には，既に説明したように，ゲージ変換を用いて自由度が 2 の状態にまで電磁ポテンシャルを書き直すことができた．それでは量子化された電磁場に対しても同様の制限 $\partial^\mu A_\mu = 0$ を課せばいいのでは？と考えたくなるが，それでは問題は解決できない．(V.29) 式より

$$\pi^0(x) = F^{00}(x) - g^{00}[\,\partial_\mu A^\mu(x)\,] = -\partial_\mu A^\mu(x)$$

となるので，$\partial_\mu A^\mu = 0$ を要求するということは $\pi^0 = 0$ を意味し，せっかくゲージ固定項の導入で回避した問題が再び現れてしまうからである．

これに対する量子論的解決策は**グプタ**（Gupta）と**ブロイラー**（Bleuler）により見出された．その「グプタ-ブロイラー形式」のポイントは，4 種類の生成演算子 $a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)$ が生み出す全体のフォック空間の中の状態ベクトルに**補助条件**（Subsidiary condition）と呼ばれる条件を課して**正定値計量**（Positive definite metric）を持つ部分空間（Subspace）を抜き出し，それを現実の光子世界と同定することである．具体的には $\partial_\mu A^\mu = 0$ を「演算子の関係」ではなく，

$$\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu(x)|\Psi\rangle = 0 \tag{V.37}$$

を満足する $|\Psi\rangle$ だけが物理的に意味のある状態を記述するという <u>状態ベクトルに対する条件</u> と再解釈するのである．この式は，$\partial_\mu\langle\Psi|A^\mu|\Psi\rangle = 0$ と書き直せば古典場-量子場の関係 (II.58) よりわかるように <u>対応する古典電磁場へのローレンツ条件</u> を表す．以上の筋書きは A^μ の消滅演算子部分 $A^{(a)\mu}$ を用いた補助条件

$$\partial_\mu A^{(a)\mu}(x)|\Psi\rangle = 0 \tag{V.38}$$

（Gupta の補助条件）の導入で実現できる．何故なら，そのエルミート共役な関係として生成演算子部分 $A^{(c)\mu}(= [A^{(a)\mu}]^\dagger)$ が $\langle\Psi|A^{(c)\mu} = 0$ を満たすからである．

補助条件 (V.38) に A^μ の平面波展開 (V.35) を代入し，横波を表す偏極ベクトル $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda=1,2)$ が（V.14）式

$$p_\mu\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda=1,2) = 0$$

• 実ベクトル場

$$A^\mu(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=0}^{3} [\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \tag{V.89}$$

• 複素ベクトル場

$$A^\mu(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \sum_{\kappa=0}^{3} [\, a(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\kappa)e^{-ikx} + b^\dagger(\boldsymbol{k},\kappa)\varepsilon^{\mu*}(\boldsymbol{k},\kappa)e^{ikx}\,] \tag{V.90}$$

（但し，$k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$）と得られ，展開の各係数は

$$\begin{aligned}
&[\, a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, b(\boldsymbol{p},\lambda),\ b^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = -(2\pi)^3 2p^0 g^{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),\\
&[\, a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, b(\boldsymbol{p},\lambda),\ b(\boldsymbol{p}',\lambda')\,]\\
&= [\, b^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda),\ b^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda),\ b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = 0
\end{aligned} \tag{V.91}$$

（もちろん実場には a，$a^\dagger$ のみが関与）を満たす生成消滅演算子となる．

なお，この場合も，始めからファインマンゲージを採用するならラグランジアン（V.82, V.83）はそれぞれ（発散項を除いて）

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x)\partial^\mu A^\nu(x) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu(x)A^\mu(x) \tag{V.92}$$

$$\mathcal{L}(x) = -\partial_\mu A_\nu^*(x)\partial^\mu A^\nu(x) + m^2 A_\mu^*(x)A^\mu(x) \tag{V.93}$$

と扱い易い形となる．

問題 V.18　上記のラグランジアンから $\pi^\mu(x)$ を求め，それを $a^{(\dagger)}$，$b^{(\dagger)}$ で表せ．次に，生成消滅演算子が（V.91）式を満たすなら実際に量子化条件（V.87）が成り立つことを確認せよ．

さて，この場合も（V.91）からわかるように，生成消滅演算子の第 0 成分の交換関係から不定計量問題が現れるので，電磁場に倣って物理的状態が $\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu|\Psi\rangle = 0$ を満たすよう

$$\partial_\mu A^{(a)\mu}(x)|\Psi\rangle = 0$$

（＋複素場の $A^{\mu\dagger}$ への条件）という補助条件を課したくなるが，実はこれは許されない．本書ではこれまで触れなかったが，各量子場の間には，正準量子化の際に設定される同時刻交換関係の他に，同時刻ではない4次元的な交換関係も存在する．例えば，ここで考えている実ベクトル場の関係は，不変デルタ関数と呼ばれる関数

$$\begin{aligned}\varDelta(x-y) &\equiv -i[\,\phi(x),\,\phi(y)\,]\\ &= -i\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\,]\end{aligned} \tag{V.94}$$

（ϕ は質量 m の実スカラー場）を用いて

$$[\,A^\mu(x),\,A^\nu(y)\,] = -ig^{\mu\nu}\varDelta(x-y) \tag{V.95}$$

と与えられる．この $\varDelta$ は，定義からわかるように

$$(\Box + m^2)\varDelta(x-y) = 0$$

を満たすので，上記 A^μ の4次元的交換関係より

$$[\,\partial_\mu A^\mu(x),\,\partial_{(y)\nu}A^\nu(y)\,] = i\partial_\mu\partial^\mu\varDelta(x-y) = -im^2\varDelta(x-y) \neq 0 \tag{V.96}$$

が得られるが，これは $\partial_\mu A^{(a)\mu}|\Psi\rangle = 0$ とは両立できないのである.[♯V.8]

この問題の一つの解決策は，A^μ とは独立だが同じ質量を持つ実スカラー場 ϕ を同時に考えて $\langle\Psi|\partial_\mu A^\mu + m\phi|\Psi\rangle = 0$ と要請する，すなわち

$$[\,\partial_\mu A^{(a)\mu}(x) + m\phi^{(a)}(x)\,]|\Psi\rangle = 0 \tag{V.97}$$

という補助条件を導入することである．これは，$m \to 0$ の極限を考えればわかるように，グプタ-ブロイラー形式の自然な拡張と言える．或いは，修正されたベクトル場

$$\mathcal{A}^\mu_\phi(x) \equiv A^\mu(x) - \frac{1}{m}\partial^\mu\phi(x) \tag{V.98}$$

[♯V.8] ここでは y 微分を $\partial_{(y)}$ と表した．$\varDelta$ は $x-y$ だけに依存するので $\partial_{(y)}\varDelta = -\partial\varDelta$ であることに注意しよう．ちなみに，(V.96）は $m=0$（つまり電磁場）なら何の問題も発生しないことも示している．

を導入し，

$$\langle\Psi|\partial_\mu\mathcal{A}^\mu_\phi(x)|\Psi\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_\mu\mathcal{A}^{(a)\mu}_\phi(x)|\Psi\rangle = 0 \tag{V.99}$$

と表現してもよい．この $\mathcal{A}^\mu_\phi$ の 4 次元的交換関係は

$$[\,\mathcal{A}^\mu_\phi(x),\,\mathcal{A}^\nu_\phi(y)\,] = -i\Big(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu\Big)\Delta(x-y) \tag{V.100}$$

なので $[\partial_\mu\mathcal{A}^\mu_\phi(x),\,\partial_{(y)\nu}\mathcal{A}^\nu_\phi(y)] = 0$ となり，$\partial_\mu\mathcal{A}^{(a)\mu}_\phi|\Psi\rangle = 0$ との間に矛盾は生じない．複素ベクトル場についても，同じ質量および電荷を持つ複素スカラー場を用いて同様の補助条件を設定できる．

次に，これらの条件に A^μ の平面波展開（V.89）と Ⅲ 章で調べたスカラー場の平面波展開を代入すれば，ここでも（V.39）のように消滅演算子を用いた表現が得られる．但し，運動量と偏極ベクトルの間には，電磁場の場合とは違って縦波成分も含めた $p_\mu\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda=1,2,3)=0$ の関係があるので，それは

$$[\,a(\boldsymbol{p},0)+ia(\boldsymbol{p})\,]|\Psi\rangle = 0, \quad [\,b(\boldsymbol{p},0)+ib(\boldsymbol{p})\,]|\Psi\rangle = 0 \tag{V.101}$$

となる．電磁場の場合は，非物理的な縦波およびスカラー成分が打ち消し合う形だったが，ここではスカラー成分とスカラー場の寄与が打ち消し合うという条件である．

問題 V.19　（V.94,V.95）で与えた ϕ，A^μ の 4 次元的交換関係と $[\phi(x),\,A^\mu(y)] = 0$ を用いて $\mathcal{A}^\mu_\phi$ の 4 次元的交換関係（V.100）を導け．

問題 V.20　実ベクトル場に対し，スカラー成分＋スカラー場の個数演算子を

$$N_{0\mathrm{S}} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,-a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\,]$$

と定義する．その固有値・固有状態 $N_{0\mathrm{S}}|\Psi_n\rangle = n|\Psi_n\rangle$ において，$n \neq 0$ なら $\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle = 0$ であることを示せ．また，複素ベクトル場に対しも同様に調べてみよ．

ここで読者は “ベクトル場の量子化なのに何故スカラー場を持ち込むのか．ベクトル場だけで話を完結させることはできないのか？” という疑問を持つかも知