるものを示した．そこでは交錯定理の主張に加えて，Sturm が同じ年の先行する論文で公表した実係数多項式の実根の個数に関する「ストゥルムの定理」と酷似する主張が述べられている．いずれの論文でも主結果の証明が省かれている．実係数多項式の実根の個数に関する定理については Sturm 自身が 1835 年の論文で証明付きの詳しい解説を行った．1850 年代には Sturm の 2 つの論文に端を発する研究が Sylvester，Cauchy，Hermite らによって集中的に行われた．特に，Sylvester は Sturm が実対称行列の固有値問題に関して主張したことに証明を与えた．また，Hermite は複素係数多項式の虚根の問題を 2 次形式やエルミート形式によって考察し，後年の Routh と Hurwitz の研究への道を開いた．1950 年代のこれらの研究の背景には 1840 年代の Sylvester，Sturm，Borchardt の先行研究があった．

1　はじめに

前回の数学史シンポジウムにおいて，実対称行列の固有値問題に関する Sturm と Cauchy の 1829 年の論文 [16, 4] とそれに関連する話題を紹介した [29]．今回の報告はその続編である．Sturm と Cauchy の論文は実対称行列の固有値とその主小行列[1]の固有値の間に**交錯関係**と呼ばれる関係が成り立つこと (**交錯定理**) を示したことで知られる．交錯関係は 2 つの有限数列 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ と $\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$ の間に

$$\alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \beta_3 \le \cdots \le \alpha_{n-1} \le \beta_{n-1} \le \alpha_n$$

という関係が成立することを意味する．$\le$ を $<$ に置き換えれば狭義の交錯関係になる．

Sturm と Cauchy はそれぞれまったく異なる動機から実対称行列の固有値問題[2]を考察した．Sturm は Lagrange や Laplace による惑星運動の永年摂動の研究を動機として，ある種の定数係数連立線形常微分方程式系を取り上げ，その指数函数

[1] principal minor をこのように訳している．首座小行列と呼ぶほうが普通かもしれない．

[2] 当時は固有値どころか行列の概念もまだ登場していなかったが，今日の視点から解釈してこのように表現している．正確にいえば，Sturm は通常の意味の固有値問題ではなくて一般化固有値問題を考えた

解を求めるために係数行列の固有値問題を考えた．他方，Cauchy は 2 次曲面の幾何学や剛体運動の慣性モーメントの問題を背景として，実 2 次形式の球面上の極値問題から係数行列に対する固有値問題を引き出した．惑星運動の問題は Cauchy の研究の本来の動機ではなかったと思われるが，おそらく Sturm との情報交換[3]に触発されて，論文 [4] の表題に惑星運動という言葉を入れた．その結果として，19 世紀の文献では Sturm よりも Cauchy の方が永年摂動の問題と結びつけられるようになってしまった．

Sturm が先述の論文 [16] で示したのは固有多項式とその主小行列式の間の根の交錯関係だけではなかった．そこには今日**ストゥルムの定理**として知られる実係数多項式の実根の個数に関する定理と酷似する内容が含まれている．その書きぶりを見れば，Sturm はむしろそちらを重視していたようにも思える．ストゥルムの定理は固有値問題に関する論文に先行して，同じ 1829 年の論文 [17] で公表された．そこでは証明が省かれていたが，後年，証明付きの詳しい解説が 1835 年の論文 [18] として公表された．ストゥルムの定理では与えられた多項式に対して一連の**補助多項式**を用意し，それらの値の**符号変化の回数**によって実根の個数を表す．Sturm は実対称行列の固有多項式の主小行列式がこの補助多項式列と同じ役割を演じると主張したのである．しかし Sturm はこのことの意義についてほとんど何も述べていない．しかも論文では主張の証明が省かれていて，それらの主張の論理的根拠もわからない．

以下では 1829 年の Sturm と Cauchy の論文に端を発する研究が 1850 年代に Sylvester，Cauchy，Hermite らによって集中的に行われたことを紹介する．それらの研究に影響を与えた 1840 年代の Sylvester，Sturm，Borchardt の先行研究についても触れる．

なお，これらの研究の経緯や内容を調べるに当たって藤原松三郎の著書 [27] と Rahman と Schmeisser の著書 [20] からきわめて有用な情報が得られたことを強調しておきたい．藤原の著書と高木貞治の著書 [28] はストゥルムの定理とその関連事項を紹介する数少ない日本語の教科書である．その中でも藤原の著書は関連する話題を幅広く解説しているだけでなく，出典となる原論文も明示している．また，Rahman と Schmeisser の著書には取り上げた題材の歴史に関する詳細な覚え書きがあり，引用文献も充実している．

2 実根の個数に関するストゥルムの定理

1829 年の論文 [17] で提示された定理では，与えられた実係数多項式 $f(x)$ とその導函数 $f'(x)$ から一連の補助多項式列 $\{f_i(x)\}_{i=0}^{r}$ を**ユークリッド互除法**によって構成する．すなわち，

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = f'(x)$$

[3] Cauchy の論文 [4] の最後の部分にそのことが触れられている．

から出発して，$f_{i-1}(x)$ を $f_i(x)$ によって割り算すること

$$f_{i-1}(x) = q_i(x)f_i(x) - f_{i+1}(x)$$

によって $f_{i+1}(x)$ を定める．$q_i(x)$ と $f_{i+1}(x)$ は商と剰余に相当する多項式であり，$f_{i+1}(x)$ の次数は $f_i(x)$ の次数よりも小さい．剰余の -1 倍を $f_{i+1}(x)$ と定めるのは Sturm の工夫である．この割り算が

$$f_{r-1}(x) = q_r(x)f_r(x)$$

というように剰余 0 となって終わるとき，$f_r(x)$ は $f(x), f'(x)$ の最大公約多項式である．$f(x)$ が重根をもたない場合には，$f(z), f'(x)$ は互いに素であるから，$f_r(x)$ は 0 と異なる定数である．

このような補助多項式列に対して $x = c$ での値の数列 $\{f_i(c)\}_{i=0}^{r}$ の符号変化の回数（略して**符号変化数**）を $V(c)$ と表す．一般に数列 $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ において，隣接するある 2 項 u_i, u_{i+1} が $u_iu_{i+1} < 0$ というように逆符号をもつことを符号変化と呼び，数列全体にわたる符号変化の回数を符号変化数という．ただし，項に 0 が含まれるときには，それらを無視して回数を数える．たとえば，$1, 2, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 2$ という数列の符号変化数は 2 である．

以上の設定のもとで 1829 年の論文 [17] の定理は次のように定式化される．

ストゥルムの定理　$f(x)$ が重根をもたず，区間 (a, b) の端点で根をもたないとき，開区間 (a, b) における $f(x)$ の根の個数は $V(a) - V(b)$ に等しい．

実際には，1835 年の論文 [18] で注意されているように，$f(x)$ が重根をもたないという条件や区間 (a, b) の端点に根をもたないという条件は緩められる．重根をもつ場合には根の重複度を無視して根を数えて，端点に根がある場合には開区間 (a, b) を半開区間 $(a, b]$ に置き換えれば，同じ形の主張が成り立つ．

1835 年の論文は上の定理の証明を紹介しているが，証明では補助多項式列 $\{f_i(x)\}_{i=0}^{r}$ の次のような性質のみを用いている：

i) 区間 (a, b) 上で $f_0(x), f_1(x)$ は共通の根をもたない．さらに $f_0(x)$ の任意の実根 α に対してある近傍が存在して，その近傍の中の $x < \alpha$ の側では $f_0(x)f_1(x) < 0$，$x > \alpha$ の側では $f_0(x)f_1(x) > 0$ である．

ii) 区間 (a, b) の点 α が $f_i(x)$ の根であれば，$f_{i-1}(\alpha)f_{i+1}(\alpha) < 0$ である．

iii) $f_r(x)$ の値は区間 (a, b) のすべての点で一定の符号をもつ．

先述のようにユークリッド互除法によって得られる多項式列 $\{f_i(x)\}_{i=0}^{r}$ がこれらの性質をもつことは簡単な考察によって確かめられる．一般に，これらの性質を

もつ多項式列を**ストゥルム列**という[4]．与えられた多項式 $f(x)$ に対して何らかの（ユークリッド互除法に限らない）やり方でストゥルム列が構成できれば，ストゥルムの定理と同じ主張が成り立つ（**一般化されたストゥルムの定理**）．

3　実対称行列の固有値に関する交錯定理

Cauchy は 1829 年の論文 [4] において実対称行列の固有値問題を扱ったが，Sturm は同年の論文 [16] において 2 つの 5×5 実対称行列 G, K（G は正定値とする）に対する**一般化固有値問題**

$$(Gx+K)\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$$

を考えた．$\boldsymbol{V}$ と x が未知数であり，これを $\boldsymbol{V}$ に対する連立 1 次方程式とみなして，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$ 以外の解（固有ベクトル）が存在するような x の値（固有値）を問うのが問題である．Cauchy と違って Sturm は行列式を使わず，上の方程式を $\boldsymbol{V}$ の成分 $V_1,\cdots,V_4$ について順次解き，V_5 だけを含む方程式

$$QV_5=0$$

（Q は x の 5 次多項式である）を導いて，$\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{0}$ 以外に選べるための条件

$$Q=0$$

を得た．線形代数的に解釈すれば，Sturm が行ったことは Gauss の消去法によって $\boldsymbol{V}$ に対する方程式を

$$\begin{pmatrix} L & * & * & * & * \\ 0 & M & * & * & * \\ 0 & 0 & N & * & * \\ 0 & 0 & 0 & P & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q \end{pmatrix}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$$

という形に変形することであり，V_1, V_2, V_3, V_4 を書き下した式の分母に L, M, N, P が現れる．Q は一般化固有値問題の固有多項式

$$Q=\det(Gx+K)$$

[4] ストゥルム列の条件の定式化は文献によって異なる．ここでは藤原の著書 [27] にならったが，高木の著書 [28] での定式化はこれとは見かけが少し異なる．高木は隣接する多項式対 $f_i(x), f_{i+1}(x)$ がいずれも共通の根をもたないことを条件の 1 つにしているが，その条件は上の i), ii), iii) のもとでは自動的に満たされるので，実質的な内容は藤原の本と同じである．

であり，P, N, M, L はその主小行列式

$$
\begin{aligned}
Q &= \begin{vmatrix} g_{11}x + k_{11} & \cdots & g_{14}x + k_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{41}x + k_{41} & \cdots & g_{44}x + k_{44} \end{vmatrix}, \\
&\vdots \\
M &= \begin{vmatrix} g_{11}x + k_{11} & g_{12}x + k_{12} \\ g_{21}x + k_{21} & g_{22}x + k_{22} \end{vmatrix}, \\
L &= g_{11}x + k_{11}
\end{aligned}
$$

（G, K の (i, j) 成分を g_{ij}, k_{ij} と表す）になる．

Sturm はこれらの多項式の列 Q, P, N, M, L, C（C は任意に選んだ正定数）に対して次の「定理」を述べている：

1) Q, P, N, M, L の根はすべて実数である[5]．各多項式の根で区切られた区間には直後の多項式の根が 1 個ずつある．ただし，その根が区間の端点に来ることも起こり得る．

2) 任意の実数 a に対して，$x = a$ における Q, P, N, M, L, C の値の符号変化数 $V(a)$ は $x > a$ における Q の根の個数に等しい[6]．また，任意の実数の対 $a < b$ に対して，$V(a) - V(b)$ は $a < x < b$ における Q の根の個数に等しい．

3) Q の後のある多項式，たとえば N が $a < x < b$ にわたって一定符号値を取る場合には，Q, P, N, M, L, C の代わりに Q, P, N に関して同じ主張が成り立つ．

1) は交錯定理の主張であり，Cauchy も同じ結論を得ている [4]．これに対して 2) と 3) は Sturm 独自の主張であり，明らかに前節で紹介した定理の内容と酷似している．Sturm はこれらの主張に対して証明を与えていないが[7]，1 の主張を図 1 のように可視化して，任意に選んだ a, b に対して $V(a), V(b)$ を求めてみれば，2), 3) の主張が成り立っていることはすぐに確かめられる．このことから 1) の主張と 2), 3) の主張の間に何らかの隠れた関係があるだろうと考えるのは自然である．しかし，Sturm はそのような関係について何も述べていない．たしかに，上の主結果を述べた部分の脚注では先行論文 [17] を引用して，その要点を書き記している．しかしそれらと 2), 3) の主張との類似性については何も論じていない．

---

[5] Sturm は重根がないとも主張しているが，それは一般的には正しくない．

[6] 今は G が正定値であることを仮定しているので，Q, P, N, M, L の最高次係数は正値である．したがって十分大きい b に対して $V(b) = 0$ になる．Sturm は一般の場合については，必要ならば Q, P, N, M, L に ± 1 を乗じて，Q, P, N, M, L の最高次係数が正値になるようにせよ，と書いている．

[7] 正確にいえば，これらの「定理」の後で「2 つの異なる証明を与える」といって説明を始めるのだが，その内容は意味不明で，少なくとも証明にはなっていない．

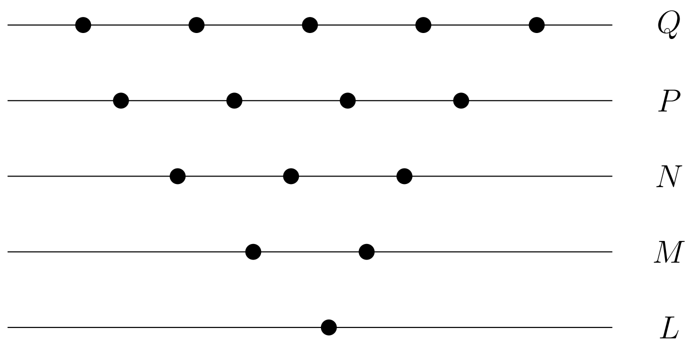

図 1: Q, P, N, M, L の根（黒丸で表している）の位置

4　Sylvester, Sturm, Borchardt の 1840 年代の論文

ストゥルムの定理に関連する 1850 年代の研究を紹介する前に，その先駆けとなった 1840 年代のいくつかの論文を紹介しておきたい．

Sylvester と Sturm は実係数多項式 $f(x)$ とその導函数 $f'(x)$ からユークリッド互除法によって得られる補助多項式列に対して $f(x)$ の根による明示公式を見出した [22, 19]．Sylvester は当時，2 つの多項式の終結式（すなわち 2 つの高次方程式 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ から未知数 x を消去して得られる等式 $R = 0$ の左辺）をはじめとするさまざまな消去法の研究を行っていた．多項式 $f(x), g(x)$ の終結式 $R[f(x), g(x)]$ は 2 つの多項式の係数の函数であり，Sylvester の名を冠する行列式表示がよく知られている [27, 28]．Sylvester は先行する論文 [21] において終結式を $f(x), g(x)$ の根の**対称函数**として考察し，$g(x) = f'(x)$ の場合にストゥルムの補助多項式との関係を指摘した．そして論文 [22] において補助多項式を $f(x)$ の根の対称函数として求めたが，説明は不完全で，未定の因子も残っていた．Sturm は論文 [19] においてこの因子を決定し，補助多項式の明示公式を完成した．

重根をもたない実係数多項式 $f(x)$ を

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$$

と表して，ユークリッド互除法の計算において $f_n(x)$ が 0 でない定数になって終わる場合（第 2 節の記号で $r = n$ のとき）を考える．Sylvester と Sturm が見出した

補助多項式の明示公式を現代風に書き下せば

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} (x-\alpha_j), \\
f_2(x) &= \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i_1<i_2} \Delta(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2})^2 \prod_{j\neq i_1,i_2} (x-\alpha_j), \\
f_3(x) &= \frac{1}{\lambda_3} \sum_{i_1<i_2<i_3} \Delta(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\alpha_{i_3})^2 \prod_{j\neq i_1,i_2,i_3} (x-\alpha_j), \\
&\vdots \\
f_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n} \Delta(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^2
\end{aligned}$$

となる．$\Delta(x_1,\cdots,x_m)$ は $x_1,\cdots,x_m$ の差積

$$\Delta(x_1,\cdots,x_m) = \prod_{i<j}(x_i-x_j)$$

を表す．$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ は

$$\begin{aligned}
p_1 &= n, \\
p_k &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \Delta(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_k})^2 \quad (2\le k\le n)
\end{aligned}$$

によって

$$\lambda_k = \begin{cases} \left(\dfrac{p_2p_4\cdots p_{k-2}}{p_1p_3\cdots p_{k-1}}\right)^2 & (k\text{ が偶数のとき}), \\ \left(\dfrac{p_1p_3\cdots p_{k-1}}{p_2p_4\cdots p_{k-2}}\right)^2 & (k\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

と定義される数である．

Borchardt は Sylvester と Sturm のこの結果を踏まえて 2 編の論文 [1, 2] を書いた[8]．最初の論文では $p_1,p_2,\cdots,p_n$ を $f(x)$ の根のべき和

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k \quad (k\ge 0)$$

の **Hankel 行列式**として

$$p_k = \det(s_{i+j-2})_{i.j=1}^{n}$$

と定義し，それが上に述べたように差積の平方和として表せることを証明した．これだけでは意図も意義もよくわからない論文である．ドイツ語で書かれたこの論

[8] これが Borchardt の事実上最初の論文になった．C. J. Scriba が書いた Borchardt の評伝によれば，Borchardt は Jacobi の指導のもとで 1843 年に学位論文を書いたが，その論文は出版されずに失われたとのことである．

文をフランス語訳して，その前にほぼ同じ長さの新たな説明を書き足したものが2番目の論文である．この追加された部分にこれらの論文の意図と結果が書かれている[9]．

多項式の根と係数の関係あるいはニュートンの公式から，s_k は $f(x)$ の係数の有理係数多項式として実数になる．したがって p_k も実数である．λ_k は $p_1, \cdots, p_n$ の積と商の平方として定義されているから正数である．$f_k(x)$ の最高次係数を v_k と表せば[10]

$$v_k = \frac{p_k}{\lambda_k}$$

となるので，v_k と p_k は同符号の実数である．

ここでようやくストゥルムの定理の出番となる．v_k と p_k が同符号であるから，絶対値が十分大きい正数 a と負数 b に対して，補助多項式列 $\{f_k(x)\}_{k=0}^n$ の符号変化数の値 $V(a), V(b)$ はそれぞれ数列 $\{p_k\}_{k=0}^n$ の符号変化数 A と数列 $\{(-1)^{n-k}p_k\}_{k=0}^n$ の符号変化数 B に等しく，

$$V(a) - V(b) = A - B$$

となる．これはストゥルムの定理によって $f(x)$ の実根の総数に等しい．他方，符号変化数の定義から

$$A + B = n$$

である．こうして次の結論が得られる：

1) $f(x)$ の実根の総数は $A - B = n - 2B$ に等しい．

2) 特に，$p_1, \cdots, p_n$ がすべて正数ならば，$f(x)$ のすべての根は実数であり，逆も成り立つ．

1) を言い換えれば，$2B$ は虚根の総数である，ということになる．虚根は2つずつ複素共役な対をなすので，偶数が現れるのは当然である．これらが Borchardt の論文の主結果である．

Borchards の論文には Cauchy と Jacobi の行列式論や線形変換論 [3, 12, 13] の強い影響が見て取れる．たとえば，p_k に2通りの表示があることの証明には**コーシー・ビネ公式**（Cauchy の論文に由来する）を用いている．また，行列式や線形変換の取り扱いを含めて，論文全体の雰囲気や記号の使い方が Jacobi の論文に似ている．Borchardt は Jacobi の死後，2次形式の研究に関する Jacobi の遺稿を Journal für die reine und angewante Mathematik 誌[11]に掲載し [14, 15]，Jacobi の全集の第1巻を編集して，Jacobi の業績を数学界に喧伝することに力を尽くした．

[9] 昨年度の報告 [29] を書いたときにはこのような論文の構成が読み取れずに，論文の意義を誤解していた．このような論文の書き方は困りものである．

[10] p_k, λ_k, v_k という記号は Sturm の論文 [19] に合わせた．Sturm は補助多項式列を V_k という記号で表して，その最高次係数に v_k という記号を用いた．

[11] Borchardt が 1856 年に Crelle の後を引き継いで編集者になっていた．

5　Sylvester の 1853 年の論文

第 3 節の多項式 Q, P, N, M, L の根の配置（図 1）をよく眺めれば，正定数 C を付け加えた多項式列 Q, P, N, M, L, C がストゥルム列の 3 つの条件 i), ii), iii) を満たしていることに気がつく．条件 i) は Q と P の根が狭義の交錯関係にあることの言い換えであり，条件 ii) も隣接する多項式の根が交錯関係にあることからの帰結である．条件 iii) は C が正定数であるから満たされている．したがって，Q, P, N, M, L の根の交錯関係さえ証明できれば，第 3 節で紹介した Sturm の論文 [16] の主結果の他の部分は一般化されたストゥルムの定理 [18] から従う．問題は交錯関係の証明であるが，Cauchy は論文 [4] の末尾で，Sturm が同じ結果をもっと簡単なやり方で示したと書き記している．あくまで想像ではあるが，Sturm の頭の中では第 3 節で紹介した 3 つの主張がこのようにつながっていたのかもしれない．

1850 年代に入ってから，Sylvester は Sturm が主張した交錯定理に対して直接的な証明を与えた [25]．その証明は上に述べた推論とは逆向きに議論を進める．

Sturm の記号を流用して，G, K は $n \times n$ 実対称行列で，G は正定値であるとする．これらに対する一般化固有値問題の固有多項式

$$f(x) = \det(Gx + K)$$

に対して左上の $k \times k$ 部分の小行列式を $f_k(x)$ と表す：

$$f_k(z) = \det(g_{ij}x + k_{ij})_{i,j=1}^{k}.$$

さらに便宜的に $f_0(x) = 1$ と定める．$f_k(x)$ のこの番号付けはストゥルムの定理の補助多項式列とは逆順であるが，説明の都合上このように番号付けることにする．この設定のもとで，Sylvester は次のことを示した：

1) これらの $f_k(x)$ の根はすべて実数である．

2) 隣接する $f_k(x), f_{k+1}(x)$ の根は交錯関係にある．

Sylvester は次の 2 つの性質に注目して 1), 2) を証明した：

a) 数直線のある点 α が $f_k(x)$ の根であれば，$f_{k-1}(\alpha)f_{k+1}(\alpha) < 0$ である．

b) $f_k(x)$ は k 次の実係数多項式であり，最高次係数は正値である．

これらを用いて $f_1(x)$ から順に 1), 2) を確かめて行くことができる．実際，$f_1(x)$ は 1 次式であるから 1 個の実根 $\alpha_1^{(1)}$ をもつ．このとき a) によって $f_2(\alpha_1^{(1)}) < 0$ である（$f_0 = 1$ であることに注意されたい）．さらに b) によって $f_2(x)$ は 2 次式で，$|x|$ が十分大きいときに正値を取る．したがって，中間値の定理によって

$$\alpha_1^{(2)} < \alpha_1^{(1)} < \alpha_2^{(2)}$$

となるような実根 $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$ が存在する．こうして $f_1(x), f_2(x)$ に対して 1), 2) が成り立つことがわかる．また，$f_1(x)$ は $x = \alpha_1^{(1)}$ の左側で負値，右側で正値を取るので，$f_1(\alpha_1^{(2)}) < 0$, $f_1(\alpha_2^{(2)}) > 0$ である．このことと a) から $f_3(\alpha_1^{(2)}) > 0$, $f_3(\alpha_2^{(2)}) < 0$ となる．さらに b) によって $f_3(x)$ は 3 次式で，$|x|$ が十分大きいとき $x > 0$ で正値，$x < 0$ で負値を取るから，中間値の定理によって

$$\alpha_1^{(3)} < \alpha_1^{(2)} < \alpha_2^{(3)} < \alpha_2^{(2)} < \alpha_3^{(3)}$$

となるような実根 $\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}$ が存在する．こうして，$f_3(x)$ を含めて 1), 2) が成り立つことがわかる．この考察を繰り返して，すべての $f_k(x)$ に対して 1), 2) を証明できる．

以上の考察から特に，多項式列 $\{f_k(x)\}_{k=0}^n$ は（番号の付け方が逆順であるが）数直線上のストゥルム列である，という結論が得られる．性質 a) はストゥルム列の条件 ii) に対応する．また，$f_{n-1}(x)$ と $f_n(x)$ の根の交錯関係からストゥルム列の条件 i) が従う．ちなみに，Cauchy も 1829 年の論文 [4] においてほぼ同様の論法を用いている．

じつはこの証明には 1 つ難点がある．Sylvester が用いた性質 a) は正確にいえば「$f_{k-1}(\alpha)f_{k+1}(\alpha) < 0$」ではなくて，等号を許した「$f_{k-1}(\alpha)f_{k+1}(\alpha) \leq 0$」でしか成り立たないのである．そもそも Sylvester はこの性質を “a well-known property of symmetrical determinants” と呼んで，詳しい説明なしに用いている．この「よく知られた性質」について，藤原の著書 [27] は一般的な行列式 D とその小行列式 $D\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$ （D から I に属する番号の行と J に属する番号の列を除去したもの）の間に成り立つ **Jacobi の公式** [13]

$$D\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \cdot D = D\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \cdot D\begin{pmatrix} j \\ j \end{pmatrix} - D\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \cdot D\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$$

を用いて説明している．実際，この等式を $f_{k+1}(x)$ の行列式に適用して $i = k$, $j = k+1$ とすれば

$$f_{k-1}(x)f_{k+1}(x) = g_k(x)f_k(x) - h_k(x)^2$$

という等式が得られる[12]．ここで $g_k(x)$ は $f_{k+1}(x)$ の行列式から第 k 行と第 k 列を除去したものであり，$h_k(x)$ は同じ行列式から第 k 行と第 $k+1$ 列を（あるいは，G, K が対称行列であるから同じことだが，第 $k+1$ 行と第 k 列を）除去したものである．したがって，ある α に対して $f_k(\alpha) = 0$ であるならば

$$f_{k-1}(\alpha)f_{k+1}(\alpha) = -h_k(\alpha)^2 \leq 0$$

[12] Cauchy も 1829 年の論文 [4] においてこれと同様の行列式等式を独自に導出して用いている．

となる．しかし，$h_k(\alpha) \neq 0$ である保証はないので，先述の性質 a) は等号を許す形でしか成り立たない．

この問題について藤原は，行列 G, K を少し変形して $h_k(\alpha) = 0$ となることを避けて[13]狭義の交錯関係を示せば，変形を連続的に元に戻すとき等号を許す形で交錯関係は保たれる，と説明している．

ちなみに，Sylvester は Jacobi の等式を一般化した等式（**Sylvester の公式**）[27] を見出したことでも知られている．これらの行列式等式は現代の可積分系理論 [30] の中で威力を発揮しているが，上に紹介したような使い方があるという藤原 [27] の指摘は興味深い．

Sylvester はこの論文と同じ年に，ストゥルムの定理に関連する論文 [23, 24, 26] も公表しているが，これらについては別の機会に検討したい．

6　Hermite の 1852 年〜1856 年の論文

Hermite は 1852 年から 1856 年にかけてストゥルムの定理に関連するいくつかの論文を公表した [8, 9, 10, 11]．1852 年の論文 [8] は xy 平面上の長方形の内部における $F(x) = 0,\ y = \Phi(x)$ という連立方程式の解の個数を論じたものであるが，抽象的な説明が行われているだけで，内容がよくわからない．1853 年の論文 [9] では Sylvester と Sturm が示した補助多項式の明示公式 [22, 19] の一般化を論じているが，論文の最後の部分で 2 次形式を用いる可能性を指摘していることが注目される．1855 年の論文 [10] では実対称行列の固有値問題を取り上げて，いくつかの新たな知見を紹介している（ただし，論文の短さもあって，どれについても詳しい説明は省かれている）．1 つは実対称行列をエルミート行列に一般化することであり，固有多項式の主小行列式が Sturm の補助多項式列と同じ役割を演じることを指摘している．Cauchy の 1855 年の論文 [6] を引用していることも興味深い．この論文で Cauchy は**コーシー指数** [5] を用いて実対称行列の固有多項式をより一般的な視点から論じているようである[14]．もう 1 つの知見は 2 次形式やエルミート形式に関することであり，複素係数多項式の根のガウス平面上の配置に関する問題（この問題についても Cauchy の研究がよく知られていた）への応用を予告している．この最後の問題が 1856 年の論文 [11] のテーマとなった．

1856 年の論文は実際には Borchardt 宛ての手紙の抜粋が Journal für die reine und angewante Mathematik 誌に掲載されたものである．そのためか，内容は少し雑然としていて，ところどころにミスも見つかる．論文のおもな論点はエルミート形式や 2 次形式を用いてガウス平面上で複素係数多項式の根の配置を調べることである．論文の後半ではコーシー指数も用いている．論文全体を通して，上半平面・下半平面における根の個数がこれらの概念を用いて記述できることを示し

[13] しかしそれができるという理由を書いていない．

[14] 今回この論文も紹介するつもりだったが，論文の内容が十分に消化できなかった．なお，コーシー指数の概念・性質・使い方については Rahman と Schmeisser の著書 [20] を参照されたい．

ている．以下では最初の 2 節（エルミート形式を用いる考察）の内容を紹介する．なお，記号や記法は現代風に改変している．

第 I 節の内容　一般的なエルミート形式（Hermite は 2 次形式と呼んでいる）[15]

$$\varphi = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\bar{u}_j u_k, \quad a_{jk} = \bar{a}_{kj}$$

に対して係数行列の主小行列式

$$\Delta_m = \det(a_{jk})_{j,k=1}^{m}$$

を考える．これらはすべて実数である．φ は変数の線形変換

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} g_{jk}\xi_k, \quad \det(g_{jk})_{j,k=1}^{n} \neq 0$$

によって標準形

$$\varphi = |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_p|^2 - |\xi_{p+1}|^2 - \cdots - |\xi_{p+q}|^2$$

に変換される．Hermite は最初の「定理」として次の主張を掲げる：

> 1) 正係数項の個数 p と負係数項の個数 q （項が存在しないときには 0 とする）は有限数列 $\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \cdots, \Delta_n/\Delta_{n-1}$ の正項と負項の個数に等しい：
>
> $$p = |\{m \mid \Delta_m/\Delta_{m-1} > 0\}|,$$
> $$q = |\{m \mid \Delta_m/\Delta_{m-1} < 0\}|.$$
>
> ここで $|X|$ は集合 X の要素数を表し，便宜的に $\Delta_0 = 1$ と定めた．

ただし，Hermite が暗黙のうちに仮定しているように，この主張が文字通りに意味をなすためには $\Delta_1, \cdots, \Delta_n$ の中に 0 になるものがあってはならない．$\Delta_1 \neq 0$, $\cdots$, $\Delta_n \neq 0$ ならば $p+q=n$ となるが，一般の場合には $p+q$ は φ の係数行列の階数 r に等しい．Hermite はこのあとの考察でも $p+q=n$ の場合しか考えていない．

第 II 節の内容　上の定理の応用例として，重根をもたない複素係数多項式

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$$

とその係数を複素共役に置き換えた多項式

$$\bar{f}(x) = x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n = \prod_{k=1}^{n}(x-\bar{\alpha}_k)$$

[15] Hermite はこのように，今日の物理学と同じ流儀でエルミート形式を書いている．

から定まるエルミート形式

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} i \frac{\bar{\Theta}(\alpha_j)\Theta(\alpha_j)}{f'(\alpha_j)\bar{f}(\alpha_j)}$$

を考える．ここで $\Theta(x), \bar{\Theta}(x)$ は

$$\Theta(x) = \sum_{m=0}^{n-1} u_m x^m, \quad \bar{\Theta}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{u}_m x^m$$

という多項式であり，その係数 $u_0, \cdots, u_{n-1}$ がエルミート形式の変数になる．

Φ は一見しただけではエルミート形式には見えないが，$\Theta(x)/\bar{f}(x)$ をラグランジュ補間公式によって

$$\frac{\Theta(x)}{\bar{f}(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Theta(\bar{\alpha}_j)}{(x-\bar{\alpha}_k)\bar{f}'(\bar{\alpha}_k)}$$

と展開すれば，Φ は

$$\Phi = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{i}{\alpha_j - \bar{\alpha}_k} \frac{\bar{\Theta}(\alpha_j)}{f'(\alpha_j)} \frac{\Theta(\bar{\alpha}_k)}{\bar{f}'(\bar{\alpha}_k)}, \quad \frac{\bar{\Theta}(\alpha_j)}{f'(\alpha_j)} = \overline{\left(\frac{\Theta(\bar{\alpha}_j)}{\bar{f}'(\bar{\alpha}_j)}\right)}$$

と表せて，たしかに実数値をとるエルミート形式であることがわかる．さらに，$u_0, \cdots, u_{n-1}$ から新たな変数 $v_1, \cdots, v_n$ への線形変換

$$v_j = \frac{\Theta(\bar{\alpha}_j)}{\bar{f}'(\bar{\alpha}_j)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{\alpha}_j^k}{\bar{f}'(\bar{\alpha}_j)} u_k$$

（$\bar{\alpha}_1, \cdots, \bar{\alpha}_n$ が相異なるので逆変換が存在する）によって Φ は

$$\Phi = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{i}{\alpha_j - \bar{\alpha}_k} \bar{v}_j v_k$$

に変換される．

このエルミート形式の主小行列式

$$\Delta_m = i^m \det \left(\frac{1}{\alpha_j - \bar{\alpha}_k} \right)_{j,k=1}^{m}$$

の値は**コーシーの公式** [3]

$$\det \left(\frac{1}{a_j - b_k} \right)_{i.k=1}^{m} = \frac{\Delta(a_1, \cdots, a_m)\Delta(b_m, \cdots, b_1)}{\prod_{j,k=1}^{m}(a_j - b_k)}$$

によって計算できる．これから

$$\frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} = \frac{i}{\alpha_m - \bar{\alpha}_m} |P_m|^2, \quad P_m = \frac{\prod_{j<m}(\alpha_j - \alpha_m)}{\prod_{j<m}(\alpha_j - \bar{\alpha}_m)}$$

となるので，Δ_m/Δ_{m-1} の符号は α_m の虚部の符号に等しい．ただし，P_m の分母が 0 になることを避けるために，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対して

$$\alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \quad (j, k = 1, \cdots, n)$$

という条件を仮定しておく．以上のことを先述の 1) と組み合わせれば，次の「定理」が得られる：

> 2) Φ の標準形における正係数項の個数 p は $f(z)$ の虚部が正の根の個数に等しく，負係数項の個数 q は虚部が負の根の個数に等しい：

$$p = |\{k \mid \mathrm{Im}\, \alpha_k > 0\}|\,,$$
$$q = |\{k \mid \mathrm{Im}\, \alpha_k < 0\}|\,.$$

こうして上半平面・下半平面における虚根の個数を求める問題がエルミート形式によって解ける．

論文ではこのあともエルミート形式や 2 次形式の同様の応用例が続くが，ここではこれ以上の説明は控える．それらの詳細や同様の方法によって得られる知見については藤原と高木の著書 [27, 28] に詳しい解説がある（Rahman と Schmeisser の著書 [20] も参照されたい）．

1) の主張における p, q の表示式の右辺はそれぞれ有限数列 $\Delta_0, \cdots, \Delta_n$ の**符号継続数**（隣り合う 2 項の符号が同じである回数）と符号変化数を言い換えたものであることに注意されたい．$r = p + q < n$ の場合にも，$\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_r$ がいずれも 0 と異なるならば[16]，同様の解釈ができる．$\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_r$ の途中に 0 が現れる場合の取り扱いについては藤原の著書 [27] を参照されたい．

2 次形式の場合にも 1) と同様のことが成り立つ．Hermite は 1) について根拠や証明などはまったく述べていないが[17]，2 次形式の場合には，1) のような p, q の解釈は Jacobi による 2 次形式の標準形 [14]

$$\varphi = \frac{v_1^2}{\Delta_1} + \frac{v_2^2}{\Delta_1 \Delta_2} + \cdots + \frac{v_r^2}{\Delta_{r-1}\Delta_r}$$

からただちにわかる．それを真似ること（v_j^2 は $|v_j|^2$ に置き換わる）によってエルミート形式の場合も説明できる．ちなみに，p, q の値が標準形への線形変換の選び方によらないことは現在では「シルヴェスターの慣性律」として知られているが，Jacobi はそれを Sylvester よりも早く見出していた [15]．

Borchardt の論文 [1, 2] に登場した Hankel 行列式も

$$\varphi = \sum_{j,k=1}^{n} s_{j+k-2} u_j u_k$$

---

[16] r は Φ の係数行列の階数であるから，$m > r$ に対して $\Delta_m = 0$ である．

[17] Borchardt との間では説明するまでもない共通の知識だったのかもしれない．

という 2 次形式の係数行列の主小行列式とみなせる，ということに注意されたい．与えられた実係数多項式に対してこの 2 次形式を考えれば[18]，多項式の根がすべて実数であるための条件や正根・負根の個数をその 2 次形式の言葉で記述することができる [20, 27, 28]．これはストゥルムの定理が提起する問題に対する新たな方法となる．

Hermite が 1850 年代の論文で示したことは E. J. Routh や A. Hurwitz をはじめとする他の数学者に引き継がれて，さまざまな方向に発展して行った．その中でも重要な問題は多項式のすべての根の虚部が正であるための条件を探ることだった．この問題の応用の 1 つは微分方程式の解の安定性解析である．これは実対称行列の固有値問題が惑星運動の安定性との関連で論じられたことを思い出させる[19]．すべての根の虚部が正であるための条件を問う問題は**ラウス・フルヴィッツの定理**に結実し，それに基づく**安定性判定条件**は今日でも応用解析や工学分野で利用されている．Gantmacher の著書 [7] にはこれらの話題について微分方程式への応用も見込んだ詳しい解説がある．

7　まとめ

多項式の実根の個数に関するストゥルムの定理は実対称行列の一般化固有値問題を論じた論文に先行して同じ 1829 年に公表され，1835 年の論文において一般化された．その後，1840 年代の Sylvester，Sturm，Borchardt による散発的な研究を経て，1850 年代には Sylvester，Cauchy，Hermite によって関連する研究が集中的に，かつ互いに影響を及ぼしながら行われた．特に Hermite は 2 次形式やエルミート形式を用いる新たな方法や虚根に関する新たな課題を提起した．そのことはその後の Routh や Hurwitz らの研究に発展して今日に到っている．

ストゥルムの定理はもともと内容も証明も素朴なものであるが，その背後には行列の固有値問題や各種の特殊多項式・直交多項式系との関わり，Sturm 自身による常微分方程式の解の零点への一般化，2 次形式やエルミート形式との関わり，微分方程式の解の安定性解析など，奥深い世界が広がっている．今回はその一端を紹介した．

参考文献

[1] C. W. Borchardt, Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hilfe man die saecularen Storungen der Planeten bestimmt, J. reine. angew. Math. **30** (1846), 38–45.

[18] s_k は $f(x)$ の係数から定まり，$f(x)$ の根を知らなくても求められる．

[19] ただし，これらの安定性は概念的に異なる．惑星運動の安定性は中立安定性であり，工学システムなどで要求される安定性は漸近安定性である．

[2] C. W. Borchardt, Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvemeut des planètes, J. math. pures. appl., 1er série, **12** (1847), 50–67.

[3] A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, Journal de l'École polytechnique **10** (1815), Oeuvres (Gauthier-Villars, 1891), série 2, tome 1, 91–169.

[4] A. L. Cauchy, Sur l'équation a l'aide de laquelle on determine les inégalites séculaires des mouvements des planètes, Exercices de mathématiques quatrième année, Paris, 1829, 140–160.

[5] A. L. Cauchy, Extrait d'une Lettre sur un Mémoire publié à Turin, le 16 juin 1833, et relatif aux racines des équations simultanés, Comptes Randus Acad. Sci., serie 1, **4** (1837), 672.

[6] A. L. Cauchy, Sur le dénomblement des racines qui, dans une équation algébrique ou transcendente, satisfont à des conditions donées, Comtptes Rendus Acad. Sci., serie 1, **40** (1855), 1329–1335.

[7] T. R. Gantmacher, Applications of the theory of matrices, Dover Publications, New York, 2005.

[8] C. Hermite, Sur l'éxtension du théorème de Sturm à un système d'équations simultanés, Comptes Rendus Acad. Sci., series 1, **35**, 52–54.

[9] C. Hermite, Remarque sur le théorème de M. Sturm, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, series 1, **36** (1853), 294–297.

[10] C. Hermite, Remarque sur un théorème de M. Cauchy, Comptes Rendus Acad. Sci., ser. 1, **41** (1855), 181–183.

[11] C. Hermite, Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données, extrait d'une léttre de Mr. Ch. Hermite de Paris à Mr. Borchardt de Berlin, J. reine. angew. Mathematik **52** (1856), 39–51.

[12] C. G. J. Jacobi, De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas tranformandis, quae solis quadratis variabilium constant, una cum variis theorematis de tranformatione et determinatione integralum multiplicium, J. reine. angew. Math. **12** (1834), 1–69.

[13] C. G. J. Jacobi, De formatione et proprietatibus Determinantium, J. reine. angew. Math. **22** (1841), 285–318.

[14] C. G. J. Jacobi, Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks, aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgeteilt durch C. W. Borchardt, J. reine. angew. Math. **54** (1857), 265–270.

[15] C. G. J. Jacobi, Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen, aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgeteilt durch C. W. Borchardt, J. reine. angew. Math. **54** (1857), 275–280.

[16] C. F. Sturm, Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un systèm d'équations différentielles linéaires, Bull. sci. math. **12** (1829), 313–322.

[17] C. F. Sturm, Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques, Bulletin de Férussac **11** (1829), 419–422.

[18] C. F. Sturm, Mémoire sur la résolution des équations numériques, Mémoires divers présentés par des savants étrangers **6** (1835), 273–318.

[19] C. F. Sturm, Démonstration d'un théorèm d'algèbre de M. Sylvester, Journal de Liouville **7** (1842), 356–368.

[20] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, Analytic theory of polynomials, London Mathematical Society Monographs New Series, vol. 26, Oxford, 2002.

[21] J. J. Sylvester, On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination, part I, Philosophical Magazine **15** (1839), 428–435.

[22] J. J. Sylvester, On the relation of Sturm's auxiliary functions to the roots of an algebraic equiations, Plymouth British Association Repoart 1841 (Part II), 23–24.

[23] J. J. Sylvester, On a remarkable modification of Sturm's theorem, Philosophical Magazine **5** (1853), 446–456.

[24] J. J. Sylvester, Note on a remarkable modification of Sturm's theorem and on a new rule forfinding superior and interior limits to the roots of an equation, Philosophical Magazine **6** (1853), 14–20.

[25] J. J. Sylvester, The algebraic theory of the secular-inequality determinantive equation generalized, Philosophical Magazine **6** (1853), 214–216.

[26] J. J. Sylvester, On the explicit values of Sturm's quotients, Philosophical Magazine **6** (1853), 293–296.

[27] 藤原松三郎（著），浦川肇・高木泉・藤原毅夫（編），代数学，第 1 巻改訂新編，内田老鶴圃 2019．初版は 1928 年に刊行された．

[28] 高木貞治，代数学講義，改訂新版，共立出版 1965．初版は 1930 年に刊行された．

[29] 高崎金久，交錯定理とその周辺，第 34 回数学史シンポジウム報告集，津田塾大学数学・計算機科学研究所報 **48** (2025) 所収．

[30] 中村佳正・高崎金久・辻本諭・尾角正人・井ノ口順一，解析学百科 II 可積分系の数理，朝倉書店 2018.