

BOのコホモロジー群

Ken Shiozaki

May 27, 2025

Abstract

BSO, BOの整係数コホモロジーは, [2, 3]において完全に決定されている. [2]の表記にしたがって, 低次元のコホモロジーを確認する.

1 BO_n の整係数コホモロジー

BSO_n, BO_n の整係数コホモロジーは, [2, 3]において完全に決定されている. 証明は追わず, [2]の結果のみ確認する. $G_n = U_n, O_n, SO_n$ に対して, $E_n \rightarrow BG_n$ を普遍主 G_n 束, を普遍束,

$$\zeta(G_n) \begin{cases} E_n \times_{G_n} \mathbb{R}^n & (G_n = SO_n, O_n), \\ E_n \times_{G_n} \mathbb{C}^n & (G_n = U_n), \end{cases} \quad (1.1)$$

を普遍 n 平面束とする. ここで,

$$E_n \times_{G_n} \mathbb{R}^n = E_n \times \mathbb{R}^n / (e, v) \sim (eg, g^{-1}v) \quad (1.2)$$

である.

ρ, δ を以下の長完全列の準同型写像とする:

$$\rightarrow H^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{2} H^q(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho} H^q(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \quad (1.3)$$

注意として, 普遍係数定理より, 整係数のコホモロジーが分かればホモロジーも分かる.

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{i-1}(X), \mathbb{Z}) = \text{Free}H_i(X) \oplus \text{Tor}H_{i-1}(X) \quad (1.4)$$

Theorem 1.1 ([2]).

$$p_q = (-1)^q c_{2q}(\zeta(O_n) \otimes \mathbb{C}) \in H^{4q}(BO_n; \mathbb{Z}) \quad (1.5)$$

とおく. ただし $\zeta(O_n) \otimes \mathbb{C}$ は $\zeta(O_n)$ の複素化とする. このとき $H^*(BO_n; \mathbb{Z}) \cong \mathcal{R}_n / \mathcal{I}_n$ であり,

$$\mathcal{R}_n = \mathbb{Z}[p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}, \delta(w_1^\epsilon w_{2i_1} w_{2i_2} \cdots w_{2i_l}) \mid \epsilon \in \{0, 1\}, 0 < i_1 < \cdots < i_l \leq \lfloor n/2 \rfloor]. \quad (1.6)$$

ここで, $\mathcal{I}_n$ は以下の関係式で生成されるイデアル:

$$(i) \ 2\delta(w_1^\epsilon w_{2i_1} \cdots w_{2i_l}) = 0,$$

$$(ii) \ n \text{ が偶数のとき, } \delta(w_1 w_n) = 0 \quad (n \in \text{even}),$$

$$(iii) \ n \text{ が偶数のとき, } (\delta w_n)^2 = p_{n/2} \delta w_1 \quad (n \in \text{even}),$$

$$(iv) \ \text{集合 } I = \{\epsilon/2, i_1, \dots, i_s\} \text{ に対して, } w(2I) = w_1^\epsilon w_{2i_1} \cdots w_{2i_s}, p(I) = (\delta w_1)^\epsilon p_{i_1} \cdots p_{i_s} \text{ と書いたとき,}$$

$$\delta w(2I) \delta w(2J) = \sum_{k \in I} \delta w_{2k} \cdot p\left((I - \{k\}) \cap J\right) \cdot \delta w\left(2\left((I - \{k\}) \cup J - ((I - \{k\}) \cap J)\right)\right). \quad (1.7)$$

また, 以下の関係式がある.

$$\rho(p_q) = w_{2q}^2, \quad \rho\delta = Sq^1, \quad (1.8)$$

Whitney和の下で:

$$p_q \mapsto \sum r_{2q-j} \otimes r_j \quad \text{where } r_{2s} = p_s, \quad r_{2s+1} = (\delta w_{2s})^2 + p_s \delta w_1. \quad (1.9)$$

[2]には明記されていないが,

$$w(2\emptyset) = 0, \quad \delta w(2\emptyset) = 0, \quad (1.10)$$

$$p(\emptyset) = 1, \quad (1.11)$$

とすると関係式(iv)の両辺の次数が一致する. $I = \{k\}$ のとき, 条件(iv)は恒等式であるから, $|I| > 1$ のときのみ意味がある. よって, $|I| > 1, |J| \geq 1$ として良い. よって関係式(iv)は, 少なくとも $\delta(w_1 w_2) \delta(w_1)$ の次数である6次未満では無視して良い. ¹ 低次より生成子を列挙すると,

$$\deg \begin{vmatrix} \delta w_1 & \delta w_2 & \delta(w_1 w_2) & p_1 & \delta w_4 & \delta(w_1 w_4) & \delta(w_2 w_4) & \delta(w_1 w_2 w_4) & p_2 & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & \cdots \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

よって十分大きな n に対して,

$$H^1(BO_n; \mathbb{Z}) = 0, \quad (1.14)$$

$$H^2(BO_n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2[\delta w_1], \quad (1.15)$$

$$H^3(BO_n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2[\delta w_2], \quad (1.16)$$

$$H^4(BO_n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[p_1] \oplus \mathbb{Z}_2[(\delta w_1)^2] \oplus \mathbb{Z}_2[\delta(w_1 w_2)], \quad (1.17)$$

$$H^5(BO_n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2[\delta w_4] \oplus \mathbb{Z}_2[\delta w_1 \delta w_2], \quad (1.18)$$

となる.

¹ 実際は $I = \{1/2, 1\}, J = \{1/2\}$ の場合も関係式(iv)は

$$\delta(w_1 w_2) \delta(w_1) = \delta w_1 p(\emptyset) \delta w(2\{1/2, 1\}) + \delta w_2 p(\{1/2\}) \delta w(2\emptyset) = \delta w_1 \delta(w_1 w_2) \quad (1.12)$$

であるので, 自明な関係式.

2 back up

BO の既知のコホモロジー群は

$$H^*(BO, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, w_3, \dots], \quad (2.1)$$

$$H^*(BO, K) = K[p_1, p_2, p_3, \dots]. \quad (2.2)$$

ここで, K は標数2でない体であり, w_i は Stiefel=Whitney 類, p_i は Pontryagin 類. Switzer [1]の16.17(Theorem)より

$$H_*(BO, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x_1, x_2, \dots]. \quad (2.3)$$

普遍係数定理は

$$H_i(X, A) = H_i(X) \otimes A \oplus \text{Tor}(H_{i-1}(X), A), \quad (2.4)$$

$$H^i(X, A) = \text{Hom}(H_i(X), A) \oplus \text{Ext}(H_{i-1}(X), A). \quad (2.5)$$

以下を用いる.

$$\begin{array}{c|cc} \text{Tor}(A, B) & B = \mathbb{Z} & B = \mathbb{Z}_n \\ \hline A = \mathbb{Z} & 0 & 0 \\ A = \mathbb{Z}_m & 0 & \mathbb{Z}_{\gcd(m, n)} \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \text{Ext}(A, B) & B = \mathbb{Z} & B = \mathbb{Z}_n \\ \hline A = \mathbb{Z} & 0 & 0 \\ A = \mathbb{Z}_m & \mathbb{Z}_m & \mathbb{Z}_{\gcd(m, n)} \end{array}. \quad (2.6)$$

特に,

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{i-1}(X), \mathbb{Z}) = \text{Free}H_i(X) \oplus \text{Tor}H_{i-1}(X) \quad (2.7)$$

が成立する. また,

$$H^*(BO, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} = H^*(BO, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[p_1, p_2, \dots] \quad (2.8)$$

であるので, $H^*(BO, \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ の出現場所は既知であるので, ねじれ部分のみ問題となる.

$$H_1(BO) = \pi_1(BO)/[\pi_1(BO), \pi_1(BO)] = \mathbb{Z}_2 \quad (2.9)$$

から出発する.

$p \neq 2$ を素数として,

$$H^i(BO, \mathbb{Z}_p) = \text{Hom}(H_i(BO), \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_{i-1}(BO), \mathbb{Z}_p) \quad (2.10)$$

において低次をみると

$$0 = \text{Hom}(H_2(BO), \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_1(BO), \mathbb{Z}_p), \quad (2.11)$$

$$0 = \text{Hom}(H_3(BO), \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_2(BO), \mathbb{Z}_p), \quad (2.12)$$

$$\mathbb{Z}_p = \text{Hom}(\underbrace{H_4(BO)}_{\cong \mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_3(BO), \mathbb{Z}_p). \quad (2.13)$$

一方で

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p, \quad \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & (p|n) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2.14)$$

であるので, $H_2(BO), H_3(BO), H_4(BO)$ は $\mathbb{Z}_{2^q}$ の有限和のみが許される.

$$H_i(BO, \mathbb{Z}_2) = H_i(BO) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}(H_{i-1}(BO), \mathbb{Z}_2) \quad (2.15)$$

において低次をみると、まず

$$\mathbb{Z}_2^2 = H_2(BO, \mathbb{Z}_2) = H_2(BO) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\text{Tor}(H_1(BO), \mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_2} \quad (2.16)$$

であるが

$$\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{\text{gcd}(m,n)} \quad (2.17)$$

に注意すると、

$$H_2(BO) = \mathbb{Z}_{2^p}, \quad p \geq 1, \quad (2.18)$$

であることがわかる。同様に

$$\mathbb{Z}_2^3 = H_3(BO, \mathbb{Z}_2) = H_3(BO) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\text{Tor}(H_2(BO), \mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_2} \quad (2.19)$$

より

$$H_3(BO) = \mathbb{Z}_{2^q} \oplus \mathbb{Z}_{2^r}, \quad q, r \geq 1, \quad (2.20)$$

$$\mathbb{Z}_2^5 = H_4(BO, \mathbb{Z}_2) = H_4(BO) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\text{Tor}(H_3(BO), \mathbb{Z}_2)}_{\mathbb{Z}_2^2} \quad (2.21)$$

より

$$H_4(BO) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2^s} \oplus \mathbb{Z}_{2^t}, \quad s, t \geq 1 \quad (2.22)$$

がわかる。

2のべきを確定したいが...

References

- [1] Switzer, *Algebraic Topology—Homotopy and Homology*
- [2] Edgar H. Brown, The cohomology of BSO_n and BO_n with integer coefficients, Proceedings of the American Mathematical Society 85:2, 283-288.
- [3] Mark Feshbach, *The Integral Cohomology Rings of the Classifying Spaces of $O(n)$ and $SO(n)$* , Indiana Univ. Math. J. 32 No. 4 (1983), 511–516.