超離散KdV方程式における頂点作用素[1]

東京大学数理科学研究科

中田 庸一

[1] arXiv:0907.1774

概要

1. 超離散KdV方程式の再帰的表現を持つ解と頂点作用素

2. 超離散KdV方程式を満たすことの証明

3. 箱玉系との関係

超離散 KdV 方程式

$$F_j^t + F_{j+1}^{t+2} = \max(F_j^{t+2} + F_{j+1}^t - 2R, F_j^{t+1} + F_{j+1}^{t+1}) \quad (R \geq 0)$$

- 離散 KdV 方程式の双線形形式の超離散化
- 箱玉系と関係 (後述)

“KdV”方程式における頂点作用素

$$\Big(1 + \exp\big(c + 2\sum_{j=0}^{\infty} p^{2j+1} x_{2j+1}\big) \exp\big(-2\sum_{j=0}^{\infty} p^{-2j-1} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}}\big)\Big)$$

- p：ソリトンパラメータ、 c：位相定数
- $x_1, x_3, \ldots$：無限個の独立変数
- N-ソリトン解を $N+1$-ソリトン解に写す
- 繰り返し適用することですべてのソリトン解を生成
- <u>ずらし作用素が相互作用による位相のずれを作る</u>

1. 超離散KdV方程式の再帰的表現を持つ解と頂点作用素

- 再帰的表現を持つ解($N+1$-ソリトン解が N-ソリトン解によって表されている解)について

- 頂点作用素と、その基本的な性質について

超離散 KdV 方程式の再帰的表現を持つ解 (1)

$2N$ 個のパラメータを持つ t, j の関数 (N-ソリトン解) を考える。

$$F(\underbrace{\Omega_1, \ldots, \Omega_N}_{N}; \underbrace{C_1, \ldots, C_N}_{N})$$

- $\Omega_1, \ldots, \Omega_N \geq 0$：ソリトンパラメータ
- $C_1, \ldots, C_N$：位相定数
- $F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C})$ と略記する

超離散KdV方程式の再帰的表現を持つ解 (2)

$N+1$-ソリトン解はN-ソリトン解を用いて定義される

$$
\begin{aligned}
&F(\Omega_1,\ldots,\Omega_N,\Omega_{N+1};C_1,\ldots,C_N,C_{N+1}) \\
&:= \max\left(F(\boldsymbol{\Omega};\boldsymbol{C}), 2\eta_{N+1} + F(\boldsymbol{\Omega};\boldsymbol{C} - 2\min{}_{\Omega_{N+1}}(\boldsymbol{\Omega})\right)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\min{}_{\Omega_{N+1}}(\boldsymbol{\Omega}) = {}^t(\min(\Omega_1,\Omega_{N+1}),\ldots,\min(\Omega_N,\Omega_{N+1})),
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\eta_i = C_i - jK_i + t\Omega_i, \\
&K_i = \min(R,\Omega_i) \quad (\text{分散関係})
\end{aligned}\right. \quad (i = 1,\ldots,N+1)
$$

超離散KdV方程式の再帰的表現を持つ解 (3)

ただし1-ソリトン解は

$$F(\Omega_1; C_1) = \max(F(;), 2\eta_1 + F(;))$$

で定義されるものとし、パラメータを持たない関数 $F(;)$ は真空解

$$F(;) = 0$$

とする。つまり

$$F(\Omega_1; C_1) = \max(0, 2\eta_1)$$

例 (1)

2-ソリトン解

$$
\begin{aligned}
&F(\Omega_1, \Omega_2; C_1, C_2) \\
&= \max(F(\Omega_1; C_1), 2\eta_2 + F(\Omega_1; C_1 - 2\min(\Omega_1, \Omega_2))) \\
&= \max(0, 2\eta_1, 2\eta_2, 2\eta_2 + 2\eta_1 - 4\min(\Omega_1, \Omega_2))
\end{aligned}
$$

例 (2)

3-ソリトン解

$$
\begin{aligned}
&F(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3;C_1,C_2,C_3)\\
&=\max(F(\Omega_1,\Omega_2;C_1,C_2),2\eta_3+F(\Omega_1,\Omega_2;C_1-2\min(\Omega_1,\Omega_3),C_2-2\min(\Omega_2,\Omega_3)))\\
&=\max(0,2\eta_1,2\eta_2,2\eta_2+2\eta_1-4\min(\Omega_1,\Omega_2),\\
&\qquad 2\eta_3,2\eta_3+2\eta_1-4\min(\Omega_1,\Omega_3),2\eta_3+2\eta_2-4\min(\Omega_2,\Omega_3),\\
&\qquad 2\eta_3+2\eta_2+2\eta_1-4\min(\Omega_1,\Omega_2-4\min(\Omega_1,\Omega_3)-4\min(\Omega_2,\Omega_3)))
\end{aligned}
$$

超離散KdV方程式における頂点作用素 (1)

N-ソリトン解に作用し、$\Omega_{N+1} \geq 0, C_{N+1}$ という

2つのパラメータを持つ作用素 $X(\Omega_{N+1}, C_{N+1})$ を以下で定義する。

$$\begin{aligned} &X(\Omega_{N+1}, C_{N+1}) F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C}) \\ &:= \max\left(F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C}), 2\eta_{N+1} + F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C} - 2\min{}_{\Omega_{N+1}}(\boldsymbol{\Omega})\right) \end{aligned}$$

すなわち、

$$X(\Omega_{N+1}, C_{N+1}) F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C}) = F(\Omega_1, \ldots, \Omega_N, \Omega_{N+1}; C_1, \ldots, C_N, C_{N+1})$$

超離散KdV方程式における頂点作用素 (2)

$X(\Omega_{N+1}, C_{N+1})$ は N-ソリトン解を $N+1$-ソリトン解に写しているので頂点作用素に相当する。

注意

- 再帰的表現を作用素の言葉で表したものである
- この方法は連続や離散系でも適用できる。

頂点作用素の基本的性質

命題 頂点作用素は互いに交換可能

$$X(\Omega_b, C_b)X(\Omega_a, C_a)F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C}) = X(\Omega_a, C_a)X(\Omega_b, C_b)F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C})$$

証明 定義を用いて直接計算により示せる。

系 (命題の再帰的表現での言い換え)

$F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{\eta})$ はパラメータの組 (Ω_i, C_i) の入れ替えに対し不変

$$F(\Omega_1, \ldots, \Omega_N; C_1, \ldots, C_N) = F(\Omega_{\sigma(1)}, \ldots, \Omega_{\sigma(N)}; C_{\sigma(1)}, \ldots, C_{\sigma(N)}) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

一般の “N-ソリトン解” について確かに超離散 KdV 方程式を満たすのか？

2. 超離散KdV方程式を満たすことの証明

- 帰納法を用いて上述の N-ソリトン解が方程式を満たすことを示す。

超離散KdV方程式を満たすことの証明の準備 (1)

我々の $F(\boldsymbol{\Omega};\boldsymbol{C})$ について、先ほどの系より

$$\Omega_N \geq \Omega_{N-1} \geq \ldots \geq \Omega_1 \geq 0$$

としても一般性を失わない。

超離散 KdV 方程式を満たすことの証明の準備 (2)

こうすることで相互作用項は

$$\min(\Omega_i, \Omega_j) = \Omega_i \quad (i < j)$$

となり、また

$$\exp(\frac{\partial}{\partial t})F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C}) = F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C} + \boldsymbol{\Omega})$$

であることから、N 個のそれぞれ違う位相のずれを一つの独立変数 t のずれに押し込められる。

超離散KdV方程式を満たすことの証明の準備 (3)

以上より $F(\boldsymbol{\Omega};\boldsymbol{C})$ は $F_j^{(N),t}$ に書き直される。

$$F_j^{(N),t} = \begin{cases} \max(F_j^{(N-1),t}, 2(C_N - jK_N + t\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-2}) & (N \geq 1) \\ 0 & (N = 0) \end{cases}$$

$$\Omega_N \geq \Omega_{N-1} \geq \ldots \geq \Omega_1 \geq 0$$

証明にはこの $F_j^{(N),t}$ を用いる。

超離散KdV方程式を満たすことの証明 (1)

超離散KdV方程式(再掲)

$$F_j^t + F_{j+1}^{t+2} = \max\left(F_j^{t+2} + F_{j+1}^t - 2R, F_j^{t+1} + F_{j+1}^{t+1}\right) \qquad (R \geq 0),$$

$R \geq 0$ より $F_j^{(0),t} = 0$ は解になっている。

$F_j^{(N-1),t}$ が解であることを仮定する。

超離散KdV方程式を満たすことの証明 (2)

$F_j^{(N),t}$ を左辺に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&F_j^{(N),t} + F_{j+1}^{(N),t+2} = \\
\max\Big(&F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t+2}, \\
&2(2C_N - (2j+1)K_N + (2t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-2} + F_{j+1}^{(N-1),t}, \\
&2(C_N - jK_N + t\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-2} + F_{j+1}^{(N-1),t+2}, \\
&2(C_N - (j+1)K_N + (t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t}\Big)
\end{aligned}
$$

超離散KdV方程式を満たすことの証明 (3)

補題 $\max$ について

$$\max(x, y) - \max(z, w) \leq \max(x - z, y - w)$$

が成り立つ。

注意 $y = -x$, $w = -z$ とすると、三角不等式になる。

この不等式を使うと緑色の項は常に桃色より大きいことが分かる

$$\begin{aligned} &2(C_N - jK_N + t\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-2} + F_{j+1}^{(N-1),t+2} \\ \leq &2(C_N - (j+1)K_N + (t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t} \end{aligned}$$

超離散 KdV 方程式を満たすことの証明 (4)

左辺を改めて書き直すと、

$$\max\Big(F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t+2},$$
$$2(2C_N - (2j+1)K_N + (2t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-2} + F_{j+1}^{(N-1),t},$$
$$2(C_N - (j+1)K_N + (t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t}\Big)$$

超離散KdV方程式を満たすことの証明 (5)

同様に右辺も

$$\max\Bigl(\max\left(F_j^{(N-1),t+2}+F_{j+1}^{(N-1),t}-2R,\,F_j^{(N-1),t+1}+F_{j+1}^{(N-1),t+1}\right),$$

$$2(2C_N-(2j+1)K_N+(2t+2)\Omega_N)$$

$$+\max\left(F_j^{(N-1),t}+F_{j+1}^{(N-1),t-2}-2R,\,F_j^{(N-1),t-1}+F_{j+1}^{(N-1),t-1}\right),$$

$$\max\left(2(C_N-(j+1)K_N+(t+2)\Omega_N)+F_j^{(N-1),t}+F_{j+1}^{(N-1),t}-2R,\right.$$

$$\left.2(C_N-jK_N+(t+1)\Omega_N)+F_j^{(N-1),t-1}+F_{j+1}^{(N-1),t+1}\right)\Bigr)$$

と書き直される。

超離散KdV方程式を満たすことの証明 (6)

赤色部分について、左辺は

$$F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t+2}$$

右辺は

$$\max\left(F_j^{(N-1),t+2} + F_{j+1}^{(N-1),t} - 2R, F_j^{(N-1),t+1} + F_{j+1}^{(N-1),t+1}\right)$$

仮定より $F_j^{(N-1),t}$ は超離散KdV方程式の解なので、両者は一致する。

超離散KdV方程式を満たすことの証明 (7)

青色部分について、左辺は

$$2C_N - (2j+1)K_N + (2t+2)\Omega_N + F_j^{(N-1),t-1} + F_{j+1}^{(N-1),t+1}$$

右辺は

$$\begin{aligned}&2(2C_N - (2j+1)K_N + (2t+2)\Omega_N)\\&+ \max\left(F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t-2} - 2R, F_j^{(N-1),t-1} + F_{j+1}^{(N-1),t-1}\right)\end{aligned}$$

赤色部分同様、$F_j^{(N-1),t}$ が超離散KdV方程式を満たすので両者は等しい。

超離散KdV方程式を満たすことの証明 (8)

緑色部分について、左辺は

$$2(C_N - (j+1)K_N + (t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t}$$

右辺は

$$\max\bigl(2(C_N - (j+1)K_N + (t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t} - 2R,$$
$$2(C_N - jK_N + (t+1)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-1} + F_{j+1}^{(N-1),t+1}\bigr)$$

これらも先ほどのmaxの不等式から等しいことが示される。

$$\max(x,y) - \max(z,w) \leq \max(x-z, y-w)$$

以上、maxの中身がそれぞれ等しいことより、等式が示された。

3. 箱玉系と頂点作用素

- F と箱玉系の変数 B の関係を紹介する
- 頂点作用素に箱玉系にどう作用するか

箱玉系との関係

変数変換

$$B_j^t = \frac{1}{2}\left(F_j^{t+1} + F_{j+1}^t - F_{j+1}^{t+1} - F_j^t\right)$$

と然るべき境界条件によって、超離散KdV方程式は箱の容量Rの箱玉系

$$B_j^{t+1} = \min\left(R - B_j^t, \sum_{n=-\infty}^{j-1}(B_j^{t+1} - B_j^t)\right)$$

に変換される。

以下、$R=1$の場合について考える。

箱玉系に対する作用 (1)

箱玉系の初期値問題について間田・泉・時弘(J.Phys.A: Math. Theor. 41 (2008) 175207)による結果を使って、頂点作用素の作用を箱玉の世界の言葉で表してみる。

- X_i $(i = 1, \ldots, N)$：元々の状態の玉の塊の左端の位置
- Y_i $(i = 1, \ldots, N+1)$：頂点作用素によって写った玉の塊の左端の位置

とする。このとき

$$C_i = X_i + 2\sum_{l:\text{右}} \min(\Omega_i, \Omega_l) \tag{1}$$

によって、X_i から C_i が復元できることに注意しておく。

箱玉系に対する作用 (2)

このとき X_i, Y_i について関係式

$$Y_i = \begin{cases} X_i - 2\min(\Omega_i, \Omega_{N+1}) & (C_{N+1} \geq C_i) \\ X_i & (C_{N+1} < C_i) \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, N)$$

$$Y_{N+1} = C_{N+1} - \sum_{C_i > C_{N+1}} 2\min(\Omega_i, \Omega_{N+1})$$

が成立する。

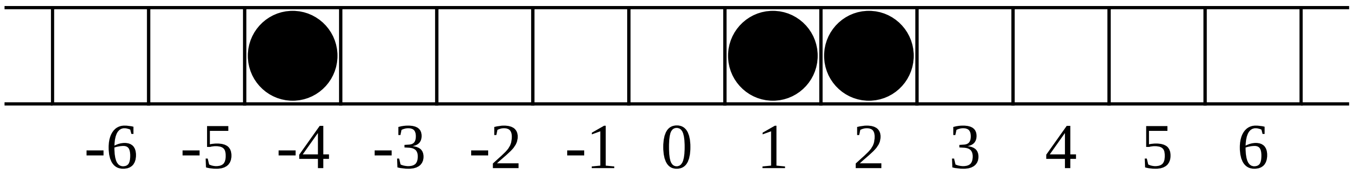
箱玉系に対する作用 (3)

頂点作用素の箱玉系への作用は以下で表わされる。

1. 玉の位置から C_i を復元しておく
2. $C_{N+1} \geq C_i$ な玉の固まりについては $2\min(\Omega_i, \Omega_{N+1})$ の分だけ左にずらす
3. $C_{N+1} < C_i$ な玉はそのまま配置
4. Y_{N+1} を計算し、そこから順に Ω_{N+1} 個配置する。

   ただし閉区間 $[Y_i - 2\min(\Omega_{N+1}, \Omega_i), Y_i - 1]$ には配置しない。

箱玉系に対する作用の例 (1)



この状態に $X(4,0)$ を作用させる。

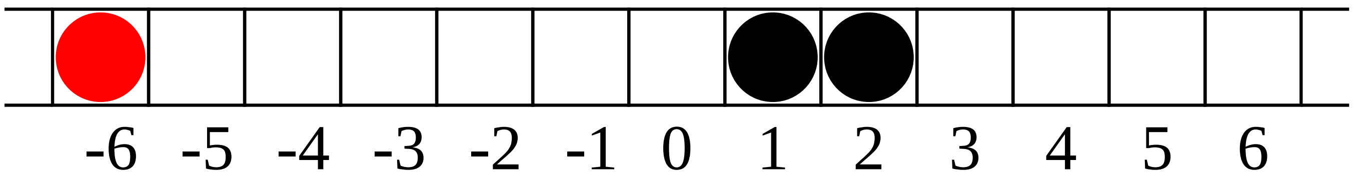
まず C_1, C_2 を復元

$$C_1 = -4 + 2 \cdot 1 = -2$$
$$C_2 = 1$$

(長さ 1 の塊を 1、長さ 2 の塊を 2 と番号付けした)

箱玉系に対する作用の例 (2)

$C_3 = 0$だから$C_1 < C_3$より長さ1の球の塊を左に2ずらす

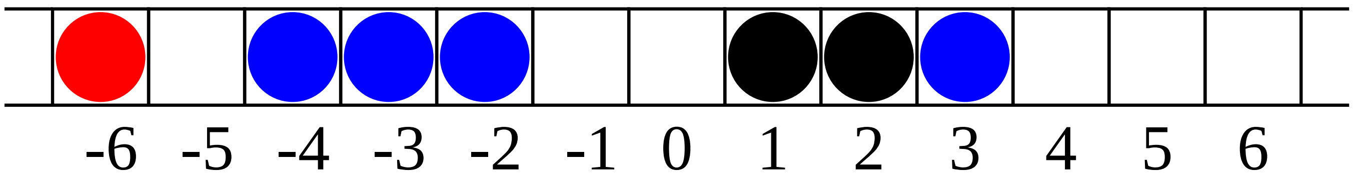


箱玉系に対する作用の例 (3)

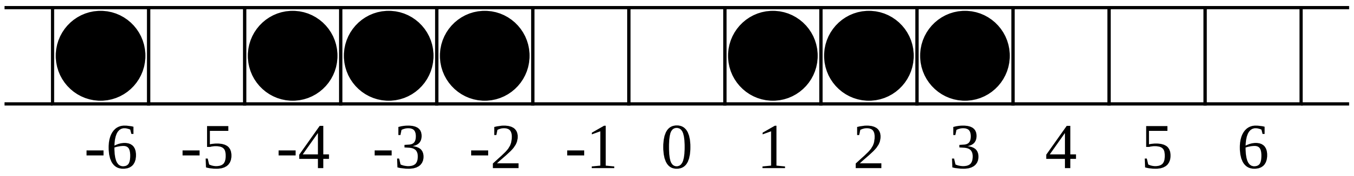
新たに配置し始める位置は

$$Y_3 = 0 - 2 \cdot 2 = -4$$

であるので、そこから配置していくが $[-1, 0]$ は除外する。



箱玉系に対する作用の例 (4)



これが新たな箱玉の状態。

まとめ

今日話したこと

- 超離散 KdV 方程式の頂点作用素 (の一表現) を提出した
- 再帰的表現を持つ解が超離散 KdV 方程式を満たすことを示した
- F を通じて頂点作用素が箱玉系にどう作用するのか説明した

今後の展望

- 対称性の解明について
- 他の可積分方程式への応用

おしまい