Cheeger–Simonsを読む

Ken Shiozaki

May 16, 2025

Abstract

[1]を追う．証明など詳細は[2]が詳しい．

1 微分キャラクター

1.1 $\mathbb{R}$の proper subring とは

Λを$\mathbb{R}$の proper subring とする．つまり，$\Lambda \subset \mathbb{R}, \Lambda \neq \mathbb{R}$であり，$\Lambda$は掛け算と足し算について閉じる．

Proposition 1.1. 加法群$\Lambda \subset \mathbb{R}$がある非自明な開区間$(a, b)$を含むならば，$\Lambda = \mathbb{R}$.

（証明） $a < b$とする．$\frac{a+b}{2} \in \Lambda$に注意． Λは加法群であるため，$(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}) = \{x - \frac{a+b}{2} \in \mathbb{R} | x \in (a, b)\} \subset \Lambda$である．任意の実数$r \in \mathbb{R}$に対して，$\frac{1}{n} r \in (\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2})$なる整数$n$が存在する． □

よってΛは連続区間を含まない． Λは離散であるか，稠密であるかのどちらかである．ここで，部分集合$S \subset \mathbb{R}$が離散であるとは，任意の$x \in S$に対して，ある$\epsilon > 0$が存在してϵ近傍$(x - \epsilon, x + \epsilon)$には$x$以外の$S$の点が含まれないことを指す．また，部分集合$S \subset \mathbb{R}$が稠密であるとは，任意の$x \in S$と任意の$\epsilon > 0$に対して，$y \in S$が存在して$|x - y| < \epsilon$となる，つまりいくらでも近い点が$S$内に存在することを指す．定義より，部分集合$S \in \mathbb{R}$は離散かつ稠密でありえない．

Proposition 1.2. 任意の加法部分群$\Lambda \in \mathbb{R}$は，離散か稠密である．

（証明） Λが離散でないと仮定する．つまり，ある$x \in \Lambda$が存在して，xにいくらでも近い点がΛ内に存在する．（任意の$\epsilon > 0$に対して$(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \Lambda \neq \emptyset$.） Λは加法群であるから，$x = 0$として良い．よっていくらでも0に近い点がΛ内に存在する．（任意の$\epsilon > 0$に対して$|x| < \epsilon$なる$x \in \Lambda$が存在する．）このようなxの整数倍を用いて，任意の実数$r \in \mathbb{R}$を任意精度で近似できる，つまり，任意の$\epsilon > 0$に対して，ある$x \in \Lambda, n \in \mathbb{Z}$が存在して$|r - nx| < \epsilon$かつ$nr \in \Lambda$とできるから，$\Lambda$は稠密である． □

Proposition 1.3. 任意の離散加法部分群$\Lambda \in \mathbb{R}$は，$\Lambda = \alpha\mathbb{Z}$である．

（証明） Λは離散であるから，ある$\epsilon > 0$に対して，$\alpha = \min_{x,y \in \Lambda, x \neq y} |x - y| > \epsilon$. 加法性より$\alpha \in \Lambda, \alpha\mathbb{Z} \subset \Lambda$である． $x \notin \alpha\mathbb{Z}$なる$x \in \Lambda$の存在を仮定すると，$\alpha$の定義に反する． □

一方で，稠密なΛは有理数全体の集合$\mathbb{Q}$とは限らない．例えば，$\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{n + m\sqrt{2} | n, m \in \mathbb{Z}\}$は明らかに加法部分群であるが，無理数を含みまた$\alpha\mathbb{Z}$でもないため離散ではなく稠密．また，$(n + \sqrt{2}m)(n' + \sqrt{2}m') = (nn' + 2mm') + \sqrt{2}(nm' + mn') \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$であるので，$\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$は部分環である．

1.2 準備

1.2.1 記号p, r, ι

短完全列

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{r} \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}/\Lambda \to 0. \tag{1.1}$$

射影$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\Lambda$，埋め込み$r : \Lambda \to \mathbb{R}$はそれぞれコチェインへの準同型写像

$$p_* : C^k(M, \mathbb{R}) \to C^k(M, \mathbb{R}/\Lambda), \quad (p_* f)(\sigma) := p(f(\sigma)), \tag{1.2}$$
$$r_* : C^k(M, \Lambda) \to C^k(M, \mathbb{R}), \quad (r_* f)(\sigma) := r(f(\sigma)), \tag{1.3}$$

を誘導する．いずれもチェインマップである：

$$((p_*\delta_{\mathbb{R}} - \delta_{\mathbb{R}/\Lambda} p_*) f)(\sigma) = p(\delta_{\mathbb{R}} f(\sigma)) - (p_* f)(\partial\sigma) = p(f(\partial\sigma)) - p(f(\partial\sigma)) = 0, \tag{1.4}$$
$$((r_*\delta_{\Lambda} - \delta_{\mathbb{R}} r_*) f)(\sigma) = r(\delta_{\Lambda} f(\sigma)) - (r_* f)(\partial\sigma) = r(f(\partial\sigma)) - r(f(\partial\sigma)) = 0. \tag{1.5}$$

de Rham準同型を

$$\iota : \Omega^k(M) \to C^k(M, \mathbb{R}), \quad \omega \mapsto \iota(\omega) = \left(\sigma \mapsto \int_\sigma \omega\right) \tag{1.6}$$

と定義する． ιもチェインマップである：

$$((\iota d - \delta_{\mathbb{R}} \iota)\omega)(\sigma) = \int_\sigma d\omega - \iota\omega(\partial\sigma) = \int_\sigma d\omega - \int_{\partial\sigma} \omega = 0. \tag{1.7}$$

以下，文脈から明らかな場合は$\delta_{\mathbb{R}}, \delta_{\Lambda}, \delta_{\mathbb{R}/\Lambda}$は全て$\delta$と書く．

1.2.2 射影的対象

一般に，自由アーベル群Pに対して$\mathrm{Hom}(P, -)$は完全関手であり，以下が短完全列：

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, \Lambda) \xrightarrow{r_*} \mathrm{Hom}(P, \mathbb{R}) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}(P, \mathbb{R}/\Lambda) \to 0. \tag{1.8}$$

よって，

- $f \in \mathrm{Hom}(P, \Lambda)$に対して$r_* f = 0$ならば$f = 0$.
- $g \in \mathrm{Hom}(P, \mathbb{R})$に対して$p_* g = 0$ならば，ある$f \in \mathrm{Hom}(P, \Lambda)$が存在して$g = r_* f$.
- （自由アーベル群の射影的性質）任意の$f \in \mathrm{Hom}(P, \mathbb{R}/\Lambda)$に対してある$\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(P, \mathbb{R})$が存在して$f = p_* \tilde{f}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d] \\ P \arrow[ur, dashed, "{}^\exists \tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}/\Lambda \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

以下では$P = C_k(M), Z_k(M)$として上の事実を用いる．（$C_k(M)$は立方体$\sigma : I^k \to M$の集合を基底とする自由アーベル群であり，一般論として，自由アーベル群の部分群は自由アーベル群．）

1.2.3 単射的対象

一般論として，$\mathbb{R}$は$\mathbb{Z}$加群として単射的対象．よって，単射$A \to B$と準同型$A \to \mathbb{R}$に対して以下を可換にする$\tilde{f}$が存在する．

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, dashed, "^\exists \tilde{f}"] \\ A \arrow[ur, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

以下では

$$\begin{tikzcd} & C_k(M) \arrow[d, dashed, "^\exists \tilde{f}"] \\ Z_k(M) \arrow[ur, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

の形で用いる．

1.2.4 $f|_{Z_k} = 0$ならば$f = \delta g$について

- 以下をアーベル群の完全列とする．

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C. \tag{1.12}$$

$\mathrm{Hom}(M, -)$は左完全な共変関手である．つまり，以下は完全列：

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M, C). \tag{1.13}$$

（証明） $\alpha : M \to A$に対して，$f_*\alpha = f \circ \alpha = 0$とする．すると，任意の$m \in M$に対して$0 = f_*\alpha(m) = f(\alpha(m))$であるが，$f$は単射であるから$\alpha(m) = 0$より$\alpha = 0$． $\alpha : M \to A$とする． $g \circ f = 0$より$m \in M$に対して$g_* f_* \alpha(m) = g \circ f(\alpha(m)) = 0$であるから$g_* f_* = 0$. $\beta : M \to B$に対して$g_*\beta = 0$とする．$m \in M$に対して$g_*\beta(m) = g(\beta(m)) = 0$． $\ker g = \mathrm{im}\, f$であるからある$a_m \in A$が存在して$\beta(m) = a_m$. 対応$m \mapsto a_m$の準同型性はβの線形性より：$a_m + a_{m'} = \beta(m) + \beta(m') = \beta(m + m') = a_{m+m'}$. □

- 以下をアーベル群の完全列とする．

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0. \tag{1.14}$$

$\mathrm{Hom}(-, A)$は左完全な反変関手である．つまり，以下は完全列：

$$\mathrm{Hom}(M, A) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}(N, A) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Hom}(L, A) \leftarrow 0. \tag{1.15}$$

Wiebelの教科書をみると，「$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(M, A)$より．」とのみ書かれているが，直接証明を確認する．

（証明） $\gamma : L \to A$に対して，$g^*\gamma = 0$とすると任意の$n \in N$に対して$g^*\gamma(n) = \gamma(g(n)) = 0$. gは全射であるから$\gamma = 0$. $\gamma : L \to A$に対して，$f^* g^* \gamma(m) = \gamma(f \circ g(m)) = \gamma(0) = 0$であるので$f^* g^* = 0$. $\beta \in \ker f^*$とする．つまり，任意の$m \in M$に対して$f^*\beta(m) = \beta(f(m)) = 0$. つまり，$\beta$は$\mathrm{im}\, f = \ker g$上ではゼロ． gは全射であるから，任意の$l \in L$に対して$l = g(n_l)$なる$n_l \in N$が存在する． $\gamma : L \to A$を

$$\gamma(l) = \beta(g(n_l)) = g^*\beta(n_l) \tag{1.16}$$

と定義する． Well-definedであることは，$g(n_l') = g(n_l)$とすると$n_l - n_l' \in \ker g = \operatorname{im} f$より$g^*(\beta(n_l)) - g^*(\beta(n_l')) = \beta(g(n_l - n_l')) = 0$. 準同型性は$g(n_l + n_{l'}) = g(n_l) + g(n_{l'}) = l + l'$より$n_{l+l'} = n_l + n_{l'}$から． □

後者を以下に適用する． Z_kの定義より次は完全列：

$$0 \to Z_k(M) \xrightarrow{i} C_k(M) \xrightarrow{\partial} B_{k-1}(M) \to 0. \tag{1.17}$$

アーベル群Aに対して関手$\mathrm{Hom}(-, A)$の左完全性より以下は完全列：

$$\mathrm{Hom}(Z_k(M), A) \xleftarrow{i^*} \mathrm{Hom}(C_k(M), A) \xleftarrow{\partial^*(=\delta)} \mathrm{Hom}(B_{k-1}(M), A) \leftarrow 0. \tag{1.18}$$

ここでi^*は制限写像である．上を適用すると$\ker i^* = \operatorname{im} \delta$. よってコチェイン$f : C^k(M, A)$が$Z_k(M)$への制限に対して$i^* f = f|_{Z_k(M)} = 0$を満たすとき，ある$g : B_{k-1} \to A$が存在して

$$f = \delta g = g \circ \partial \tag{1.19}$$

と書くことができる．特に，$A = \mathbb{R}$のときは$\mathbb{R}$の単射性より定義域を$C_{k-1}(M)$に拡張することができる．結局，以下が示された：

- $f \in C^k(M, \mathbb{R})$の$Z_k(M)$への制限がゼロ，$f|_{Z_k(M)} = 0$，であるならば，ある$g \in C^{k-1}(M, \mathbb{R})$が存在して$f = \delta g$.

以下の形も用いる．

$$\mathrm{Hom}(Z_k(M), \mathbb{R}/\Lambda) \xleftarrow{i^*} \mathrm{Hom}(C_k(M), \mathbb{R}/\Lambda) \xleftarrow{\partial^*(=\delta)} \mathrm{Hom}(B_{k-1}(M), \mathbb{R}/\Lambda) \leftarrow 0. \tag{1.20}$$

1.3 $p_* \iota$は単射

k形式$\omega \in \Omega^k(M)$に対して$p_* \iota \omega = 0$であれば$\ker p_* = \operatorname{im} r_*$よりある$c \in C^k(M, \Lambda)$が存在して

$$\iota \omega = r_* c. \tag{1.21}$$

これは任意の特異立方体$\sigma : I^k \to M$に対して

$$\int_\sigma \omega = c(\sigma) \in \Lambda \tag{1.22}$$

と等価であるが，真部分環Λは連続区間(a, b)を含まないので，仮にωが非ゼロのk形式とすると，矛盾する．よって，

$$\omega = 0 \tag{1.23}$$

が成立するため，

$$p_* \iota : \Omega^k(M) \to C^k(M, \mathbb{R}/\Lambda) \tag{1.24}$$

は単射．また，r_*の単射性より

$$\iota \omega = r_* c \quad \Rightarrow \quad c = 0 \tag{1.25}$$

も従う．

1.3.1 Bockstein準同型

$$B : H^k(M, \mathbb{R}/\Lambda) \to H^{k+1}(M, \Lambda) \tag{1.26}$$

をBockstein準同型とする．具体的には，$a \in Z^k(M, \mathbb{R}/\Lambda)$に対して$p_*\tilde{a} = a$なる$\tilde{a} \in C^k(M, \mathbb{R})$をひとつ選び，$p_*\delta\tilde{a} = \delta p_*\tilde{a} = \delta a = 0$より$\delta\tilde{a} = r_*c$なる$c \in C^k(M, \Lambda)$が存在するが，

$$B([a]) := [c] \tag{1.27}$$

と定義される． $r_*\delta c = 0$よりcはコサイクルであることに注意．取り替え$\tilde{a} \mapsto \tilde{a} + r_*b, b \in C^k(M, \Lambda)$から生じる変化分は$\delta r_*b = r_*\delta b$よりコバウンダリ．取り替え$a \mapsto a + \delta d = a + d \circ \partial$から生じる変化分は，$d : B_{k-1} \to \mathbb{R}/\Lambda$の$C_{k-1} \to \mathbb{R}$への拡張を$\tilde{d} \in C^{k-1}(M, \mathbb{R})$と書くと，$p_*\delta\tilde{d} = \delta d$. すると$\delta\tilde{a} \mapsto \delta\tilde{a} + \delta^2\tilde{d} = \delta\tilde{a}$となり，$a$の取り方には依存しない．

1.4 メモ

Abel群Gが可除（divisible）とは，任意の$g \in G$，任意の$n \in \mathbb{N}$に対して，ある$h \in G$が存在して$nh = g$なること．つまり，任意の元が非ゼロの整数で割れるということ．

Abel群Gが単射的（injective）であるとは，任意の単射準同型$f : A \to B$と任意の準同型$g : A \to G$に対して，ある準同型$h : B \to G$が存在して$f = g \circ i$なること．

Abel群Gが可除であることと単射的であることは同値．

$\mathbb{R}$は$\mathbb{Z}$加群として単射的．

自由$\mathbb{Z}$加群は射影的．

1.5 微分キャラクターの構造定理

Definition 1.4.

$$\hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda) := \{f \in \mathrm{Hom}(Z_k(M), \mathbb{R}/\Lambda) | {}^\exists\omega_f \in \Omega^{k+1}(M) \text{ s.t. } f \circ \partial = p_*\iota\omega_f\}. \tag{1.28}$$

ここで，

$$C_{k+1}(M) \xrightarrow{\partial} B_k(M) \subset Z_k(M) \xrightarrow{f} \mathbb{R}/\Lambda \tag{1.29}$$

に注意． [1]のTheorem 1.1を少しずつ追う．

Proposition 1.5. $f \in \mathrm{Hom}(Z_k(M), \mathbb{R}/\Lambda)$に対して，ある$T_f \in C^k(M, \mathbb{R})$が存在して，

$$p_*T_f|_{Z_k(M)} = f. \tag{1.30}$$

（証明）まず，任意の準同型写像$f : Z_k(M) \to \mathbb{R}/\Lambda$は準同型写像$\tilde{f} : Z_k(M) \to \mathbb{R}$に拡張できることに注意する．まず，$Z_k(M) \subset C_k(M)$であり，$C_k(M)$は（非退化）立方体$\sigma : I^k \to M$によって生成される自由アーベル群であり，一般論として自由アーベル群の部分群は自由アーベル群であるから，$Z_k(M)$も基底をもつ，つまり，集合$\mathcal{S}$によって生成される自由アーベル群である．各$s \in \mathcal{S}$に対してリフト$\mathbb{R}/\Lambda \ni f(s) \mapsto \widetilde{f(s)} \in \mathbb{R}$をひとつ決めて，

$$\tilde{f}(s) := \widetilde{f(s)} \tag{1.31}$$

と定義し，一般の$\sigma \in Z_k(M)$に対しては線形に拡張する．よって

$$p_* \tilde{f} = f \tag{1.32}$$

なる$\tilde{f}$が得られた[1]：

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R} \arrow[d] \\
Z_k(M) \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}/\Lambda
\end{tikzcd} \tag{1.33}$$

$\mathbb{R}$は可除であるから，単射的であり，単射$Z_k(M) \to C_k(M)$に対して，準同型写像$\tilde{f} : Z_k(M) \to \mathbb{R}$の定義域を拡張できる：

$$\begin{tikzcd}
& C_k(M) \arrow[d, dashed, "\exists T_f \in C^k(M,\mathbb{R})"] \\
Z_k(M) \arrow[ur] \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd} \tag{1.34}$$

よって

$$T_f|_{Z_k(M)} = \tilde{f} \tag{1.35}$$

なるT_fが得られた．（制限写像とp_*は可換であるから，$p_*(T_f|_{Z_k(M)}) = (p_* T_f)|_{Z_k(M)}$であり，$p_* T_f|_{Z_k(M)}$と書くことが正当化されることに注意．） □

以下，T_fをfの表現と呼ぶことがある．

Proposition 1.6. $f \in \hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda)$に対して，$f \circ \partial = p_* \iota \omega_f$なる$\omega_f \in \Omega^{k+1}(M)$は閉形式，かつ$\Lambda$周期．つまり，

$$d\omega_f = 0, \tag{1.36}$$

$$\int_\sigma \omega_f \in \Lambda \text{ for all } \sigma \in Z_{k+1}(M). \tag{1.37}$$

（証明） $f = p_* T_f|_{Z_k(M)}$なる$T_f \in C^k(M, \mathbb{R})$をひとつ選ぶ． $\partial C_{k+1}(M) = B_k(M) \subset Z_k(M)$に注意すると，

$$p_* \delta T_f = \delta p_* T_f = p_* T_f \circ \partial = f \circ \partial = p_* \iota \omega_f. \tag{1.38}$$

よって，ある$c_f \in C^{k+1}(M, \Lambda)$が存在して，

$$\delta T_f = \iota \omega_f - r_* c_f. \tag{1.39}$$

これから

$$0 = \delta^2 T_f = \delta \iota \omega_f - \delta r_* c_f = \iota d\omega_f - r_* \delta c_f, \tag{1.40}$$

つまり，

$$\iota d\omega_f = r_* \delta c_f. \tag{1.41}$$

よって1.3節の議論より

$$d\omega_f = 0, \quad \delta c_f = 0. \tag{1.42}$$

[1]一般論(1.9)を適用するだけだが，構成的な証明をメモした．

Λ周期性は任意の$\sigma \in Z_{k+1}(M)$に対して,

$$\int_\sigma \omega_f = (\iota\omega_f)(\sigma) = (\delta T_f + r_* c_f)(\sigma) = (r_* c_f)(\sigma) \in \Lambda \tag{1.43}$$

より. □

Λ周期の閉形式を

$$\Omega^k_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda := \{\omega \in \Omega^k_{\mathrm{cl}}(M) | \int_\sigma \omega \in \Lambda \text{ for all } \sigma \in Z_k(M)\} \tag{1.44}$$

$$= \{\omega \in \Omega^k(M) | d\omega = 0, \int_\sigma \omega \in \Lambda \text{ for all } \sigma \in Z_k(M)\} \tag{1.45}$$

と書く. 微分キャラクターの定義は,

$$\hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda) = \{f \in \mathrm{Hom}(Z_k(M), \mathbb{R}/\Lambda) | {}^\exists \omega_f \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda \text{ s.t. } f \circ \partial = p_* \iota \omega_f\} \tag{1.46}$$

と書き換えることができる.

Proposition 1.7. ω_fは一意. 同じことだが, $p_*\iota : \Omega^{k+1}(M) \to C^{k+1}(M, \mathbb{R}/\Lambda)$は単射.

(証明) ω'_fも$f \circ \partial = p_* \iota \omega'_f$を満たすとすると, $p_*\iota(\omega_f - \omega'_f) = 0$であるが, $p_*\iota$は単射であるので. □

c_fの定めるコホモロジー類を

$$u_f := [c_f] \in H^{k+1}(M, \Lambda) \tag{1.47}$$

と書く.

$$[\iota\omega_f] = [r_* c_f] = r_*[c_f] = r_* u_f \tag{1.48}$$

に注意.

Proposition 1.8. u_fは一意.

(証明) c_fは関係式

$$r_* c_f = \delta T_f - \iota\omega_f \tag{1.49}$$

により定まる. ω_fは一意であるが, T_fに任意性がある. $T'_f \in C^k(M, \mathbb{R})$を$p_* T'_f|_{Z_k(M)} = f$を満たす別の選び方とし,

$$r_* c'_f = \delta T'_f - \iota\omega_f \tag{1.50}$$

とする. すると,

$$p_*(T_f - T'_f)|_{Z_k(M)} = 0. \tag{1.51}$$

よってある$d : Z_k(M) \to \Lambda$が存在して,

$$(T_f - T'_f)|_{Z_k(M)} = r_* d_0. \tag{1.52}$$

準同型$r_* d_0 : Z_k \to \mathbb{R}$は$\mathbb{R}$の$\mathbb{Z}$加群としての単射性より定義域を拡張でき，

$$r_* d_0 = d_1|_{Z_k(M)} \tag{1.53}$$

なる$d_1 \in C^k(M, \mathbb{R})$が存在する．よって，

$$(T_f - T'_f - d_1)|_{Z_k(M)} = 0. \tag{1.54}$$

すると1.2.4節の注意よりある$s \in C^{k-1}(M, \mathbb{R})$が存在して

$$T_f - T'_f - d_1 = \delta s. \tag{1.55}$$

よって，

$$r_*(c'_f - c_f) = \delta T'_f - \delta T_f = -\delta d_1 \tag{1.56}$$

はコバウンダリであるから，r_*の単射性より

$$[c'_f] = [c_f]. \quad \square \tag{1.57}$$

$f \in \hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda)$から$\omega_f, u_f$が一意的に定まることが示された．表現$T_f$の不定性も整理しておく．

Proposition 1.9. fの表現T_fの不定性は，

$$T_f \mapsto T_f + r_* d + \delta s, \quad d \in C^k(M, \Lambda), \quad s \in C^{k-1}(M, \mathbb{R}). \tag{1.58}$$

（証明）逆に辿る． $T = T'_f - T_f$は

$$p_* T|_{Z_k(M)} = 0 \tag{1.59}$$

を満たす．完全列(1.20)より，

$$p_* T = \delta b, \quad b \in C^{k-1}(M, \mathbb{R}/\Lambda) \tag{1.60}$$

と書くことができる．さらに$b \mapsto s \in C^{k-1}(M, \mathbb{R}), p_* s = b$を取ると

$$p_* T = \delta p_* s = p_* \delta s, \quad s \in C^{k-1}(M, \mathbb{R}). \tag{1.61}$$

よって$p_*(T - \delta s) = 0$であるから，$d \in C^k(M, \Lambda)$が存在して

$$T - \delta s = r_* d. \quad \square \tag{1.62}$$

さて，

$$\delta_1 : \hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda) \to \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda, \quad \delta_1(f) := \omega_f, \tag{1.63}$$
$$\delta_2 : \hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda) \to H^{k+1}(M, \Lambda), \quad \delta_2(f) := u_f = [c_f], \tag{1.64}$$

と定義する．

Proposition 1.10. $\omega \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda$は$u \in H^{k+1}(M, \Lambda)$を定める．

（証明） $\omega \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda$とする． Λ周期性より$p_* \iota\omega|_{Z_k(M)} = 0$. 完全列(1.20)において $\iota\omega \in \ker i = \operatorname{im} \delta$であるから，

$$^\exists T : B_k(M) \to \mathbb{R}/\Lambda \quad \text{s.t.} \quad p_* \iota\omega = \delta T. \tag{1.65}$$

$B_k(M)$は自由$\mathbb{Z}$加群であるから$\tilde{T} : B_k(M) \to \mathbb{R}$が存在して$p_*\tilde{T} = T$である．よって，

$$p_*(\iota\omega - \delta\tilde{T}) = 0. \tag{1.66}$$

よってある$c \in C^{k+1}(M, \Lambda)$が存在して

$$\iota\omega - \delta\tilde{T} = r_*c. \tag{1.67}$$

$r_*\delta c = 0$とr_*の単射性より$u = [c]$が定まる． T'を別の選び方として$r_*c' = \iota\omega - \delta T'$とすると$r_*(c - c') = -\delta(T - T')$であり，$u$は一意. □

Proposition 1.11. $u \in H^{k+1}(M, \Lambda)$は$[\omega] \in H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M)$, $\omega \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda$を定める.

（証明） $u \in H^{k+1}(M, \Lambda)$に対して$r_*u \in H^{k+1}(M, \mathbb{R})$. 同型$\iota^{-1} : H^{k+1}(M, \Lambda) \cong H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M)$により$\iota^{-1}(r_*u) = [\omega]$なる$[\omega] \in H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M)$が存在する． $u = [c]$とすると，$r_*c = \iota\omega + \delta T$であるから，

$$\int_{z \in Z_{k+1}(M)} \omega = (r_*c - \delta T)(z) = c(z) \in \Lambda \tag{1.68}$$

よりωはΛ周期. □

Proposition 1.12. δ_1, δ_2は全射.

（証明） 上記の 2 命題より，$\omega \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda, u \in H^{k+1}(M, \Lambda)$のどちらか一方が与えられると$[\iota\omega] = r_*u$なる$\omega, u$の対が定まる． $u = [c], c \in C^{k+1}(M, \Lambda)$とすると

$$\delta T = \iota\omega - r_*c, \quad T \in C^k(M, \mathbb{R}) \tag{1.69}$$

が定まる．さて

$$f := p_*T|_{Z_k(M)} \tag{1.70}$$

とする．すると

$$f(\partial\sigma \in B_k(M) \subset Z_k(M)) = p_*T(\partial\sigma) = p_*\delta T(\sigma) = p_*(\iota\omega - r_*c)(\sigma) = p_*\iota\omega(\sigma) \tag{1.71}$$

より$f \circ \partial = p_*\iota\omega$となり，$f \in \hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda)$.

cの取り替えに依存しないことを示すために，まずfがTの選び方に依存しないことを示す. $T \mapsto T + \delta S$に対して

$$f(z \in Z_k(M)) = p_*T(z) \mapsto p_*T(z) + p_*\delta S(z) = p_*T(z) + p_*S(\partial z) = p_*T(z) \tag{1.72}$$

よりfは$[T] \in H^k(M, \mathbb{R})$にのみ依存する．また，$c \mapsto c + c + \delta b$は$T \mapsto T + \delta r_*b$に他ならないため，$f$は$u = [c] \in H^{k+1}(M, \Lambda)$のみで決まる. □

証明過程により以下も示されている.

Corollary 1.13. 3 つ組

$$(T, c, \omega) \in C^k(M, \mathbb{R}) \times C^{k+1}(M, \Lambda) \times \Omega^{k+1}(M) \tag{1.73}$$

であり

$$\delta T = \iota\omega - r_*c \tag{1.74}$$

を満たすものは微分キャラクター$f := p_*T|_{Z_k(M)} \in \hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda)$を定める． fは$[T] \in H^k(M, \mathbb{R}), [c] \in H^{k+1}(M, \Lambda)$にのみ依存する.

ここで，$\omega \in \Omega^{k+1}(M)$としたが関係式$\delta T = \iota\omega - r_*c$より$\omega \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda$が示されるのは上述の通り.

$v\in H^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)$に対して，$v=[s]$なる$s\in Z^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)$をひとつ選び，

$$f=s|_{Z_k(M)} \tag{1.75}$$

とすると，sの取り替え$s\mapsto s+\delta t$は$\delta t(z\in Z_k(M))=0$よりfはsの取り方に依存せず，また$f(\partial\sigma)=0$よりfは$\delta_1(f)=0$なる微分キャラクター．これを

$$H^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)\xrightarrow{i_1}\hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda),\quad v=[s]\mapsto i_1([s])=s|_{Z_k(M)} \tag{1.76}$$

と書く．明らかにi_1は単射．また，sの$\mathbb{R}$値への拡張$p_*\tilde{s}=s,\tilde{s}\in C^k(M,\mathbb{R})$を取ると，$f=i_1([s])$の表現は$T_f=\tilde{s}$．このとき$\delta\tilde{s}=-r_*c_f$によって決まる$c\in C^{k+1}(M,\Lambda)$のコホモロジー類$-u_f=-[c_f]$は，$[s]$のBockstein準同型に他ならない：

$$u_f=-B([s]). \tag{1.77}$$

よって，$f=i_1([s])$は，$\delta_1(f)=0,\delta_2(f)=-B([s])$なる微分キャラクターである．以下が示された．

Proposition 1.14.

$$\delta_2\circ i_1=-B. \tag{1.78}$$

Proposition 1.15. 以下の完全列がある：

$$0\to H^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)\xrightarrow{i_1}\hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)\xrightarrow{\delta_1}\Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda\to 0. \tag{1.79}$$

（証明） i_1の単射性，δ_1の全射性，$\delta_1\circ i_1=0$は既に示した． $f\in\ker\delta_1$，つまり$\omega_f=0$とする．$f=p_*T_f|_{Z_k(M)}$なる表現T_fを取ると，$\delta T_f=-r_*c_f$．すると

$$\delta T_f(\sigma)=T_f(\partial\sigma)=\delta T_f(\sigma)=-r_*c_f(\sigma)\in\Lambda \tag{1.80}$$

であるから$\delta p_*T_f=p_*\delta T_f=0$より，コサイクル$p_*T_f\in Z^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)$が定まる．取り替え$T_f\mapsto T'_f+\delta S$に対して変化分$p_*\delta S=\delta p_*S$はコバウンダリであるから，$f$はコホモロジー類$[p_*T_f]\in H^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)$を定める． $i_1([p_*T_f])=p_*T_f|_{Z_k(M)}$だった． □

k形式$\alpha\in\Omega^k(M)$に対して，

$$f_\alpha=p_*\iota\alpha|_{Z_k(M)}, \tag{1.81}$$

つまり，

$$f_\alpha(z\in Z_k(M))=p\left(\int_z\alpha\right) \tag{1.82}$$

と定めると，

$$f_\alpha(\partial\sigma)=p_*\iota\alpha(\partial\sigma)=p_*\iota d\alpha(\sigma) \tag{1.83}$$

であるからf_αは$\delta_1(f_\alpha)=d\alpha$なる微分キャラクター$f_\alpha\in\hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)$． $i_2(\alpha)=f_\alpha$と書く． $\beta\in\Omega^k_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda$に対して定義より$\int_{z\in Z_k(M)}\beta(\in\Lambda)\xrightarrow{p}0$であるから$i_2$は準同型

$$\Omega^k(M)/\Omega^k_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda\xrightarrow{i_2}\hat{H}^2(M,\mathbb{R}/\Lambda),\quad \alpha\mapsto p_*\iota\alpha|_{Z_k(M)}, \tag{1.84}$$

を定める． $i_2(\alpha)=0$, つまり任意の$z\in Z_k(M)$に対して$\int_z\alpha\in\Lambda$とすると，特に，任意の$\partial\sigma\in B_k(M)$に対して$\int_{\partial\sigma}\alpha=\int_\sigma d\alpha=\iota d\alpha(\sigma)\in\Lambda$であるから，$p_*\iota$の単射性より$d\alpha=0$．よって$\alpha$は閉形式かつ$\Lambda$周期．したがって$i_2$の核は$\Omega^k_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda$であり，$i_2$は単射．また，表示$f=i_2(\alpha)$の表現として$T_f=\iota\alpha$を取ることができるから，$u_f=\delta_2(f)=0$.

Proposition 1.16.

$$\delta_1 \circ i_2 = d. \tag{1.85}$$

Proposition 1.17. 以下の完全列がある：

$$0 \to \Omega^k(M)/\Omega^k_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda \xrightarrow{i_2} \hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda) \xrightarrow{\delta_2} H^{k+1}(M,\Lambda) \to 0. \tag{1.86}$$

（証明） i_2の単射性，δ_2の全射性，$\delta_2 \circ i_2 = 0$は既に示した． $f \in \ker \delta_2$，つまり，$p_* T_f|_{Z_k(M)} = f$なるT_fに対して$\delta T_f = \iota\omega_f + r_*\delta e$を仮定する． $\iota\omega_f = \delta(T_f - r_* e)$であるがde Rhamの定理より$\omega_f = d\theta$. よって$\delta(T_f - r_* e - \iota\theta) = 0$であるからコサイクル$a = T_f - r_* e - \iota\theta \in Z^k(M,\mathbb{R})$が定まる．再びde Rhamの定理より，$a = \iota\phi + \iota d\eta$なる$\phi \in \Omega^k_{\mathrm{cl}}(M), \eta \in \Omega^{k-1}(M)$が存在する．よって，

$$T_f = \iota(\phi + \theta + d\eta) + r_* e. \tag{1.87}$$

したがって，

$$\delta T_f = \iota d(\phi + \theta) + r_*\delta e. \tag{1.88}$$

よって$f = i_2(\phi + \theta) = p_*\iota(\phi+\theta)|_{Z_k(M)}$. □

次を導入する．

Definition 1.18.

$$R^k(M,\Lambda) := \{(\omega, u) \in \Omega^k_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda \times H^k(M,\Lambda) | r_* u = [\iota\omega]\}, \tag{1.89}$$
$$R^*(M,\Lambda) := \oplus R^k(M,\Lambda). \tag{1.90}$$

Proposition 1.19. $R^*(M,\Lambda)$は積

$$(u,\omega)\cdot(v,\phi) = (u \cup v, \omega \wedge \phi) \tag{1.91}$$

に対して環構造を持つ．

（証明）

$$r_*(u \cup v) = r_* u \cup r_* v = [\iota\omega] \cup [\iota\phi] = \iota[\omega] \cup \iota[\phi] = \iota([\omega] \cup [\phi]) = \iota[\omega \wedge \phi] = [\iota(\omega\wedge\phi)]. \quad \square \tag{1.92}$$

Proposition 1.20. 次の完全列がある．

$$0 \to H^k(M,\mathbb{R})/r_*[H^k(M,\Lambda)] \xrightarrow{i_{12}} \hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda) \xrightarrow{(\delta_1,\delta_2)} R^{k+1}(M,\Lambda) \to 0. \tag{1.93}$$

（証明）系1.13より(δ_1,δ_2)の全射性はOK. $[T] \in H^k(M,\mathbb{R})$に対して$i_{12}$を

$$f = i_{12}([T]) := p_* T|_{Z_k(M)} \tag{1.94}$$

と定義する． $\delta S(z \in Z_k(M)) = 0$であるから$T$の選び方には依らない． $\delta T = 0$であるから$p_* T(\partial\sigma) = p_*\delta T(\sigma) = 0$となり，$f \in \hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)$かつ$\omega_f = 0, u_f = 0$より$(\delta_1,\delta_2)\circ i_{12} = 0$. $i_{12}([T]) = 0$とすると$p_* T|_{Z_k(M)} = 0$. よって(1.20)とB_{k-1}の射影性と$\mathbb{R}$の単射性より$b \in \mathrm{Hom}(C_{k-1}(M),\mathbb{R})$が存在して$p_* T = p_* b \circ \partial$. よってある$c \in C^k(M,\Lambda)$が存在して

$$T = \delta b + r_* c. \tag{1.95}$$

$r_*\delta c = \delta T = 0$より$c$はコサイクルであり$[c] \in H^k(M,\Lambda)$を定める．$[T] = r_*[c]$であるから，$i_{12}$の核は$r_*[H^k(M,\Lambda)]$.

$f \in \hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)$に対して$\delta_1(f) = 0, \delta_2(f) = 0$とすると，$f$の表現は$f = p_*T_f|_{Z_k(M)}$は$\delta T_f = r_*\delta e, e \in C^{k-1}(M,\Lambda)$となる．したがって$T_f$はコホモロジー類$[T_f] \in H^k(M,\mathbb{R})$を定め，$i_{12}([T_f]) = f$である． □

以下が証明された.

Theorem 1.21. 以下の完全列がある.

$$0 \to H^k(M,\mathbb{R}/\Lambda) \xrightarrow{i_1} \hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda) \xrightarrow{\delta_1} \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda \to 0, \tag{1.96}$$
$$0 \to \Omega^k(M)/\Omega^k_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda \xrightarrow{i_2} \hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda) \xrightarrow{\delta_2} H^{k+1}(M,\Lambda) \to 0, \tag{1.97}$$
$$0 \to H^k(M,\mathbb{R})/r_*[H^k(M,\Lambda)] \xrightarrow{i_{12}} \hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda) \xrightarrow{(\delta_1,\delta_2)} R^{k+1}(M,\Lambda) \to 0. \tag{1.98}$$

以下が成立する．ここで，i_1, i_2, i_{12}の定義は

$$i_1([s]) = s|_{Z_k(M)}, \tag{1.99}$$
$$i_2(\alpha) = p_*\iota\alpha|_{Z_k(M)}, \tag{1.100}$$
$$i_{12}([T]) = p_*T|_{Z_k(M)}. \tag{1.101}$$

$f \in \hat{H}^k(M,\mathbb{R}/\Lambda)$の表現を$T_f \in C^k(M,\mathbb{R})$，$f = p_*T_s|_{Z_k(M)}$とすると，

$$\delta T_f = \iota\omega_f - r_*c_f, \quad \omega_f \in \Omega^{k+1}_{\mathrm{cl}}(M)_\Lambda, \quad c_f \in Z^{k+1}(M,\Lambda). \tag{1.102}$$

δ_1, δ_2の定義は

$$\delta_1(f) = \omega_f, \tag{1.103}$$
$$\delta_2(f) = [c_f]. \tag{1.104}$$

以下が成立する.

$$\delta_1 \circ i_2 = d, \tag{1.105}$$
$$\delta_2 \circ i_1 = -B. \tag{1.106}$$

Bは*Bockstein*準同型.

1.5.1 例：円周束のEuler類

$SO(2) \to E \xrightarrow{\pi} M$を円周束 with 接続$\theta$とし，$\Omega$をその曲率形式とする．$\frac{1}{2\pi}\Omega$はEuler類を表現するから$\frac{1}{2\pi}\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{cl}}(M)_{\mathbb{Z}}$. 滑らかな閉経路$\gamma : S^1 \to M$に対しては$SO(2)$ホロノミー$H(\gamma)$が定義される．滑らかな閉経路に対して微分キャラクターを$e^{2\pi i}\hat{\chi}(\gamma) = H(\gamma)$と定義する．任意のサイクル$x \in Z_1(M)$に対して微分キャラクターを定義するには，$x$に対してある滑らかな閉経路$\gamma : S^1 \to M$が存在し

て$x=\gamma+\partial y$と書くことができるから[2],

$$\hat{\chi}(x):=\hat{\chi}(\gamma)+\frac{1}{2\pi}p\left(\int_y\Omega\right)=\hat{\chi}(\gamma)+\frac{1}{2\pi}p_*\iota\Omega(y). \tag{1.109}$$

と定義する．この例では$\delta_1(\hat{\chi})=\frac{1}{2\pi}\Omega,\delta_2(\hat{\chi})=\chi$（Euler類）.

1.6 次数付き環構造

既に確認したように [3]，細分化作用素$\Delta:C_k(M)\to C_k(M)$が

- 細分化の極限ではカップ積とウェッジ積が等しい：

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta^*)^n(\iota\omega\cup\iota\theta)=\iota(\omega\wedge\theta). \tag{1.110}$$

- $\omega_1\in\Omega^{l_1}(M),\omega_2\in\Omega^{l_2}(M)$に対して，次の無限和が収束する：

$$E:\Omega^{l_1}(M)\times\Omega^{l_2}(M)\to C^{l_1+l_2-1}(M,\mathbb{R}),\quad \text{bilinear}, \tag{1.111}$$

$$E(\omega\otimes\theta)(x):=-\sum_{i=0}^{\infty}(\iota\omega\cup\iota\theta)(\psi\Delta^i x). \tag{1.112}$$

ここで，ψはΔと1とのチェインホモトピー：

$$1-\Delta=\partial\psi+\psi\partial. \tag{1.113}$$

なる性質が順次確認されるならば，

$$E(\omega\otimes\theta):=-\sum_{i=0}^{\infty}(\Delta^*)^i\psi^*(\iota\omega\cup\iota\theta) \tag{1.114}$$

としてEは$\cup$と$\wedge$をつなぐチェインホモトピーである：

$$\begin{aligned}\iota(\omega_1\wedge\omega_2)-\iota\omega_1\cup\iota\omega_2&=\delta E(\omega_1\otimes\omega_2)+Ed(\omega_1\otimes\omega_2) \qquad (1.115)\\ &=\delta E(\omega_1,\omega_2)+E(d\omega_1,\omega_2)+(-1)^{l_1}E(\omega_1,d\omega_2). \qquad (1.116)\end{aligned}$$

特に，閉形式ω_1,ω_2に対しては

$$\iota(\omega_1\wedge\omega_2)-\iota\omega_1\cup\iota\omega_2=\delta E(\omega_1\otimes\omega_2),\quad \omega_1\in\Omega^{l_1}_{\mathrm{cl}}(M),\omega_2\in\Omega^{l_1}_{\mathrm{cl}}(M). \tag{1.117}$$

また，

$$(\Delta^*)^nE(\omega_1\otimes\omega_2)=E(\omega_1\otimes\omega_2)+\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta^*)^i\psi^*(\iota\omega_1\cup\iota\omega_2) \tag{1.118}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta^*)^nE(\omega_1\otimes\omega_2)=0. \tag{1.119}$$

いくつか準備する．

[2]サイクル$x\in Z_1(M)$の元は定義から，境界を持たない1チェインのことであり，kチェインとは非退化立方体

$$\sigma:I^k\to M,\quad \text{smooth}, \tag{1.107}$$

の整数係数の線形結合

$$x=\sum_i n_i\sigma_i,\quad n_i\in\mathbb{Z},\quad \partial x=\sum_i n_i\partial\sigma_i=0. \tag{1.108}$$

よって，xそのものが滑らかであるとは限らない．一方で，なんらかの滑らかな閉経路$\gamma:S^1\to M$とup to バウンダリで一致するため，$x=\gamma+\partial y$と書くことができる．

- $r : \Lambda \to \mathbb{R}$の積との可換性$r(xy) = r(x)r(y)$により，$r_*$はコチェインレベルのカップ積と可換である：

$$r_* c_1 \cup r_* c_2 = r_*(c_1 \cup c_2). \tag{1.120}$$

- コチェインレベルでは，カップ積は次数付き可換でもなければ推移的でもない．しかし，コホモロジーでは一致する．チェインホモトピーを

$$H : C^*(M,A) \otimes C^*(M,A) \to C^{*-1}(M,A), \tag{1.121}$$
$$f \cup g - (-1)^{\deg(f)\deg(g)} g \cup f \tag{1.122}$$
$$= \delta H(f \otimes g) + H(\delta(f \otimes g)) \tag{1.123}$$
$$= \delta H(f,g) + H(\delta f, g) + (-1)^{\deg(f)} H(f, \delta g), \tag{1.124}$$

$$K : C^*(M,A) \otimes C^*(M,A) \otimes C^*(M,A) \to C^{*-1}(M,A), \tag{1.125}$$
$$(f \cup g) \cup h - f \cup (g \cup h) \tag{1.126}$$
$$= \delta K(f \otimes g \otimes h) + K(\delta(f \otimes g \otimes h)) \tag{1.127}$$
$$= \delta K(f,g,h) + K(\delta f, g, h)) + (-1)^{\deg(f)} K(f, \delta g, h) + (-1)^{\deg(f)+\deg(g)} K(f, g, \delta h), \tag{1.128}$$

などと書く．

- 一方で，微分形式のカップ積の非可換性はEで書くことができる．(1.116)より

$$\iota\omega_1 \cup \iota\omega_2 - (-1)^{l_1 l_2} \iota\omega_2 \cup \iota\omega_1 \tag{1.129}$$
$$= -\delta E(\omega_1 \otimes \omega_2 - (-1)^{l_1 l_2} \omega_2 \otimes \omega_1) - Ed(\omega_1 \otimes \omega_2 - (-1)^{l_1 l_2} \omega_2 \otimes \omega_1) \tag{1.130}$$
$$= -(\delta E + E\delta)(\omega_1 \otimes \omega_2 - (-1)^{l_1 l_2} \omega_2 \otimes \omega_1). \tag{1.131}$$

よって，

$$H(\iota\omega_1 \otimes \iota\omega_2) = -E(\omega_1 \otimes \omega_2 - (-1)^{l_1 l_2} \omega_2 \otimes \omega_1). \tag{1.132}$$

つまり，

$$H \circ (\iota \otimes \iota) = -E \circ (\mathrm{id} - (-1)^{l_1 l_2} \tau). \tag{1.133}$$

ただし，

$$\tau : \Omega^* \otimes \Omega^* \to \Omega^* \otimes \Omega^*, \quad \omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \omega_2 \otimes \omega_1 \tag{1.134}$$

は braiding.

- 微分形式の推移律の破れもEを用いて表現できる．$\omega_1, \omega_2, \omega_3$をそれぞれ$l_1, l_2, l_3$形式とすると，

$$(\iota\omega_1 \cup \iota\omega_2) \cup \iota\omega_3 - \iota\omega_1 \cup (\iota\omega_2 \cup \iota\omega_3) \tag{1.135}$$
$$= (\iota(\omega_1 \wedge \omega_2) - (\delta E + Ed)(\omega_1 \otimes \omega_2)) \cup \iota\omega_3 - \iota\omega_1 \cup (\iota(\omega_2 \wedge \omega_3) - (\delta E + Ed)(\omega_2 \otimes \omega_3)) \tag{1.136}$$
$$= \iota(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) - (\delta E + Ed)((\omega_1 \wedge \omega_2) \otimes \omega_3) \tag{1.137}$$
$$- (\iota(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) - (\delta E + Ed)(\omega_1 \otimes (\omega_2 \wedge \omega_3))) \tag{1.138}$$
$$- ((\delta E + Ed)(\omega_1 \otimes \omega_2)) \cup \iota\omega_3 + \iota\omega_1 \cup (\delta E + Ed)(\omega_2 \otimes \omega_3) \tag{1.139}$$
$$= -(\delta E + Ed)((\omega_1 \wedge \omega_2) \otimes \omega_3 - \omega_1 \otimes (\omega_2 \wedge \omega_3)) \tag{1.140}$$
$$- ((\delta E + Ed)(\omega_1 \otimes \omega_2)) \cup \iota\omega_3 + \iota\omega_1 \cup (\delta E + Ed)(\omega_2 \otimes \omega_3). \tag{1.141}$$

1 行目は

$$-(\delta E + Ed)((\omega_1 \wedge \omega_2) \otimes \omega_3 - \omega_1 \otimes (\omega_2 \wedge \omega_3)) = (\delta A + Ad)(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3), \tag{1.142}$$

$$A = -E \circ (\wedge \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \wedge) \tag{1.143}$$

と書くことができる．２行目第１項は

$$
\begin{align}
&((\delta E + Ed)(\omega_1 \otimes \omega_2)) \cup \iota\omega_3 \tag{1.144}\\
&= (\delta E(\omega_1 \otimes \omega_2)) \cup \iota\omega_3 + E(d(\omega_1 \otimes \omega_2)) \cup \iota\omega_3 \tag{1.145}\\
&= \delta(E(\omega_1 \otimes \omega_2) \cup \iota\omega_3) - (-1)^{l_1+l_2-1} E(\omega_1 \otimes \omega_2) \cup \iota d\omega_3 + E(d(\omega_1 \otimes \omega_2)) \cup \iota\omega_3 \tag{1.146}\\
&= \delta(E(\omega_1 \otimes \omega_2) \cup \iota\omega_3) + (-1)^{l_1+l_2} E(\omega_1 \otimes \omega_2) \cup \iota d\omega_3 + E(d(\omega_1 \otimes \omega_2)) \cup \iota\omega_3 \tag{1.147}\\
&= (\delta B + Bd)(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3). \tag{1.148}
\end{align}
$$

ただし，

$$B = \cup \circ (E \otimes \iota). \tag{1.149}$$

同様に，２行目第２項は

$$
\begin{align}
&\iota\omega_1 \cup (\delta E + Ed)(\omega_2 \otimes \omega_3) \tag{1.150}\\
&= (-1)^{l_1} \delta(\iota\omega_1 \cup E(\omega_2 \otimes \omega_3)) - (-1)^{l_1} \iota d\omega_1 \cup E(\omega_2 \otimes \omega_3) + \iota\omega_1 \cup Ed(\omega_2 \otimes \omega_3) \tag{1.151}\\
&= (-1)^{\deg(\omega_1)} \delta(\iota\omega_1 \cup E(\omega_2 \otimes \omega_3)) + (-1)^{\deg(d\omega_1)} \iota d\omega_1 \cup E(\omega_2 \otimes \omega_3) + \iota\omega_1 \cup Ed(\omega_2 \otimes \omega_3) \tag{1.152}\\
&= (\delta C + Cd)(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3). \tag{1.153}
\end{align}
$$

ただし，

$$C(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3) = (-1)^{\deg(\omega_1)} (\cup \circ \iota \otimes E)(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3) \tag{1.154}$$

とした．つまり，

$$C = \cup \circ (((-1)^{\deg} \circ \iota) \otimes E) \tag{1.155}$$

である．実際，

$$
\begin{align}
&(\delta C + Cd)(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3) \tag{1.156}\\
&= \delta C(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3) + C(d\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3) + (-1)^{\deg(\omega_1)} C(\omega_1 \otimes d(\omega_2 \otimes \omega_3)) \tag{1.157}\\
&= (-1)^{\deg(\omega_1)} \delta(\cup \circ \iota \otimes E)(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3) \tag{1.158}\\
&\quad + (-1)^{\deg(d\omega_1)} (\cup \circ \iota \otimes E)(d\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3) + (\cup \circ \iota \otimes E)(\omega_1 \otimes d(\omega_2 \otimes \omega_3)) \tag{1.159}
\end{align}
$$

が確認できる．以上より，

$$(\iota\omega_1 \cup \iota\omega_2) \cup \iota\omega_3 - \iota\omega_1 \cup (\iota\omega_2 \cup \iota\omega_3) = (\delta D + Dd)(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3), \tag{1.160}$$

$$D = A - B + C = -E \circ (\wedge \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \wedge) - \cup \circ (E \otimes \iota) + \cup \circ (((-1)^{\deg} \circ \iota) \otimes E). \tag{1.161}$$

つまり，

$$K \circ (\iota \otimes \iota \otimes \iota) = -E \circ (\wedge \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \wedge) - \cup \circ (E \otimes \iota) + \cup \circ (((-1)^{\deg} \circ \iota) \otimes E), \tag{1.162}$$

変数を入れると，

$$
\begin{align}
K(\iota\omega_1 \otimes \iota\omega_2 \otimes \iota\omega_3) = &-E((\omega_1 \wedge \omega_2) \otimes \omega_3) + E(\omega_1 \otimes (\omega_2 \wedge \omega_3)) \tag{1.163}\\
&- E(\omega_1 \otimes \omega_2) \cup \iota\omega_3 + (-1)^{\deg(\omega_1)} \iota\omega_1 \cup E(\omega_2 \otimes \omega_3) \tag{1.164}
\end{align}
$$

が成立する．

Definition 1.22. $f \in \hat{H}^k(M, \mathbb{R}/\Lambda), g \in \hat{H}^l(M, \mathbb{R}/\Lambda)$に対してそれぞれの表現$f = p_* T_f|_{Z_k(M)}, g = p_* T_g|_{Z_l(M)}$を取る.

$$f \star g := p_* \left(T_f \cup \iota\omega_g - (-1)^k \iota\omega_f \cup T_g - T_f \cup \delta T_g + E(\omega_f, \omega_g) \right)|_{Z_{k+l+1}}. \tag{1.165}$$

つまり，$f \star g$は表現が

$$T_{f\star g} = T_f \cup \iota\omega_g - (-1)^k \iota\omega_f \cup T_g - T_f \cup \delta T_g + E(\omega_f, \omega_g) \tag{1.166}$$

によって与えられる微分キャラクターである． $u_g = [c_g]$の表現を選んで以下のようにも書ける.

$$T_{f\star g} = T_f \cup r_* c_g - (-1)^k \iota\omega_f \cup T_g + E(\omega_f, \omega_g). \tag{1.167}$$

性質を順番に確認する．以下，Up to $\mathrm{im}\,\delta$, $\mathrm{im}\,r_*$での等式をそれぞれ$\sim_\delta, \sim_r$と書き，up to $\mathrm{im}\,\delta + \mathrm{im}\,r_*$の等式を$\sim_{\delta,r}$と書く.（以下，$E(\omega_1, \omega_2)$と$E(\omega_1 \otimes \omega_2)$の記号のゆらぎがあるが，どちらも同じ意味.）

Proposition 1.23. $f \star g$は表現T_f, T_gの取り方に依存しない.

（証明） T_f, T_gの不定性は

$$T_f \mapsto T_f + r_* d_f + \delta s_f, \quad d_f \in C^k(M, \Lambda), \quad s_f \in C^{k-1}(M, \mathbb{R}), \tag{1.168}$$
$$T_g \mapsto T_g + r_* d_g + \delta s_g, \quad d_g \in C^l(M, \Lambda), \quad s_g \in C^{l-1}(M, \mathbb{R}). \tag{1.169}$$

この変化に対して

$$\begin{aligned}
T_{f\star g} &\mapsto (T_f + r_* d_f + \delta s_f) \cup \iota\omega_g - (-1)^k \iota\omega_f \cup (T_g + r_* d_g + \delta s_g) && (1.170)\\
&\quad - (T_f + r_* d_f + \delta s_f) \cup \delta(T_g + r_* d_g + \delta s_g) + E(\omega_f, \omega_g) && (1.171)\\
&= T_{f\star g} + (r_* d_f + \delta s_f) \cup \iota\omega_g - (-1)^k \iota\omega_f \cup (r_* d_g + \delta s_g) && (1.172)\\
&\quad - T_f \cup \delta(r_* d_g + \delta s_g) - (r_* d_f + \delta s_f) \cup \delta(T_g + r_* d_g + \delta s_g) && (1.173)\\
&= T_{f\star g} + r_* d_f \cup \iota\omega_g + \delta(s_f \cup \iota\omega_g) - (-1)^k \iota\omega_f \cup r_* d_g + \delta(\iota\omega_f \cup s_g) && (1.174)\\
&\quad - T_f \cup \delta r_* d_g - (r_* d_f + \delta s_f) \cup (\delta T_g + \delta r_* d_g) && (1.175)\\
&= T_{f\star g} + r_* d_f \cup (\iota\omega_g - \delta T_g) + \delta(s_f \cup \iota\omega_g) - (-1)^k \iota\omega_f \cup r_* d_g + \delta(\iota\omega_f \cup s_g) && (1.176)\\
&\quad - (-1)^k (\delta(T_f \cup r_* d_g) - (\iota\omega_f - r_* c_f) \cup r_* d_g) - (r_* d_f + \delta s_f) \cup \delta r_* d_g - \delta s_f \cup \delta T_g && (1.177)\\
&= T_{f\star g} + r_* d_f \cup r_* c_g + \delta(s_f \cup \iota\omega_g) + \delta(\iota\omega_f \cup s_g) && (1.178)\\
&\quad - (-1)^k \delta(T_f \cup r_* d_g) - (-1)^k r_* c_f \cup r_* d_g - (r_* d_f + \delta s_f) \cup \delta r_* d_g - \delta s_f \cup \delta T_g && (1.179)\\
&= T_{f\star g} + r_* \left(d_f \cup c_g - (-1)^k c_f \cup d_g - d_f \cup \delta d_g \right) && (1.180)\\
&\quad + \delta \left(s_f \cup \iota\omega_g + \iota\omega_f \cup s_g - (-1)^k T_f \cup r_* d_g - s_f \cup \delta r_* d_g - s_f \cup \delta T_g \right). && (1.181)
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\delta(T_f \cup r_* d_g) &= \delta T_f \cup r_* d_g + (-1)^k T_f \cup \delta r_* d_g && (1.182)\\
&= (\iota\omega_f - r_* c_f) \cup r_* d_g + (-1)^k T_f \cup \delta r_* d_g && (1.183)
\end{aligned}$$

を用いた．よって，$T_{f\star g}$の変化は表現の不定性であるから，$f \star g$はwell-defined.

また注意として，表記(1.167)において$u_g = [c_g]$の不定性$c_g \mapsto c_g + \delta d_g$は，$T_g$の不定性の一部． □

Proposition 1.24. $f \star g$は確かに微分キャラクターである．

$$f \star g \in \hat{H}^{k+l+1}(M, \mathbb{R}/\Lambda). \tag{1.184}$$

つまり，ある$\omega \in \Omega^{k+l+1}(M)$が存在して$(f \star g) \circ \partial = p_* \iota\omega$.

（証明）表現レベルで確認すれば良い．

$$\begin{aligned}
&\delta\left(T_f \cup r_* c_g - (-1)^k \iota\omega_f \cup T_g + E(\omega_f, \omega_g)\right) && (1.185)\\
&= \delta T_f \cup r_* c_g + \iota\omega_f \cup \delta T_g + \delta E(\omega_f, \omega_g) && (1.186)\\
&= (\iota\omega_f - r_* c_f) \cup r_* c_g + \iota\omega_f \cup (\iota\omega_g - r_* c_g) + \iota(\omega_f \wedge \omega_g) - \iota\omega_g \cup \iota\omega_g && (1.187)\\
&= \iota(\omega_f \wedge \omega_g) - r_*(c_f \cup c_g). && (1.188)
\end{aligned}$$

$$r_* c_f \cup r_* c_g = r_*(c_f \cup c_g) \tag{1.189}$$

に注意．よって，$f \star g$は

$$\begin{aligned}
\delta_1(f \star g) &= \omega_{f \star g} = \omega_f \wedge \omega_g, && (1.190)\\
\delta_2(f \star g) &= u_{f \star g} = u_f \cup u_g && (1.191)
\end{aligned}$$

なる微分キャラクターである． □

Proposition 1.25.

$$f \star g = (-1)^{(k+1)(l+1)} g \star f. \tag{1.192}$$

（証明）表式

$$T_{g \star f} = T_g \cup r_* c_f - (-1)^l \iota\omega_g \cup T_f + E(\omega_g, \omega_f) \tag{1.193}$$

を

$$\begin{aligned}
T_f \cup r_* c_g &\sim_\delta (-1)^{k(l+1)} r_* c_g \cup T_f + H(\delta T_f \otimes r_* c_g) && (1.194)\\
&\sim_r (-1)^{k(l+1)} r_* c_g \cup T_f + H(\iota\omega_f \otimes r_* c_g), && (1.195)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iota\omega_f \cup T_g &\sim_\delta (-1)^{(k+1)l} T_g \cup \iota\omega_f + (-1)^{k+1} H(\iota\omega_f \otimes \delta T_g) && (1.196)\\
&= (-1)^{(k+1)l} T_g \cup \iota\omega_f + (-1)^{k+1} H(\iota\omega_f \otimes (\iota\omega_g - r_* c_g)), && (1.197)
\end{aligned}$$

と比較すると

$$\begin{aligned}
&T_{f \star g} - (-1)^{(k+1)(l+1)} T_{g \star f} && (1.198)\\
&\sim_{\delta, r} (-1)^{k(l+1)} r_* c_g \cup T_f + H(\iota\omega_f \otimes r_* c_g) && (1.199)\\
&\quad - (-1)^k((-1)^{(k+1)l} T_g \cup \iota\omega_f + (-1)^{k+1} H(\iota\omega_f \otimes (\iota\omega_g - r_* c_g))) + E(\omega_f, \omega_g) && (1.200)\\
&\quad - (-1)^{(k+1)(l+1)}(T_g \cup r_* c_f - (-1)^l \iota\omega_g \cup T_f + E(\omega_g, \omega_f)) && (1.201)\\
&= -(-1)^{k(l+1)} \delta T_g \cup T_f + (-1)^{(k+1)(l+1)} T_g \cup \delta T_f + H(\iota\omega_f \otimes r_* c_g) && (1.202)\\
&\quad + H(\iota\omega_f \otimes (\iota\omega_g - r_* c_g)) + E(\omega_f, \omega_g) - (-1)^{(k+1)(l+1)} E(\omega_g, \omega_f) && (1.203)\\
&\sim_\delta H(\iota\omega_f \otimes \iota\omega_g) + E(\omega_f, \omega_g) - (-1)^{(k+1)(l+1)} E(\omega_g, \omega_f) && (1.204)
\end{aligned}$$

であるが，これは(1.132)よりゼロ． □

Proposition 1.26.

$$(f\star g)\star h = f\star(g\star h). \tag{1.205}$$

（証明） f,g,hをそれぞれk,l,m次の微分キャラクター，表現をそれぞれT_f,T_g,T_hとする．

$$\begin{aligned}
T_{(f\star g)\star h} &= T_{f\star g}\cup r_*c_h-(-1)^{k+l+1}\iota\omega_{f\star g}\cup T_h+E(\omega_{f\star g},\omega_h) && (1.206)\\
&= \big(T_f\cup r_*c_g-(-1)^k\iota\omega_f\cup T_g+E(\omega_f,\omega_g)\big)\cup r_*c_h-(-1)^{k+l+1}\iota(\omega_f\wedge\omega_g)\cup T_h+E(\omega_f\wedge\omega_g,\omega_h) && (1.207)\\
&= (T_f\cup r_*c_g)\cup r_*c_h-(-1)^k(\iota\omega_f\cup T_g)\cup r_*c_h+E(\omega_f,\omega_g)\cup r_*c_h && (1.208)\\
&\quad -(-1)^{k+l+1}\iota(\omega_f\wedge\omega_g)\cup T_h+E(\omega_f\wedge\omega_g,\omega_h). && (1.209)
\end{aligned}$$

一方で，

$$\begin{aligned}
T_{f\star(g\star h)} &= T_f\cup r_*c_{g\star h}-(-1)^k\iota\omega_f\cup T_{g\star h}+E(\omega_f,\omega_{g\star h}) && (1.210)\\
&= T_f\cup r_*(c_g\cup c_h)-(-1)^k\iota\omega_f\cup\big(T_g\cup r_*c_h-(-1)^l\iota\omega_g\cup T_h+E(\omega_g,\omega_h)\big)+E(\omega_f,\omega_g\wedge\omega_h) && (1.211)\\
&= T_f\cup(r_*c_g\cup r_*c_h)-(-1)^k\iota\omega_f\cup(T_g\cup r_*c_h)+(-1)^{k+l}\iota\omega_f\cup(\iota\omega_f\cup T_h) && (1.212)\\
&\quad -(-1)^k\iota\omega_f\cup E(\omega_g,\omega_h)+E(\omega_f,\omega_g\wedge\omega_h). && (1.213)
\end{aligned}$$

比較する．

$$\iota\omega_f\cup(\iota\omega_g\cup T_h)=(\iota\omega_f\cup\iota\omega_g)\cup T_h-\delta K(\iota\omega_f\otimes\iota\omega_g\otimes T_h)-(-1)^{k+l+2}K(\iota\omega_f\otimes\iota\omega_g\otimes\delta T_h) \tag{1.214}$$

に注意して，

$$\begin{aligned}
&T_{(f\star g)\star h}-T_{f\star(g\star h)} && (1.215)\\
&= E(\omega_f,\omega_g)\cup r_*c_h+(-1)^{k+l}\iota(\omega_f\wedge\omega_g)\cup T_h+E(\omega_f\wedge\omega_g,\omega_h) && (1.216)\\
&\quad -(-1)^{k+l}((\iota\omega_f\cup\iota\omega_g)\cup T_h-\delta K(\iota\omega_f\otimes\iota\omega_g\otimes T_h)-(-1)^{k+l+2}K(\iota\omega_f\otimes\iota\omega_g\otimes\delta T_h)) && (1.217)\\
&\quad +(-1)^k\iota\omega_f\cup E(\omega_g,\omega_h)-E(\omega_f,\omega_g\wedge\omega_h) && (1.218)\\
&\quad +\delta K(T_f\otimes r_*c_g\otimes r_*c_h)+K(\delta T_f\otimes r_*c_g\otimes r_*c_h) && (1.219)\\
&\quad -(-1)^k(\delta K(\iota\omega_f\otimes T_g\otimes r_*c_h)+(-1)^{k+1}K(\iota\omega_f\otimes\delta T_g\otimes r_*c_h)). && (1.220)
\end{aligned}$$

さらにup to $\operatorname{im}\delta,\operatorname{im}r_*$で変形すると，

$$\begin{aligned}
&T_{(f\star g)\star h}-T_{f\star(g\star h)} && (1.221)\\
&\sim_\delta E(\omega_f,\omega_g)\cup r_*c_h+(-1)^{k+l}\iota(\omega_f\wedge\omega_g)\cup T_h+E(\omega_f\wedge\omega_g,\omega_h) && (1.222)\\
&\quad -(-1)^{k+l}(\iota\omega_f\cup\iota\omega_g)\cup T_h+K(\iota\omega_f\otimes\iota\omega_g\otimes\delta T_h) && (1.223)\\
&\quad +(-1)^k\iota\omega_f\cup E(\omega_g,\omega_h)-E(\omega_f,\omega_g\wedge\omega_h) && (1.224)\\
&\quad +K(\delta T_f\otimes r_*c_g\otimes r_*c_h)+K(\iota\omega_f\otimes\delta T_g\otimes r_*c_h) && (1.225)\\
&\sim_\delta E(\omega_f,\omega_g)\cup r_*c_h+(-1)^{k+l}\delta E(\omega_f\otimes\omega_g)\cup T_h+E(\omega_f\wedge\omega_g,\omega_h) && (1.226)\\
&\quad +K(\iota\omega_f\otimes\iota\omega_g\otimes(\iota\omega_h-r_*c_h)) && (1.227)\\
&\quad +(-1)^k\iota\omega_f\cup E(\omega_g,\omega_h)-E(\omega_f,\omega_g\wedge\omega_h) && (1.228)\\
&\quad +K((\iota\omega_f-r_*c_f)\otimes r_*c_g\otimes r_*c_h)+K(\iota\omega_f\otimes(\iota\omega_g-r_*c_g)\otimes r_*c_h) && (1.229)\\
&\sim_\delta E(\omega_f,\omega_g)\cup r_*c_h+(-1)^{k+l}(-(-1)^{k+l+2}E(\omega_f\otimes\omega_g)\cup\delta T_h)+E(\omega_f\wedge\omega_g,\omega_h) && (1.230)\\
&\quad +(-1)^k\iota\omega_f\cup E(\omega_g,\omega_h)-E(\omega_f,\omega_g\wedge\omega_h) && (1.231)\\
&\quad +K(\iota\omega_f\otimes\iota\omega_g\otimes\iota\omega_h)-K(r_*c_f\otimes r_*c_g\otimes r_*c_h) && (1.232)\\
&\sim_\delta E(\omega_f,\omega_g)\cup\iota\omega_h+E(\omega_f\wedge\omega_g,\omega_h)+(-1)^k\iota\omega_f\cup E(\omega_g,\omega_h)-E(\omega_f,\omega_g\wedge\omega_h) && (1.233)\\
&\quad +K(\iota\omega_f\otimes\iota\omega_g\otimes\iota\omega_h)-K(r_*c_f\otimes r_*c_g\otimes r_*c_h). && (1.234)
\end{aligned}$$

ここで，$r:\Lambda\to\mathbb{R}$の積との可換性より

$$K(r_*c_f\otimes r_*c_g\otimes r_*c_h)=r_*K(c_f\otimes c_g\otimes c_h) \tag{1.235}$$

は$\operatorname{im} r_*$に入る．また，残りの項は(1.164)よりキャンセルする． □

以上より以下も示された．

Proposition 1.27.

$$(\delta_1,\delta_2):\hat{H}^*(M,\mathbb{R}.\Lambda)\to R^*(M,\Lambda) \tag{1.236}$$

は環準同型である．

References

[1] Jeff Cheeger and James Simons, *Differential characters and geometric invariants*, In: Geometry and Topology, pp. 50–80. Springer, Berlin (1985).

[2] Kiyonori Gomi, *Differential characters and the Steenrod squares*, arXiv:math/0411043.

[3] 塩崎謙,「ノート：立方体特異チェイン複体」 https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~ken.shiozaki/doc/cubic_chain.pdf