Dirac模型におけるChern数密度の計算

塩崎謙

March 2, 2026

Chern数の定義は

$$Ch_n = \int ch_n, \tag{1}$$

$$ch_n = \frac{1}{n!}(\frac{i}{2\pi})^n \mathrm{tr}\,[F^n]. \tag{2}$$

ハミルトニアンHの占有状態を$\Phi = (u_1, \dots, u_n)$と書くと，Berry接続は以下のように定義される．

$$A = \Phi^\dagger d\Phi, \tag{3}$$

$$F = dA + A^2 = d\Phi^\dagger(1 - \Phi\Phi^\dagger)d\Phi. \tag{4}$$

ここで

$$(1 - P)d\Phi = dP\Phi, \tag{5}$$

$$d\Phi^\dagger(1 - P) = \Phi^\dagger dP \tag{6}$$

に注意すると，

$$F = d\Phi^\dagger(1 - P)(1 - P)d\Phi = \Phi^\dagger dPdP\Phi \tag{7}$$

より密度ch_nは射影を使って

$$ch_n = \frac{1}{n!}(\frac{i}{2\pi})^n \mathrm{tr}\,[(PdPdP)^n] = \frac{1}{n!}(\frac{i}{2\pi})^n \mathrm{tr}\,[P(dP)^{2n}] \tag{8}$$

と書ける．ここで$PdPdP = dP(1 - P)dP = dPdPP$を用いた．さらに，平坦化したハミルトニアン

$$Q = \mathrm{sgn} H = 1 - 2P \tag{9}$$

を用いると，

$$ch_n = -\frac{1}{2^{2n+1}n!}(\frac{i}{2\pi})^n \mathrm{tr}\,[Q(dQ)^{2n}] \tag{10}$$

となる．ここで$\mathrm{tr}\,[(dQ)^{2n}] = d\mathrm{tr}\,[Q(dQ)^{2n-1}]$と$QdQ = -dQQ$より$\mathrm{tr}\,[Q(dQ)^{2n-1}] = \mathrm{tr}\,[-(dQ)^{2n-1}Q] = \mathrm{tr}\,[-Q(dQ)^{2n-1}] = 0$を用いた．

Dirac模型とは，互いに反可換なガンマ行列γ_i，

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2n + 1 \tag{11}$$

を用いて，ハミルトニアンが以下のように書ける模型である．

$$H = \sum_{i=}^{2n+1} h_i \gamma_i. \tag{12}$$

このとき，平坦化したハミルトニアンは

$$Q = \sum_{i=1}^{2n+1} \hat{h}_i \gamma_i, \quad \hat{h}_i = \frac{h_i}{|h|}, \quad |h| = \sqrt{\sum_i h_i^2} \tag{13}$$

となる．このとき，Chern数密度は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} ch_n &= -\frac{1}{2^{2n+1} n!} (\frac{i}{2\pi})^n \mathrm{tr}\,[Q(dQ)^{2n}] &(14)\\ &= -\frac{1}{2^{2n+1} n!} (\frac{i}{2\pi})^n \hat{h}_{i_0} d\hat{h}_{i_1} \cdots d\hat{h}_{i_{2n}} \mathrm{tr}\,[\gamma_{i_0}\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_{2n}}]. &(15) \end{aligned}$$

ここで，反可換なガンマ行列として，$2n \times 2n$行列を用いると，

$$\mathrm{tr}\,[\gamma_{i_0}\cdots\gamma_{i_{2n}}] \propto \pm 2^n i^n \epsilon_{i_0 i_1 \cdots i_{2n}}. \tag{16}$$

符号はガンマ行列の定義に依存する．例えば，$2^n \times 2^n$行列の$2n+1$個のガンマ行列$\gamma_i^{(2n)}$に対して，$2^{n+1} \times 2^{n+1}$行列の$2n+3$個のガンマ行列$\gamma^{(2n+2)}$を

$$\gamma_1^{(2)} = \sigma_1, \quad \gamma_2^{(2)} = \sigma_2, \quad \gamma_3^{(2)} = \sigma_3, \tag{17}$$

及び

$$\gamma_i^{(2n+2)} = \begin{cases} \gamma_i^{(2n)} \otimes \sigma_1, & i = 1, \dots, 2n+1 \\ 1 \otimes \sigma_2, & i = 2n+2 \\ 1 \otimes \sigma_3, & i = 2n+3 \end{cases} \tag{18}$$

と再帰的に定義すると，

$$\mathrm{tr}\,[\gamma_{i_0}^{(2n)} \cdots \gamma_{i_{2n}}^{(2n)}] = 2^n i^n \epsilon_{i_0 i_1 \cdots i_{2n}} \tag{19}$$

となる．以下ではこの定義を採用する．すると，Chern数密度は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} ch_n &= -\frac{1}{2^{n+1} n!} (\frac{-1}{2\pi})^n \epsilon_{i_0 i_1 \cdots i_{2n}} \hat{h}_{i_0} d\hat{h}_{i_1} \cdots d\hat{h}_{i_{2n}} &(20)\\ &= (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n+1} \pi^n n!} \omega_{2n}, &(21) \end{aligned}$$

ここで

$$\omega_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \epsilon_{i_0 i_1 \cdots i_{2n}} \hat{h}_{i_0} d\hat{h}_{i_1} \cdots d\hat{h}_{i_{2n}} \tag{22}$$

は単位球面S^{2n}の体積形式である．一方で，

$$A_{2n} = \frac{2^{2n+1} \pi^n n!}{(2n)!} \tag{23}$$

は単位球面S^{2n}の体積であるから，$\hat{h}_i$がS^{2n}を覆うとき，Chern数は$(-1)^{n+1}$倍の被覆数になる．

さらに，$d\hat{h}_i$部分はdh_iのみが寄与するがわかる．実際，ガンマ行列が$2^n \times 2^n$行列によって与えられる場合は，traceで非ゼロで残るのは$(2n+1)$個のガンマ行列の積である$\gamma_1 \cdots \gamma_{2n+1}$項のみであるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,[Q(dQ)^{2n}] &= \mathrm{tr}\, \left[\frac{h}{|h|} (\frac{dh}{|h|} - \frac{hd|h|}{|h|^2}) \cdots (\frac{dh}{|h|} - \frac{hd|h|}{|h|^2}) \right] &(24)\\ &= 2^n i^n \epsilon_{i_0 i_1 \cdots i_{2n}} \frac{h_{i_0}}{|h|} (\frac{dh_{i_1}}{|h|} - \frac{h_{i_1} d|h|}{|h|^2}) \frac{h}{|h|} \cdots (\frac{dh_{i_{2n}}}{|h|} - \frac{h_{i_{2n}} d|h|}{|h|^2}) &(25) \end{aligned}$$

において，$d|h|$を含む項は寄与しない．結局，Chern数密度は以下のように書ける．

$$ch_n = -\frac{1}{2^{n+1}n!}(\frac{-1}{2\pi})^n \epsilon_{i_0 i_1 \cdots i_{2n}} \frac{h_{i_0} dh_{i_1} \cdots dh_{i_{2n}}}{|h|^{2n+1}}. \tag{26}$$

よって，Chern-Simons形式の積分値の差も，与えられたDirac模型のハミルトニアンの対して，

$$CS_{2n-1}[h(\lambda_{2n})] - CS_{2n-1}[h(\lambda_0)] = \int_{T^{2n-1}\times[\lambda_0,\lambda_1]} ch_n \tag{27}$$

と計算できる．