講義 Note by 日置善郎
2013 年 9 月 3 日版

汎 関 数 と 変 分 法

関数とは ある量（数）に別のある量（数）を対応させる規則 である．数式的には $y = \phi(x)$ などと表現され「y は x の関数」などという．これに対して

$$F = \int_{x_-}^{x_+} dx\, \mathcal{F}(\,\phi(x)\,)$$

という式を考えてみよう．ここで，右辺において $\mathcal{F}(\,\phi(x)\,)$ は $\phi(x)$ の任意の組み合わせであり，また，積分の上限・下限 $x_\pm$ は，ここでは特に指定はしないが具体的な問題を考える際には当然のことながらそこでの条件によって確定する．

この式における $\phi(x)$ と F の関係は，$y = \phi(x)$ における x と y の関係とは異なり，$\phi(x)$ という「関数」に対して F という量が定まっている訳で，いわば F は「関数の関数」である．すなわち，関数 $y = \phi(x)$ の y は x というただ一つの点だけに依存するのに対して，F は $x_- \leq x \leq x_+$ という積分範囲内の全ての点に依存 するのであるから両者の差は小さくはない．仮に x の値が $x = x_-, x_1, x_2, \cdots, x_+$ のように離散的であったなら

$$F = F(\,\phi(x_-), \phi(x_1), \phi(x_2), \cdots, \phi(x_+)\,)$$

と書くこともできよう．このような量は「汎関数」と呼ばれるものであり，$F[\,\phi\,]$ などと ϕ を明示することもある．

次に $y = \phi(x)$ の微分を考えよう．微分 dy/dx とは変数 x の微小変化 dx とそれに伴う y の微小変化 dy の関係（比）である．このとき $\phi(x)$ という関数形自体は不変に保たれることは勿論である．これに対して，$\phi(x)$ という関数の形そのものを微小変化させた場合，つまり積分区間内の全ての x において $\phi(x)$ を

$$\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x)$$

と変化させたときの変化分 $\delta\phi(x)$ と対応する F の微小変化

$$\delta F \equiv F[\,\phi + \delta\phi\,] - F[\,\phi\,]$$

を結びつける量は「変分」または「汎関数微分」と呼ばれ $\delta F/\delta\phi(x)$ と表される．dy，dx の関係は

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

であるのに対して δF は積分範囲内の全ての点 x での $\delta\phi(x)$ に依存するから

$$\delta F = \int_{x_-}^{x_+} dx\, \mathcal{D}(x)\delta\phi(x)$$

と書けるはずであるが，この右辺の $\mathcal{D}(x)$ が $\delta F/\delta\phi(x)$ である．つまり，

$$\delta F \equiv \int_{x_-}^{x_+} dx\, \frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x) \tag{1}$$

が変分 $\delta F/\delta\phi(x)$ の定義を与える．もし F が複数の独立な関数 $\phi_i(x)$（$i = 1, 2, \cdots$）に依存するなら

$$\begin{aligned}\delta F &\equiv \int_{x_-}^{x_+} dx\, \Big[\, \frac{\delta F}{\delta\phi_1(x)}\delta\phi_1(x) + \frac{\delta F}{\delta\phi_2(x)}\delta\phi_2(x) + \cdots \Big] \\ &= \sum_i \int_{x_-}^{x_+} dx\, \frac{\delta F}{\delta\phi_i(x)}\delta\phi_i(x) \end{aligned} \tag{2}$$

が $\delta F/\delta\phi_i(x)$ の定義式となる．

この δF は通常の微分で表すこともできる．つまり，

$$\begin{aligned}\delta F &\equiv F[\,\phi + \delta\phi\,] - F[\,\phi\,] \\ &= \int_{x_-}^{x_+} dx\, \mathcal{F}(\,\phi(x) + \delta\phi(x)\,) - \int_{x_-}^{x_+} dx\, \mathcal{F}(\,\phi(x)\,) \\ &= \int_{x_-}^{x_+} dx\, \Big[\, \mathcal{F}(\,\phi(x) + \delta\phi(x)\,) - \mathcal{F}(\,\phi(x)\,) \Big] \\ &= \int_{x_-}^{x_+} dx\, \Big[\, \frac{d}{d\phi(x)}\mathcal{F}(\,\phi(x)\,) \Big]\delta\phi(x)\end{aligned}$$

であり，これを上で与えた $\delta F/\delta\phi(x)$ の定義式 (1) と比較して

$$\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \int_{x_-}^{x_+} dx'\, \mathcal{F}(\,\phi(x')\,) = \frac{d}{d\phi(x)}\mathcal{F}(\,\phi(x)\,) \tag{3}$$

という関係も導かれる．また，複数の関数 $\phi_i(x)$ が関与する場合には，上式が各 ϕ_i 毎に成り立つことは明らかだろう：

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta\phi_i(x)} &= \frac{\delta}{\delta\phi_i(x)} \int_{x_-}^{x_+} dx'\, \mathcal{F}(\,\phi_1(x'), \phi_2(x'), \cdots) \\ &= \frac{\partial}{\partial\phi_i(x)}\mathcal{F}(\,\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots) \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$\mathcal{F}$ は任意であったから，積分区間内の一点 y を用いて $\mathcal{F}(\,\phi(x)\,) = \phi(x)\delta(x-y)$ と置いてみよう．すると，δ 関数の性質より

$$F = \int_{x_-}^{x_+} dx\, \mathcal{F}(\,\phi(x)\,) = \int_{x_-}^{x_+} dx\, \phi(x)\delta(x-y) = \phi(y)$$

となる．従って，この場合の変分の定義式は

$$\delta\phi(y) = \int_{x_-}^{x_+} dx\, \frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x)$$

で与えられるが，同じく δ 関数の性質より明らかに

$$\delta\phi(y) = \int_{x_-}^{x_+} dx\, \delta(x-y)\delta\phi(x)$$

だから，二つの式を比較して

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta(x-y) \tag{5}$$

を得る．さらに，x と y は任意なので，両者をそれぞれ y，x と書き換えることも自由だが，その場合には上式は $\delta\phi(x)/\delta\phi(y) = \delta(y-x)$ となり，δ 関数の偶関数という性質 $\delta(x-y) = \delta(y-x)$ より

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)}$$

という関係も成り立つことがわかる．