

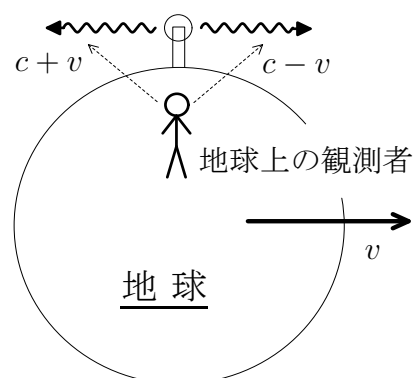
特殊相対性理論

マイケルソン-モーレーの実験

相対性理論の誕生において重要な役割を果たしたのは「光の本質」の研究だろう。光は我々にとってあまりにも身近な存在であるため、通常はその正体について考えることなどないかも知れないが、実際には、ニュートンの頃からそれが波動なのか粒子なのかについての論争があった。この問題は19世紀半ばにマクスウェルによる電磁気学の完成に伴って生れた光の電磁波説で一応の解決をみるが、光＝波動であるというなら、その媒質は何かという疑問は残された。これに対する当時の“模範解答”は「エーテル」だった。このエーテルとは光の存在するところなら何処でも、つまりは宇宙全体に充滿していると仮定された未知の物質で、この仮説が正しければ、地球・太陽・月を含むあらゆる天体は、言わば「エーテルの海」の中を運動しているようなものである。

この仮説にはそれなりに説得力もあるが、それを如何に検証するかとなると大変に難しい問題と言わざるを得ない。何故なら、全ての天体がエーテルの海の中を動いているならエーテルから何らかの抵抗を受けているはずなのに、そのような（未知の）力を運動方程式に含めなくとも観測と計算の間に深刻な不一致などは見られていなかったからである。従って、このエーテルは観測にかかるような抵抗は全く天体には与えないような性質を持つと仮定せざるを得ない。こうなると、その存在の検証は全く不可能なのだろうか。

これに対して一つの可能性を与えたのは波動の進行速度はその波源の動きには一切依存せず、媒質に対して決まるという波動の一般論である。これに従えば、光の速さも地球に対して一定ではなく、地球の周囲のエーテルに対して決まっていることになる。地球がエーテルに対して静止して



(v は地球のエーテルに対する速さ)

いるなら両者の間に差異はないが、地球は自転すると同時に太陽の周りを公転し、その太陽は銀河系宇宙の中を動き、更なる銀河系宇宙も回転するという事実を考えれば、たまたまある瞬間に地球とエーテルの相対速度が0になることはあっても、それが恒久的であ

るとは考え難い. そうであれば, 同じ地球上を進む光でも進む向きに依存して (地球上の観測者にとっては) 異なる速さを持つことになる. この予測が正しければ, 前頁の図から理解できるように, 地上の観測者にとっての光速の最大値 c_{\max} は, エーテルに対する光速を c として $c_{\max} = c + v$ となり, 同様に最小値 c_{\min} は $c - v$ となるはずである. つまり, 地上において様々な向きに進む光の速さを精密に測定し, その最大値と最小値を決めれば

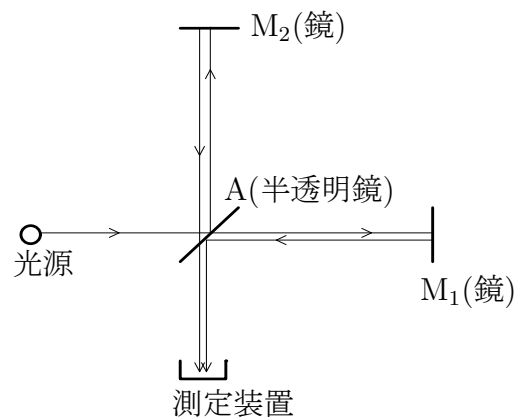
$$v = (c_{\max} - c_{\min})/2$$

より地球のエーテルに対する速さが求められるということになる. もちろん $v \neq 0$ が確認できたとしても, それで「エーテルの存在が証明できた!」と結論することは難しいが, 少なくともエーテル存在の間接的な証拠あるいはエーテル仮説に対する有力な支持とは解釈できるだろう. 従って, 光速の精密測定が重要な役割を果たすことになる.

光速の測定はガリレイによる試み以来何人もの研究者により様々な形で行われ, 19 世紀末の時点で既にかかなりの高精度を達成していた. それでも異なる向きに進む光の速さを比べるのは簡単ではないが, 正にこの比較の為に行われた非常に精密な実験が「マイケルソン-モーレーの実験」である (下図参照). この実験は, 一つの光源から出た光を半透明鏡 A で互いに直角な向きに進む 2 本の光線に分け, それぞれを鏡 $M_{1,2}$ で反転させたのち再び A により並進する形に戻して, 測定装置でその差を検出しよう というものである.

簡単のため $\overline{AM_1} = \overline{AM_2} = l$ とする.

また, 装置全体はエーテル中を $A \rightarrow M_1$ の向きに速さ v で進んでいるとする. 但し, この仮定は何ら特別な意味を持つ前提ではない. 実際, この装置は回転できる台の上に置かれており, マイケルソンとモーレーは装置を回転させながら測定を行っている. 従って, 装置全体が $A \rightarrow M_1$ の向きに進んでいるときとそこから 90 度回転



した状態では $M_{1,2}$ の役割が入れ替わることになるので, 2 本の光線の速さに差が出るなら回転後には立場が入れ替わった結果が出るはずで, この実験はその変化を見ることを狙っていたのである.

まず、光が AM_1 間を往復する時間を求めよう。装置全体がエーテルの中を右向きに進んでいるということは、装置に固定した座標で考えれば光はエーテルの流れに逆らって M_1 まで進み、その後エーテルの流れに乗って戻ってくることになるので、往復時間 T_1 は

$$T_1 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2c\ell}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{1 - (v/c)^2} \quad (1)$$

ということになる。他方、光が AM_2 間を往復するのは、流れに直角に対岸を目指す水泳に似ている。つまり、流されることを予め考慮して、少し上流を目指して泳いで初めて目的点にたどり着けるという訳である。具体的には、横向きの速度成分が v の光が、エーテルの流れを打ち消すことができ M_2 に到達できる。そのような光の速度の縦向き成分は $\sqrt{c^2 - v^2}$ だから、 M_2 までの所要時間 t_2 は $\ell/\sqrt{c^2 - v^2}$ で与えられる。これは帰路でも全く同じだから、往復時間 T_2 は t_2 の2倍

$$T_2 = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (2)$$

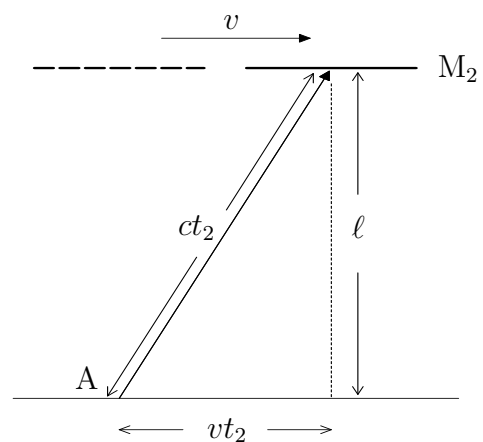
となる。なお、この AM_2 間往復については、エーテルの静止系で考える方が理解しやすいかも知れない。すなわち、その系では光は常に速さ c で進むが A も M_2 も右へ速さ v で進むので、光路は右図のようになる。そこでは明らかに

$$(ct_2)^2 = (vt_2)^2 + \ell^2$$

という関係が成り立ち、これより t_2 が求まると

いう訳である。いずれにせよ、 $v = 0$ でない限り $T_1 \neq T_2$ という結論に達する。

実際には v の値についての情報は皆無だった訳だが、地球の公転の速さ ($\approx 30 \text{ km/s}$) 程度はあるだろうと期待される。そして、彼らの実験装置はその程度の v によって生じる $T_{1,2}$ の差なら十分に検出できるだけの精度を持っていた。彼らは、実験を行った瞬間にたまたま地球のエーテルに対する速さが 0 になったという可能性も考えて、1日のうち時間を変えて、さらに季節を変えて何度も測定を行った。ところが、結果は大方の予想に反して両者の間に差は全く見られないというものだった。これは、どんな向きに進む光の速さも常に同じ値 ということを意味する。



これは、地球は常にエーテルの海の中で静止しているということである。そのようなことは絶対に起こり得ないのかと問われれば、勿論そんな可能性は0だ！などとは誰も断言はできない。しかし、それは宇宙の中で地球だけに特別な地位を与えるようなもので、あたかも天動説に逆戻りするかのような苦しい解釈（言い訳）だろう。また、ローレンツは「エーテル中を運動する全ての物体の（運動方向の）長さは、エーテルから力を受けて $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍に縮む」という仮説を提唱した。これを認めれば、2頁の図において \overline{AM}_1 は l ではなく $l\sqrt{1 - (v/c)^2}$ ということになり、(1)式右辺も $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍され $T_1 = T_2$ となるという訳である。しかし、あらゆる物体が同じ割合で縮むなら、長さを図る物差しも収縮することになり、結局本当に縮んでいるのかは確かめようがない。従って、これも評価が難しい仮説である。

特殊相対論

地球がどのような向きに動いていようと、その地球上で観測する光速は常に一定というマイケルソン-モーレーの実験結果は、古典物理学の立場からは理解しがたいものだが、自然法則は、自然現象の中にある規則性をまとめたものであることを考えれば、どの向きに進む光の速さも同じという予想外の結果も、また自然の中の規則性として受け入れなければならない。^{#1}では、これを事実として認めた場合には、逆に古典物理学はどのような修正が必要になるのだろうか。これに答えるのが**特殊相対性理論**、略して特殊相対論である。古典力学が三つの運動法則を基礎とする体系であるように、特殊相対論は二つの原理から出発する。一つは**光速不変原理**で、これは「真空中の光速は光源の運動状態には依存しない」ことを要請する。もう一つの原理は「基本的物理法則は、どのような慣性座標系から見ても同じ形に表される」という内容で、**特殊相対性原理**と呼ばれている。この内容は、基本的な物理法則を記述する上で慣性系の上に優劣はないということだから、「全ての慣性系は同等」ということになる。

光の正体が波動であることを認めれば、光速不変原理は何も新しいことなど言っていないように思われる。波動の進行速度が波源の動きには無関係なことは、既に述べたように波動の基本的な性質で、それは我々に身近な水面波でも音波でもよく知られたことであ

^{#1} 実験結果を正確に表現するなら、「測定精度の範囲内で光速に差は見られなかった」ということである。全ての実験に共通することだが、誤差の範囲内で「光速間に差がある」という可能性は決して否定できない。但し、この種の測定は21世紀になっても行われており、その精度は200万倍にまで高められているが結論は変わっていない。

る。ところが、これを特殊相対性原理と結びつけると驚くべき主張内容が明白になる。一つの慣性系 S とそれに対して等速度運動している別の慣性系 S' を考えよう。この S 系に固定した灯 L から出た光は S 系で静止した観測者に対して一定の速さで進む。この速さを c とする。一方、 S' に固定した灯 L' から出た光は S' の観測者に対してやはり速さ c で進むはずである。何故なら、もし二つの速さが異なれば、二つの慣性系 S と S' の間に差があることになり、全ての慣性系が同等とは言えなくなるからである。さらに、この L' からの光を S の観測者が見た場合には、それは運動する光源から出た光ということになるが、光速は光源の運動状態には無関係というのが光速度不変原理だから、やはりその速さは c でなければならない。結局、この原理は「どんな慣性系から見ても（真空中の）光速は同じ」と表現できることになる。

そこで、ここでは二つの原理を以下のように表現することにする：

特殊相対論の基本原則

1. 光速度不変原理

どんな慣性系から見ても真空中の光速は常に一定 (c) である

2. 特殊相対性原理

基本的物理法則を記述する上で、全ての慣性系は同等である

原理 1 は我々の経験から考えれば何とも理解しがたいものだが、マイケルソン-モーレーの実験結果を考えれば認めざるを得ない。一方、原理 2 は、例えば地上に固定した慣性系から電磁気現象を見た場合と、等速度運動する電車内で同じ観測を行った場合で、導き出される電磁気法則が異なっておかしいことを考えれば尤もな仮定と言える。しかしながら、これだけの議論・考察でこの二つの原理の正しさを判断することなどは不可能である。結局は、このように仮定することの妥当性は、この二つの原理を基礎として展開される特殊相対論の実験的・観測的検証を通じて探っていくことになる。そして、現段階ではそれを否定するような実験的証拠は一つもない。

同時性の概念

二つの基本原則を認めると、直ちに我々の時間の観念を大幅に変更させる結論が出てくる。もっとも簡単なものは「同時性」に関するものである。

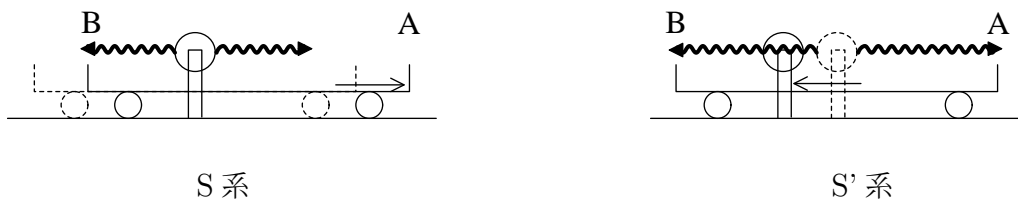
x 軸正の向きに一定の速さ v で運動する台車 AB を考え、地上に固定された慣性系を S 系、台車に固定された慣性系を S' 系とする。この台車 AB の中点が、地上に設置された灯 L を通過する瞬間にこの灯が一瞬光ったとする。この光は台車の先端 A と後端 B にどのように達するだろうか：

● S 系での観測

光速度不変原理により、光は前方へも後方へも速さ c で進むが、先端 A はその光から逃げる向きに進むのに対し、後端 B は光に近づく向きに進むから、光はまず B に達し、そのあとで A に達することになる。つまり、光が A 、 B に到達するのは同時ではない。

● S' 系での観測

この系は台車と共に動いているのだから、この系から見れば A 、 B は静止している。そこに速さ $-v$ で近づいてきた灯 L が、ちょうど AB の中点を通過する時に光を発するのだが、光速度不変原理により光速は光源の運動には無関係なのだから、光は L から A 、 B に向かって速さ c で進むことになる。従って、光は A 、 B に同時に到達する。



両系での観測者が上のように観測結果を報告したなら、古典物理学的な常識では少なくともどちらか1人は嘘をついていることになる。しかし、特殊相対論の二つの基本原理を受け入れるなら、両者共に正しいことを認めなければならない。これは、我々に時間の概念を根本的に修正することを要求する。古典物理学では極めて当然のこととして大前提となっている「時間の流れは全ての観測者にとって共通」がここでも成り立つのなら、ある出来事が「同時であること」と「同時でないこと」が両立することなどあり得ないからである。これは、それぞれの慣性系毎に固有の時間を考えなければならないこと、つまりは 我々は常に三つの空間座標に時間座標を加えた4次元座標 (t, x, y, z) を意識しなければならない ということである。

なお、実際にはここで述べたような実験を行うことは不可能である。光速に匹敵するような超高速で運動する台車、あるいは、どんな微小な距離的・時間的な差をも正確に検出

できるスーパー測定機器など実現できる訳がないからである。しかし、これは単に「技術的な問題」であり、それらの存在が何らかの物理法則と矛盾するといった「原理的な問題」ではない。このように、技術的な制約から実現できない実験を仮想的に考えることを**思考実験**という。これに対して、例えばエネルギー保存則の破れを前提にいろいろな現象を仮想的に考えるのは正に「原理的に不可能」なのだから、そのような“空想”に科学的な意味はない。

ローレンツ収縮

同時性の概念の変更だけでも注目すべきことだが、二つの基本原理は更に驚きの予言をする。それは、運動する物体の運動方向の長さは収縮し、またそれに固有の時間は静止系よりもゆっくり進むというものである。しかも、これを導くのに微分や積分は不要である。加減乗除の四則演算と平方根の意味さえわかればよい。以下で実際にそれを説明しよう：

必要な装置は、同時性の議論で用いた台車である。まず、台車ABの本来の長さ、つまり静止している台車の静止系で見た長さを $2l_0$ 、また、速さ v で走っている台車を静止系から見たときの長さを $2l$ とし、両者の関係を

$$l = kl_0$$

と表しておく。但し、こう書いたからと言って、始めからABの長さが v に依存して変化することを前提にしている訳ではない。この段階で k に課される条件は $l, l_0 > 0$ から要求される $k > 0$ のみである。なお、ABの長さを l, l_0 ではなく $2l, 2l_0$ とすることに特に深い意味はなく、単に、以下でABの半分の長さが現れても $1/2$ という因子は不要というだけのことである。

さて、同時性の議論と同じく、ABの中点が灯Lを通過する瞬間にLが光ったとすると、S系から見た場合、この光はまずBに達し、次にAに達することになる。一方、S'系で見た場合には、光はA、Bに同時に到達する。光がA、Bに達した瞬間のA、BのS系における座標を x_A, x_B とし、 $x_A - x_B$ を両方の系で調べてみよう。

● S系での観測

光がA、Bに達するまでに要する時間をそれぞれ t_A, t_B とすると、Aは速さ v で光から逃げる向きに動くから

$$ct_A - vt_A = l$$

が成り立ち、Bは速さ v で光に近づいてくるのだから

$$ct_B + vt_B = \ell$$

となる。従って、

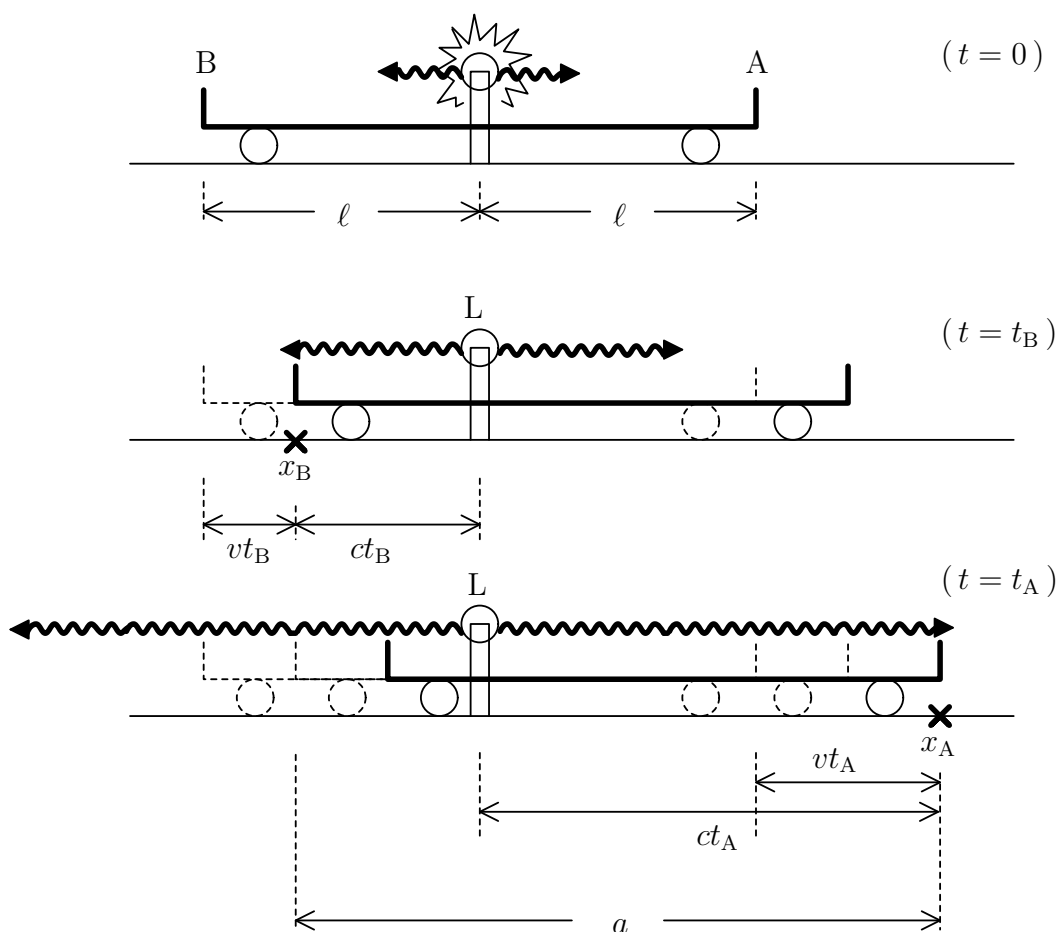
$$t_A = \frac{\ell}{c-v}, \quad t_B = \frac{\ell}{c+v}$$

であり、これを用いれば $x_A - x_B$ が

$$x_A - x_B = \overline{x_A L} + \overline{x_B L} = ct_A + ct_B = \frac{2\ell}{1 - (v/c)^2} \quad (3)$$

と求められる。この、S系における $\overline{x_A x_B}$ の長さを a と表しておこう：

$$a = \frac{2\ell}{1 - (v/c)^2}$$



S系における観測

● S'系での観測

次にS'系において考えてみよう。同時性の議論でわかったように、この系においては光はA、Bに同時に達する。従って、この系から見ると、 x_A, x_B は同じ時間におけるA、Bの位置を示しているから、 $\overline{x_A x_B}$ はABの長さ(= $2l_0$)に等しい。但し、これから $\overline{x_A x_B} = a = 2l_0$ と速断してはいけない。はじめに設定した $l = kl_0$ という関係は「速さ v で運動する物体の長さは、静止系では k 倍されて見える」という仮定である。すると、S'系から見ると地上に固定されたものが速さ v で逆向きに走るのだから、長さが a のものは ka に見えるはずである。つまり、S'系の観測者にとっては

$$ka = 2l_0$$

である。

これが理解できたら、あとは機械的な計算である：

$$ka = 2l_0 \implies k^2 a = 2kl_0 = 2l \implies \frac{2k^2 l}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 2l \implies k^2 = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

ここで、はじめに確認した $k > 0$ を思い出せば、

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

となり、

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta_v^2} \tag{4}$$

(従って、 $l < l_0$ 。但し、 $\beta_v \equiv v/c$)を得る。これがローレンツ収縮を与える有名な式であり、観測者に対して相対的な速さ v を持つ物体は全て(その観測者には)収縮して見えるということと同時に、**物体の速さは絶対に c を超えることはできない**ということも示している。何故なら、 $|v| > c$ となれば長さ l が虚数となり論理的な破綻が起こるからである。^{#2}

ここで導かれた公式 $l = l_0 \sqrt{1 - \beta_v^2}$ は、マイケルソン-モーレーの実験結果と古典物理学を両立させるためにローレンツが導入した物体の収縮仮説の式と(数学的には)全く同じである。しかし、ローレンツが「エーテルに対して運動する物体は本当にエーテルから力

^{#2} これにより、光速を超えるものはないということが数学的に“証明”されたということではない。特殊相対論を認める限りは常に $|v| \leq c$ であると言えるということである。もしも $|v| > c$ で運動する物体が発見されたら、その時点で「相対論は間違っていた」と我々は結論することになる。

を受けて縮む」と考えたのに対して、ここでの収縮の式は我々の住む世界の時空構造から導き出されており、エーテル仮説とは一切関係はない。従って、アインシュタイン収縮と言う方が適切と思われるが、ともかく（その意味はともかく同じ式を）最初に導入したということでローレンツに敬意を払い相対論の枠内でも「ローレンツ収縮」と呼ばれている。

運動物体の時間の遅れ

物体の収縮に類似の議論で、運動する物体に固有の時間がゆっくり進むことも示すことが出来る。

今度は一端に灯 L，他端には鏡 M を取り付けた台車を走らせる。この台車の本来の長さを l_0 ，速さ v で運動中のところを静止系から見たときの長さを l とする。すると、ローレンツ収縮で示したように

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta_v^2}$$

である。この灯から出た光が鏡に反射されて再び灯に戻って来るまでの時間を静止系 (S 系) と台車に固定した系 (S' 系) で調べてみる。

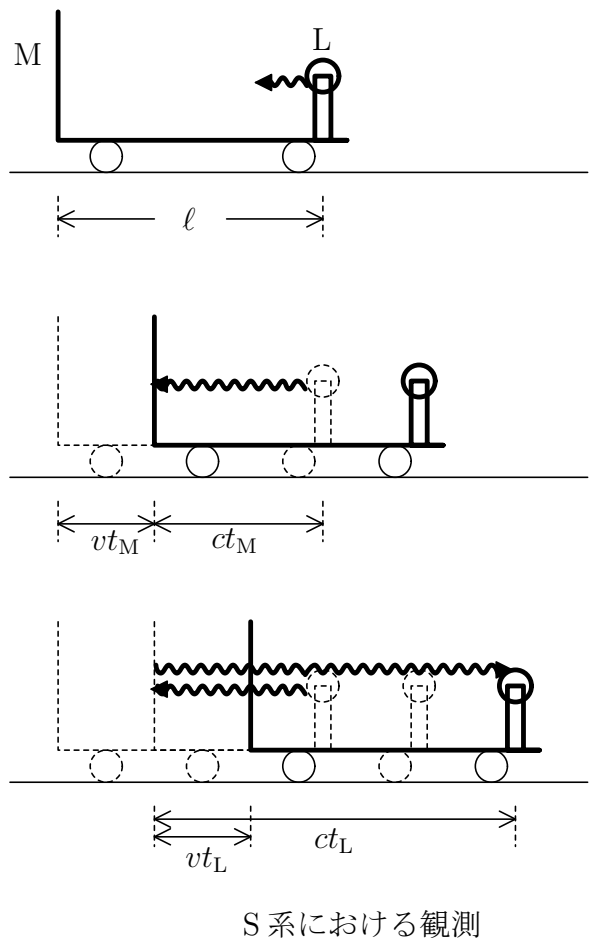
● S 系での観測

ローレンツ収縮での計算を思い出せば、光が鏡に達するまでに要する時間 t_M は

$$t_M = \frac{l}{c + v}$$

であり、反射された光が鏡から灯に戻るまでの時間 t_L は

$$t_L = \frac{l}{c - v}$$



で与えられる。従って、S系の時間は、この間に計

$$t = t_M + t_L = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{1 - \beta_v^2} \quad (5)$$

だけ進むことになる。

● S'系での観測

S'系での計算は極めて単純である。灯Lも鏡Mも静止しており、その間の長さは ℓ_0 だから、速さ c の光がそこを往復に要する時間 t_0 は

$$t_0 = \frac{2\ell_0}{c} \quad (6)$$

となる。

最後に t 、 t_0 を比較し、 ℓ と ℓ_0 の関係 $\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \beta_v^2}$ を考慮すると

$$t = t_0 / \sqrt{1 - \beta_v^2} \quad (7)$$

(従って $t > t_0$)という結果が得られる。つまり、**運動物体の時間は静止系の時間よりもゆっくり進む**ということを意味する。あるいは「**相対運動する二つの慣性系の時間を比較すると、相手の時間の方がゆっくり進む**」という方がより正確な表現である。

これは初学者の頭を混乱させる結論でだろう。S系よりもS'系の時間がゆっくり進むと一旦結論されたら、その結論はS'系においても正しいと思いたくなるからである。しかし、この相対論の予言はそんなに単純なものではない。ローレンツ収縮や時間の遅れという現象は、我々の住むこの宇宙空間の時空構造に根ざしており、より正確な議論・比較のためには異なる慣性系を関係づけるローレンツ変換の助けが必要になる。

ローレンツ変換

古典力学において二つの慣性座標系を関係づける変換則は**ガリレイ変換**であった。例えば、ある慣性系(S系)とそれに対して速度 \vec{V} で動いている別の慣性系(S'系)の関係は、

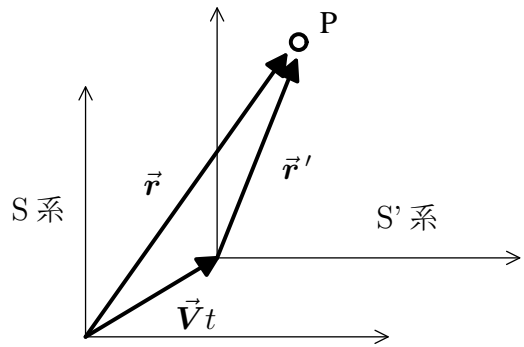
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t' = t \quad (8)$$

で与えられる。但し、ここでS系およびS'系から見た一つの点P(例えば運動物体)の位置ベクトルをそれぞれ \vec{r} 、 \vec{r}' 、両系における時間座標(時刻)をそれぞれ t 、 t' とし、両系は時刻 $t = t' = 0$ で重なっていたと仮定している。

上記のガリレイ変換を使えば、両系での速度の関係式（速度の変換則）も次のように簡単に求まる：

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt'} \vec{r}' = \frac{d}{dt} \vec{r}' = \frac{d}{dt} (\vec{r} - \vec{V}t) = \vec{v} - \vec{V} \quad (9)$$

しかし、これは明らかに光速不変原理と矛盾する。Pが光の先端ならこの原理は $|\vec{v}| = |\vec{v}'| = c$ を要求するが、(9)に従えば ($\vec{V} = 0$ でない限り) 一般には $|\vec{v}| \neq |\vec{v}'|$ となるからである。従って、特殊相対論においては、光速不変原理に矛盾しない新しい変換則が必要となる。



同時性に関する思考実験の結果を考えれば、少なくともガリレイ変換(8)の第2式はもはや正しくないと予想される。そして、 $t' = t$ が正しくないということは、慣性系ごとに固有の時間座標（時刻）が必要ということだろう。つまり、特殊相対論では、物理現象の記述に空間座標 x, y, z だけでなくそれに時間座標も加えた

$$(t, x, y, z)$$

という4次元的な座標が必要になるということである。これを**時空座標**という。また、この4個の座標の全体が構成する世界は**4次元時空**、その中の点は**世界点**または**時空点**と呼ばれる。上で述べた「新しい変換則」とは、S系およびS'系から見た一つの世界点の時空座標 (t, x, y, z) と (t', x', y', z') を結びつける規則である。以下これを導出してみよう。

まず念頭に置いておくべきことは、ガリレイ変換は日常的な様々な現象（観測する運動物体の速さが全て c よりも遥かに小さいような現象）において多くの実験的支持を得ているということである。これは、新しい変換則が見つかったとしても、それは関与する速度の大きさが光速 c に比べて極めて小さい場合には（近似的に）ガリレイ変換に一致することを要求する。そのガリレイ変換では (t', x', y', z') は (t, x, y, z) の1次関数であるので、新しい変換則もそのように仮定しよう：

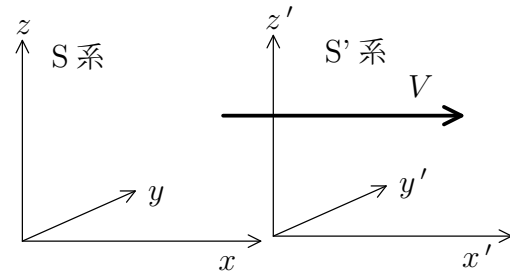
$$\begin{aligned} t' &= A_1 t + B_1 x + C_1 y + D_1 z, & x' &= A_2 t + B_2 x + C_2 y + D_2 z \\ y' &= A_3 t + B_3 x + C_3 y + D_3 z, & z' &= A_4 t + B_4 x + C_4 y + D_4 z \end{aligned}$$

また、必要以上に式が複雑になるのを避けるため、

- (1) S系とS'系の空間軸は互いに平行である
- (2) S'系はS系の x 軸正の向きに一定の速さ V で運動している
- (3) 両系はある瞬間に完全に重なっており，その瞬間の原点での時刻が共に0であるように，両系の時間軸が調節されている

と仮定する．要するに，両者は相対速度が x 軸の向きで，かつ，この相対速度が0の時に同一になるような関係である．

はじめにS系で $y = \text{一定}$ という方程式を考える．これは xz 平面に平行な平面を表している．この平面はS'系で見てもやはり $x'z'$



平面に平行，つまり， $y' = \text{一定}$ が成り立っているだろう．すると，

$$y' = A_3 t + B_3 x + C_3 y + D_3 z$$

において $A_3 = B_3 = D_3 = 0$ ということになる．従って，

$$y' = C_3 y$$

特殊相対性原理は，いかなる慣性系も平等であることを要求するので，この関係はS'系からS系を見たときにも成り立たねばならない：

$$y = C_3 y'$$

両方の式を合わせると $C_3^2 = 1$ だから $C_3 = \pm 1$ ． $V = 0$ の場合には $y' = y$ でなければならないから $C_3 = -1$ は許されないので，結局

$$y' = y \tag{10}$$

となり，ここで考えている条件の下では y 座標は不変ということになる．更に，全く同様の考察により

$$z' = z \tag{11}$$

という関係が得られる．これらは納得できる結果だろう．

次に、 $x' = A_2t + B_2x + C_2y + D_2z$ につき考える。 $x' = 0$ という点に注目すると、この点は S 系から見た場合には x 軸正の向きに速さ V で動いているのだから

$$0 = A_2t + B_2Vt + C_2y + D_2z = (A_2 + B_2V)t + C_2y + D_2z$$

この関係が任意の t, y, z に対して成り立つためには各係数が 0 でなければならない：

$$A_2 + B_2V = C_2 = D_2 = 0$$

これより

$$x' = B_2(x - Vt)$$

ここでも特殊相対性原理を思い出せば、同様の関係は S' 系から S 系を見ても成立しなければならない。但し、 V の部分は $-V$ で置き換わる：

$$x = B_2(x' + Vt')$$

$x = B_2(x' + Vt')$ の右辺の x' に $x' = B_2(x - Vt)$ を代入することにより t' を t, x で表す式が得られる：

$$t' = B_2t + \frac{1 - B_2^2}{B_2V}x$$

実は、ここまでに得られた式はガリレイ変換と完全に異なる訳ではない。実際、 $B_2 = 1$ と置けば上式はガリレイ変換に帰着する。もちろんその場合には光速度不変原理に矛盾する話に戻ってしまうので、それは許されない。 B_2 を決めるためには正にその光速度不変原理が必要になる。

ここでは二つの系 S と S' は $t = t' = 0$ の瞬間に一致するように条件を設定していたが、その瞬間に（両系に共通の）原点から x 軸正の向きに光が発せられたとする。S 系においてはこの光は t 秒後に $x = ct$ という点に達する。この世界点の S' 系から見た時空座標を $(t', x', 0, 0)$ としよう。すると、光速度不変原理により、この光は S' 系では t' 秒間かけて原点から x' まで進んできたことになるから $x' = ct'$ である。この式の中の t', x' に $x' = B_2(x - Vt)$ と $t' = B_2t + (1 - B_2^2)x/(B_2V)$ を代入し、更に $x = ct$ という関係を使うと

$$B_2^2 = 1/(1 - V^2/c^2) \quad \implies \quad B_2 = \pm 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

という関係を得る。 $V = 0$ のときには当然 $x' = x$ でなければならないから符号は+と決まり、新しい変換則として

$$t' = \frac{t - \beta_V x/c}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (12)$$

($\beta_V \equiv V/c$) に達する。これがローレンツ変換である。ここで $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ と置けば

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta_V x^1}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - \beta_V x^0}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3 \quad (13)$$

となり、 x^0 と x^1 について完全に対称的な表現が得られる。

一般のローレンツ変換、つまり各軸は平行ではなく、また相対速度も任意の向きで時間原点も調節されていないような慣性系間のローレンツ変換は（見かけ上は）もっと複雑であるが、本質は上記の4組の方程式に全て含まれている。何故なら、よく知られた座標系の空間回転により両系の各軸が平行でかつ相対速度が x 軸に平行になるように変換することはいつでも出来、また、時間座標の原点を選びなおすことも簡単に行えるからである。

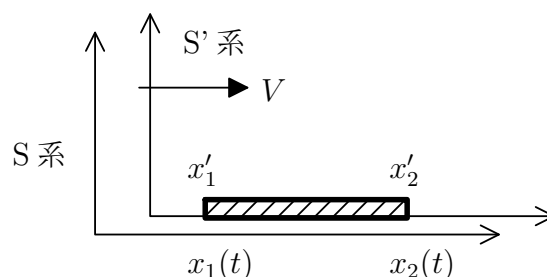
最後にこのローレンツ変換とガリレイ変換の関係を簡単に見ておこう。両系の相対速度の大きさ $|V|$ が c に比べて極めて小さいとき、つまり $|\beta_V| \ll 1$ のときは上のローレンツ変換において近似的に $\beta_V = 0$ と置くことが出来、その場合には明らかにガリレイ変換に等しくなる。このように、関与する相対速度の大きさが光速より遥かに小さいときは、ローレンツ変換は近似的にガリレイ変換に一致するのである。

現象の相対性

前の節で視覚的に説明したローレンツ収縮や時間の遅れは、初学者にも理解しやすいものではあろうが、結果の相対性、つまり逆に S' 系から観測した場合にも同様の結果が得られるかどうかについては必ずしも明確とは言えない。つまり、誰から見ても S 系での観測結果が絶対的なものに思ってしまう危険性が否定できない。この点を改善し、より正確な議論をするにはローレンツ変換が必要になる。以下で、運動物体の長さや時間の進みをローレンツ変換に基づいて調べ、そこから「ローレンツ収縮」と「時間の遅れ」を導き出してみよう。このような説明は、直感的側面では後退していると感じられるかも知れないが、曖昧さの排除という点では遥かに優れている。

ローレンツ収縮の相対性

慣性系 S とそれに対して x 方向に速さ V で運動する S' 系を考え、本来の長さが l_0 の棒を S' 系に固定する。 S' 系におけるこの棒の両端の座標を x'_1, x'_2 とすると当然 $l_0 = x'_2 - x'_1$ である。一方、この棒の長さを S 系で測る場合には (S 系での) 同時刻に棒の両端の座標を測定する必要がある。



S 系での観測

時刻 t におけるその座標を $x_1(t), x_2(t)$ と

表すと l (S 系から見た長さ) $= x_2(t) - x_1(t)$ である。ここで、両系での座標はローレンツ変換により

$$x'_1 = \frac{x_1(t) - Vt}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2(t) - Vt}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}$$

と関係づけられているので、 l と l_0 の関係として

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{\sqrt{1 - \beta_V^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}$$

つまり、ローレンツ収縮の公式

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta_V^2}$$

を得る。このように考えれば台車と灯の位置関係などに神経を使うことなく (いわば機械的に) ローレンツ収縮が導ける。更に、ここで前提にした速さ V は単に両系の相対的な速さだから、 S' 系から S 系に固定した棒の長さを測るときにも (相対的な速さが $-V$ になるだけで) 同じ結果が得られることも容易に理解できるだろう。

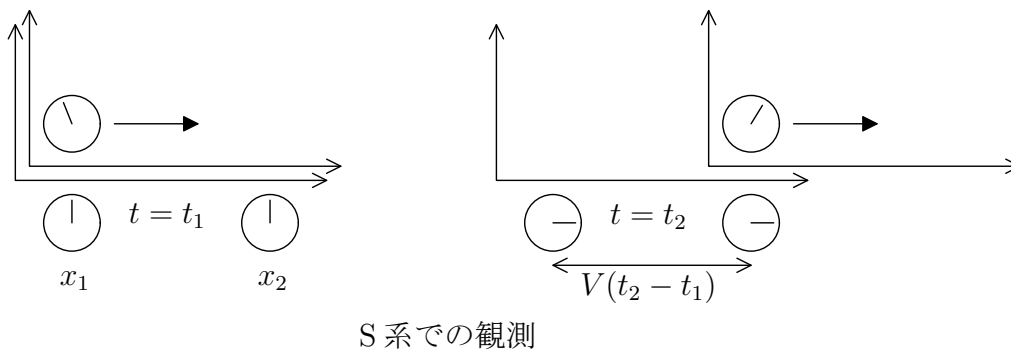
しかしながら、そうは言うものの、この説明だと S 系での観測結果が“絶対的”に正しいと思ってしまうかも知れないが、その原因は「同時性」にある。つまり、上の図は、あくまで S 系から見た図であり、その場合は x_1 と x_2 は同時刻の点である。ところが、この状況を S' 系から見ようとすれば、 x_1 の時計と x_2 の時計は異なる時刻を示すことになる。実際、 S' 系の量で表したローレンツ変換

$$t_1 = \frac{t'_1 + \beta_V x'_1 / c}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \beta_V x'_2 / c}{\sqrt{1 - \beta_V^2}} \quad (14)$$

において $t_1' = t_2'$ としても異なる点 ($x_1' \neq x_2'$) の時刻 t_1, t_2 は同じにはならない。従って、誰が見ても短くなるのは S' 系の棒ではないかというのは“錯覚”である。

時間の遅れの相対性

時間の遅れについても同様にローレンツ変換を用いて導き出すことができる。但し、この場合はより注意深い考察が必要となる。慣性系 S に対して速さ V で運動する物体が、S 系での時刻 t_1 に S 系の座標 x_1 の点を通過し、同じく時刻 t_2 には点 x_2 を通過したとする。



このとき、運動物体の時刻はローレンツ変換よりそれぞれ

$$t_1' = \frac{t_1 - \beta_V x_1/c}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - \beta_V x_2/c}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}$$

であり、更に物体の速さが V であることから、 $x_2 - x_1 = V(t_2 - t_1)$ という関係がある。これらの関係をまとめると

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \beta_V(x_2 - x_1)/c}{\sqrt{1 - \beta_V^2}} = \frac{t_2 - t_1 - \beta_V^2(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta_V^2}} = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \beta_V^2}$$

となる。つまり、S 系の時計が $(t_2 - t_1)$ 進む間に運動物体の時計は $t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \beta_V^2}$ しか進まないという結果に達する。

ここでも再び「やはり誰が見ても運動物体の時間の方がゆっくり進むのではないか」と思ってしまうかも知れない。この錯覚の原因も、やはり同時性にある。上の左側の図で、S 系の二つの時計は同じ時刻を指しているが、S' 系（運動物体に固定した系）から見ると、それらは同時ではない。それは既に (14) 式で示した通りである。だから、誰が見ても S 系で時間が $t_2 - t_1$ 進む間に S' 系の時間は $t_2' - t_1'$ 進むと考えるのは間違っている。この点を正しく扱おうとすると、上で行った議論と全く同じものを S' 系から行うことになり、その時には S 系の子計の方がゆっくりと進むという結論になるのである。

速度の変換則・合成則

ローレンツ変換を用いれば、座標変換にともなって速度がどのように変換されるのか、あるいは二つの運動物体の速度の合成はどのように行われるかを調べることができる。ここでもローレンツ変換としては

$$t' = \frac{t - \beta_V x/c}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

を用いることにする。

S系, S'系における物体の速度 \vec{v} , \vec{v}' は, その位置ベクトル \vec{r} , \vec{r}' から

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}, \quad \vec{v}' = \frac{d}{dt'}\vec{r}'$$

と計算される。一方, 上記のローレンツ変換より,

$$dt' = \frac{dt - \beta_V dx/c}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1 - \beta_V^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz$$

だから, 速度の x 成分は

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt - \beta_V dx/c} = \frac{dx/dt - V}{1 - \beta_V(dx/dt)/c} = \frac{v_x - V}{1 - \beta_V v_x/c}$$

全く同様に, y 成分と z 成分は

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1 - \beta_V^2}}{dt - \beta_V dx/c} = \frac{v_y\sqrt{1 - \beta_V^2}}{1 - \beta_V v_x/c}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1 - \beta_V^2}}{dt - \beta_V dx/c} = \frac{v_z\sqrt{1 - \beta_V^2}}{1 - \beta_V v_x/c}$$

となるので,

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \beta_V v_x/c}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \beta_V^2}}{1 - \beta_V v_x/c}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \beta_V^2}}{1 - \beta_V v_x/c} \quad (15)$$

という速度の変換則を得る。容易にわかるように, これらは $|V| \ll c$ ($|\beta_V| \ll 1$) の極限で

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$$

となり, ガリレイ変換からの結果に一致する。

次に、速度の合成について考えよう。これは、例えば 50 [km/h] で走っているトラックの上から前方に（トラックに対して）70 [km/h] でボールを投げたら、そのボールは地上に対して何 [km/h] で飛ぶことになるかというような問題である。古典力学（ガリレイ変換）に基づけば、地上に対する速度（合成速度）の大きさは $50 + 70 = 120$ [km/h] という単純な足し算になるし、これは我々の経験にも合致する。では、相対論の予言はどうだろうか。この答は全て上記の速度変換則に含まれているのだが、改めて整理してみよう。

議論を簡単にするために運動物体の速度も x 軸に平行であるとする。速度変換則 (15) は S' 系の量を S 系の量で表しているが、その x 成分につき逆の関係を求めると、

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \beta_V v'_x/c}$$

となる。これは、変換則 (15) の第 1 式を v_x について解いても得られるが、それよりも単にその式で v_x と v'_x を入れ替えて V の符号を変えればよい（つまり、 S' から S を見る）ことに注意しよう。今は速度が x 軸に平行と仮定したので v_x , v'_x をそれぞれ v , v' と書こう：

$$v = \frac{v' + V}{1 + \beta_V v'/c} \quad (16)$$

これが速度の合成則であり、上の例え話で言うなら S 系は地上に固定した慣性系、 S' 系はトラックに固定した慣性系であり、 v , v' はそれぞれボールの地上およびトラックに対する速度である。

予想に反して、明らかに $v \neq v' + V$ である。更に、合成則を

$$v = \frac{v' + V}{1 + \beta_V v'/c} = c - \frac{c(1 - \beta_V)(1 - \beta_{v'})}{1 + \beta_V \beta_{v'}}$$

($\beta_{v'} \equiv v'/c$) と書き直せば明らかなように、 $|V| \leq c$ かつ $|v'| \leq c$ 、つまり $|\beta_V| \leq 1$ かつ $|\beta_{v'}| \leq 1$ である限り、合成された速さ v が c を超えることはない。極端な場合、 $v' = V = c$ であっても $v = c$ だから、逆向きに進む光の一方から他方を見てもその相対的な速さは c にしかならない。上記のトラックの例に戻れば、実は、50 km/h と 70 km/h を合成しても厳密には 120 km/h にはならないということである。但し、その差（120 km/h からのずれ）は $120 \times \beta_V \beta_{v'} \simeq 3.6 \times 10^{-13}$ km/h 程度、すなわちどんなに精密な測定装置を用いても検出されないような微量なので、実用的には $50 + 70 = 120$ と見なしても全く差し支えないという訳である。

一般のローレンツ変換と共変・反変ベクトル

ここまでで説明してきたローレンツ変換の公式は、最も簡単な状況設定におけるものであった。勿論そこで述べたようにローレンツ変換の本質的な内容は全てその公式に含まれているが、そのままの形では応用的な活用が難しいので、ここでより一般的な表現とそれにともなって必要になる**共変・反変ベクトル**の概念につき、ここで説明しよう。

以下では (13) 式で用いた x^μ という記法 ($x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$) を用いることにして、一般のローレンツ変換を 取り敢えず $x'^a = \sum_{b=0}^3 \alpha^{ab} x^b$ と表しておく。この4次元時空においては、二つのベクトルの内積はどのように定義すればよいだろうか。古典物理学の舞台となる3次元空間の場合には、二つのベクトルの対応する成分同士を掛け合わせその和をとるのが内積であり、これは任意の座標軸回転の下で不変だった。ところが、4次元時空では、二つの4元ベクトル $A^a = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, $B^a = (B^0, B^1, B^2, B^3)$ に対して $\sum_{a=0}^3 A^a B^a$ という組み合わせを作ってもローレンツ不変にはならない。

問題 一番簡単なローレンツ変換 (13) の場合について、 $\sum_{a=0}^3 A'^a B'^a \neq \sum_{a=0}^3 A^a B^a$ であることを確かめてみよ。

一方、

$$A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \quad (17)$$

という組み合わせはローレンツ変換の下で不変であることが知られている。

問題 これについても同様にローレンツ変換 (13) を用いて $A^0 B^0 - \sum_{a=1}^3 A^a B^a = A^0 B^0 - \sum_{a=1}^3 A^a B^a$ が成り立つことを確かめよ。

そこで、この組み合わせを、今考えている4次元時空におけるベクトルの内積と定義しよう。4元ベクトルの内積がこのように定義される4次元時空は**ミンコフスキー時空**と呼ばれる（古典物理の舞台は3次元の**ユークリッド空間**である）。

この内積を、3次元空間の場合と同じように、対応する成分同士の積の和の形で表すには、 $\bar{A}^a = (\bar{A}^0, \bar{A}^1, \bar{A}^2, \bar{A}^3) \equiv (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$ とでも書いて（或いは、同じ方法で B^a に対して \bar{B}^a を定義して） $AB = \sum_{\mu=0}^3 \bar{A}^\mu B^\mu (= \sum_{\mu=0}^3 A^\mu \bar{B}^\mu)$ とするしかないが、この時、 $\bar{A}'^a = \sum_{b=0}^3 \alpha^{ab} \bar{A}^b$ とはならない。実際、この式が正しいなら、変換 (13) の場合にはその第

0成分は $\bar{A}^0 = (\bar{A}^0 - \beta_V \bar{A}^1) / \sqrt{1 - \beta_V^2}$ となるはずだが、この両辺をバーのない成分で表した式 $A^0 = (A^0 + \beta_V A^1) / \sqrt{1 - \beta_V^2}$ は A^a の満たす変換式

$$A^0 = (A^0 - \beta_V A^1) / \sqrt{1 - \beta_V^2}$$

とは食い違う。

従って、 A^a と \bar{A}^a は異なる変換性を持つ。そこで、このことを明示するため A^a と \bar{A}^a を改めて

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3), \quad A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$$

と表し、前者をベクトル A の**反変** (Contravariant) 成分 (或いは反変ベクトル)、後者を**共変** (Covariant) 成分 (或いは共変ベクトル) と呼ぶ (その理由については後で述べる)。このとき、内積は次のように書くことが出来る：

$$AB = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$$

但し、ここで「上下に同じ文字が現れた場合には、それについての和をとる」という相対論での習慣、いわゆるアインシュタイン (Einstein) の規約、に従い $\sum_{\mu=0}^3$ を省略した (以下同様)。

ここでわかったことは

$$A'^\mu B'_\mu (\equiv \sum_{\mu=0}^3 A'^\mu B'_\mu) = A^\mu B_\mu (\equiv \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu)$$

であるが、上で述べたように

$$\sum_{\mu=0}^3 A'^\mu B'^\mu \neq \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B^\mu$$

つまり、上付き添字 (または下付き添字) を持つ量同士の積を足し上げてもローレンツ変換の下で不変な組み合わせにはならないが、上付き添字と下付き添字の量からなら不変な量が得られるということである。これは、相対論における計算で非常に重要な意味を持つ。そこでこの点を考えて、これからはベクトル A の反変成分に対する一般のローレンツ変換を

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu (\equiv \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu A^\nu) \quad (18)$$

と表すことにする.

このように導入された内積は, $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) という記号を用いて $AB = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$ と表すことも出来る. ここで $g_{\mu\nu}$ は計量テンソル (Metric tensor) と呼ばれ, $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ かつ $\mu \neq \nu$ の時 $g_{\mu\nu} = 0$ という成分を持つ. すると, $AB = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = g_{\mu\nu}B^\mu A^\nu = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$ だから, A や B の共変成分はその反変成分より

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu, \quad B_\mu = g_{\mu\nu}B^\nu$$

と得ることが出来る. 同様に, $g^{00} = 1, g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, これ以外の成分は全て 0 という記号 $g^{\mu\nu}$ (これも計量テンソルと呼ばれる) を導入すれば, 内積は $g^{\mu\nu}A_\mu B_\nu$ と書くことも出来, その結果, $A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu, B^\mu = g^{\mu\nu}B_\nu$ も成り立つ. つまり, 計量テンソルを用いると添字の上げ下げが出来るのである.

ここで, 共変成分が従う変換則を調べておこう. この変換を

$$A'_\mu = \bar{\Lambda}_\mu^\nu A_\nu \quad (19)$$

と表し, (18) 式と共に $A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu$ に代入してみると $\Lambda^\mu_\rho \bar{\Lambda}_\mu^\sigma A^\rho B_\sigma = A^\mu B_\mu$ となる. これは $\Lambda^\mu_\rho \bar{\Lambda}_\mu^\sigma = \delta_\rho^\sigma$ を意味するが, この両辺に Λ の逆変換 Λ^{-1} を作用させれば 左辺 = $\Lambda^\mu_\rho (\Lambda^{-1})^\rho_\nu \bar{\Lambda}_\mu^\sigma = (\Lambda \Lambda^{-1})^\mu_\nu \bar{\Lambda}_\mu^\sigma = \delta^\mu_\nu \bar{\Lambda}_\mu^\sigma = \bar{\Lambda}_\nu^\sigma$, 右辺 = $\delta_\rho^\sigma (\Lambda^{-1})^\rho_\nu = (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu$ より

$$\bar{\Lambda}_\mu^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \quad (20)$$

つまり, 共変成分は反変成分と逆の変換 (Λ^{-1}) を受けることがわかる.

共変・反変の意味

共変・反変ベクトルについては, これだけ知っていれば基本的知識としては十分だが, 補足として, 何故こんな名前が付いているのかについて簡単に説明しておこう. まず, 通常の 3次元のベクトルを扱う時のように, 各軸方向の基本単位ベクトルを導入する. これを $e(\mu)$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と書こう. すると, この 4次元時空内での任意の 4元ベクトル \mathbf{u} は, その反変成分 u^μ を用いて $\mathbf{u} = \sum_{\mu=0}^3 u^\mu e(\mu)$ と表されることになる.^{#3} さて, この式で, 左辺のベクトル \mathbf{u} は座標軸とは無関係に存在する量だから, どんな慣性系から見ても \mathbf{u} である. しかし, 当然のことながら, 異なる系ではその成分は一般には異なる値をとるし, ま

^{#3} 特殊相対論での 4元ベクトルは, 3次元のベクトルとは違って太文字では書かないのが普通だが, ここではベクトルそのものとその成分を明確に区別するためこのように書く.

た、 $e(\mu)$ という四つのベクトルは、ベクトルとは言っても \mathbf{u} とは違い、各座標軸と同じ向きのベクトルとして定義されるので、座標軸が動けばそれと共に $e(\mu) \rightarrow e'(\mu)$ と動く。ところが、 $e'(\mu)$ と $e(\mu)$ の関係は u'^{μ} と u^{μ} の関係と同じではあり得ない。何故なら、上に述べた理由で $\sum_{\mu=0}^3 u'^{\mu} e'(\mu)$ と $\sum_{\mu=0}^3 u^{\mu} e(\mu)$ は両者とも同じ \mathbf{u} を表すのに、もし $e(\mu)$ の変換性が $u'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} u^{\nu}$ と同じ（つまり、 $e'(\mu) = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} e(\nu)$ ）だとすると、内積のところで見たように $\sum_{\mu=0}^3 u'^{\mu} e'(\mu) = \sum_{\mu=0}^3 u^{\mu} e(\mu)$ が成り立たなくなるからである。ここまで来ればおわかりかと思うが、 $e(\mu)$ は u_{μ} と同じ変換則に従うのである。実際、 $e'(\mu) = \sum_{\nu=0}^3 \bar{\Lambda}_{\mu}^{\nu} e(\nu)$ ならば

$$\mathbf{u} = \sum_{\mu=0}^3 u^{\mu} e(\mu) = \sum_{\mu=0}^3 u'^{\mu} e'(\mu)$$

が、内積の不変性と同じ理由で成立する。そして、これが共変・反変という名前の由来でもある： A_{μ} は基本単位ベクトルと同じように（“共に”）変換されるので共変成分と呼ばれ、 A^{μ} はそれと反対の変換を受けるので反変成分と呼ばれるという訳である。

二種類の計量テンソル

ここで導入した計量テンソル $g^{\mu\nu}$ 、 $g_{\mu\nu}$ は素粒子物理学（相対論的場の量子論）で標準的に用いられる形だが、面倒なことに、同じく相対論が重要な役割を果たす宇宙物理学では、符号を逆にしたもの（つまり、00 成分が -1 、11, 22, 33 成分が $+1$ ）が標準形となっている。そのような逆符号の計量テンソルを同じ記号 $g^{\mu\nu}$ 、 $g_{\mu\nu}$ で表す場合もあって混乱するが、幾つかの（良心的な？）テキストでは、この「宇宙物理版」の計量テンソルを $\eta^{\mu\nu}$ 、 $\eta_{\mu\nu}$ と表している：

$$\eta^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \quad (21)$$

相対論的力学

古典力学はガリレイ変換の下で不変な形式で表現されている。ということは、ローレンツ変換の下では不変ではない、つまり特殊相対論の要請を満たしていないということである。ここでは特殊相対論の原理も取り入れた力学法則を探すことにしよう。これは**古典力学を相対論化する**ということである。

そのような新しい力学法則を探すにあたって考慮すべき事項は

- (1) 二つの慣性系の相対的速さが光速より遥かに小さいときはローレンツ変換はガリレイ変換に帰着する

(2) 物体の速さが光速よりも遥かに小さいときは古典力学が多くの実験的支持を得ているである。そこで、ある物体の運動を一つの慣性系から観察していたとして、

- その物体の速度が0である瞬間にはニュートンの運動方程式が厳密に成立する

と仮定しよう。これは、物体が始めから静止状態にあることを想定するものではないし、常に物体が静止して見える（つまり物体と共に動く）座標系を設定するということでもない。あくまで、ある瞬間（厳密に言えば、 dt という無限小時間）物体が静止して見えたという状況下での話である。どんな慣性系から眺めていてもそのような瞬間が来る訳ではないが、この条件を満たす慣性系は常に存在する。また、このような仮定を置くことの正当性は、これから導かれる結論の実験的検証によってのみ可能となるので、この段階でその妥当性につき必要以上に検討しても有益ではない。

さて、上の条件を満たす慣性系を \bar{S} 系として、この系での物体の位置ベクトルを $\vec{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 、時刻を \bar{t} 、外力を \vec{f} と表し、物体が静止して見える瞬間の時刻を \bar{t}_0 、そのときの位置ベクトルを \vec{r}_0 とする：

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(\bar{t}_0), \quad \vec{v}(\bar{t}_0) = \left. \frac{d}{d\bar{t}} \vec{r}(\bar{t}) \right|_{\bar{t}=\bar{t}_0} = 0$$

仮定により $\bar{t} = \bar{t}_0$ の瞬間にはニュートンの運動方程式が厳密に成立する：

$$m \frac{d^2}{d\bar{t}^2} \vec{r}(\bar{t}) \Big|_{\bar{t}=\bar{t}_0} = \vec{f} \quad (22)$$

ここで、物体に固定された時計が刻む時刻を導入し、それを τ と表そう。これは**固有時**と呼ばれ、相対論において重要な役割を果たす。例えば、物体が点Aを通過したときに物体の時計が τ_A を指したなら、その事実はどんな座標系から見ても同じはずである。つまり、 τ はローレンツ変換の下で不変な量なのである。この固有時 τ と \bar{S} 系の時間 \bar{t} の関係は、速度変化を無視できるくらいの極めて短い間隔 $d\tau$ と $d\bar{t}$ に対してなら運動物体の時間の遅れの式 (7) が適用できて

$$d\tau = d\bar{t} \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$$

と与えられるから、 $\bar{t} = \bar{t}_0$ の瞬間には

$$d\tau = d\bar{t} \sqrt{1 - \vec{v}^2(\bar{t}_0)/c^2} = d\bar{t}$$

そこで、 $\bar{x}^1 \equiv \bar{x}$, $\bar{x}^2 \equiv \bar{y}$, $\bar{x}^3 \equiv \bar{z}$, $\bar{f}^1 \equiv \bar{f}_x$, $\bar{f}^2 \equiv \bar{f}_y$, $\bar{f}^3 \equiv \bar{f}_z$ と置けば、この瞬間の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} \bar{x}^k = \bar{f}^k$$

($k = 1, 2, 3$) と表される。次に、 $\bar{x}^0 \equiv c\bar{t}$ と置けば、

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \bar{x}^0 = c \frac{d^2}{d\bar{t}^2} \bar{t} = 0$$

だから、 $\bar{t} = \bar{t}_0$ で 0 となる量 \bar{f}^0 を導入すれば

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} \bar{x}^0 = \bar{f}^0$$

と書ける (左辺 = 右辺 = 0 だから)。従って、 \bar{S} 系では $\bar{t} = \bar{t}_0$ の瞬間には

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} \bar{x}^\mu = \bar{f}^\mu$$

($\mu = 0, 1, 2, 3$) が成立する。

この方程式は、他の任意の慣性系 S ではどのような形になるだろうか。その答えは、 $\bar{f}^\mu = (\bar{f}^0, \bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3)$ が 4 元ベクトルの変換性をもつ量 (**4 元力**と呼ぼう) であると仮定すれば直ちに得られる。すなわち、 \bar{S} 系から S 系へのローレンツ変換を

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu \bar{x}^\nu, \quad f^\mu = \Lambda^\mu_\nu \bar{f}^\nu$$

とすれば、前述のように τ はローレンツ不変な量だから x^μ と f^μ の関係として

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu = f^\mu \tag{23}$$

($\mu = 0, 1, 2, 3$) に到達する。これが相対論化された力学 (**相対論的力学**) の基本方程式である **相対論的運動方程式** である。この方程式は $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ (**4 元速度**) を用いて

$$m \frac{d}{d\tau} u^\mu = f^\mu \tag{24}$$

とも表される。

このように導入された 4 元力 f^μ の中身はこの段階ではまだ明らかではないが、4 元ベクトルがローレンツ変換を受ければ一般にはその四つの成分が全て入り混じるのだから、 f^μ の第 0 成分 f^0 も (偶然的な打消し合いが起こらなければ) 0 ではなくなる。しかし、

もともと3成分しかない量 (\vec{f}) を無理矢理(?) 4元ベクトルの形に書き表したのだから、たとえ $f^0 \neq 0$ であっても当然のことながらその自由度は3のみである。従って、上記(24)式の左辺に現れる4元速度 u^μ も実際の自由度は3ということになる。このことは以下のような考察からも理解できるだろう：

物体の固有時 τ と観測者の立つ慣性系の時間(座標時間) t の関係は、 $d\tau$ と dt の場合と同様に

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \quad (25)$$

である。この式をまず

$$\begin{aligned} (d\tau)^2 &= (dt)^2 \left[1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2} \right] = (dt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \\ &= (dt)^2 - \frac{1}{c^2} \left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \right] \end{aligned}$$

と書き直し、これを x^μ および計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて書き直すと

$$c^2(d\tau)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

となるので、両辺を $(d\tau)^2$ で割って $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ を用いれば

$$u^2 (\equiv u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = c^2 \quad (26)$$

となる。つまり、4元速度はこの条件を常に満たさなければならないから^{#4} 独立な自由度は4から1減って3となる訳である。

この4元速度の成分を具体的に書けば

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}} \quad (27)$$

$(\vec{\beta}_v \equiv \vec{v}/c)$ となる。 $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ だから、我々が「物体の変位と所要時間の比」として定義する“速度”は、この \vec{v} である。つまり、第2式は、我々の慣れ親しんだ速度と4元速度(の空間成分)との関係を与えている。

^{#4}この条件を少し変形した $\sqrt{u^2} = c$ という式は大変に興味深い。これは、静止している物体にも、超高速で運動している物体にも等しく課されるものである。すなわち、「あらゆる物体は皆“cという同じ大きさの四元速度”をもって常に4次元時空の中を運動している」と言える訳である。

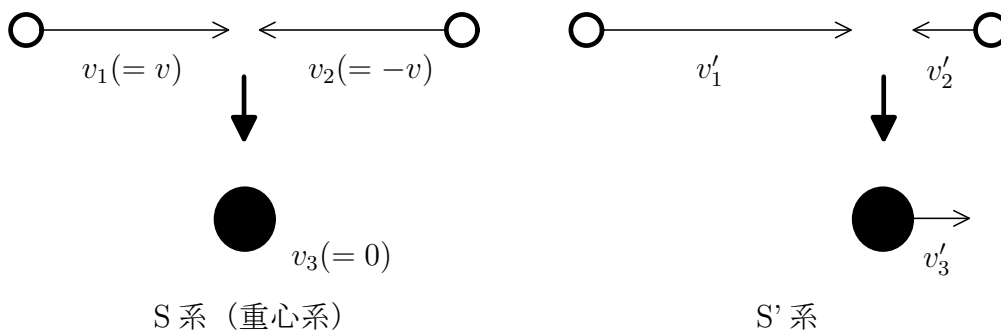
次に、古典力学での運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ に倣って

$$p^\mu = mu^\mu (= m dx^\mu / d\tau) \quad (28)$$

で **4元運動量** を導入する。この空間成分 $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$ はこの定義より

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta_v^2}} \quad (29)$$

だから、この運動量は古典力学での運動量「 $\vec{p} = m\vec{v}$ 」と同じではない。運動量は「物体の運動の“勢い”を表す量」だから特に抽象的という訳ではなく、一見すれば質量×速度という定義も理に適っているように思える。しかし、速度は、上記のように我々が直接測定できる量だが、運動量の場合には、他の物体との相互作用、つまり力のやりとりを通じて“間接的に”測定せざるを得ないので、古典力学で定義された運動量が正しく運動の勢いを表していると当然のごとく考えてはいけない。例えば、運動している物体Aが、静止している別の物体Bに衝突したとしよう。この衝突によってBの受けた衝撃を何らかの方法で測れば、Aの持っていた運動の勢いである運動量を知ることができる。問題は、そうやって知った運動量が質量と速度の積で正しく表現できているかである。Bが受ける衝撃の大きさは、それを観測する座標系に依って変化するはずはないから、どの慣性系においても同じ結論に達する必要がある。つまり、ローレンツ変換でA・Bの運動量の関係が変わってはならない。このように、どちらの定義が正しいのかについて先入観抜きできちんとした検討が必要だが、答は既にわかっている。もちろん、上で導入した相対論的な定義が支持されている。これまで通り $\vec{p} = m\vec{v}$ と定義した場合には、運動量保存則とローレンツ変換（から導かれる速度変換則）が共存できないのである。



これを簡単な例で見てみよう．上図のように同じ質量 (m) の粒子が衝突して合体する 1 次元運動を考える (水平右向きに x 軸をとる)．左図は，これを重心系 (S 系) で観測する場合を，また右図は S 系に対して $-V$ の速度で動く S' 系で観測する場合を表している．まず S 系においては，従来の定義の運動量を用いれば

$$p_1(= mv) + p_2(= -mv) = p_3(= 0)$$

だから衝突の前後で運動量保存は保存されている．一方，S' 系ではどうだろうか． $v_3 = 0$ であり，また上述のように，S' 系の S 系に対する速度は $-V$ だから，変換則 (15) に従えば

$$v'_1 = (v + V)/(1 + \beta_V v/c), \quad v'_2 = (-v + V)/(1 - \beta_V v/c), \quad v'_3 = V$$

($\beta_V \equiv V/c$)．古典力学では，質量は不変な定数として扱われているから，合体した物体の質量 M は，衝突する物体の速さには無関係に $2m$ に一致しなければならない．従って，

$$p'_1 = m(v + V)/(1 + \beta_V v/c), \quad p'_2 = m(-v + V)/(1 - \beta_V v/c), \quad p'_3 = 2mV$$

であるが，簡単な計算で確かめられるように

$$p'_1 + p'_2 \neq p'_3$$

となり運動量は保存されない．

一方，相対論的な運動量の定義を採用すれば，どうなるだろうか．4 元運動量の定義を見れば， $m(v) \equiv m/\sqrt{1 - \beta_v^2}$ が速度 \vec{v} で運動する物体の質量と見ることができる．この解釈が正しければ，速さ v で衝突する物体の質量は m ではなく $m(v)$ だから，合体した物体の質量 M も $2m$ ではなく $2m(v)$ である．これより，

$$\begin{aligned} p'_1 &= m(v'_1)v'_1 = mv'_1/\sqrt{1 - (v'_1/c)^2} = m(v + V)/\sqrt{(1 - \beta_v^2)(1 - \beta_V^2)}, \\ p'_2 &= m(v'_2)v'_2 = mv'_2/\sqrt{1 - (v'_2/c)^2} = m(-v + V)/\sqrt{(1 - \beta_v^2)(1 - \beta_V^2)}, \\ p'_3 &= M(V)V = MV/\sqrt{1 - \beta_V^2} = 2m(v)V/\sqrt{1 - \beta_V^2} = 2mV/\sqrt{(1 - \beta_v^2)(1 - \beta_V^2)} \end{aligned}$$

($\beta_v \equiv v/c$) を得るが，これらが

$$p'_1 + p'_2 = p'_3$$

の関係を満たすのは一目瞭然だろう。つまり、両系で運動量の保存が確認できるという訳である。但し、この新しい運動量の定義も $|\beta_v|, |\beta_V| \ll 1$ の極限では従来の定義にほぼ一致するので、身の周りの現象の力学的扱いに実質的な影響が出ることはない。

ここで、観測者が見るこの運動量の時間変化は、相対論的運動方程式 (24) の空間成分

$$m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \vec{f}$$

および固有時と座標時間の関係 (25) を用いれば

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = m \frac{d\vec{u}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \vec{f} \sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}$$

となるが、運動量の時間変化を決めるのが我々にお馴染の「力」であることを考えれば、この式は、我々が「力」と考える量 \vec{F} と 4 元力 f^μ の空間成分 \vec{f} の関係を与えていることになる：

$$\vec{F} = \vec{f} \sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2} \quad (30)$$

なお、4 元力と区別する意味で、 \vec{F} をニュートン力と呼ぶことがある。

4 元運動量の第 0 成分 p^0 の意味を調べるため、座標時間 t で微分してみよう：

$$\frac{dp^0}{dt} = m \frac{du^0}{dt} = m \frac{du^0}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = f^0 \sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}$$

従って、4 元力の第 0 成分が何を意味するかをまず考えなければならない。そこで、4 元速度 u^μ の満たす関係 $u^2 = c^2$ の両辺を固有時 τ で微分する：

$$\frac{d}{d\tau} u^2 \left(= \frac{d}{d\tau} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right) = 0 \quad \implies \quad u \frac{d}{d\tau} u \left(= g_{\mu\nu} u^\mu \frac{d}{d\tau} u^\nu \right) = 0$$

相対論的運動方程式 $m du^\mu/d\tau = f^\mu$ より $du^\mu/d\tau = f^\mu/m$ であるから、これを上式に代入して

$$u f \left(\equiv u_\mu f^\mu = g_{\mu\nu} u^\mu f^\nu \right) = 0 \quad (31)$$

を得る。4 元力は常にこの関係を満足しなければならない。これを具体的に各成分で表してみよう：

$$\text{左辺} = u^0 f^0 - \vec{u} \cdot \vec{f} = \frac{dx^0}{d\tau} f^0 - \frac{d\vec{r}}{d\tau} \cdot \vec{f} = \frac{dt}{d\tau} \left(c f^0 - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f} \right)$$

だから

$$f^0 = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f}$$

従って、 p^0 の時間変化は

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f} \sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F}$$

となり、

$$\frac{d}{dt}(cp^0) = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F} \quad (32)$$

という関係を得る。この両辺を任意の時刻 t_1 から t_2 まで積分すれば

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(cp^0) dt = cp^0(t_2) - cp^0(t_1) \\ \text{右辺} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \stackrel{\text{置換積分}}{=} \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

($P_{1,2}$ は時刻 $t_{1,2}$ での物体の位置) となるが、右辺はこの間に力 \vec{F} が物体にする仕事である。その受けた仕事の量だけ増加するのが cp^0 という量だから、これは**物体のエネルギー**を表す量であるとわかる：

$$E = cp^0 = mcu^0 = mc \frac{dx^0}{d\tau} = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}} \quad (33)$$

ここで物体が静止している場合 ($\vec{v} = 0$) を考えると $\beta_{\vec{v}} = 0$ で、そのとき

$$E = mc^2 \quad (34)$$

これは、物体は静止していても質量 m があるだけでエネルギー E を持っていることを意味する。これは**静止エネルギー**と呼ばれ、質量もエネルギー存在の一形態であることを示す有名な方程式である。

上で導出したエネルギーと速度の関係

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}}$$

は注目すべき「相対論の予言」だが、古典力学での式 $E = m\vec{v}^2/2$ とは全く異なるように見える。これでは、相対論の予言は多くの古典力学の成功と相容れないように思えてしまう。そこで、実際に $|\vec{v}| \ll c$, つまり $|\vec{\beta}_v| \ll 1$ の極限を調べてみよう。すると、上式は

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}} = mc^2(1 - \vec{\beta}_v^2)^{-1/2} \\ &\simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\vec{\beta}_v^2\right) = mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \end{aligned} \quad (35)$$

と近似できるので、 E は古典力学での運動エネルギーに mc^2 を加えたものになっていることがわかる。ところが、古典力学では質量は変化することのない定数と考えられていたから、そこでは mc^2 は単なる「エネルギーの原点を変える定数項」に過ぎない。従って、それは自由に落とすことが出来、結局 $E = m\vec{v}^2/2$ に帰着してしまう。つまり、古典力学でのエネルギーの定義も（その適用範囲内では）相対論と矛盾するものではないということになる。

最後に、相対論的力学におけるエネルギーと運動量の関係を見ておこう。4元速度 u^μ の満たす関係 (26) および4元運動量の定義 $p^\mu = mu^\mu$ より

$$p^2 (\equiv p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu) = m^2 c^2 \quad (36)$$

となるが、左辺 = $(p^0)^2 - \vec{p}^2$ だから、

$$E = cp^0 = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4} \quad (37)$$

となる。これが相対論的力学における**エネルギー・運動量関係式**である。また、

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}}$$

より、 E 、 \vec{p} 、 \vec{v} の間には

$$c\vec{p}/E = \vec{v}/c \quad (38)$$

という簡単な関係が存在すること、および $m \neq 0$ の場合には $|\vec{p}|$ 、 E が有限である限り $|\vec{v}| = c$ ($|\vec{\beta}_v| = 1$) にはなれないこと、もわかる。これは、光速より小さい速度をいくら合成しても光速には到達しないというローレンツ変換（速度の合成則）の結果にも一致する。逆に、光速で運動する粒子（光子など）の質量は厳密に0でなければならない。この場合、上で与えた $c\vec{p}/E = \vec{v}/c$ および $|\vec{v}| = c$ より $c|\vec{p}|/E = 1$ 、つまり光子運動量の大きさは

$$|\vec{p}| = E/c \quad (39)$$

で与えられる。これはエネルギー・運動量関係式 (37) で $m = 0$ と置いても得られる。

なお、 $E = mc^2/\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}$ において、 $m/\sqrt{1 - \vec{\beta}_v^2}$ を改めて「速度に依存して変化する質量 $m(v)$ 」と見なして常に $E = m(v)c^2$ と表す流儀もある。事実、この講義ノートでも、28

頁で運動量の定義について検討する際には、この見方を採用した。この場合には元々の質量は**静止質量**と呼ばれる。この見方を採るかどうかは好みの問題だが、少なくとも筆者はこの流儀はお薦めしない。確かに、この見方に立てば、例えば運動量の関係式 (29) は

$$\vec{p} = m(v)\vec{v}$$

と表すことができ、古典力学での運動量-速度の関係に似た形が回復する。質量が単なる定数ではなく運動と共に変化する量であると見なせば古典力学的な考え方でも大丈夫という訳である。この点は評価していいだろう。

しかしながら、それでも筆者は、この表し方は避ける方が無難と考える。特に電子やクォークといった素粒子の場合、(静止)質量は電荷やスピンなどと共にその基本的な属性(基本定数)と見なされており、それが速度に依存して変化するというのは混乱を招きかねないからである。また、ここまで相対論的力学を学んで来たら、もはや $m(v)$ という見方は特に必要でもないことも明らかだろう。

自然単位系

様々な素粒子反応現象を研究対象とする素粒子物理学(高エネルギー物理学ともいう)においては、多くの場合、ディラック定数 $\hbar (\equiv h/(2\pi))$ および光速 c を基準にとる自然単位系が用いられる。この単位系では \hbar も c も 1 という無次元の定数となる:

$$\hbar = c = 1 \tag{40}$$

これは、単位の中に J·s を含む量を扱う場合にはその部分は $\hbar = 1.054571628 \times 10^{-34}$ J·s を基準として、また、m/s を含む量ならその部分は $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s を基準として「その何倍」という表し方をするということを意味する。例えば、光速それ自体は c の 1 倍ということ、上記のように次元なしの数 $c = 1$ になる。

この単位系を採用したからといって理論の中身が変わる訳ではないが、いろいろな関係式の“見た目”はかなり変化する。例えば、エネルギー・運動量・速度の関係

$$p^2 = m^2 c^2, \quad E = cp^0 = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}, \quad c\vec{p}/E = \vec{v}/c$$

を自然単位系で表せば、それぞれ以下のようになる:

$$p^2 = m^2, \quad E = p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad \vec{p}/E = \vec{v} \tag{41}$$