

Chern-Simons項のスピン構造依存性

GPT-6 Astraによるメモ

Abstract

$U(n)$ 接続に対して ch_2 を用いて定義するChern-Simons項は、一般に基底多様体のスピン構造に依存する。この依存性を制御するのは c_1 の非消失のものではなく $c_1 \bmod 2$ である。本ノートでは、4次元への拡張と η 不変量による定義、スピン構造の変更則、および c_2 に対応するChern-Simons項との関係を整理する。さらに、 $4+1$ 次元の電磁応答に現れる量が ch_2 であることと、接続間の相対量ではスピン構造依存性が相殺されることを確認する。

1 規約と整数性

Y を閉じた向き付けられた3次元多様体、 $E \rightarrow Y$ を階数 $n \geq 1$ のHermite束とし、 A をそのユニタリ接続とする。局所接続行列 A は反Hermiteとし、外積記号を省略して

$$F(A) = dA + A^2, \quad \text{ch}(A) = \text{tr} \exp \left(\frac{iF(A)}{2\pi} \right) \quad (1.1)$$

と定める。 $c_j(E)$ は整数係数のChern類、 $c_j(A)$ は対応するChern-Weil形式を表す。特に、

$$c_1(A) = \frac{i}{2\pi} \text{tr} F(A), \quad (1.2)$$

$$\text{ch}_2(A) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr} F(A)^2, \quad (1.3)$$

$$c_2(A) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \text{tr} F(A)^2 - (\text{tr} F(A))^2 \right\} \quad (1.4)$$

である。以下で $\text{ch}_2(E)$ を特性類として用いる場合、その係数は $\mathbb{Q}$ である。実束 $E_{\mathbb{R}}$ に対する標準的な関係式は

$$p_1(E_{\mathbb{R}}) = c_1(E)^2 - 2c_2(E), \quad \text{ch}_2(E) = \frac{1}{2}c_1(E)^2 - c_2(E) = \frac{1}{2}p_1(E_{\mathbb{R}}) \quad (1.5)$$

である[1]。ここで $p_1(E_{\mathbb{R}})$ はゲージ束のPontryagin類であり、基底の接束の $p_1(TY)$ や $p_1(TX)$ とは区別する。

閉じた向き付けられた4次元多様体 X 上では、 $\int_X p_1(E_{\mathbb{R}})$ と $\int_X c_2(E)$ は常に整数である。半整数になり得るのは $\int_X \text{ch}_2(E)$ である。例えば、複素向きの $\mathbb{C}P^2$ 上の線束 $L = \mathcal{O}(1)$ に対して

$$\int_{\mathbb{C}P^2} c_1(L)^2 = 1, \quad c_2(L) = 0, \quad \int_{\mathbb{C}P^2} \text{ch}_2(L) = \frac{1}{2} \quad (1.6)$$

となる。

一方、 X がスピン多様体ならば、任意の $x \in H^2(X; \mathbb{Z})$ についてWuの公式から

$$\langle \bar{x}^2, [X] \rangle = \langle \text{Sq}^2 \bar{x}, [X] \rangle = \langle w_2(TX) \smile \bar{x}, [X] \rangle = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2 \quad (1.7)$$

を得る[1]。上線は $\bmod 2$ 還元を表す。したがって

$$\int_X \text{ch}_2(E) \in \mathbb{Z} \quad (X \text{ は閉スピン4次元多様体}) \quad (1.8)$$

である。必要なのは $c_1(E)^2$ の特性数が偶数であることであり、 $c_1(E)$ 自体が偶数であることではない。

2 スピン構造を指定したCS項

2.1 4次元への拡張による定義

向き付けられた3次元多様体 Y はスピン構造を持つ。その一つを σ とする。 $\partial X = Y$ を満たすコンパクトなスピン4次元多様体 $(X, \tilde{\sigma})$ と、 (E, A) の拡張 $(\tilde{E}, \tilde{A})$ を選び、

$$\boxed{\text{CS}[A, \sigma] := \int_X \text{ch}_2(\tilde{A}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_X \text{tr } F(\tilde{A})^2 \quad \text{in } \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \quad (2.1)$$

と定義する。境界の向きは外向き法線を先に置く規約とし、拡張は境界近傍で積型に取る。この拡張は

$$\Omega_3^{\text{Spin}}(BU(n)) = 0 \quad (2.2)$$

により存在する。束を拡張した後、接続は襟近傍と分割の一を用いて拡張できる。式(2.2)の低次の計算は付録Aに記す。

同じ (Y, σ, E, A) に対する二つの拡張を貼り合わせると、閉スピン多様体 $X \cup_Y \overline{X}$ 上の束と接続を得る。式(1.8)により二つの積分の差は整数なので、式(2.1)は拡張によらない。また、境界でのゲージ変換を束の貼り合わせに組み込んでも同じ議論が適用され、 $\text{CS}[A, \sigma]$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 値のゲージ不変量である。

スピン構造を指定せず、任意の向き付けられた4次元への拡張を許すと、式(1.6)の半整数が曖昧さとなる。例えば、同じ境界データを持つ拡張に、境界を持たない $(\mathbb{C}P^2, \mathcal{O}(1) \oplus \mathbb{C}^{n-1})$ を付け加えると、積分が $1/2$ だけ変わる。他方、境界のスピン構造が異なる二つのスピン拡張は、一般にそのスピン構造を保ったまま貼り合わせられない。したがって、固定した σ に対する拡張独立性から、 σ 自体への独立性は従わない。

2.2 η 不変量による定義

Y にRiemann計量を入れ、 $D_{A,\sigma}$ を E で捻った自己共役スピンDirac作用素、 $D_{0,\sigma}$ を自明な複素線束で捻ったものとする。その被約 η 不変量を

$$\xi[D] := \frac{\eta_D(0) + \dim \ker D}{2} \quad (2.3)$$

と定める。Dirac作用素の符号は、APS境界条件に対する指数公式が

$$\text{ind } D_{X,\tilde{A}}^+ = \int_X \hat{A}(TX) \text{ch}(\tilde{A}) - \xi[D_{A,\sigma}] \quad (2.4)$$

となるように固定する[2]。自明束の場合の式を n 倍して引くと、重力項 $-np_1(TX)/24$ が相殺されるため、

$$\boxed{\text{CS}[A, \sigma] = \xi[D_{A,\sigma}] - n\xi[D_{0,\sigma}] \quad \text{in } \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \quad (2.5)$$

を得る。この差はmod1で計量によらないが、後述のとおりスピン構造には依存し得る。 $\xi[D_{A,\sigma}]$ だけを用いると重力の寄与も含むため、本ノートの純粋なゲージCS項とは区別する必要がある。

3 スピン構造の変更則

スピン構造の集合は $H^1(Y; \mathbb{Z}_2)$ を作用群とするトーサーである。二つのスピン構造の差を $\ell \in H^1(Y; \mathbb{Z}_2)$ で表す。

命題 3.1. 同じ束と接続 (E, A) に対して,

$$\boxed{\text{CS}[A, \sigma + \ell] - \text{CS}[A, \sigma] = \frac{1}{2} \left\langle \overline{c_1(E)} \smile \ell, [Y] \right\rangle \quad \text{in } \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \quad (3.1)$$

が成り立つ. 右辺の $\mathbb{Z}_2$ 値 $0, 1$ は, それぞれ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の $0, 1/2$ に写す.

証明. 引用する Jenquin の変更則 [3, Proposition 1.7(2)] は, 階数 0 の向き付けられた実仮想束を対象としている. これを複素束 E に適用するため, まず E から実束を作り, その Dirac 作用素の不変量と本ノート の $\text{CS}[A, \sigma]$ との対応を確認する.

(i) 複素束の実化. $E_{\mathbb{R}}$ とは, E の各ファイバーを実ベクトル空間と見なして得られる実階数 $2n$ の束である. E の Hermite 計量 h から実内積 $\text{Re } h$ を入れ, 複素構造が定める向きを採用する. ユニタリ接続 A は, この内積を保つ実直交接続 $A_{\mathbb{R}}$ を誘導する. 局所的に実部と虚部を並べた基底では

$$A_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \text{Re } A & -\text{Im } A \\ \text{Im } A & \text{Re } A \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と表される. この操作は構造群の標準的な包含 $U(n) \hookrightarrow SO(2n)$ によるものであり, (E, A) から一意に定まる. ここで用いるスピン構造は基底 Y の σ であり, $E_{\mathbb{R}}$ 自体にスピン構造が存在することは仮定しない.

(ii) 階数 0 への調整と仮想束の不変量. Jenquin の定理に合わせ, 自明実束 $\underline{\mathbb{R}}^{2n} = Y \times \mathbb{R}^{2n}$ を引いて

$$V = E_{\mathbb{R}} - \underline{\mathbb{R}}^{2n} \in KO(Y) \quad (3.3)$$

と取る. $KO(Y)$ は実ベクトル束の形式差からなる群であり, V の実仮想階数は $2n - 2n = 0$ である. 自明束には自明な平坦接続を入れる. 実束で捻った複素 Dirac 作用素は, その複素化で捻った作用素として記述できる. そこで $A_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$ を $E_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上の誘導接続とし, 仮想束に対する記号を

$$\xi[D_{V, \sigma}] := \xi[D_{A_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}, \sigma}] - 2n\xi[D_{0, \sigma}] \quad (3.4)$$

という実数値の差で定義する. 右辺の核の次元と固有値の重複度は, いずれも複素次元で数える.

(iii) 複素化と規格化の対応. 実化した束を再び複素化すると, 接続を含めて

$$(E_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, A_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}) \simeq (E, A) \oplus (\overline{E}, \overline{A}) \quad (3.5)$$

と分解する. ここで $\overline{E}$ は共役複素束, $\overline{A}$ はその誘導接続である. 従って, ξ の直和に関する加法性から

$$\xi[D_{A_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}, \sigma}] = \xi[D_{A, \sigma}] + \xi[D_{\overline{A}, \sigma}] \quad (3.6)$$

となる.

二つの項が等しいことを, 3次元のスピンル束 S_{σ} の荷電共役を用いて確認する. S_{σ} には, スピン接続および実接ベクトルによる Clifford 作用と可換な反線形写像 J_{σ} があり, $J_{\sigma}^2 = -1$ を満たす [3, Section 1.1]. これと標準的な共役写像 $e \mapsto \bar{e}$ を組み合わせると, 反線形同型

$$C_{\sigma} : S_{\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} E \longrightarrow S_{\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{E}, \quad C_{\sigma}(s \otimes e) = J_{\sigma}s \otimes \bar{e} \quad (3.7)$$

を得る. 接続との整合性により

$$D_{\overline{A}, \sigma} C_{\sigma} = C_{\sigma} D_{A, \sigma} \quad (3.8)$$

である. 固有値は実数なので, C_{σ} は同じ固有値の固有空間を, 核も含めて同一視する. 従って $\xi[D_{\overline{A}, \sigma}] = \xi[D_{A, \sigma}]$ であり, 式 (3.4) は

$$\xi[D_{V, \sigma}] = 2(\xi[D_{A, \sigma}] - n\xi[D_{0, \sigma}]) \quad (3.9)$$

となる。Jenquinの指数化された不変量は $\tau^{1/2}[D_{V,\sigma}] = \exp(\pi i \xi[D_{V,\sigma}])$ なので、式(2.5)から

$$\tau^{1/2}[D_{V,\sigma}] = \exp(2\pi i \text{CS}[A, \sigma]) \quad (3.10)$$

を得る。実化による複素Diracスペクトルの2重化が、指数の πi を本ノートの $2\pi i$ に変換している。

(iv) 変更則の適用。 自明束を引いてもStiefel–Whitney類は変わらず、複素束の実化についての関係式から

$$w_1(V) = 0, \quad w_2(V) = w_2(E_{\mathbb{R}}) = \overline{c_1(E)} \quad (3.11)$$

となる。階数0かつ $w_1(V) = 0$ という仮定を確認できたので、Jenquinの変更則を適用して

$$\frac{\tau^{1/2}[D_{V,\sigma+\ell}]}{\tau^{1/2}[D_{V,\sigma}]} = (-1)^{\langle w_2(V) - \ell, [Y] \rangle} \quad (3.12)$$

を得る。式(3.10)と(3.11)を代入すると、これは

$$\exp(2\pi i \{ \text{CS}[A, \sigma + \ell] - \text{CS}[A, \sigma] \}) = \exp \left(\pi i \left\langle \overline{c_1(E)} \smile \ell, [Y] \right\rangle \right) \quad (3.13)$$

となり、 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 値の等式(3.1)が従う。 $\square$

したがって、 $c_1(E) = 0$ ならスピン構造依存性はない。より正確には、 $\mathbb{Z}_2$ 係数のPoincaré双対性から

$$\text{CS}[A, \sigma] \text{ がすべての } \sigma \text{ について同じ} \iff \overline{c_1(E)} = 0 \text{ in } H^2(Y; \mathbb{Z}_2) \quad (3.14)$$

である。従って、 $c_1(E) \neq 0$ でもそのmod2還元が0なら依存性はない。この主張は $c_1(E)$ のねじれ成分も含む整数コホモロジーに対するものであり、曲率形式が与える実コホモロジー類だけでは判定できない。

具体例として、 $Y = S^2 \times S^1$ とし、 S^2 上の次数 q の線束を引き戻した L を考える。 S^1 方向のスピン構造だけを変えると

$$\text{CS}[a, \sigma_{\text{per}}] - \text{CS}[a, \sigma_{\text{anti}}] = \frac{q}{2} \pmod{1} \quad (3.15)$$

となる。ここで σ_{anti} は円板に拡張する反周期的なスピン構造、 σ_{per} は周期的なものを表す。 a も S^2 からの引き戻しなら、 $S^2 \times D^2$ 上で $F(a)^2 = 0$ となる拡張を取れるため、 $\text{CS}[a, \sigma_{\text{anti}}] = 0$ である。従って、 q が奇数の場合には二つの値が実際に $1/2$ だけ異なる。

4 c_2 に対応するCS項との関係

4.1 スピン構造を用いない定義と局所式

向き付けられた4次元多様体 W への拡張を用いて

$$\text{CS}_{c_2}[A] := \int_W c_2(\tilde{A}) \text{ in } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (4.1)$$

と定義できる。 $\Omega_3^{\text{SO}}(BU(n)) = 0$ なので拡張は存在し、閉じた向き付けられた4次元多様体上で c_2 が整数周期を持つため、拡張の選択によらない。この定義にスピン構造は不要である。

自明束上で大域的な接続行列 A を使える場合には、

$$\text{CS}_{\text{ch}_2}[A] = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \left(A dA + \frac{2}{3} A^3 \right), \quad (4.2)$$

$$\text{CS}_{c_2}[A] = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \text{tr} \left(A dA + \frac{2}{3} A^3 \right) - (\text{tr } A) d(\text{tr } A) \right\} \quad (4.3)$$

と置けば

$$d \text{cs}_{\text{ch}_2}[A] = \text{ch}_2(A), \quad d \text{cs}_{c_2}[A] = c_2(A), \quad (4.4)$$

$$\text{CS}[A, \sigma] = \int_Y \text{cs}_{\text{ch}_2}[A] \pmod{1}, \quad \text{CS}_{c_2}[A] = \int_Y \text{cs}_{c_2}[A] \pmod{1} \quad (4.5)$$

となる．ここでは $\text{tr } F = d(\text{tr } A)$ を使った．積分するのは3次元上の3形式であり， $\text{tr } F^2$ という4形式をそのまま3次元上で積分するものではない．非自明束では局所式の積分だけで大域的な定義にはならず，式(2.1)または(4.1)を使う．

4.2 行列式線束へのスピン構造依存性の分離

$\det E$ 上の誘導接続を $a = \text{tr } A$ と書く．この a も一般には局所的な接続1形式であり，その曲率は大域的に $F(a) = \text{tr } F(A)$ である．行列式線束に対して

$$\text{CS}_{\det}[a, \sigma] := -\frac{1}{8\pi^2} \int_X F(\tilde{a})^2 = \frac{1}{2} \int_X c_1(\tilde{a})^2 \quad \text{in } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (4.6)$$

と定義する．これは奇数レベルの $U(1)$ スピンCS項に相当し，そのスピン構造変更則はBelov–Mooreの式とも一致する[4, Section 2.1.1].

式(1.5)を同じスピン拡張上で積分すると

$$\boxed{\text{CS}[A, \sigma] = \text{CS}_{\det}[\text{tr } A, \sigma] - \text{CS}_{c_2}[A] \quad \text{in } \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \quad (4.7)$$

を得る．この等式は非自明束についても成立する．右辺の第2項はスピン構造に依存せず，第1項の変更量が式(3.1)を与える．したがって， c_2 のCS項がスピン構造を必要としないことと， ch_2 のCS項が一般にスピン構造に依存することは矛盾しない．

整数類 c_1^2 に対応する通常のCS項を $\text{CS}_{c_1^2}[a]$ と書けば，

$$2 \text{CS}_{\det}[a, \sigma] = \text{CS}_{c_1^2}[a] \quad \text{in } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (4.8)$$

である．ただし， $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ では2倍写像の逆は一意ではないので，右辺を形式的に2で割るだけでは $\text{CS}_{\det}$ を定義できない．スピン構造を変えた際の1/2の差は，式(4.8)では消える．また，線束では $c_2 = 0$ なので $\text{CS}_{c_2} = 0$ である一方， $\text{CS}_{\det}$ は非自明になり得る．

5 4 + 1次元の電磁応答とバンドの直和

5.1 応答係数に現れるのは ch_2

非相互作用・電荷保存系の滑らかなBloch Hamiltonian $H(\mathbf{k})$ を考え，Fermi準位を0とし，全 $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^4$ でギャップが開いているとする．全軌道空間は有限階数の自明束とし，負エネルギーへの射影 $P(\mathbf{k})$ が定める占有束を E_{occ} と書く．占有束自体の自明性や $c_1(E_{\text{occ}}) = 0$ は仮定しない．局所正規直交フレーム u に対するBerry接続を $A_B = u^\dagger du$ とし，

$$\text{ch}_2[H] := \int_{\mathbb{T}^4} \text{ch}_2(A_B) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^4} \text{tr}(P(dP)^4) \in \mathbb{Z} \quad (5.1)$$

と定める．整数性は $\mathbb{T}^4$ の交差形式が偶であること，すなわち式(1.7)から従う．ここで補助的なスピン構造を選んでも，この4次元積分の値自体は変わらない．

松原グリーン関数 $G^{-1}(i\omega, \mathbf{k}) = i\omega - H(\mathbf{k})$ を用いると，

$$\text{ch}_2[H] = \frac{i}{480\pi^3} \int_{\mathbb{R}_\omega \times \mathbb{T}^4} \text{tr}[(G dG^{-1})^5] \quad (5.2)$$

である。積分の向きは $d\omega \wedge dk_1 \wedge \cdots \wedge dk_4$ とし、 d は周波数と運動量の両方に作用する。この表式と占有束の特性数の対応は文献[5, Section III.A and Appendix B]に基づく。本ノートの松原周波数および反Hermite接続の規約での係数は、付録Bで直接確認する。同文献で「second Chern number」と呼ばれる $\text{tr } F_B^2$ の積分は、本ノートでは $\text{ch}_2[H]$ であり、一般の $U(n)$ 束の c_2 の特性数とは区別する。

電荷と $\hbar$ を1とし、外部電磁ポテンシャルを実1形式 a_{em} , $f_{\text{em}} = da_{\text{em}}$ とする。文献[5]の向きと電荷の規約では、局所的な有効作用の該当項は

$$S_{\text{top}}[a_{\text{em}}] = \frac{\text{ch}_2[H]}{24\pi^2} \int_{M^5} a_{\text{em}} f_{\text{em}} f_{\text{em}} \quad (5.3)$$

であり、境界項を除いて $\delta S_{\text{top}} = \int \delta a_{\text{em}} J$ と書くと

$$J = \frac{\text{ch}_2[H]}{8\pi^2} f_{\text{em}} f_{\text{em}} \quad (5.4)$$

を得る。 J は電流の双対4形式である。 f_{em}^2 は微分形式として4次であり、電磁場に対する応答としては2次の非線形応答である。式(5.3)は大域的なポテンシャルが使える範囲での局所応答を記述する。一般の非自明な外部ゲージ束上で、この局所式だけを完全な有効作用の大域的定義とすることはここでは主張しない。

5.2 直和則と c_2 に置き換えられない理由

同じ基底上の複素束 E, F について、Chern指標の加法性とWhitneyの積公式は

$$\text{ch}_2(E \oplus F) = \text{ch}_2(E) + \text{ch}_2(F), \quad (5.5)$$

$$c_1(E \oplus F) = c_1(E) + c_1(F), \quad (5.6)$$

$$c_2(E \oplus F) = c_2(E) + c_2(F) + c_1(E) \smile c_1(F) \quad (5.7)$$

を与える[1]。従って、独立なバンド系の応答係数として加算されるのは ch_2 であり、 c_2 には余分な交差項がある。 $c_1 = 0$ ならば $\text{ch}_2 = -c_2$ となるが、これを一般の $U(n)$ 占有束に拡張してはならない。

例えば各 k_j を 2π 周期とする $\mathbb{T}^4$ 上で $x = [dk_1 dk_2 / (2\pi)^2]$, $y = [dk_3 dk_4 / (2\pi)^2]$ と置き、 $\int_{\mathbb{T}^4} xy = 1$ となる向きを取る。 $c_1(L) = x + y$ を持つ線束 L では

$$c_2(L) = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^4} \text{ch}_2(L) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^4} (x + y)^2 = 1 \quad (5.8)$$

である。この線束は十分大きい自明束の部分束として実現でき、その射影から $H = 1 - 2P_L$ を作れるため、占有束としても許される。一方、 $c_1(L_x) = x$, $c_1(L_y) = y$ とする二つの線束の直和では

$$\int_{\mathbb{T}^4} \text{ch}_2(L_x \oplus L_y) = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^4} c_2(L_x \oplus L_y) = 1 \quad (5.9)$$

となる。これらは解析的な特性類の計算であり、 ch_2 と c_2 の置き換えが単なる記号の変更ではないことを示す。

6 同じ束上の接続間の相対量

同じ束 $E \rightarrow Y$ 上の二つの接続 A_0, A_1 に対し、 $\alpha = A_1 - A_0$ は大域的な $\text{End}(E)$ 値1形式である。 $A_t = A_0 + t\alpha$ と置き、トランスグレーションにより

$$\text{CS}_{\text{rel}}[A_1, A_0] := -\frac{1}{4\pi^2} \int_Y \int_0^1 \text{tr}(\alpha F(A_t)) dt \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (6.1)$$

と定義できる。これは接続空間のアフィン構造だけを用い、スピン構造を必要としない。局所Chern–Simons形式の大域的存在も仮定しない。一般の接続の経路に対しても、閉じた Y 上ではこの積分は同じ端点を持つ経路の選択によらない。実際、二つの経路を接続空間の中でホモトピーし、 $Y \times [0, 1]^2$ 上の閉形式 $\text{ch}_2(F)$ にStokesの定理を適用すればよい。

円柱 $[0, 1] \times Y$ 上の接続の曲率は $F(A_t) + dt \alpha$ なので、

$$\text{CS}_{\text{rel}}[A_1, A_0] = \text{CS}[A_1, \sigma] - \text{CS}[A_0, \sigma] \quad \text{in } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (6.2)$$

となる。同じ束上では式(3.1)の右辺が両項で同じであるため、この差ではスピン構造依存性が相殺される。両接続への同時ゲージ変換に対しては実数値のまま不変であり、一方の接続だけをゲージ変換した場合の差は整数である。後者の整数性は、ゲージ変換を用いて束を貼り合わせた $Y \times S^1$ 上の ch_2 の積分に帰着する。この積多様体はスピンなので、式(1.8)が適用できる。

別々の境界上の束を比較する場合には、まず基底と束の同一視を指定する必要がある。向きを揃えた同じ Y 上に移した後、両項に同じスピン構造を使えば上の相殺が成立する。二つのスピン構造を独立に変更した場合まで相殺されるわけではない。従って、相対量だけが必要な議論では式(6.1)を直接用いることで、補助的な絶対CS項とそのスピン構造依存性の導入を避けられる。

A 拡張の存在の確認

ここでは、スピンbordismのAtiyah–Hirzebruchスペクトル系列を低次で計算する。用いる標準的な d_2 の規約は、整数ホモロジーをmod2還元した後の Sq^2 の双対である[6, Lemma 2.3.2]。 $n \geq 1$ に対して

$$E_{p,q}^2 = H_p(BU(n); \Omega_q^{\text{Spin}}(\text{pt})) \implies \Omega_{p+q}^{\text{Spin}}(BU(n)) \quad (A.1)$$

とする。低次の係数群は

$$\Omega_0^{\text{Spin}} = \mathbb{Z}, \quad \Omega_1^{\text{Spin}} = \mathbb{Z}_2, \quad \Omega_2^{\text{Spin}} = \mathbb{Z}_2, \quad \Omega_3^{\text{Spin}} = 0 \quad (A.2)$$

であり、 $BU(n)$ の整数ホモロジーは奇数次で0である。全次数3に寄与し得る項は $E_{2,1}^2 \simeq \mathbb{Z}_2$ だけである。これに入る微分

$$d_2 : H_4(BU(n); \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(BU(n); \mathbb{Z}_2) \quad (A.3)$$

を考える。 $\text{Sq}^2 \bar{c}_1 = \bar{c}_1^2$ であり、 $\mathbb{C}P^2$ 上の $\mathcal{O}(1) \oplus \mathbb{C}^{n-1}$ の分類写像が与えるホモロジー類に $\bar{c}_1^2$ を評価すると1となる。従って d_2 は全射であり、全次数3の項はすべて消える。これが式(2.2)を示す。ここで使った $\mathbb{C}P^2$ は $E_{4,0}^2$ の通常のホモロジー類を表すだけであり、スピン多様体である必要はない。

向き付けbordismについては $\Omega_q^{\text{SO}}(\text{pt}) = 0$ ($q = 1, 2, 3$) なので、同様のスペクトル系列から

$$\Omega_3^{\text{SO}}(BU(n)) = H_3(BU(n); \mathbb{Z}) = 0 \quad (A.4)$$

を得る。

B 松原グリーン関数の規格化の確認

式(5.2)を本ノートの規約で導出する。ギャップを保つ変形 $H_s = (1-s)H + sQ$, $Q = \text{sgn}(H) = 1 - 2P$ により、 H を Q に平坦化できる。このとき $Q^2 = 1$, $Q dQ = -dQ Q$ である。グリーン関数の5形式の変分は

$$\delta \text{tr}[(G dG^{-1})^5] = 5d \text{tr}[(G \delta G^{-1})(G dG^{-1})^4] \quad (B.1)$$

という完全微分であり, $|\omega| \rightarrow \infty$ で $G \sim (i\omega)^{-1}$ となるので周波数境界項は消える. 従って, H を Q に置き換えて積分を評価してよい.

平坦化したグリーン関数について

$$G = (i\omega - Q)^{-1} = -\frac{i\omega + Q}{1 + \omega^2}, \quad dG^{-1} = i d\omega - dQ \quad (\text{B.2})$$

である. 非零の5形式には $d\omega$ が一度だけ現れ, 巡回性からその5通りが等しく寄与する. また,

$$(G dQ)^2 = -\frac{(dQ)^2}{1 + \omega^2}, \quad \text{tr}(dQ)^4 = 0 \quad (\text{B.3})$$

を使うと

$$\text{tr}[(G dG^{-1})^5] = -\frac{5i d\omega}{(1 + \omega^2)^3} \text{tr}(Q(dQ)^4) \quad (\text{B.4})$$

$$= \frac{160i d\omega}{(1 + \omega^2)^3} \text{tr}(P(dP)^4) \quad (\text{B.5})$$

となる. ここで $\text{tr}(dQ)^4 = 0$ は, 1形式を巡回移動した際の符号から従う. 初等積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(1 + \omega^2)^3} = \frac{3\pi}{8} \quad (\text{B.6})$$

により,

$$\frac{i}{480\pi^3} \int_{\mathbb{R}_\omega \times \mathbb{T}^4} \text{tr}[(G dG^{-1})^5] = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^4} \text{tr}(P(dP)^4) \quad (\text{B.7})$$

を得る. これは式(5.1)であり, 周波数の規約に依存する i と符号を含めて式(5.2)を確認する.

参考文献

- [1] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes*, volume 76 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974. [doi:10.1515/9781400881826](https://doi.org/10.1515/9781400881826).
- [2] Michael F. Atiyah, Vijay K. Patodi, and Isadore M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 77(1):43–69, 1975. [doi:10.1017/S0305004100049410](https://doi.org/10.1017/S0305004100049410).
- [3] Jerome A. Jenquin. Classical Chern–Simons on manifolds with spin structure, 2005. [arXiv:math/0504524](https://arxiv.org/abs/math/0504524), Proposition 1.7.
- [4] Dmitriy Belov and Gregory W. Moore. Classification of abelian spin Chern–Simons theories, 2005. [arXiv:hep-th/0505235](https://arxiv.org/abs/hep-th/0505235), Section 2.1.1.
- [5] Xiao-Liang Qi, Taylor L. Hughes, and Shou-Cheng Zhang. Topological field theory of time-reversal invariant insulators. *Physical Review B*, 78:195424, 2008. [doi:10.1103/PhysRevB.78.195424](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.195424); [arXiv:0802.3537](https://arxiv.org/abs/0802.3537).
- [6] Peter Teichner. *Topological Four-Manifolds with Finite Fundamental Group*. PhD thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, March 1992. [Author’s online version](#), Lemma 2.3.2.