メモ：スピン空間群

塩崎謙

November 9, 2025

Abstract

スピン空間群についての覚え書き.

1 結晶対称性の一般論

ここでの扱いは磁気空間群，スピン空間群，磁気並進群など任意の結晶対称性を含む.

Gを何らかの結晶対称性群とする．各$g \in G$に対して，$p_g \in O(3)$を回転行列，$\boldsymbol{t}_g \in \mathbb{R}^3$を並進ベクトルとして，群$G$の実空間$\mathbb{R}^3$への左作用を

$$g(\boldsymbol{r}) = p_g \boldsymbol{r} + \boldsymbol{t}_g, \quad g \in G, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

とする．Gの群構造より

$$\boldsymbol{t}_g + p_g \boldsymbol{t}_h = \boldsymbol{t}_{gh}, \quad g, h \in G, \tag{1.2}$$

が成立する． GのHilbert空間への作用を考える． Gの各元がユニタリーか反ユニタリーかを指定する準同型写像を

$$\phi : G \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \tag{1.3}$$

とする． Hilbert空間への作用を$\hat{g}$と書く.

$$\hat{g}\hat{h} = z_{g,h}\widehat{gh}, \quad g, h \in G \tag{1.4}$$

として$U(1)$値 $z_{g,h}$が定まる． $\widehat{ghl}$の２通りの分解よりコサイクル条件

$$(\delta z)_{g,h,l} = z_{h,l}^{\phi_g} z_{gh,l}^{-1} z_{g,hl} z_{g,h}^{-1} = 1, \quad g, h, l \in G, \tag{1.5}$$

が従う．再定義

$$\hat{g} \mapsto \eta_g \hat{g}, \quad \eta_g \in U(1) \tag{1.6}$$

は$z_{g,h}$を

$$z_{g,h} \mapsto z_{g,h} \times (\delta\eta)_{g,h}, \quad (\delta\eta)_{g,h} = \eta_h^{\phi_g} \eta_{gh}^{-1} \eta_g, \quad g, h \in G, \tag{1.7}$$

と変化させる．これは同値関係 $z \sim z\delta\eta$を引き起こす．同値類$[z]$は群コホモロジー$H^2(G, U(1)_\phi)$に属する.

トポロジカル不変量，トポロジカル絶縁体・超伝導体の分類問題においての input dataは,

- 群G

- 実空間への作用$g(\boldsymbol{r}) = p_g \boldsymbol{r} + \boldsymbol{t}_g$
- ユニタリ/反ユニタリを指定する準同型写像ϕ
- 乗数系のコホモロジー類$[z]$

である．これらのデータが決まればK群が定義され，K群がAityah-Hirzebruchスペクトル系列 [1]を通して計算できれば，定義可能なトポロジカル不変量がどれだけ存在するか，またある程度の具体的表式，及び可能な表面状態（表面，ヒンジ，角状態）の分類が分かる．

1.1 指定方法

群Gそのものは無限個の要素を含むので，有限群である点群に注目して群Gの構造を記述する．以下，その方法を述べる．並進群Πを

$$\Pi = \{g \in G | p_g = \mathbb{1}, \phi_g = 1, z_{g,h} = 1 \text{ for all } h \in G\} \tag{1.8}$$

と定義する．これは乗数系$z_{g,h}$の不定性に依存する定義であることに注意．例えば，磁気並進群においては$z_{g,h}$はゲージに依存する． ΠはGの可換正規部分群であり，

$$P := G/\Pi \tag{1.9}$$

を点群と呼ぶ．短完全列

$$0 \to \Pi \to G \xrightarrow{\pi} P \to 0. \tag{1.10}$$

に注意．写像

$$s : P \to G \tag{1.11}$$

が切断であるとは，$\pi \circ s = \mathrm{id}$が成立するときを指す． Pは有限群であるから，切断$s : P \to G$を指定することにより結晶群Gが具体的に与えられる．点群Pは，何らかの結晶点群と有限群の直積と同型である．点群Pの元を数字$j = 1, \ldots, |P|$でラベルし，点群Pの積も単にijと書く．定義より

$$s_j(\boldsymbol{r}) = p_{s_j} \boldsymbol{r} + \boldsymbol{t}_{s_j} \tag{1.12}$$

として，各点群の元$j \in P$に対して，回転行列p_{s_j}と並進ベクトル$\boldsymbol{t}_{s_j}$が定まる．これを

$$p_j := p_{s_j}, \quad \boldsymbol{t}_j := \boldsymbol{t}_{s_j}, \quad j = 1, \ldots, |P| \tag{1.13}$$

と書く．切断の定義より，

$$s_i s_j \equiv s_{ij} \mod \Pi, \tag{1.14}$$

つまり，

$$p_i p_j = p_{ij}, \quad p_i \boldsymbol{t}_j + \boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{t}_{ij} \in \{\text{lattice vectors}\} \tag{1.15}$$

が成立する．切断には

$$s_j \mapsto s_j a = a s_j, \quad a \in \Pi \tag{1.16}$$

の不定性があるが，並進群Πの定義より$\phi(\Pi) = 1$であるから点群に対する準同型写像

$$\phi_i := \phi_{s_i} \tag{1.17}$$

がwell-defined．また，乗数系についてもコサイクル条件より，$g, h \in G, a \in \Pi$に対して，

$$(\delta z)_{g,h,a} = z_{h,a}^{\phi_g} z_{gh,a}^{-1} z_{g,ha} z_{g,h}^{-1} = z_{g,ha} z_{g,h}^{-1} = 1, \tag{1.18}$$

$$(\delta z)_{a,g,h} = z_{g,h}^{\phi_a} z_{ag,h}^{-1} z_{a,gh} z_{a,g}^{-1} = z_{g,h} z_{ag,h}^{-1} = 1 \tag{1.19}$$

であるから，点群Pの乗数系

$$z_{i,j} := z_{s_i,s_j}, \quad i,j \in P \tag{1.20}$$

は切断sの取り方に依存しない．

結局，結晶対称性を指定するには，有限群である点群Pに対して，以下のデータを与えれば良いことがわかった．

- 格子ベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.
- 有限群Pの群表$(i,j) \mapsto ij$.
- 回転行列$p_j \in O(3)$.
- 並進ベクトル$\boldsymbol{t}_j \in \mathbb{R}^3$.
- 準同型写像ϕ_j.
- 乗数系$\{z_{i,j}\}_{i,j\in P}$.

[1]におけるAityah-Hirzebruchスペクトル系列の計算実装は，対称性を問わず，これらのデータが与えられればE_2ページまで計算可能である．

2 スピン空間群の分類問題

ここでは空間群を考える．（つまり，ϕ，乗数系zは共に自明とする．）Gを空間群とする．記号として，空間群の$O(3)$回転行列と並進ベクトルを集めた群をそれぞれ

$$P_G = \{p_g | g \in G\}, \tag{2.1}$$
$$L_G = \{\boldsymbol{t}_g | p_g = 1, g \in G\} \tag{2.2}$$

とする．（それぞれ重複はカウントしない．）

$$pL_G = L_G, \quad p \in P_G \tag{2.3}$$

が成立する．

与えられた空間群 G およびスピン群（spin-only group） $B \subset O(3)$ に対して，スピン空間群 $X \subset G \times O(3)$ を次の2条件を満たす部分群として定める：

$$\{\, g \mid (g,u) \in X \,\} = G, \tag{2.4}$$
$$\{\, u \mid (g,u) \in X \,\} = B. \tag{2.5}$$

目的は，条件 (2.4), (2.5) を満たす群 X をすべて列挙する方法を与えることである．特に，$G \times O(3)$ 内で共役によって同値なものを同一視したときの独立なスピン空間群の分類に関心がある．すなわち，共役関係

$$X \sim (h,v)X(h,v)^{-1} = \{\, (hgh^{-1}, vuv^\top) \mid (g,u) \in X \,\}, \qquad (h,v) \in G \times O(3), \tag{2.6}$$

による同値類を求めることにより，独立なスピン空間群を分類したい．

- 例えば，１次元の並進群$G = \mathbb{Z} = \{t_n | n \in \mathbb{Z}\}$と$B = \mathbb{Z}_n = \langle c | c^n \rangle$とすると，

$$X = \{(1, t_n, c^n) | n \in Z\}, \tag{2.7}$$
$$X = \{(1, t_n, c^m) | n \in Z, m \in \mathbb{Z}/m\} = G \times B, \tag{2.8}$$

  などが例．

Goursatの補題（App. A）を踏まえると，スピン空間群Xと３つ組

$$(N_G \lhd G, N_B \lhd B, \theta : G/N_G \xrightarrow{\cong} B/N_B) \tag{2.9}$$

の間に１対１対応がある．よって問題は，

(i) 空間群Gの正規部分群N_Gの分類，

(ii) スピン群Bの正規部分群N_Bの分類，

(iii) 同型写像$G/N_G \xrightarrow{\cong} B/N_B$の分類，

(iv) 共役関係(2.6)で割る．

の４ステップに分解される．３番目の条件より，群同型$G/N_G \cong B/N_B$を満たす正規部分群の組N_G, N_Bに限ることに注意せよ．

以下，空間群の正規部分群の構成についてメモする．

2.1 空間群の正規部分群

空間群Gを指定するデータとして，

- 格子ベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. $L_G = \{\sum_{l=1}^{3} n_l \boldsymbol{a}_l | n_l \in \mathbb{Z}\}$.
- ラベル集合$P_G = \{1, \ldots, |P_G|\}$の群表$(i, j) \mapsto ij$.
- 点群の回転行列$\{p_i \in O(3)\}_{i \in P_G}$ $(p_1 = \mathbb{1})$.
- 並進ベクトル$\{\boldsymbol{t}_i \in \mathbb{R}^3\}_{i \in P_G}$ $(\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{0})$.

とする． $\boldsymbol{t}_i$の$\mathrm{mod} L_G$値への射影は拡大(1.10)を特徴づける群コホモロジーの代表１コサイクルである：

$$\boldsymbol{t}_i \bmod L_G \in Z^1(P_G, \mathbb{R}^3/L_G), \quad [\boldsymbol{t} \bmod L_G] \in H^1(P_G, \mathbb{R}^3/L_G) \cong H^2(P_G, L_G). \tag{2.10}$$

ここで，

$$\boldsymbol{\omega}_{i,j} = (\delta \boldsymbol{t})_{i,j} = p_i \boldsymbol{t}_j + \boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{t}_{ij} \in L_G \tag{2.11}$$

はBockstein準同型$H^1(P_G, \mathbb{R}^3/L_G) \to H^2(P_G, L_G), [\boldsymbol{t} \bmod L_G] \mapsto [\boldsymbol{\omega}]$である．

正規部分群$N \lhd G$の並進群，点群をそれぞれ

$$1 \to \Pi_N \to N \to P_N \to 1 \tag{2.12}$$

と書く．格子ベクトルの集合を

$$L_G = \{\boldsymbol{t}_g | g \in \Pi_G\}, \tag{2.13}$$
$$L_N = \{\boldsymbol{t}_g | g \in \Pi_N\}, \tag{2.14}$$

などと書く．空間群の元をSeitz表記 [1]で

$$g = \{p_g | \boldsymbol{t}_g\} \tag{2.15}$$

[1] 忠実表現

と書く．逆元は

$$g^{-1} = \{p_g^{-1}| - p_g^{-1}\boldsymbol{t}_g\}. \tag{2.16}$$

部分群$N \subset G$が正規部分群である条件は，任意の$n \in N, g \in G$に対して，

$$\begin{aligned} gng^{-1} &= \{p_g|\boldsymbol{t}_g\}\{p_n|\boldsymbol{t}_n\}\{p_g^{-1}| - p_g^{-1}\boldsymbol{t}_g\} && (2.17)\\ &= \{p_g|\boldsymbol{t}_g\}\{p_n p_g^{-1}| - p_n p_g^{-1}\boldsymbol{t}_g + \boldsymbol{t}_n\} && (2.18)\\ &= \{p_g p_n p_g^{-1}|p_g(-p_n p_g^{-1}\boldsymbol{t}_g + \boldsymbol{t}_n) + \boldsymbol{t}_g\} && (2.19)\\ &= \{p_{gng^{-1}}|p_g\boldsymbol{t}_n - p_{gng^{-1}}\boldsymbol{t}_g + \boldsymbol{t}_g\} \in N. && (2.20) \end{aligned}$$

以下の２つの必要条件が読み取れる．

- $P_N \lhd P_G$.
- $P_G(L_N) = L_N$.

後者は$n \in \Pi_N$に制限することにより得られる． $P_G(L') = L'$を満たす部分格子$L' \in L_G$をP_G不変部分格子と呼ぶ．与えられた正規部分群$P_N \lhd P_G$とP_G不変部分格子$L_N \subset L_G, P_G(L_N) = L_N$に対して，切断$s' : P_N \to N$によって構成される空間群$N$が正規部分群$N \lhd G$となる条件を導出する．

正規部分群$P_N \lhd P_G$をラベル集合の部分集合$P_N \subset \{1, \dots, |P_G|\}$として表す．つまり，

$$i\sigma i^{-1} \in P_N, \quad i \in P_G, \quad \sigma \in P_N \tag{2.21}$$

が成立する． P_G不変部分格子L_Nの格子ベクトルを$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$とする．

$$p_i\boldsymbol{b}_l \in L_N, \quad i \in P_G, \quad l \in \{1, 2, 3\} \tag{2.22}$$

が成立する．空間群Gの元は$\{p_i|\boldsymbol{t}_i + \boldsymbol{u}\}, \boldsymbol{u} \in L_G$と一意的に書かれるから，部分群$N \subset G$を特徴づける切断$s' : P_N \to N$は

$$s'_\sigma = \{p_\sigma|\boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{u}_\sigma\}, \quad \boldsymbol{u} \in C^1(P_N, L_G) \tag{2.23}$$

と書くことができる． $\boldsymbol{u}_\sigma$のL_Nの不定性は同一の空間群Nを与えることに注意．可能な1コチェイン$\boldsymbol{u}$は，$\boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{u}_\sigma$のコサイクル条件より制限を受ける：

$$p_\rho(\boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{u}_\sigma) + (\boldsymbol{t}_\rho + \boldsymbol{u}_\rho) - (\boldsymbol{t}_{\rho\sigma} + \boldsymbol{u}_{\rho\sigma}) = \boldsymbol{\omega}_{\rho,\sigma} + (\delta\boldsymbol{u})_{\rho,\sigma} \in L_N, \quad \rho, \sigma \in P_N, \tag{2.24}$$

よって1コチェイン$\boldsymbol{u} \in C^1(P_N, L_G)$は以下の線形方程式の解である：

$$\delta\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\omega}|_{P_N} \bmod L_N. \tag{2.25}$$

この解$\boldsymbol{u}$を用いて，２コサイクル$\boldsymbol{\omega}' \in\in Z^2(P_N, L_N)$が

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}|_{P_N} + \delta\boldsymbol{u} \tag{2.26}$$

として求まる．

次に，切断s'が正規部分群$N \lhd G$である条件を求める．表示

$$\begin{aligned} s_i s'_\sigma s_i^{-1} &= \{p_i p_\sigma p_i^{-1}|p_i(-p_\sigma p_{i^{-1}}\boldsymbol{t}_i + \boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{u}_\sigma) + \boldsymbol{t}_i\} && (2.27)\\ &= \{p_{i\sigma i^{-1}}|p_i(\boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{u}_\sigma) - p_{i\sigma i^{-1}}\boldsymbol{t}_i + \boldsymbol{t}_i\}, && (2.28) \end{aligned}$$

$$s'_{i\sigma i^{-1}} = \{p_{i\sigma i^{-1}}|\boldsymbol{t}_{i\sigma i^{-1}} + \boldsymbol{u}_{i\sigma i^{-1}}\}, \tag{2.29}$$

を比較すると，$\boldsymbol{u}_\sigma$が満たす線形方程式

$$\begin{aligned}
p_i \boldsymbol{u}_\sigma - \boldsymbol{u}_{i\sigma i^{-1}} &\equiv -\boldsymbol{t}_i + p_{i\sigma i^{-1}} \boldsymbol{t}_i - p_i \boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{t}_{i\sigma i^{-1}} && (2.30)\\
&\equiv -(p_i \boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{t}_i - \boldsymbol{t}_{i\sigma}) + (p_{i\sigma i^{-1}} \boldsymbol{t}_i + \boldsymbol{t}_{i\sigma i^{-1}} - \boldsymbol{t}_{i\sigma}) && (2.31)\\
&\equiv -\boldsymbol{\omega}_{i,\sigma} + \boldsymbol{\omega}_{i\sigma i^{-1},i} \bmod L_N, \quad i \in P_G, \sigma \in P_N, && (2.32)
\end{aligned}$$

が得られる．

以下がまとめ．

空間群Gの正規部分群$N \triangleleft G$は以下の手続きによって得られる．

- 点群の正規部分群$P_N \triangleleft P_G$を与える．
- 並進群のP_G不変部分群$L_N \subset L_G, P_G(L_N) = L_N$を与える．
- 未知変数$\{\boldsymbol{u}_\sigma \in L_G\}_{\sigma \in P_N}$に対して以下の線形方程式を解く：

$$\begin{cases} p_\rho \boldsymbol{u}_\sigma + \boldsymbol{u}_\rho - \boldsymbol{u}_{\rho\sigma} \equiv -p_\rho \boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{t}_\rho - \boldsymbol{t}_{\rho\sigma} \bmod L_N, \quad \rho, \sigma \in P_N, \\ p_i \boldsymbol{u}_\sigma - \boldsymbol{u}_{i\sigma i^{-1}} \equiv -\boldsymbol{t}_i + p_{i\sigma i^{-1}} \boldsymbol{t}_i - p_i \boldsymbol{t}_\sigma + \boldsymbol{t}_{i\sigma i^{-1}} \bmod L_N, \quad i \in P_G, \sigma \in P_N, \end{cases} \tag{2.33}$$

2.1.1 (2.33)の解法のメモ

方程式(2.33)は以下のように具体的に解かれる． $\boldsymbol{u}_i$をL_Gの格子ベクトルで展開し，

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_i x_{ij} \boldsymbol{a}_i, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}, i \in P_N, \tag{2.34}$$

$$X = (x_{ij})_{i \in P_N, j=1,2,3}, \tag{2.35}$$

とおくと，方程式(2.33)は

$$AX \equiv B \bmod L_N \tag{2.36}$$

の形． Aの一般化逆行列A^+を用いて，有理数の範囲案で解のひとつは

$$X \equiv A^+ B \tag{2.37}$$

として得られる．このようにして得られるXが整数であれば解． Xが整数でないときに，整数解の不在か，mod L_Nの自由度を利用して整数解を探すべきかを検討する必要がある．（この点は実装時に確認した方が効率が良いだろう．）

2.1.2 商群G/Nの構造

商群G/Nは以下の完全列に入る（証明はApp.Bを見よ．）．

$$1 \to L_G/L_N \to G/N \to P_G/P_N \to 1. \tag{2.38}$$

よってG/Nの群構造は拡大を特徴づける 2 コサイクル$Z^2(P_G/P_N, L_G/L_N)$を決定すれば良い．

マップ

$$P_G/P_N \to P_G, \quad a \mapsto i_a, \quad i_1 = 1 \tag{2.39}$$

を P_G/P_Nの完全代表系とする．

$$P_G = \bigcup_{a \in P_G/P_N} i_a P_N. \tag{2.40}$$

関係式

$$i_a i_b = i_{ab} t_{a,b}, \quad t_{a,b} \in P_N \tag{2.41}$$

により$t_{a,b}$を定める．一般論より（App. B）2 コサイクル$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{a,b}$は

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{a,b} \equiv \boldsymbol{\omega}_{i_a,i_b} + \boldsymbol{\omega}_{t_{a,b},i_{ab}} - \boldsymbol{u}_{t_{a,b}} \bmod L_N \tag{2.42}$$

として与えられる．

これから，G/Nの群構造は

$$(a,\boldsymbol{\tau})(b,\boldsymbol{\tau}') = (ab, p_a\boldsymbol{\tau}' + \boldsymbol{\tau} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{a,b}), \quad (a,\boldsymbol{\tau}),(b,\boldsymbol{\tau}') \in P_G/P_N \times L_G/L_N \tag{2.43}$$

として決定される．

2.2 スピン群の正規部分群

与えられたスピン群Bの正規部分群$N_B \lhd B$を求める問題は，有限群の正規部分群を求める問題であるから，ここでは議論しない．

2.3 同型写像$\theta : G/N_G \xrightarrow{\cong} B/N_B$

保留．

3 スピンとの結合項

実空間の磁気構造を 3 次元ベクトル場

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = (M_x(\boldsymbol{r}), M_y(\boldsymbol{r}), M_z(\boldsymbol{r}))^\top, \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

で表現しよう．このベクトル場が

$$\boldsymbol{M}(g\boldsymbol{r}) = O_g \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}), \quad O_g \in O(3), \quad g \in G, \tag{3.2}$$

$$O_g O_h = O_{gh}, \quad g,h \in G, \tag{3.3}$$

なる対称性を満たす状況を考える．

$\hat{n}$方向のθ回転の$SO(3)$行列を$R_{\hat{n},\theta}$，反転行列を$I = \mathrm{diag}(-1,-1,-1)$と書く．さて 3 つのPauli行列をベクトルとして

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^\top \tag{3.4}$$

と表示すると，

$$\begin{aligned} e^{-i\theta\sigma_z/2}\boldsymbol{\sigma}e^{i\theta\sigma_z/2} &= (\sigma_x e^{i\theta\sigma_z}, \sigma_y e^{i\theta\sigma_z}, \sigma_z)^\top && (3.5)\\ &= (\sigma_x\cos\theta + \sigma_y\sin\theta, \sigma_y\cos\theta - \sigma_x\sin\theta, \sigma_z)^\top && (3.6)\\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} = R_{\hat{z},\theta}^\top\boldsymbol{\sigma} && (3.7) \end{aligned}$$

$$\sigma_y \boldsymbol{\sigma}^* \sigma_y = -\boldsymbol{\sigma} = I\boldsymbol{\sigma} \tag{3.8}$$

などに注意する．直交行列$O_g \in O(3)$を

$$O_g = R_{\hat{n}_g,\theta_g} I^{\frac{1-\det O_g}{2}} \tag{3.9}$$

と表示すると，

$$O_g^\top \boldsymbol{\sigma} = I^{\frac{1-\det O_g}{2}} R_{\hat{n}_g,\theta_g}^\top \boldsymbol{\sigma} = I^{\frac{1-\det O_g}{2}} e^{-i\theta_g \hat{n}_g \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} \boldsymbol{\sigma} e^{i\theta_g \hat{n}_g \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} \tag{3.10}$$

$$= \begin{cases} e^{-i\theta_g \hat{n}_g \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} \boldsymbol{\sigma} e^{i\theta_g \hat{n}_g \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} & (\det O_g = 1) \\ e^{-i\theta_g \hat{n}_g \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} \sigma_y \boldsymbol{\sigma}^* \sigma_y e^{i\theta_g \hat{n}_g \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} & (\det O_g = -1) \end{cases} \tag{3.11}$$

となる．よって，スピン演算子との結合項の対称性は

$$\boldsymbol{M}(g\boldsymbol{r})^\top \boldsymbol{\sigma} = \hat{u}_g (\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})^\top \boldsymbol{\sigma}) \hat{u}_g^{-1}, \quad \hat{u}_g = e^{-i\theta_g \hat{n}_g \boldsymbol{\sigma}/2} (\sigma_y K)^{\frac{1-\det O_g}{2}}, \quad g \in G, \tag{3.12}$$

と書くことができる．ここで，Kは複素共役．

$\hat{u}_g$の従う乗数系は

$$\hat{u}_g \hat{u}_h = e^{-i\theta_g \hat{n}_g \boldsymbol{\sigma}/2} (\sigma_y K)^{\frac{1-\det O_g}{2}} e^{-i\theta_h \hat{n}_h \boldsymbol{\sigma}/2} (\sigma_y K)^{\frac{1-\det O_h}{2}} \tag{3.13}$$

$$= e^{-i\theta_g \hat{n}_g \boldsymbol{\sigma}/2} e^{-i\theta_h \hat{n}_h \boldsymbol{\sigma}/2} (\sigma_y K)^{\frac{1-\det O_g}{2}} (\sigma_y K)^{\frac{1-\det O_h}{2}} \tag{3.14}$$

$$= z^{\mathrm{sp}}_{g,h} (-1)^{\frac{1-\det O_g}{2} \frac{1-\det O_h}{2}} \times \hat{u}_{gh} \tag{3.15}$$

となる．ここで

$$z^{\mathrm{sp}}_{g,h} = \begin{cases} 1 & (e^{-i\theta_g \hat{n}_g \boldsymbol{\sigma}/2} e^{-i\theta_h \hat{n}_h \boldsymbol{\sigma}/2} = e^{-i\theta_{gh} \hat{n}_{gh} \boldsymbol{\sigma}/2}) \\ -1 & (e^{-i\theta_g \hat{n}_g \boldsymbol{\sigma}/2} e^{-i\theta_h \hat{n}_h \boldsymbol{\sigma}/2} = -e^{-i\theta_{gh} \hat{n}_{gh} \boldsymbol{\sigma}/2}) \end{cases} \tag{3.16}$$

と置いた．

よって数値計算としては，

$$R_g = \begin{cases} O_g & (\det O_g = 1) \\ O_g I & (\det O_g = -1) \end{cases} \tag{3.17}$$

としてリフト

$$R_g \mapsto \tilde{R}_g \in \mathrm{Spin}(3), \quad g \in G, \tag{3.18}$$

をひとつ与えて

$$z^{\mathrm{sp}}_{g,h} = \tilde{R}_g \tilde{R}_h \tilde{R}_{gh}^\dagger \tag{3.19}$$

とすれば良い．

A Goursatの補題

Goursatの補題については[2]が詳しい．群の単位元をeと書く．一般に，群準同型$f: A \to B$に対して，部分群$S \subset B$に対して$f^{-1}(S) = \{a \in A | f(a) \subset S\}$は群であることに注意する．($f(aa') = f(a)f(a') \in S$より$a, a' \in f^{-1}(S)$なら$aa' \in f^{-1}(S)$.)

Lemma A.1 (Goursat)**.** A, Bを群とする．部分群$C \subset A \times B$と５つ組$Q = (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$の間に１対１対応がある．ここで，$N_A \lhd \bar{A} \subset A$, $N_B \lhd \bar{B} \subset B$であり，$\theta$は同型写像$\theta: \bar{A}/N_A \xrightarrow{\cong} \bar{B}/N_B$である．

（証明[2]） Cを部分群$C \subset A \times B$とする．

$$\bar{A} = \{a \in A | (a,b) \in C\}, \quad N_A = \{a \in A | (a,e) \in C\}, \tag{A.1}$$

$$\bar{B} = \{b \in B | (a,b) \in C\}, \quad N_B = \{b \in B | (e,b) \in C\}, \tag{A.2}$$

とする．Cは群であるから，$\bar{A}, \bar{B}$も群．任意の$a' \in N_A, a \in \bar{A}$に対してある$b \in B$が存在して

$$(a,b)(a',e)(a,b)^{-1} = (aa'a^{-1}, e) \tag{A.3}$$

であるから$aN_Aa^{-1} = N_A$より，$N_A \lhd \bar{A}$. $N_B \lhd \bar{B}$も同様．θは

$$\theta(aN_A) := bN_B, \quad \text{where } (a,b) \in C, \tag{A.4}$$

と定義する．右辺がwell-definedであることは，$(a,b), (a,b') \in C$とすると$(a,b)^{-1}(a,b') = (1, b^{-1}b') \in C$より$b^{-1}b' \in N_B$，すなわち $b \in b'N_B$より．同様に，$(a,b), (a',b) \in C$とすると$a \in a'N_A$より左辺もwell-defined. 群準同型性は，$(a,b), (a',b') \in C$とすると$C \ni (a,b)(a',b') = (aa', bb')$より．$\theta(a) = N_B$とすると$(a,b) \in C$かつ$(e,b) \in C$．このとき$(a,e) = (a,b)(e,b)^{-1} \in C$より$a \in N_A$であるから$\theta$は単射．任意の$b \in \bar{B}$に対して$(a,b) \in C$なる$a$が存在するから$\theta$は全射．これで５つ組$f(C) := (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$が構成された．

逆に，５つ組$Q = (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$が与えられると，$\theta$より部分集合

$$\mathcal{G}_\theta := \{(aN_A, \theta(aN_A)) | aN_A \in \bar{A}/N_A\} \subset \bar{A}/N_A \times \bar{B}/N_B \tag{A.5}$$

が定義される．θの群準同型性より，$\mathcal{G}_\theta$は群である．自然な全射

$$p : \bar{A} \times \bar{B} \to \bar{A}/N_A \times \bar{B}/N_B \tag{A.6}$$

の逆像を取り，部分群

$$g(Q) := p^{-1}(\mathcal{G}_\theta) \subset \bar{A} \times \bar{B} \subset A \times B \tag{A.7}$$

が定まる．

最後に，この対応 f と g が互いに逆であることを示す．

$g \circ f = \mathrm{id}$を示す．$C \subset A \times B$ を部分群とし，$f(C) = (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$ を上で定めたとおりに取る．このとき

$$g(f(C)) = \{\, (a,b) \in A \times B \mid (aN_A,\ bN_B) \in \mathcal{G}_\theta \,\} \tag{A.8}$$

であるが，$\mathcal{G}_\theta$ の定義より

$$(aN_A,\ bN_B) \in \mathcal{G}_\theta \iff (a,b) \in C \tag{A.9}$$

よって$g(f(C)) = C$.

$f \circ g = \mathrm{id}$を示す．$Q = (\bar{A}, N_A, \bar{B}, N_B, \theta)$ を与え，$C' := g(Q) = p^{-1}(\mathcal{G}_\theta) \subset \bar{A} \times \bar{B}$ とおく．C' に対して $f(C') = (\bar{A}', N'_A, \bar{B}', N'_B, \theta')$ を構成する．まず，

$$\bar{A}' = \{\, a \in A \mid (a,b) \in C' \,\} = \{\, a \in A \mid a \in \bar{A} \,\} = \bar{A}, \tag{A.10}$$

$$\bar{B}' = \{\, b \in B \mid (a,b) \in C' \,\} = \{\, b \in B \mid bN_B \in \theta(\bar{A}/N_A) = \bar{B}/N_B \,\} = \{\, b \in B \mid b \in \bar{B} \,\} = \bar{B}, \tag{A.11}$$

$$N'_A = \{\, a \in A \mid (a,e) \in C' \,\} = \{\, a \in A \mid \theta(aN_A) = N_B \,\} = \{\, a \in A \mid a \in N_A \,\} = N_A, \tag{A.12}$$

$$N'_B = \{\, b \in B \mid (e,b) \in C' \,\} = \{\, b \in B \mid bN_B = \theta(N_A) = N_B \,\} = \{\, a \in B \mid b \in N_B \,\} = N_B \tag{A.13}$$

に注意．$\theta' = \theta$ を示す．

$$\theta'(aN_A) = bN_B, \quad \text{where } (a,b) \in C' \tag{A.14}$$

であるが，$(a,b) \in C'$は$a \in \bar{A}$かつ$bN_B = \theta(aN_A)$と同値であるから$\theta' = \theta$. □

B　商群の完全列

Proposition B.1. 群の完全列

$$1 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1 \tag{B.1}$$

と正規部分群$N \lhd G$に対して，以下の完全列がある：

$$1 \to A/(A \cap N) \xrightarrow{\iota} G/N \xrightarrow{\bar{\pi}} Q/\pi(N) \to 1. \tag{B.2}$$

ここで，

$$\iota(a(A \cap N)) = i(a)N, \tag{B.3}$$
$$\bar{\pi}(gN) := \pi(g)\pi(N). \tag{B.4}$$

第3同型定理$AN/N \cong A/(A \cap N)$に注意.

（証明）　$A \cap N \lhd A$は，$n \in A \cap N$のとき$ana^{-1} \in N$かつ$ana^{-1} \in A$より．　ιがwell-definedであることは$a(A \cap N) = a'(A \cap N)$ならば$a^{-1}a \in A \cap N$より$a'(A \cap N) = aa^{-1}a'(A \cap N) = a(A \cap N)$より．　ιの単射性は，$a \in A$, $i(a)N = N$とすると$i(a) \in N$より$a \in A \cap N$から.

$\pi(N) \lhd Q$は，$q \in Q$に対して$q = \pi(g)$とすると$q\pi(n)q^{-1} = \pi(gng^{-1}) \in \pi(N)$より．　$\bar{\pi}$がwell-definedであることは，$gN = g'N$とすると$g^{-1}g' \in N$であるから，$\pi(g')\pi(N) = \pi(g)\pi(g^{-1}g')\pi(N) = \pi(g)\pi(N)$より．群準同型性は$\bar{\pi}(gNhN) = \bar{\pi}(ghh^{-1}NhN) = \pi(ghN) = \pi(g)\pi(h)\pi(N) = \pi(g)\pi(h)\pi(N)\pi(h)^{-1}\pi(h)\pi(N) = \bar{\pi}(gN)\bar{\pi}(hN)$より．　$\bar{\pi}$の全射性は，$q\pi(N) \in Q/\pi(N)$に対してπの全射性より$q = \pi(g)$なる$g \in G$が存在するから.

$\operatorname{im}\iota \subset \ker\bar{\pi}$は，$\bar{\pi}(i(a)N) = \pi(i(a))\pi(N) = \pi(N)$より.

$\ker\bar{\pi} \subset \operatorname{im}\iota$は，$\bar{\pi}(gN) = \pi(g)\pi(N) = \pi(N)$を仮定すると，$\pi(g) \in \pi(N)$，つまりある$n \in N$が存在して$\pi(g) = \pi(n)$より$\pi(gn^{-1}) = e$であるから$gn^{-1} \in \ker\pi = \operatorname{im} i$．よってある$a \in A$が存在して$gn^{-1} = i(a)$より$g \in i(a)N$. □

Aを可換群とする．商群G/Nの群構造を，切断

$$s : Q \to G, \quad s_1 = 1, \tag{B.5}$$
$$u : \pi(N) \to N, \quad u_1 = 1 \tag{B.6}$$

の情報から構成する．切断sの定める2コサイクルを

$$\omega_{p,q} := s_p s_q s_{pq}^{-1} \in A, \quad \omega \in Z^2(Q, A) \tag{B.7}$$

とする．代表元

$$r : Q/\pi(N) \to Q, \quad r_1 = 1, \tag{B.8}$$

をひとつ定めて，

$$t_{x,y} := r_x r_y r_{xy}^{-1} \in \pi(N) \tag{B.9}$$

と定義する．これらから，

$$\sigma : Q/\pi(N) \to G/N, \quad \sigma_x := s_{r_x} N \tag{B.10}$$

と定義する．すると，2コサイクルは

$$\sigma_x\sigma_y = s_{r_x}Ns_{r_y}N = s_{r_x}s_{r_y}N = \omega_{r_x,r_y}s_{r_xr_y}N = \omega_{r_x,r_y}s_{t_{x,y}r_{xy}}N = \omega_{r_x,r_y}\omega_{t_{x,y},r_{xy}}s_{t_{x,y}}s_{r_{xy}}N \tag{B.11}$$
$$= \omega_{r_x,r_y}\omega_{t_{x,y},r_{xy}}s_{t_{x,y}}N\sigma_{xy} = \omega_{r_x,r_y}\omega_{t_{x,y},r_{xy}}s_{t_{x,y}}u_{t_{x,y}}^{-1}N\sigma_{xy}. \tag{B.12}$$

ここで

$$\pi(s_x u_x^{-1}) = \pi(s_x)\pi(u_x^{-1}) = xx^{-1} = e \tag{B.13}$$

より$s_x u_x^{-1} \in \ker \pi = A$を用いた．を用いた．これから2コサイクル

$$\bar{\omega}_{x,y} = \omega_{r_x,r_y}\omega_{t_{x,y},r_{xy}} s_{t_{x,y}} u_{t_{x,y}}^{-1} N \in AN/N \tag{B.14}$$

が定まる．

（コホモロジー類が代表元の取り方r, 切断s, uの取り替えに依存しないことは保留．）

References

[1] Ken Shiozaki, Seishiro Ono, arXiv:2304.01827.

[2] Kristine Bauer, Debasis Sen, Peter Zvengrowski, *A Generalized Goursat Lemma*, arXiv:1109.0024.