

シューア函数の起源

高崎金久 (大阪公立大学数学研究所)

目次

1. シューア函数と Cauchy の行列式論
2. Jacobi の研究
3. Trudi, Naegelsbach, Kostka の研究
4. 結び

シュア函数は組合せ論から群の表現論まで幅広い分野と関わる重要な対称函数である。シュア函数という名称（S 函数とも呼ばれる）は一般線形群の既約指標に関する 1901 年の Schur の学位論文にちなむ。しかしながら、シュア函数は Schur とその師の Frobenius の表現論研究のはるか以前から対称函数として知られていた。その始まりは Cauchy が 1815 年の行列式論においてヴァンデルモンド行列式とそれを一般化した行列式の商を対称函数として考察したことにある。Jacobi は 1841 年に多項式の根の対称式の観点から Cauchy の研究を取り上げて、今日ではヤコビ・トウルーディ公式と呼ばれる単一の行列式による表示を提示した。その後 1864 年の N. Trudi と 1871 年の H. Naegelsbach の散発的研究を経て、1870 年代以降に C. Kostka による今日の対称函数論の先駆けとなる研究が行われた。本講演ではこのような Schur 以前のシュア函数の研究を概観する。

1. シューア関数と Cauchy の行列式論

シューア関数の定義

シューア関数にはいくつかの同値な定義の仕方があるが、ここでは古典的な定義（ただし現代的記号を用いている）

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \frac{\det(x_i^{\ell_j})_{i,j=1}^n}{\det(x_i^{n-j})_{i,j=1}^n}$$

を採用する. $\mathbf{x}$ は変数の組 $(x_1, \dots, x_n)$, λ は非負整数の減少列 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) を表す. $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ は λ から

$$\ell_i = \lambda_i + n - i \quad (i = 1, \dots, n)$$

というように定まる非負整数の狭義減少列 ($\ell_1 > \dots > \ell_n \geq 0$) である. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ はヤング図形 (A. Young 1901) を表し, $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ は対応するマヤ図形 (M. Sato 1968) を表している.

1. シューア函数と Cauchy の行列式論

交代函数と対称函数

上の定義式の分子と分母は $\mathbf{x}$ の交代函数 (alternating function) であり, その商として $s_\lambda(\mathbf{x})$ は対称函数 (symmetric function) である (実際には割り切れて多項式になる). 分母はいわゆるヴァンデルモンド行列式である:

$$\det(x_i^{n-j}) = \Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

Cauchy は 1815 年の論文[†]の第 I 部においてヴァンデルモンド行列式を一般化した行列式 $\det(x_i^{\ell_j})$ を導入し, それとヴァンデルモンド行列式の商を対称函数として考察した (ただし簡単な場合を計算するにとどまった). Bressoud が指摘しているように[‡], これがシューア函数の研究の始まりと考えられる. ちなみに, この論文の第 II 部は行列式の一般論を展開している.

1. シューア関数と Cauchy の行列式論

なお, Vandermonde 自身は $\det(x_i^{n-j})$ という行列式を考えておらず, それが差積に等しいという事実は Cauchy のこの論文によって確立された[‡]. Cauchy はこの論文とそれに先立つ同年の論文において置換の記法 (今日と同じもの) を導入し, これらの行列式の考察に利用している.

† A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, Journal de l'École polytechnique **10** (1815), 29–112.

‡ D. M. Bressoud, Proof and Confirmations, Cambridge UP 1999, Section 2.4.

‡ B. Ycart, A case of mathematical eponymy: the Vandermonde determinant, Revue d'histoire des mathématiques **19** (2013), 43–77

2. Jacobi の研究

Jacobi の 1841 年の論文

Jacobi は 1841 年に行列式に関わる 3 篇の論文を出版している。最初の論文は行列式の一般論であり、第 2 の論文は函数行列式 (ヤコビ行列式)、第 3 の論文[†] は交代函数を論じている。この 3 番目の論文がシュール函数を扱っている。

注意 今日では Jacobi がシュール函数を最初に導入したという誤った見解がかなり流布している。その一因は Stanley の 1971 年の論文[‡] (シュール函数の研究の歴史も紹介している) がなぜか Cauchy に言及していないことにあるのかもしれない。

[†] C. Jacobi, De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum, J. Reine Angew. Math. **22** (1841), 360–371.

[‡] R. P. Stanley, Theory and application of plane partitions: Part 1, Studies in Applied Mathematics **1** (1971), 167–188

2. Jacobi の研究

1841 年の論文の論点と結果

Jacobi は Cauchy の行列式商を n 次多項式

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

の根 $x_1, \dots, x_n$ の対称函数とみなして, それを $f(x)$ 自体の言葉 (たとえば係数 $a_1, \dots, a_n$) で記述することを考えた. そして最終的に $x_1, \dots, x_n$ の完全対称式 $C_1(\mathbf{x}), C_2(\mathbf{x}), \dots$ による行列式表示を得た. 今日の記法では, 完全対称式は $h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots$ と表され, Jacobi の行列式表示は

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det(h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^n$$

となる. Jacobi はこの公式に証明を与えなかったが, 1864 年にイタリア人数学者 N. Trudi が証明を与えたので, この公式は今日ではヤコビ・トゥルーディ公式と呼ばれている.

2. Jacobi の研究

基本対称式と完全対称式

$f(x)$ の係数 $a_1, \dots, a_n$ は符号を別にすれば基本対称式

$$e_k(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

に等しい. それに対して完全対称式は $x_1, \dots, x_n$ の指定された次数の単項式の総和

$$h_k(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

として定義される. $\{e_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^n$ と $\{h_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^\infty$ は文字通り対称関数であり, 互いに簡単な代数的関係で結ばれている. Jacobi は Cauchy の行列式商をこれらの基本的な対称関数 (特に完全対称式) で表したことになる.

2. Jacobi の研究

母函数の利用

Jacobi の前掲論文の特徴は Cauchy の行列式商に対して母函数を考えることにある．おもな命題・定理も母函数の言葉で述べられている．この母函数は $1/f(x)$ の x^{-1} に関する展開（係数に完全対称式が表れる）

$$\frac{1}{f(x)} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} = x^{-n} + h_1(\mathbf{x})x^{-n-1} + h_2(\mathbf{x})x^{-n-2} + \dots$$

と関係する． $f(x)$ 自体は基本対称式による展開

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = x^n - e_1(\mathbf{x})x^{n-1} + \dots + (-1)^n e_n(\mathbf{x})$$

を持つが，こちらは Jacobi 流の計算には使えない．シューア函数には基本対称式による行列式表示もあるが，それは後年 Naegelsbach と Kostka によって別のやり方で導出された．

3. Trudi, Naegelsbach, Kostka の研究

18～19 世紀における対称函数の研究

論文の文面からはわからないが、Cauchy と Jacobi の研究の背景には前世紀以来の対称函数への関心があったと思われる。英国の数学者 E. Waring は著書 *Meditationes Algebraicae* (1770) において一般的対称多項式を基本対称式の多項式として表す問題を論じた。対称函数は高次方程式の解法と密接な関係があり、Vandermonde の 1771 年の論文[†] は方程式の根の対称函数を論じている。これらは高次方程式の解法に関する Lagrange の研究につながっている。

おそらくこのような背景のもとで、Trudi, Naegelsbach, Kostka は Jacobi の研究を引き継いだ。

[†] A.-T. Vandermonde, *Mémoire sur la resolution des équations*, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique*, 1771, pp. 365–416

3. Trudi, Naegelsbach, Kostka の研究

N. Trudi の論文

Intorno ad un determinante piu generale di quello che suol dirsi determinante delle radici di una equazione ed alle funzioni simmetriche complete di queste radici, Rendic. dell'Accad. Napoli (1864), 121–134.

Trudi はこの論文において Jacobi の行列式表示を証明した. 証明には完全対称式が満たす等式

$$h_k(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = h_k(x_1, \dots, x_{k-1}) + x_n h_{k-1}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$
$$\frac{h_k(x_1, \dots, x_{n-1}, y) - h_k(x_1, \dots, x_{n-1}, z)}{y - z} = h_{k+1}(x_1, \dots, x_{n-1}, y, z)$$

を用いる. Stanley は前掲論文で Trudi の証明を紹介している.

3. Trudi, Naegelsbach, Kostka の研究

H. Naegelsbach の論文

Ueber eine Klasse symmetrischer Functionen, Programm des Koeniglichen Gymnasiums in Zweibrücken zum Schlusse des Studien-Jahres 1870/1871, Zweibrücken 1871.

Naegelsbach は最初の 2 節で Trudi と同様の方法によって Jacobi の行列式表示を導いている. 続く 4 節では基本対称式による行列式表示を論じている. その結果を今日の記法で表せば

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \det(e_{\mu_i - i + j}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^m$$

となる. $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ ($\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m \geq 0$) は転置されたヤング図形を表す非負整数列である. この公式は今日では Naegelsbach の公式と呼ばれるが, Naegelsbach はここまで明確に結果を述べてはおらず, その一般的証明も与えていない.

3. Trudi, Naegelsbach, Kostka の研究

C. Kostka の研究

1. Ueber die Bestimmung von symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch deren Coefficienten, Crelle's Journal **81** (1876), 282–289.
2. Ueber den Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen, Crelle's Journal **93** (1882), 89–123.
3. Tafeln der symmetrischen Funktionen bis zum Gewichte 12, Crelle's Journal **132** (1907), 116–167.

文献 1 は Cauchy の行列式商の基本対称式による表示を詳しく論じている。先行研究として Borchardt と Mertens による母関数の方法なるものへの言及があるが、Naegelsbach の名は登場しない。しかし主結果として提示されているのは Naegelsbach の公式にほかならない。このような事情からこの行列式表示は [Naegelsbach-Kostka の公式](#)とも呼ばれる。

3. Trudi, Naegelsbach, Kostka の研究

文献 2 は対称関数論に今日まで続く新境地を切り開いた. この論文の中で Kostka は Cauchy の行列式商を含む 3 種類の対称関数系の間の定数係数線形関係を論じた. 特に重要なのは Cauchy の行列式商すなわちシューア函数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ と今日では単項対称関数と呼ばれて $m_\mu(\mathbf{x})$ という記号で表される対称関数 (Kostka はそれぞれに対して $C_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}$, $T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}$ という記号を用いている) の間の線形関係

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} m_\mu(\mathbf{x})$$

である. その係数 $K_{\lambda\mu}$ はコスト力数と呼ばれ, λ が表すヤング図形の上に描ける重み μ の半標準盤の個数という組合せ論・表現論的解釈をもつことが知られている. Kostka の論文の中にはこのような解釈の原型が見られる. それは後に Young の表現論研究とも関連することになる重要な一歩だった.

4. 結び

行列式の交代性に最初に注目したのは Vandermonde だったが、Cauchy はそれを基本原理として行列式を捉え直し、今日ではシュール関数と呼ばれる行列式商を導入した。Jacobi は Cauchy の行列式商に対して完全対称式による行列式表示を見出した。Jacobi の発見は Trudi, Naegelsbach, Kostka によって裏付けられて、18 世紀の Waring 以来の対称関数論に豊かな内容をもたらした。さらに Kostka は対称関数系の間の線形関係を調べて、後年のヤング図形の組合せ論の先駆けとなる事実を指摘した。

これらの研究とは全く別のところで、Frobenius によって対称群の既約指標が研究され、それが Schur の学位論文[†]によって一般線形群の既約指標と関連付けられた。その中にシュール関数が隠れていて、1930 年代になってシュール関数 (S 関数) と命名された。

† I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Inaugural Dissertation, Friedrich-Wilhelm-Universität zu Berlin, Berlin 1901.