

# ノート：立方体特異チェイン複体

Ken Shiozaki

May 9, 2025

## Abstract

[1, 2]に従って、立方体特異チェイン複体、細分作用素、カップ積等についてまとめる。 [3]を読むための準備。

## 1 立方特異チェイン複体

$I = [0, 1]$ とする。

- 特異 $n$ 立方体とは、連続写像

$$T : I^n \rightarrow X \quad (n \geq 0) \quad (1.1)$$

のこと。

- $Q_n(X)$ を特異 $n$ 立方体の集合が生成する自由アーベル群とする。つまり、 $Q_n(X)$ の元は、有限和 $\sum_i a_i T_n$ と一意的に書くことができる。
- 特異 $n$ 立方体 $T : I^n \rightarrow X$ が退化するとは、ある $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $T(x_1, \dots, x_n)$ が $x_i$ 依存しないこと。(つまり、 $X$ 内で次元が落ちる。)
- $D_n(X) \subset Q_n(X)$ を退化特異 $n$ 立方体が生成する自由アーベル群とする。
- 商群 $C_n(X) := Q_n(X)/D_n(X)$ を正規化された立方体特異 $n$ チェイン複体と呼ぶ。

境界作用素を導入する。特異 $n$ 立方体 $T : I^n \rightarrow X$ に対して、前面、後面写像 $A_i, B_i : I^{n-1} \rightarrow X$ を、

$$A_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) := T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}), \quad (1.2)$$

$$B_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) := T(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}), \quad (1.3)$$

と定義する。つまり、 $i$ 番目の境界 $x_i = 0, 1$ を取る。明らかに、 $1 \leq i < j \leq n$ に対して、

$$A_i A_j = A_{j-1} A_i, \quad B_i B_j = B_{j-1} B_i, \quad A_i B_j = B_{j-1} A_i, \quad B_i A_j = A_{j-1} B_i \quad (1.4)$$

が成立。境界作用素を以下で定義する。

$$\partial_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X), \quad \partial_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i T - B_i T], \quad n > 0, \quad (1.5)$$

$$\partial_{n \leq 0} = 0. \quad (1.6)$$

同じことだが、

$$\partial_{n > 0} = \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i - B_i], \quad \partial_{n \leq 0} = 0. \quad (1.7)$$

直接計算より,

$$\partial_{n-1}\partial_n = \partial_{n-1}\left[\sum_{j=1}^n (-1)^j (A_j - B_j)\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n (-1)^i (-1)^j (A_i A_j - B_i A_j - A_i B_j + B_i B_j). \quad (1.8)$$

上記性質より,  $n > 1$  のとき,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n (-1)^i (-1)^j A_i A_j = \sum_{i < j \leq n} (-1)^i (-1)^j A_i A_j + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^i (-1)^j A_i A_j \quad (1.9)$$

$$= \sum_{i < j \leq n} (-1)^i (-1)^j A_{j-1} A_i + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^i (-1)^j A_i A_j \quad (1.10)$$

$$= \sum_{i < j < i \leq n} (-1)^j (-1)^i A_{i-1} A_j + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^i (-1)^j A_i A_j \quad (1.11)$$

$$= \sum_{i < j < i+1 \leq n} (-1)^j (-1)^{i+1} A_i A_j + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^i (-1)^j A_i A_j \quad (1.12)$$

$$= 0. \quad (1.13)$$

また,  $T \in D_n(X)$ , つまりある  $j$  に対して  $x_j$  依存性がないとき,  $(A_i - B_i)T$  は  $i = j$  のとき  $0$ ,  $j < i$  の  $x_j$  依存せず,  $i < j$  のときは  $x_{j-1}$  依存しないため,  $\partial_n T \in D_{n-1}(X)$ . まとめると,

$$\partial_{n-1}\partial_n = 0 \quad n > 1, \quad (1.14)$$

$$\partial_n D_n(X) \subset D_{n-1}(X) \quad n > 0. \quad (1.15)$$

特に後者より,

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X) \quad n > 0 \quad (1.16)$$

が well-defined.

$$Z_n(X) = \ker[\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)], \quad (1.17)$$

$$B_n(X) = \text{im}[\partial_{n+1} : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)], \quad (1.18)$$

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X), \quad (1.19)$$

と定義する.

添加写像  $\epsilon : C_n(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\epsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \sum_i a_i x_i \mapsto \sum_{a_i}, \quad \epsilon|_{C_{n>0}(X)} = 0, \quad (1.20)$$

と定義する. 次が成立.

$$\epsilon\partial = 0. \quad (1.21)$$

実際,  $n = 1$  のみが非自明で,

$$\epsilon\partial_1 T(x) = \epsilon([T(0)] - [T(1)]) = 1 - 1 = 0 \quad (1.22)$$

より.

- 特異チェイン複体を  $S_*(X)$  とする. 自然なチェインホモトピー同値写像  $S_*(X) \rightarrow C_*(X)$  が存在する. ([2] の 5 章の問題 9, 10.)
- 正規化された立方特異チェイン複体  $C_*(X)$  でなく, 立方体特異チェイン複体  $Q_n(X)$  は退化立方体が残る, ホモロジー群  $H'_n(X) := \frac{Z'_n(X) = \ker[\partial : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)]}{B'_n(X) = \text{im}[\partial : Q_{n+1}(X) \rightarrow Q_n(X)]}$  が通常と異なる. 例えば, 1 点のホモロジー群は, 任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して,  $T : I^n \rightarrow \{pt\}$  は定数写像であり,  $\partial T = 0$  であるから,  $Z'_n(\{pt\}) = \mathbb{Z}, B'_n(\{pt\})$  より  $H'_n(\{pt\}) = \mathbb{Z}$ .
- [3] では, 通常の特異チェイン複体ではなく, 正規化された立方体特異チェイン複体を用いている.

## 2 細分作用素

単位立方体  $I^n$  を  $2^n$  個に分割する. 式で書くと以下のようなになる.  $T^n$  の  $2^n$  個の頂点の集合を  $\mathcal{E}_n$  と書く. つまり,  $\mathcal{E}_n = \{0, 1\}^{\times n}$ . 特異  $n$  立方体  $T: I^n \rightarrow X$  と  $e \in \mathcal{E}_n$  に対して,

$$F_e T: I^n \rightarrow X, \quad (F_e T)(x) := T\left(\frac{1}{2}(x + e)\right), \quad (2.1)$$

を導入する. 例えば,

$$(F_{(0,0)} T)(x_1, x_2) = T(x_1/2, x_2/2), \quad (2.2)$$

$$(F_{(0,1)} T)(x_1, x_2) = T(x_1/2, x_2/2 + 1/2), \quad (2.3)$$

$$(F_{(1,0)} T)(x_1, x_2) = T(x_1/2 + 1/2, x_2/2), \quad (2.4)$$

$$(F_{(1,1)} T)(x_1, x_2) = T(x_1/2 + 1/2, x_2/2 + 1/2). \quad (2.5)$$

$Sd_n: Q_n(X) \rightarrow Q_n(X)$  を

$$Sd_{n>0}(T) := \sum_{e \in \mathcal{E}_n} F_e T, \quad (2.6)$$

$$Sd_{n=0} = id, \quad (2.7)$$

と定義する. つまり, 写像  $T: I^n \rightarrow X$  の定義域を  $2^n$  等分して写像  $T$  でそのまま送る. 明らかに, マップを細分するだけだから,

$$Sd_n(D_n(X)) \subset D_n(X) \quad (2.8)$$

が成立する. よって,

- $sd_n: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ ,

が誘導される. 以下も成立.

- $\partial_n Sd_n = Sd_{n-1} \partial_n$ .

証明略.  $\partial_n$  が素朴な意味での向き付けられた境界を取るという意味であることから, 境界作用素  $\partial$  が細分化と可換であることは直感的に明らかだろう. 上と合わせると,

$$\partial_n sd_n = sd_{n-1} \partial_n \quad (2.9)$$

が成立. つまり,  $sd$  はチェインマップ.

- $u \in C_0(X) = Q_0(X)$  のとき, つまり,  $u = \sum_i a_i x_i$  のとき,  $Sd_0 = sd_0 = 1$  より,

$$\epsilon(Sd_0(u)) = \epsilon(u). \quad (2.10)$$

**Theorem 2.1.**  $sd = (sd_n)$  は 1 にチェインホモトピック. つまり, 準同型写像

$$\phi_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X) \quad (2.11)$$

が存在して,

$$sd_n - 1 = \partial_{n+1} \phi_n + \phi_{n-1} \partial_n \quad (2.12)$$

が成立する.

(証明)  $\phi_n$ を構成する. まず,

$$\eta_0, \eta_1 : I^2 \rightarrow I^1, \quad (2.13)$$

$$\eta_0(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2-x_2}, \quad (2.14)$$

$$\eta_1(x_1, x_2) = \frac{x_1+1-x_1x_2}{2-x_2}, \quad (2.15)$$

を導入する. <sup>1</sup>以下を満たすようにデザインされている.

$$\eta_0(0, y) = 0, \quad \eta_0(1, y) = \frac{1}{2-y} = \eta_1(0, y), \quad \eta_0(x, 0) = \frac{x}{2}, \quad \eta_0(x, 1) = x, \quad (2.16)$$

$$\eta_1(0, y) = \frac{1}{2-y} = \eta_0(1, y), \quad \eta_1(1, y) = 1, \quad \eta_1(x, 0) = \frac{x+1}{2}, \quad \eta_1(x, 1) = 1. \quad (2.17)$$

$n \geq 1, e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}_n, T \in I^n \rightarrow X$ に対して,

$$G_e(T) : I^{n+1} \rightarrow X, \quad (2.18)$$

$$(G_e(T))(x_1, \dots, x_{n+1}) := T(\eta_{e_1}(x_1, x_{n+1}), \eta_{e_2}(x_2, x_{n+1}), \dots, \eta_{e_n}(x_n, x_{n+1})) \quad (2.19)$$

を導入する. 以下が成立.

- $G_e$ は退化特異立方体を退化特異立方体に移す.

なぜなら, 表式

$$G_e T(x_1, \dots, x_{n+1}) = T(\eta_{e_1}(x_1, x_{n+1}), \eta_{e_2}(x_2, x_{n+1}), \dots, \eta_{e_n}(x_n, x_{n+1})) \quad (2.20)$$

において,  $T$ が $x_j$ 依存しないことは $G_e T$ も $x_j$ 依存しないことを意味するから. <sup>2</sup>

- $A_{n+1}G_e(T) = F_e(T)$ .

これは $\eta_0(x, 0) = \frac{x}{2}, \eta_1(x, 0) = \frac{x+1}{2}$ より.

- $B_{n+1}G_e(T) = \begin{cases} T & (e = (0, \dots, 0)), \\ \text{is a degenerate cube} & (\text{else}). \end{cases}$

これは $\eta_0(x, 1) = x, \eta_1(x, 1) = 1$ より従う.

- 2つのビット列 $e, e' \in \mathcal{E}_n$ が, ある $j \leq n$ に対して $e_j = 1, e'_j = 0$ , かつ, 任意の $i \neq j$ に対して $e_i = e'_i$ を満たすとする. このとき,

$$A_j G_e(T) = B_j G_{e'}(T). \quad (2.21)$$

実際,

$$(A_j G_e T)(x_1, \dots, x_n) \quad (2.22)$$

$$= (G_e T)(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \quad (2.23)$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_{e_{j-1}}(x_{j-1}, x_n), \underbrace{\eta_{e_j=1}(0, x_n)}_{\frac{1}{2-x_n}}, \eta_{e_{j+1}}(x_j, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)), \quad (2.24)$$

<sup>1</sup>この $\eta_1$ は[1]のAppendix 2節の定義.

<sup>2</sup>さらに,  $T : I^n \rightarrow X$ に対して,  $G_e T$ の変数依存性は $T$ を経由するから,  $G_e T(\Delta^n) \subset X$ の $(n+1)$ 次元体積はゼロ.

$$(B_j G_e T)(x_1, \dots, x_n) \quad (2.25)$$

$$= (G_e T)(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, \dots, x_n) \quad (2.26)$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_{e_{j-1}}(x_{j-1}, x_n), \underbrace{\eta_{e_j=0}(1, x_n)}_{\frac{1}{2-x_n}}, \eta_{e_{j+1}}(x_j, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)), \quad (2.27)$$

より.

- $T \in Q_1(X)$  に対して,  $A_1 G_0 T, B_1 G_1 T$  は退化.

直接確認すると,

$$A_1 G_0 T(x_1) = G_0 T(0, x_1) = T(\eta_0(0, x_1)) = T(0), \quad (2.28)$$

$$B_1 G_1 T(x_1) = G_1 T(1, x_1) = T(\eta_1(1, x_1)) = T(1), \quad (2.29)$$

より.

- $n \geq 2$  に対しては,  $e \in \mathcal{E}_n$  に対して,  $e^j \in \mathcal{E}_{n-1}$  を

$$e^j = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n), \quad j \leq n, \quad (2.30)$$

とする. このとき,

$$e_j = 0 \quad \Rightarrow \quad A_j G_e(T) = G_{e^j} A_j(T), \quad (2.31)$$

$$e_j = 1 \quad \Rightarrow \quad B_j G_e(T) = G_{e^j} B_j(T), \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

これも直接示す.

$$A_j G_e T(x_1, \dots, x_n) \quad (2.34)$$

$$= G_e T(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \quad (2.35)$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_{e_{j-1}}(x_{j-1}, x_n), \underbrace{\eta_{e_j=0}(0, x_n)}_0, \eta_{e_{j+1}}(x_j, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)) \quad (2.36)$$

$$= A_j T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_{e_{j-1}}(x_{j-1}, x_n), \eta_{e_{j+1}}(x_j, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)) \quad (2.37)$$

$$= G_{e^j} A_j T(x_1, \dots, x_n). \quad (2.38)$$

$$B_j G_e T(x_1, \dots, x_n) \quad (2.39)$$

$$= G_e T(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, \dots, x_n) \quad (2.40)$$

$$= T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_{e_{j-1}}(x_{j-1}, x_n), \underbrace{\eta_{e_j=1}(1, x_n)}_1, \eta_{e_{j+1}}(x_j, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)) \quad (2.41)$$

$$= B_j T(\eta_{e_1}(x_1, x_n), \dots, \eta_{e_{j-1}}(x_{j-1}, x_n), \eta_{e_{j+1}}(x_j, x_n), \dots, \eta_{e_n}(x_{n-1}, x_n)) \quad (2.42)$$

$$= G_{e^j} B_j T(x_1, \dots, x_n). \quad (2.43)$$

さて,

$$\Phi_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n+1}(X), \quad (2.44)$$

$$\Phi_{n \geq 1}(T) := (-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} G_e(T), \quad (2.45)$$

$$\Phi_0 = 0, \quad (2.46)$$

を導入する.

- 特異 $n$ 立方体 $T : I^n \rightarrow X$ に対して、次が成立する。

$$\partial_{n+1}\Phi_n(T) + \Phi_{n-1}\partial_n(T) = Sd_n(T) - T + (\text{degenerate cubes}). \quad (2.47)$$

直接示す。

$$\partial_{n+1}\Phi_n = (-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} \partial_{n+1}G_e = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \sum_{e \in \mathcal{E}_n} (A_i G_e - B_i G_e). \quad (2.48)$$

特に、

$$(-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} A_{n+1}G_e = \sum_{e \in \mathcal{E}_n} F_e = Sd_n, \quad (2.49)$$

$$(-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \sum_{e \in \mathcal{E}_n} B_{n+1}G_e = 1 + (\text{degenerate cubes}). \quad (2.50)$$

$n \geq 2$ のときは

$$\Phi_{n-1}\partial_n = \Phi_{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i - B_i) = (-1)^n \sum_{i=1}^n \sum_{e \in \mathcal{E}_{n-1}} (-1)^i (G_e A_i - G_e B_i). \quad (2.51)$$

よって、

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{e \in \mathcal{E}_n} (A_i G_e - B_i G_e) - \sum_{i=1}^n \sum_{e \in \mathcal{E}_{n-1}} (-1)^i (G_e A_i - G_e B_i) \quad (2.52)$$

が退化することを示せばよい。任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して、

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_n} = \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e_i=0} + \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e_i=1} \quad (2.53)$$

と分割することができる。すると、

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_n} (A_i G_e - B_i G_e) - \sum_{e \in \mathcal{E}_{n-1}} (G_e A_i - G_e B_i) \quad (2.54)$$

$$= \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e_i=0} (A_i G_e - B_i G_e) + \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e_i=1} (A_i G_e - B_i G_e) - \sum_{e \in \mathcal{E}_{n-1}} (G_e A_i - G_e B_i). \quad (2.55)$$

ここで、

$$(2.21) \Rightarrow \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e_i=1} A_i G_e = \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e_i=0} B_i G_e, \quad (2.56)$$

$$(2.31) \Rightarrow \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e_i=0} A_i G_e = \sum_{e \in \mathcal{E}_{n-1}} G_e A_j, \quad (2.57)$$

$$(2.32) \Rightarrow \sum_{e \in \mathcal{E}_n, e_i=1} B_i G_e = \sum_{e \in \mathcal{E}_{n-1}} G_e B_j \quad (2.58)$$

より、 $n = 1$ のときは $\Phi_0 = 0$ に注意すると、

$$(-1) \sum_{e \in \mathcal{E}_1} (A_1 G_e - B_1 G_e) = -(A_1 G_0 + A_1 G_1 - B_1 G_0 - B_1 G_1) \quad (2.59)$$

が退化することを示せばよいが、 $A_1 G_0, B_1 G_1$ は退化し、(2.21)より $A_1 G_1 = B_1 G_0$ が従うから。

以上より、 $\Phi_n$ がup to  $D_n(X)$ で $Sd_n$ と1をつなぐチェインホモトピーであることが示された。  $G_e$ は退化性を保つから、 $\Phi_n$ も退化性を保つ。つまり、 $\Phi_n(D_n(X)) \subset D_{n+1}(X)$ である。よって、準同型写像

$$\phi_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X) \quad (2.60)$$

が誘導され、(2.12)が成立する。  $\square$

- [3]では、チェインホモトピー $\phi = \{\phi_n\}_n$ は自然であり、それゆえ $\phi_n(T) \in C_{n+1}(X)$ は $T(\Delta^n)$ 上にサポートを持ち、よって $(n+1)$ 次元体積はゼロであると述べられている。  $\phi_n$ の自然性からなぜ $\phi_n T(\Delta^n)$ が $T(\Delta^n)$ 上にサポートを持つことが保証されるのか把握していないが、 $\phi_n(T)$ の具体形()体積がゼロであることをなぜ保証するのかわからないが、 $\phi_n$ の具体形、つまり $G_e$ の表式(2.20)より $\phi_n T(\Delta^n)$ が $T(\Delta^n)$ にサポートをもつのは明らか。問題は任意の細分化作用素とその任意のチェインホモトピー $\phi_n$ に対して同様の性質をもつかどうか。任意のチェインホモトピーに対して同様のことを示すには、自然性など性質が用いられると思われる。
- [3]では、微分指標 $f \in \hat{H}(X, \mathbb{R}/\Lambda) = \{f : Z_k(X) \rightarrow \mathbb{R}/\Lambda \mid f(\partial c) = \int_c \omega, \omega \in \Lambda^{k+1}, c \in C_{k+1}(X)\}$ が細分作用素に対して不変であることがコメントされている。実際、 $\Delta$ を細分作用素、 $\psi$ を1とのチェインホモトピー、つまり、 $1 - \Delta = \partial\psi + \psi\partial$ とすると、 $x \in Z_k$ に対して、 $f(\Delta x) = f(x) - f(\partial\psi x)$ であるが、 $f(\partial\psi x) = \int_{\psi x} \omega$ は $\psi x$ の $X$ における $k+1$ 次元体積がゼロであるから、 $f(\partial\psi x) = 0$ 。よって、 $f(\Delta x) = f(x)$ となり、微分指標 $f$ は細分作用素に対して不変である。

## 2.1 メモ：チェインホモトピー $\psi$ の自然性と $\psi(\sigma)$ の体積

一般論として、 $\psi : C_k \rightarrow C_{k+p}, p \geq 1$ が自然な準同型写像であるとき、 $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ に対して $\psi_X(\sigma)$ は $\sigma(\Delta^k)$ にサポートを持つことを示す。よって、 $\psi_X(\sigma)$ の $k+p$ 次元体積はゼロである。自然性の仮定は、以下が可換であること。

$$\begin{array}{ccc} C_k(X) & \xrightarrow{f_*} & C_k(Y) \\ \psi_X \downarrow & & \psi_Y \downarrow \\ C_{k+p}(X) & \xrightarrow{f_*} & C_{k+p}(Y) \end{array} \quad (2.61)$$

特に、

$$\sigma : \Delta^k \rightarrow X \quad (2.62)$$

に対して以下に $\psi$ の自然性を適用する。

$$\begin{array}{ccc} C_k(\Delta^k) & \xrightarrow{\sigma_*} & C_k(X) \\ \psi_{\Delta^k} \downarrow & & \psi_X \downarrow \\ C_{k+p}(\Delta^k) & \xrightarrow{\sigma_*} & C_{k+p}(X) \end{array} \quad (2.63)$$

$$\psi_X(\sigma) = \psi_X \circ \sigma_* \circ \text{id}_{\Delta^k}, \quad \text{id}_{\Delta^k} : \Delta^k \rightarrow \Delta^k \quad (2.64)$$

である。可換性より、

$$\psi_X(\sigma) = \sigma_* \circ \psi_{\Delta^k} \circ \text{id}_{\Delta^k} : \Delta^{k+p} \rightarrow X \quad (2.65)$$

であるが、右辺は $\sigma$ を経由するため、 $\psi_X(\sigma)$ は $\sigma(\Delta^k)$ の部分集合である。より詳しく見ると、

$$\psi_{\Delta^k}(\text{id}_{\Delta^k}) : \Delta^{k+p} \rightarrow \Delta^k = \sum_j a_j \tau_j, \quad \tau_j \quad (2.66)$$

であり、 $\tau_j(\Delta^{k+p})$ は $\Delta^k$ の部分集合である。よって、さらに $\sigma$ で誘導して得られる

$$\sigma_*(\tau_j) : \Delta^{k+p} \rightarrow X, \quad \sigma_*(\tau_j) : x \mapsto \sigma(\tau_j(x)) \quad (2.67)$$

は特異単体 $\sigma(\Delta^k)$ の部分集合である。

### 3 Eilenberg-Zilberの定理

本節では特異チェイン複体を扱う。以下の証明を見ればわかるように、任意の $n$ に対して $\tilde{H}_n(\Delta^p) = 0$ なる性質（この性質を非輪状という）のみ用いている（非輪状モデルの方法と呼ばれる）ので、正規化された立方体特異チェインにおいても同様。  $S_*(X), S^*(X, R)$ を特異チェイン複体, 特異コチェイン複体とする。

カップ積はコチェインレベルでは,  $f, g \in S^*(X)$ として,

$$(f \cup g)(c \in C_*(X)) = (f \otimes g)(\rho \circ d_*(c)) \quad (3.1)$$

として定義される。ここで,

$$d: X \rightarrow X \times X \quad (3.2)$$

は対角写像であり,

$$\rho: S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y) \quad (3.3)$$

は自然なチェイン写像であって,

$$\rho|_{S_0(X \times Y)}(x, y) = x \otimes y, \quad (3.4)$$

を満たす。（この条件を満たすものを対角近似と呼ぶ。）  $S_*(X \times Y)$ と $S_*(X) \otimes S_*(Y)$ の間に自然なチェインホモトピーが存在する, という定理が以下。 [2]に従って証明をスケッチする。

**Theorem 3.1** (Eilenberg-Zilberの定理). (i) 自然なチェイン写像

$$\rho: S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y) \quad (3.5)$$

であり, 0次において

$$\rho(x, y) = x \otimes y \quad (3.6)$$

を満たすものが存在する。さらに, (3.6)を満たすものは互いにチェインホモトピー同値。

(ii) 自然なチェイン写像

$$\kappa: S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X \times Y) \quad (3.7)$$

であり, 0次において

$$\kappa(x \otimes y) = (x, y) \quad (3.8)$$

を満たすものが存在する。さらに, (3.8)を満たすものは互いにチェインホモトピー同値。

(iii)  $\kappa$ は $\rho$ のチェインホモトピー逆写像。

注) 自然性は

$$f: X \rightarrow X', \quad g: Y \rightarrow Y' \quad (3.9)$$

に対して誘導される以下のチェイン写像との可換性を指す。

$$f_* \otimes g_*: S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X') \otimes S_*(Y'), \quad (3.10)$$

$$f \times g: S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X' \times Y'). \quad (3.11)$$

(証明のスケッチ.) ( $\rho$ の存在). 帰納法により $\rho_n$ を構成する。  $n = 0$ においては $\rho_0$ を(3.6)で定める。自然なチェイン写像 $\rho_{i < n}$ が与えられたとする。

$$\partial \rho_{r < n} = \rho_{r-1} \partial, \quad (f_* \otimes g_*) \rho_{r < n} = \rho_r (f \times g)_*. \quad (3.12)$$

対角写像

$$d : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^n, \quad d(x) = (x, x) \quad (3.13)$$

を導入する.  $d \in S_n(\Delta^n \times \Delta^n)$ であるから,  $\partial(d)$ に対して $\rho_{n-1}$ の $\partial$ との可換性より,

$$\partial\rho_{n-1}\partial(d) = \rho_{n-2}\partial\partial(d) = 0, \quad (n > 1), \quad (3.14)$$

$$\epsilon\rho_0\partial(d) = 0. \quad (3.15)$$

$\tilde{H}_*(\Delta^n) \otimes \tilde{H}_*(\Delta^n)$ は全て自明であるから,  $X = \Delta^n$ に関しては

$$\rho_{n-1}\partial(d) = \partial\rho_n(d), \quad \rho_n(d) \in (S_*(\Delta^n) \otimes S_*(\Delta^n))_n = \sum_{p+q=n} S_p(\Delta^n) \otimes S_q(\Delta^n) \quad (3.16)$$

なる $\rho_n$ が存在する.

さて $X \times Y$ の特異単体 $\sigma'$ は

$$\sigma' : \Delta^n \rightarrow X \times Y, \quad \sigma'(t_0, \dots, t_n) = (\sigma'_X(t_0, \dots, t_n), \sigma'_Y(t_0, \dots, t_n)) \quad (3.17)$$

の形をしており,  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X, \tau : \Delta^n \rightarrow Y$ の対 $(\sigma, \tau)$ とみなすことができる.  $\rho_n(\sigma, \tau)$ を

$$\rho_n(\sigma, \tau) = (\sigma_* \otimes \tau_*)(\rho_n(d)) \in \sum_{p+q=n} S_p(X) \otimes S_q(Y) \quad (3.18)$$

と定義すると $\rho_n$ は自然なチェイン写像となる. (要証明)

( $\kappa$ の存在)同様.  $n = 0$ は(3.8)として定義.  $r < n$ に対して, 自然なチェイン写像

$$\partial\kappa_{r < n} = \kappa_{r-1}\partial, \quad (f_* \times g_*)\kappa_r = \kappa_r(f_* \otimes g_*) \quad (3.19)$$

が存在したと仮定する.

まずは

$$\kappa_{n=p+q} : S_p(\Delta^p) \otimes S_q(\Delta^q) \rightarrow S_n(\Delta^n) \quad (3.20)$$

を構成する.  $\iota_p = id \in S_p(\Delta^p), \iota_q = id \in S_q(\Delta^q)$ に対して,  $\Delta^p \times \Delta^q$ のホモロジー群 $\tilde{H}_n(\Delta^p \times \Delta^q)$ はすべてゼロだから,

$$\partial\kappa_{n-1}\partial(\iota_p \otimes \iota_q) = \kappa_{n-1}\partial\partial(\iota_p \otimes \iota_q) = 0 \quad (3.21)$$

より,

$$\kappa_{n-1}\partial(\iota_p \otimes \iota_q) = \partial\kappa_n(\Delta^p \times \Delta^q), \quad \kappa_n(\Delta^p \times \Delta^q) \in S_n(\Delta^p \times \Delta^q) \quad (3.22)$$

が存在する. そこで一般の $\sigma \otimes \tau \in S_p(X) \otimes S_q(Y)$ に対して

$$\kappa_n(\sigma \otimes \tau) = (\sigma \times \tau)_*\kappa_n(\iota_p \otimes \iota_q) \quad (3.23)$$

と定義する.  $\kappa_n$ は自然なチェイン写像である. (要証明)

(自然なチェイン写像 $S_*(X \times Y) \rightarrow S_*(X \times Y)$ の一意性). 自然なチェイン写像

$$\phi : S(X \times Y) \rightarrow S(X \times Y), \quad \phi|_{n=0} = 1, \quad (3.24)$$

に対して, 1を $\phi$ につなぐチェインホモトピー

$$\Phi : S(X \times Y) \rightarrow S(X \times Y) \quad (3.25)$$

が存在することを示す。帰納法。  $\Phi_0 = 0$  とする。  $1 \leq r \leq n-1$  に対して,

$$\partial\Phi_r + \Phi_{r-1}\partial = \phi_r - 1, \quad (f \times g)_*\Phi_r = \Phi_r(f \times g)_* \quad (3.26)$$

が構成されたと仮定する。すると,

$$\partial(-\Phi_{n-1}\partial + \phi_n - 1) = (-\partial\Phi_{n-1}\partial + \partial\phi_n - \partial) \quad (3.27)$$

$$= ((1 - \phi_{n-1} + \Phi_{n-2}\partial)\partial + \partial\phi_n - \partial) \quad (3.28)$$

$$= (\phi_{n-1}\partial + \partial\phi_n) = 0. \quad (3.29)$$

特に, 対角写像  $d \in S_n(\Delta^n \times \Delta^n)$  に対して

$$\partial(-\Phi_{n-1}\partial + \phi_n - 1)(d) = 0 \quad (3.30)$$

であるので, 任意の  $n$  に対して  $\tilde{H}_n(\Delta^n \times \Delta^n) = 0$  より,

$$\partial\Phi_n(d) = (-\Phi_{n-1}\partial + \phi_n - 1)(d), \quad \Phi_n(d) \in S_{n+1}(\Delta^n \times \Delta^n) \quad (3.31)$$

が存在する。一般の  $(\sigma, \tau) \in S_*(X \times Y)$  に対しては

$$\Phi_n(\sigma, \tau) = (\sigma \times \tau)_*\Phi_n(d) \quad (3.32)$$

と置くと  $\{\Phi_n\}$  は所望のチェインホモトピーである。

(自然なチェイン写像  $S_*(X) \otimes S_*(Y) \rightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y)$  の一意性). 略。

( $\rho, \kappa$  の一意性)  $\rho\kappa, \kappa\rho$  はそれぞれ  $(\rho\kappa)_0 = 1, (\kappa\rho)_0 = 1$  を満たす自然なチェイン写像である。

$$\kappa\rho \cong 1, \quad \rho\kappa \cong 1. \quad (3.33)$$

さて, 別の  $\rho'$  が存在したとする。

### 3.1 立方体特異チェイン複体における $\rho, \kappa$

一般に, 写像

$$f : A \rightarrow C, \quad g : B \rightarrow D \quad (3.34)$$

に対して,

$$f \times g : A \times B \rightarrow C \times D, \quad (f \times g)(a, b) := (f(a), g(b)) \quad (3.35)$$

と定義する。表記を [1] に戻す。特異立方体

$$S : I^p \rightarrow X, \quad T : I^q \rightarrow Y \quad (3.36)$$

に対して,

$$S \times T : I^{p+q} \rightarrow X \times Y, \quad (S \times T)(x_1, \dots, x_{p+q}) = (S(x_1, \dots, x_p), T(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})) \quad (3.37)$$

である。

さて, チェイン写像

$$\kappa : Q_*(X) \otimes Q_*(Y) \rightarrow Q_*(X \times Y) \quad (3.38)$$

については, 次数に依らず,

$$\kappa_{p,q}(S \otimes T) = S \times T, \quad S : I^p \rightarrow X, \quad T : I^q \rightarrow Y, \quad (3.39)$$

と選ぶことができる.  $\kappa$ は退化立方体を退化立方体に移すため,  $\kappa: C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$ がwell-defined. さらに $\kappa$ の性質については[1]を見よ.

一方で, チェイン写像 $\rho$ は複雑な表式になる.

$$\rho_n: Q_n(X \times Y) \rightarrow \sum_{p+q=n} Q_p(X) \otimes Q_q(Y) \quad (3.40)$$

を定義したい. 0次は

$$\rho_0(x, y) = x \otimes y, \quad x \in X, y \in Y. \quad (3.41)$$

高次を定義する. 非輪状モデルの練習として, 導出しよう.  $\sigma: I^n \rightarrow X \times Y$ は対

$$(S, T), \quad S: I^n \rightarrow X, \quad T: I^n \rightarrow Y \quad (3.42)$$

で表記できることに注意する.  $r < n$ までの構成を仮定して,

$$\rho_n: Q_n(I^n \times I^n) \rightarrow \sum_{p+q=n} Q_p(I^n) \otimes Q_q(I^n) \quad (3.43)$$

を構成し, それを

$$Q_*(I^n) \otimes Q_*(I^n) \xrightarrow{S_* \otimes T_*} Q_*(X) \otimes Q_*(Y) \quad (3.44)$$

へ誘導する.

まずは

$$\rho_1: Q_1(I^1 \times I^1) \rightarrow Q_1(I^1) \otimes Q_0(I^1) + Q_0(I^1) \otimes Q_1(I^1) \quad (3.45)$$

を構成する.

$$d: I^1 \rightarrow I^1 \times I^1, \quad x \mapsto (x, x) \quad (3.46)$$

を対角写像として,

$$\partial \rho_0 \partial(d) = 0. \quad (3.47)$$

ここで,  $\tilde{H}_0(I^1) \otimes \tilde{H}(I^1) = 0$ より $\rho_1(d) \in (Q_*(I^1) \otimes Q_*(I^1))_1$ が存在して,

$$\rho_0 \partial(d) = \partial \rho_1(d). \quad (3.48)$$

左辺は

$$\rho_0((1, 1) - (0, 0)) = 1 \otimes 1 - 0 \otimes 0 \quad (3.49)$$

であるので, 確かに,

$$\rho_1(d)(x) = x \otimes 1 + 0 \otimes x \quad (3.50)$$

と選べば条件を満たす. 一般の

$$\rho_1: Q_1(X \times Y) \rightarrow Q_1(X) \otimes Q_0(Y) + Q_0(X) \otimes Q_1(Y) \quad (3.51)$$

は

$$\rho_1(S, T) = (S_* \otimes T_*)(\rho_1(d)) \quad (3.52)$$

と定義する. つまり,

$$\rho_1(S, T)(x) = S(x) \otimes T(1) + S(0) \otimes T(x) \quad (3.53)$$

である。これは

$$\rho_1(S, T) = S \otimes B_1 T + A_1 S \otimes T \quad (3.54)$$

である。(この $\rho_1$ が望みの性質を満たすか確認する必要がある。)

次に,

$$\rho_2 : Q_2(I^2 \times I^2) \rightarrow Q_2(I^2) \otimes Q_0(I^2) + Q_1(I^2) \otimes Q_1(I^2) + Q_0(I^2) \otimes Q_2(I^2) \quad (3.55)$$

を構成する。

$$d : I^2 \rightarrow I^2 \times I^2, \quad x \mapsto (x, x) \quad (3.56)$$

を対角写像として, 自然性より

$$\partial \rho_1 \partial(d) = \rho_0 \partial \partial(d) = 0. \quad (3.57)$$

$(\tilde{H}_*(I^2) \otimes \tilde{H}(I^2))_1 = 0$ より $\sigma \in (Q_*(I^2) \otimes Q_*(I^2))_2$ が存在して,

$$\rho_1 \partial(d) = \partial \sigma. \quad (3.58)$$

左辺は

$$\partial d(x) = d(1, x) - d(0, x) - d(x, 1) + d(x, 0) \quad (3.59)$$

$$= ((1, x), (1, x)) - ((0, x), (0, x)) - ((x, 1), (x, 1)) + ((x, 0), (x, 0)) \quad (3.60)$$

より,

$$\rho_1 \partial d(x) = (1, x) \otimes (1, 1) - (0, x) \otimes (0, 1) - (x, 1) \otimes (1, 1) + (x, 0) \otimes (1, 0) \quad (3.61)$$

$$+ (1, 0) \otimes (1, x) - (0, 0) \otimes (0, x) - (0, 1) \otimes (x, 1) + (0, 0) \otimes (x, 0). \quad (3.62)$$

$$\partial \sigma(x) = \sigma(1, x) - \sigma(0, x) - \sigma(x, 1) + \sigma(x, 0) \quad (3.63)$$

であるが,

$$\sigma(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \otimes (1, 1) + (0, 0) \otimes (x_1, x_2) - (0, x_1) \otimes (x_2, 1) + (x_1, 0) \otimes (1, x_2) \quad (3.64)$$

とすると確かに条件を満たす。一般の

$$\rho_2 : Q_2(X \times Y) \rightarrow (Q_*(X) \otimes Q_*(Y))_2 \quad (3.65)$$

は

$$\rho_2(S, T) = (S_* \otimes T_*) \sigma \quad (3.66)$$

と定義する。つまり,

$$\rho_2(S, T)(x) = S(x_1, x_2) \otimes T(1, 1) + S(0, 0) \otimes T(x_1, x_2) - S(0, x_1) \otimes T(x_2, 1) + S(x_1, 0) \otimes T(1, x_2) \quad (3.67)$$

である。これは

$$\rho_2(S, T) = S \otimes B_1 B_2 T + A_1 A_2 S \otimes T - A_1 S \otimes B_2 T + A_2 S \otimes B_1 T \quad (3.68)$$

である。

一般には, 以下で与えられる。

$$\rho_n : Q_n(X \times Y) \rightarrow (Q_*(X) \otimes Q_*(Y))_n, \quad (3.69)$$

$$\rho_n(S, T) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J A_{J'} S \otimes B_J T. \quad (3.70)$$

ここで、 $J$ の和は $\{1, \dots, n\}$ の部分集合を走り、 $(-1)^J$ は入れ替え $\{1, \dots, n\} \rightarrow JJ'$ の符号であり、 $J$ を順序付き集合 $J = \{j_1 < \dots < j_p\}$ として表記し $J' = \{1, \dots, n\} \setminus J$ 、 $A_J = A_{j_1} \cdots A_{j_p}$ 、 $B_J = B_{j_1} \cdots B_{j_p}$ などと書いた。例えば、 $\{1, 2\} \rightarrow \{2\}\{1\}$ の符号は $-1$ 、 $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 4\}\{2, 3\}$ の符号は $1$ 。実際にこの定義が $\delta\rho_n = \rho_{n-1}\partial$ を満たすことを確認する。<sup>3</sup>

$$\partial\rho_n(S, T) = \partial\left[\sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J A_J S \otimes B_J T\right] \quad (3.87)$$

$$= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J (\partial A_J S \otimes B_J T + (-1)^{n-|J|} A_J S \otimes \partial B_J T) \quad (3.88)$$

$$= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J (\partial A_J S \otimes B_J T + (-1)^{|J|} A_J S \otimes \partial B_J T) \quad (3.89)$$

$$= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J \left[ \sum_{i=1}^{|J|} (-1)^i (A_i - B_i) A_J S \otimes B_J T + (-1)^{|J|} \sum_{i=1}^{n-|J|} (-1)^i A_J S \otimes (A_i - B_i) B_J T \right]. \quad (3.90)$$

一方で、

$$\rho_{n-1}\partial(S, T) = \rho_{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^i (A_i - B_i)(S, T) \quad (3.91)$$

$$= \rho_{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^i ((A_i S, A_i T) - (B_i S, B_i T)) \quad (3.92)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{J \subset \{1, \dots, n-1\}} (-1)^J [A_J A_i S \otimes B_J A_i T - A_J B_i S \otimes B_J B_i T]. \quad (3.93)$$

ここで、 $1 \leq i < j \leq n$ に対して、

$$A_i A_j = A_{j-1} A_i, \quad B_i B_j = B_{j-1} B_i, \quad A_i B_j = B_{j-1} A_i, \quad B_i A_j = A_{j-1} B_i \quad (3.94)$$

を思い出す。同じことだが $n \geq i \geq j \geq 1$ に対して、

$$A_i A_j = A_j A_{i+1}, \quad B_i B_j = B_j B_{i+1}, \quad A_i B_j = B_j A_{i+1}, \quad B_i A_j = A_j B_{i+1} \quad (3.95)$$

<sup>3</sup> $n = 2$ :

$$\partial\rho_2(S, T) = \partial(S \otimes B_1 B_2 T + A_1 A_2 S \otimes T - A_1 S \otimes B_2 T + A_2 S \otimes B_1 T) \quad (3.71)$$

$$= \partial S \otimes B_1 B_2 T + A_1 A_2 S \otimes \partial T - \partial A_1 S \otimes B_2 T + A_1 S \otimes \partial B_2 T + \partial A_2 S \otimes B_1 T - A_2 S \otimes \partial B_1 T \quad (3.72)$$

$$= (-A_1 S + B_1 S + A_2 S - B_2 S) \otimes B_1 B_2 T \quad (3.73)$$

$$+ A_1 A_2 S \otimes (-A_1 T + B_1 T + A_2 T - B_2 T) \quad (3.74)$$

$$- (-A_1 A_1 S + B_1 A_1 S) \otimes B_2 T + A_1 S \otimes (-A_1 B_2 T + B_1 B_2 T) \quad (3.75)$$

$$+ (-A_1 A_2 S + B_1 A_2 S) \otimes B_1 T - A_2 S \otimes (-A_1 B_1 T + B_1 B_1 T) \quad (3.76)$$

$$= (B_1 S - B_2 S) \otimes B_1 B_2 T + A_1 A_2 S \otimes (-A_1 T + A_2 T) \quad (3.77)$$

$$- (B_1 A_1 S) \otimes B_2 T + A_1 S \otimes (-A_1 B_2 T) + (B_1 A_2 S) \otimes B_1 T - A_2 S \otimes (-A_1 B_1 T) \quad (3.78)$$

$$= (B_1 S - B_2 S) \otimes B_1 B_2 T + A_1 A_2 S \otimes (-A_1 T + A_2 T) \quad (3.79)$$

$$- (A_1 B_2 S) \otimes B_2 T + A_1 S \otimes (-A_1 B_2 T) + (B_1 A_2 S) \otimes B_1 T - A_2 S \otimes (-B_1 A_2 T), \quad (3.80)$$

$$\rho_1\partial(S, T) = \rho_1(-A_1 + B_1 + A_2 - B_2)(S, T) \quad (3.81)$$

$$= \rho_1(-(A_1 S, A_1 T) + (B_1 S, B_1 T) + (A_2 S, A_2 T) - (B_2 S, B_2 T)) \quad (3.82)$$

$$= -(A_1 S \otimes B_1 A_1 T + A_1 A_1 S \otimes A_1 T) + (B_1 S \otimes B_1 B_1 T + A_1 B_1 S \otimes B_1 T) \quad (3.83)$$

$$+ (A_2 S \otimes B_1 A_2 T + A_1 A_2 S \otimes A_2 T) - (B_2 S \otimes B_1 B_2 T + A_1 B_2 S \otimes B_2 T) \quad (3.84)$$

$$= -(A_1 S \otimes A_1 B_2 T + A_1 A_2 S \otimes A_1 T) + (B_1 S \otimes B_1 B_1 T + B_1 A_2 S \otimes B_1 T) \quad (3.85)$$

$$+ (A_2 S \otimes B_1 A_2 T + A_1 A_2 S \otimes A_2 T) - (B_2 S \otimes B_1 B_2 T + A_1 B_2 S \otimes B_2 T). \quad (3.86)$$

確かに一致する。

が成立する。比較すると片方にあり片方ない項がある。

$$\partial\rho_n(S, T) \ni \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J (-1)^{|J|} \sum_{i=1}^{n-|J|} (-1)^i A_{J'} S \otimes (-B_i) B_J T \quad (3.96)$$

は $\rho_{n-1}\partial(S, T)$ に含まれない。よく見るとこの項は

$$\partial\rho_n(S, T) \ni \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J \sum_{i=1}^{|J|} (-1)^i A_i A_{J'} S \otimes B_J T \quad (3.97)$$

とキャンセルする。これを具体的に示す。符号 $(-1)^J$ は集合 $J = \{j_1 < \dots < j_{|J|}\}$ を用いて具体的に書くことができる。入れ替え

$$12 \cdots j_1(j_1 + 1) \cdots (j_2 - 1)j_2 \cdots \rightarrow j_1 12 \cdots (j_1 - 1)(j_1 + 1) \cdots (j_2 - 1)j_2 \cdots \quad (3.98)$$

に伴う符号は $(-1)^{j_1-1}$ 。入れ替え

$$j_1 12 \cdots (j_1 - 1)(j_1 + 1) \cdots (j_2 - 1)j_2 \cdots \rightarrow j_1 j_2 12 \cdots (j_1 - 1)(j_1 + 1) \cdots (j_2 - 1)(j_2 + 2) \cdots \quad (3.99)$$

の符号は $(-1)^{j_2-2}$ 。つまり、

$$(-1)^J = (-1)^{\sum_{a=1}^{|J|} (j_a - a)}. \quad (3.100)$$

さらに、

$$B_i B_J = B_i B_{j_1} \cdots B_{j_{|J|}} = B_{j_1} \cdots B_{j_r} B_{i+r} B_{j_{r+1}} \cdots B_{j_{|J|}}, \quad j_r < i+r < j_{r+1}, \quad (3.101)$$

に注意する。ここで $r$ は $j_r < i+r < j_{r+1}$ を満たす整数、つまり、 $j_a - a < i$ を満たす最大の整数

$$r = \max\{a \in \{1, \dots, |J|\} | j_a - a < i\} \quad (3.102)$$

である。 $B_i B_J$ に対応する順序付き集合を

$$J(i) = \{j_1 < \cdots < j_r < i+r < j_{r+1} < \cdots < j_{|J|}\} \quad (3.103)$$

と書く。つまり、

$$B_i B_J = B_{J(i)}. \quad (3.104)$$

与えられた $J, i$ に対して、

$$B_i B_J = B_{\tilde{j}}, \quad A_{J'} = A_{\tilde{i}} A_{\tilde{j}}, \quad (3.105)$$

なる $\tilde{J}, \tilde{i}$ に対して符号がキャンセルする

$$(-1)^J (-1)^{|J|} (-1)^i = (-1)^{\tilde{J}} (-1)^{\tilde{i}} \quad (3.106)$$

ことを示せば良い。

$$i+r = \tilde{i} + \tilde{r}, \quad \tilde{i} = r+1 \quad (3.107)$$

を示す。

例えば、

$$J = 1, 2, 5, 6, 8, 10, 12, \dots \quad (3.108)$$

$$i = 4, \quad (3.109)$$

の場合は,

$$4, 1, 2, 5, 6, 8, 10, 12, \dots \quad (3.110)$$

$$\rightarrow 1, 5, 2, 5, 6, 8, 10, 12, \dots \quad (3.111)$$

$$\rightarrow 1, 2, 6, 5, 6, 8, 10, 12, \dots \quad (3.112)$$

$$\rightarrow 1, 2, 5, 7, 6, 8, 10, 12, \dots \quad (3.113)$$

$$\rightarrow 1, 2, 5, 6, 8, 8, 10, 12, \dots \quad (3.114)$$

$$\rightarrow 1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 12, \dots = J(i) = \tilde{J}. \quad (3.115)$$

で止まるので,  $r = 5$ . また,

$$i + r = 9 \quad (3.116)$$

である. このとき

$$J' = 3, 4, 7, 9, 11, \dots \quad (3.117)$$

であり, 対応して

$$\tilde{J}' = 3, 4, 7, \hat{9}, 11, \dots \quad (3.118)$$

ここで,  $\hat{9}$ は9を飛ばすことを意味する. したがって,  $\tilde{J}'(\tilde{i}) = J'$ を満たすには,  $\tilde{i}$ が $\hat{r}$ 回左から右に移動するとして,

$$\tilde{i} + \tilde{r} = i + r \quad (3.119)$$

であれば良い. また,  $i$ と $\tilde{i}$ が右に移動した際に通過した数字は

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (3.120)$$

であり, この個数は $(i + r) - 1$ に等しく, また, よって

$$r + \tilde{r} = i + r - 1 \quad (3.121)$$

が成立する. よって(3.107)が示された. 符号は

$$(-1)^{\tilde{J}}(-1)^{\tilde{i}} = (-1)^{J(i)}(-1)^{r+1} = (-1)^{\sum_{a=1}^r(j_a - a) + ((i+r) - (r+1)) + \sum_{a=r+1}^{|J|}(j_a - a - 1)}(-1)^{r+1} \quad (3.122)$$

$$= (-1)^J(-1)^{i-1}(-1)^{|J|-r}(-1)^{r+1} = (-1)^J(-1)^{|J|}(-1)^i \quad (3.123)$$

となり, (3.106)が成立する<sup>4</sup>. よって,

$$\partial \rho_n(S, T) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J \left[ \sum_{i=1}^{|J|} (-1)^i (-B_i) A_{J'} S \otimes B_J T + (-1)^{|J|} \sum_{i=1}^{n-|J|} (-1)^i A_{J'} S \otimes A_i B_J T \right] \quad (3.124)$$

$$= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J \left[ (-1)^{|J|} \sum_{i=1}^{n-|J|} (-1)^i A_{\{1, \dots, n\} \setminus J} S \otimes A_i B_J T - \sum_{i=1}^{|J|} (-1)^i B_i A_{\{1, \dots, n\} \setminus J} S \otimes B_J T \right]. \quad (3.125)$$

これが

$$\rho_{n-1} \partial(S, T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{J \subset \{1, \dots, n-1\}} (-1)^J [A_{\{1, \dots, n-1\} \setminus J} A_i S \otimes B_J A_i T - A_{\{1, \dots, n-1\} \setminus J} B_i S \otimes B_J B_i T] \quad (3.126)$$

<sup>4</sup>ホントは $i + r > |J|$ のときの処理など考える必要があるが, 省略.

に一致することを示す。ここで、 $J \subset \{1, \dots, n-1\}$ における $J'$ の意味は $J' = \{1, \dots, n-1\} \setminus J$ であることを混乱を防ぐため明記した。ここでも項の存在/非存在まで含めた一致は確認せず、符号の一致のみを見る。

第一項目の一致を確認する。まず、

$$A_i B_J = B_{\tilde{J}} A_{\tilde{i}} \quad (3.127)$$

なる $\tilde{J}, \tilde{i}$ を求める。例えば、

$$J = 1, 2, 5, 6, 8, 10, 12 = n, \quad (3.128)$$

$$i = 4, \quad (3.129)$$

の場合は、

$$4, 1, 2, 5, 6, 8, 10, 12 \quad (3.130)$$

$$\rightarrow 1, 5, 2, 5, 6, 8, 10, 12 \quad (3.131)$$

$$\rightarrow 1, 2, 6, 5, 6, 8, 10, 12 \quad (3.132)$$

$$\rightarrow 1, 2, 5, 7, 6, 8, 10, 12 \quad (3.133)$$

$$\rightarrow 1, 2, 5, 6, 8, 8, 10, 12 \quad (3.134)$$

$$\rightarrow 1, 2, 5, 6, 8, \underbrace{9}_{i+r}, 10, 12 \quad (3.135)$$

$$\rightarrow 1, 2, 5, 6, 8, 9, 9, 12 \quad (3.136)$$

$$\rightarrow 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 9 \quad (3.137)$$

となる。 $i+r$ 以降は右に移るたびに $j_a \mapsto j_a - 1$ と1下がる。つまり、与えられた $J, i$ に対して $r$ は以前と同じ定義(3.102)

$$j_r < i + r < j_{r+1} \quad (3.138)$$

を用いて、

$$i j_1 \cdots j_{|J|} \rightarrow j_1 \cdots j_r (i+r) j_{r+1} \cdots j_{|J|} \rightarrow j_1 \cdots j_r (j_{r+1} - 1) \cdots (j_{|J|} - 1) (i+r). \quad (3.139)$$

( $r$ の定義より、 $j_r < j_{r+1} - 1$ に注意。) よって、

$$\tilde{i} = i + r, \quad \tilde{J} = \{j_1, \dots, j_r, (j_{r+1} - 1), \dots, (j_{|J|} - 1)\}. \quad (3.140)$$

このとき、

$$A_{\{1, \dots, n\} \setminus J} = A_{\{1, \dots, n-1\} \setminus \tilde{J}} A_{\tilde{i}} \quad (3.141)$$

は自動的に満たされる。上の例では

$$\{1, \dots, n-1\} \setminus \tilde{J} = \{3, 4, 7, 10\} \quad (3.142)$$

より

$$3, 4, 7, 10, 9 \rightarrow 3, 4, 7, 9, 11. \quad (3.143)$$

一方で、

$$\{1, \dots, n\} \setminus J = \{3, 4, 7, 9, 11\}. \quad (3.144)$$

よって後は符号の一致を見れば良い。

$$(-1)^{\tilde{i}} (-1)^{\tilde{J}} = (-1)^{i+r} (-1)^{\sum_{a=1}^r (j_a - a) + \sum_{a=r+1}^{|J|} (j_a - a - 1)} = (-1)^{i+r} (-1)^J (-1)^{-(|J|-r)} = (-1)^i (-1)^J (-1)^{|J|} \quad (3.145)$$

となり一致する。第2項目も同様。

## 4 カップ積

コチェインレベルのカップ積の定義は,

$$(f \cup g)(c \in C_*(X)) = (f \otimes g)(\rho \circ d_*(c)) \quad (4.1)$$

ここで,

$$d : X \rightarrow X \times X \quad (4.2)$$

は対角写像であり,  $\rho : C_*(X \times Y) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y)$ の取り方には任意性があるが, 前節の

$$\rho_n(S, T) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J A_{J'} S \otimes B_J T \quad (4.3)$$

とすると, 特異立方体  $T : I^n \rightarrow X$  に対して,

$$d_*(T) = (T, T) : I^n \rightarrow X \times X, \quad (4.4)$$

$$\rho \circ d_*(T) = \rho(T, T) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J A_{J'} T \otimes B_J T. \quad (4.5)$$

よって

$$(f \cup g)(T) = (f \otimes g)(\rho \circ d_*(T)) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^J f(A_{J'} T) g(B_J T). \quad (4.6)$$

特定の次数のみ見ると,  $f^p \in C^p(X, R), g^q \in C^q(X, R), T_{p+q} : I^{p+q} \rightarrow X$  として,

$$(f^p \cup g^q)(T_{p+q}) = \sum_{J \subset \{1, \dots, p+q\}, |J|=p} (-1)^J f^p(A_{J'} T_{p+q}) g^q(B_J T_{p+q}). \quad (4.7)$$

特に,

$$(f^0 \cup g^n)(T_n) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}, |J|=0} (-1)^J f^0(A_{J'} T_n) g^n(B_J T_n) \quad (4.8)$$

$$= f^0(T_n(0, \dots, 0)) g^n(T_n), \quad (4.9)$$

$$(f^n \cup g^0)(T_n) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}, |J|=n} (-1)^J f^n(A_{J'} T_n) g^0(B_J T_n) \quad (4.10)$$

$$= f^n(T_n) g^0(T_n(1, \dots, 1)). \quad (4.11)$$

$p = q = 1$ を見ると,

$$(f^1 \cup g^1)(T_2) = \sum_{J \subset \{1, 2\}, |J|=1} (-1)^J f^1(A_{J'} T_2) g^1(B_J T_2) \quad (4.12)$$

$$= f^1(A_2 T_2) g^1(B_1 T_2) - f^1(A_1 T_2) g^1(B_2 T_2) \quad (4.13)$$

$$= f^1(T_2(x, 0)) g^1(T_2(1, x)) - f^1(T_2(0, x)) g^1(T_2(x, 1)) \quad (4.14)$$

となる. <sup>5</sup>

<sup>5</sup>特異チェイン複体の場合のAlexander-Whitney写像を用いた表式

$$(f^1 \cup g^1)(012) = f^1(01)g(12) \quad (4.15)$$

と比較せよ.

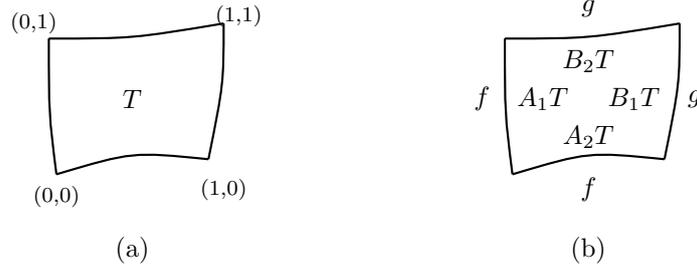


Figure 1:  $p = q = 1$  の場合のカップ積.

## 5 de Rham写像とカップ積

微分形式

$$\omega \in \Omega^n(X) \quad (5.1)$$

に対して,

$$R : \Omega^n(X) \rightarrow C(X, \mathbb{R}), \quad (5.2)$$

$$\omega \mapsto R\omega : \left( T \rightarrow \int_T \omega \right) \in C^n(X, \mathbb{R}), \quad T : I^n \rightarrow X \in C_n(X), \quad (5.3)$$

を de Rham マップと呼ぶ.

- 微分形式の性質より, de Rham マップで得られる  $R\omega^n \in C^n(X, \mathbb{R})$  は, 一般の  $f \in C^n(X, \mathbb{R})$  と異なり,  $T : I^n \rightarrow X$  の“パラメタ付け”, つまり, 単位立方体の向き付けを変えない自己微分同相による取り換え  $\phi : I^n \rightarrow I^n$  に対して不変:

$$R\omega^n(T) = R\omega^n(T \circ \phi). \quad (5.4)$$

よって,  $T : I^n \rightarrow X$  の“形”だけで値  $R\omega^n(T)$  が決まる.

- $R$  は自然なチェインマップ.
- de Rham マップは細分化作用素  $\Delta : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$  に対して不変.<sup>6</sup>

$$\Delta^* R\omega = R\omega. \quad (5.5)$$

なぜなら積分領域の分割に対応するため.

$$(\Delta^* R\omega)(T) = R\omega(\Delta T) = \int_{\Delta T} \omega = \int_T \omega = R\omega(T) \quad (5.6)$$

より. ここで集合として  $\Delta T(I^n) = T(I^n)$  を用いた.

### 5.1 カップ積と細分化作用素

カップ積と de Rham マップは可換ではないが, 積分の離散近似のような表式を与えることが期待される.

$$\omega^p \in \Omega^p(X), \theta^q \in \Omega^q(X) \quad (5.7)$$

<sup>6</sup>細分化作用素の定義は2節のものとする.  $sd = \{sd_n\}_n$  を  $\Delta$  と書いた.

として,

$$R(\omega^p \wedge \theta^q) - R\omega^p \cup R\theta^q \quad (5.8)$$

を見積もる.

$$R(\omega^p \wedge \theta^q)(T) = \int_T \omega^p \wedge \theta^q = \int_{I^{p+q}} T^*(\omega^p \wedge \theta^q) = \int_{I^{p+q}} T^*\omega^p \wedge T^*\theta^q. \quad (5.9)$$

$$(R\omega^p \cup R\theta^q)(T) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}, |J|=p} (-1)^J R\omega^p(A_J T) R\theta^q(B_J T) \quad (5.10)$$

$$= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}, |J|=p} (-1)^J \int_{A_J T} \omega^p \int_{B_J T} \theta^q \quad (5.11)$$

$$= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}, |J|=p} (-1)^J \int_{A_J I^{p+q}} T^*\omega^p \int_{B_J I^{p+q}} T^*\theta^q. \quad (5.12)$$

したがって, 単位立方体  $I^{p+q}$  上の微分形式に関する比較に帰着する. つまり,

$$\omega, \theta \in \Omega^*(I^{p+q}) \quad (5.13)$$

として,

$$\int_{I^{p+q}} \omega^p \wedge \theta^q - \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}, |J|=p} (-1)^J \int_{A_J I^{p+q}} \omega^p \int_{B_J I^{p+q}} \theta^q \quad (5.14)$$

を見積もる問題に.

例えば,  $p = q = 1$  の場合は,

$$\omega = \omega_x(x, y)dx + \omega_y(x, y)dy, \quad (5.15)$$

$$\theta = \theta_x(x, y)dx + \theta_y(x, y)dy \quad (5.16)$$

として,

$$R(\omega \wedge \theta)(\text{id}) = \int_{[0,1] \times [0,1]} (\omega_x(x, y)\theta_y(x, y) - \omega_y(x, y)\theta_x(x, y))dxdy. \quad (5.17)$$

一方で,

$$(R\omega^1 \cup R\theta^1)(\text{id}) = \int_{[0,1] \times [0,1]} (\omega_x(x, 0)\theta_y(1, y) - \omega_y(0, y)\theta_x(x, 1))dxdy. \quad (5.18)$$

よって, 微分形式に対するカップ積は, 積分を端点で近似する表式とみなすことができる. すると素朴には, 細分化作用素は近似精度を上昇させられる.  $p = q = 1$  の場合書き下すと,

$$\Delta^*(R\omega^1 \cup R\theta^1)(\text{id}) \quad (5.19)$$

$$= \int_{[0,1/2] \times [0,1/2]} (\omega_x(x, 0)\theta_y(1/2, y) - \omega_y(0, y)\theta_x(x, 1/2))dxdy \quad (5.20)$$

$$+ \int_{[1/2,1] \times [0,1/2]} (\omega_x(x, 0)\theta_y(1, y) - \omega_y(1/2, y)\theta_x(x, 1/2))dxdy \quad (5.21)$$

$$+ \int_{[0,1/2] \times [1/2,1]} (\omega_x(x, 1/2)\theta_y(1/2, y) - \omega_y(0, y)\theta_x(x, 1))dxdy \quad (5.22)$$

$$+ \int_{[1/2,1] \times [1/2,1]} (\omega_x(x, 1/2)\theta_y(1, y) - \omega_y(1/2, y)\theta_x(x, 1))dxdy. \quad (5.23)$$

したがって素朴には

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta^*)^n (R\omega \cup R\theta) = R(\omega \wedge \theta) \quad (5.24)$$

が成立する [3]. <sup>7</sup>

極限公式(5.24), 及び細分化作用素のチェインホモトピー

$$1 - \Delta = \partial\psi + \psi\partial \quad (5.25)$$

を用いて,

$$E : \Omega^p(X) \otimes \Omega^q(X) \rightarrow C^{p+q-1}(X) \quad (5.26)$$

を

$$E(\omega, \theta) := - \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^*)^n \psi^*(R\omega \cup R\theta), \quad (5.27)$$

つまり,

$$E(\omega, \theta)(c \in C_*(X)) := - \sum_{n=0}^{\infty} (R\omega \cup R\theta)(\psi \Delta^n c) \quad (5.28)$$

と定義する [3].

- (5.28)の無限和が収束するかどうか要確認. [3]には“A straightforward estimate shows that the right hand side of (1.8) is dominated by a geometric series and hence convergences.”と書かれている.

さて $R, \Delta$ が自然なチェインマップ,  $\psi$ が自然なマップであることに注意して,

$$\delta E(\omega, \theta)(c) = E(\omega, \theta)(\partial c) \quad (5.29)$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^*)^n \psi^*(R\omega \cup R\theta)(\partial c) \quad (5.30)$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (R\omega \cup R\theta)(\psi \Delta^n \partial c) \quad (5.31)$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (R\omega \cup R\theta)(\psi \partial \Delta^n c) \quad (5.32)$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (R\omega \cup R\theta)((1 - \Delta - \partial\psi)\Delta^n c) \quad (5.33)$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (R\omega \cup R\theta)((\Delta^n - \Delta^{n+1})c) + \sum_{n=0}^{\infty} (R\omega \cup R\theta)(\partial\psi \Delta^n c) \quad (5.34)$$

$$= - \lim_{N \rightarrow \infty} (R\omega \cup R\theta)((1 - \Delta^{N+1})c) + \sum_{n=0}^{\infty} \delta(R\omega \cup R\theta)(\psi \Delta^n c) \quad (5.35)$$

$$= -(R\omega \cup R\theta)(c) + \lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta^*)^{N+1}(R\omega \cup R\theta)(c) + \sum_{n=0}^{\infty} (\delta R\omega \cup R\theta + (-1)^{|\omega|} R\omega \cup \delta R\theta)(\partial\psi \Delta^n c) \quad (5.36)$$

$$= -(R\omega \cup R\theta)(c) + R(\omega \wedge \theta)(c) + \sum_{n=0}^{\infty} (Rd\omega \cup R\theta + (-1)^{|\omega|} R\omega \cup Rd\theta)(\partial\psi \Delta^n c) \quad (5.37)$$

$$= -(R\omega \cup R\theta)(c) + R(\omega \wedge \theta)(c) - E(d\omega, \theta)(c) - (-1)^{|\omega|} E(\omega, d\theta)(c). \quad (5.38)$$

<sup>7</sup>[3]では, この極限公式(5.24)のために立方体特異チェイン複体を用いると書かれており, また(5.24)自体は[4]を引用している. しかし, [4]が通常の単体を用いた特異チェイン複体ではなく, 立方体特異チェイン複体の何かの性質に依存しているかどうかかわからなかった. [4]自体も一見すると単体の特異チェイン複体による構成のように見える.

つまり,

$$R(\omega \wedge \theta) - R\omega \cup R\theta = \delta E(\omega, \theta) + E(d\omega, \theta) + (-1)^{|\omega|} E(\omega, d\theta), \quad (5.39)$$

あるいは, 同じことだが,

$$R(\omega \wedge \theta) - R\omega \cup R\theta = \delta E(\omega \otimes \theta) + Ed(\omega \otimes \theta) \quad (5.40)$$

が示された.

### 5.1.1 無限和(5.24)の収束について

(5.24)の収束性について,  $\omega, \theta \in \Omega^1(X)$ の場合の様子をみる.

$$E(\omega, \theta)(T : I \rightarrow X) = - \sum_{n=0}^{\infty} (R\omega \cup R\theta)(\psi \Delta^n T) \quad (5.41)$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} [R\omega(A_2 \psi \Delta^n T) R\theta(B_1 \psi \Delta^n T) - R\omega(A_1 \psi \Delta^n T) R\theta(B_2 \psi \Delta^n T)]. \quad (5.42)$$

$\psi$ の具体形は(2.45)より

$$\psi(T) = \sum_{e \in \mathcal{E}_1} G_e(T) = G_0(T) + G_1(T), \quad (5.43)$$

$$\psi(T)(x_1, x_2) = T(\eta_0(x_1, x_2)) + T(\eta_1(x_1, x_2)). \quad (5.44)$$

よって一般の $\sigma : I \rightarrow X$ に対して

$$(R\omega \cup R\theta)(\psi\sigma) = (R\omega \cup R\theta)(G_0\sigma + G_1\sigma) \quad (5.45)$$

$$= R\omega(A_2 G_0\sigma) R\theta(B_1 G_0\sigma) - R\omega(A_1 G_0\sigma) R\theta(B_2 G_0\sigma) \quad (5.46)$$

$$+ R\omega(A_2 G_1\sigma) R\theta(B_1 G_1\sigma) - R\omega(A_1 G_1\sigma) R\theta(B_2 G_1\sigma). \quad (5.47)$$

ここで

$$A_1 G_0\sigma : x \mapsto \sigma(\eta_0(0, x)) = \sigma(0), \quad (5.48)$$

$$B_1 G_1\sigma : x \mapsto \sigma(\eta_1(1, x)) = \sigma(1), \quad (5.49)$$

$$B_2 G_1\sigma : x \mapsto \sigma(\eta_1(x, 1)) = \sigma(1), \quad (5.50)$$

に注意すると, 第1項しか残らず,

$$(R\omega \cup R\theta)(\psi\sigma) = R\omega(A_2 G_0\sigma) R\theta(B_1 G_0\sigma) \quad (5.51)$$

$$= R\omega(x \mapsto \sigma(\eta_0(x, 0))) R\theta(x \mapsto \sigma(\eta_0(1, x))) \quad (5.52)$$

$$= R\omega(x \mapsto \sigma(\frac{x}{2})) R\theta(x \mapsto \sigma(\frac{1}{2-x})). \quad (5.53)$$

ここで, de Rhamマップによって得られたコチェインは,  $T : I^1 \rightarrow X$ のパラメタ付けに依存しないことに注意する. したがって,  $(R\omega \cup R\theta)(\psi\sigma)$ は前半の経路 $\sigma(x \in [0, 1/2])$ 上の $\omega$ の線積分と, 後半の経路 $\sigma(x \in [1/2, 1])$ 上の $\theta$ の線積分の積である. これを上から評価する. 1形式の最大値と経路の長さをそれぞれ

$$\mu_{\omega, \sigma} = \max_{v \in T_y X, |v|=1, y \in \sigma([0, 1])} |\omega(v)|, \quad (5.54)$$

$$\ell_{\sigma, [a, b]} = \int_a^b \left\| \frac{d\sigma(t)}{dt} \right\| dt \quad (5.55)$$

などと書くと,

$$|(R\omega \cup R\theta)(\psi\sigma)| \leq \mu_{\omega,\sigma}\mu_{\theta,\sigma}\ell_{\sigma,[0,1/2]}\ell_{\sigma,[1/2,1]} \leq \mu_{\omega,\sigma}\mu_{\theta,\sigma}\left(\frac{\ell_{\sigma}}{2}\right)^2. \quad (5.56)$$

ここで,

$$\ell_{\sigma} = \ell_{\sigma,[0,1]} = \ell_{\sigma,[0,1/2]} + \ell_{\sigma,[1/2,1]} \quad (5.57)$$

として, 相加相乗平均の不等式

$$\ell_{\sigma,[0,1/2]}\ell_{\sigma,[1/2,1]} \leq \left(\frac{\ell_{\sigma}}{2}\right)^2 \quad (5.58)$$

を用いた. 細分化作用素 $\Delta$ は積分領域を分割するだけだから, 同様にして,

$$|(R\omega \cup R\theta)(\psi\Delta^n\sigma)| \leq \mu_{\omega,\sigma}\mu_{\theta,\sigma} \sum_{p=0}^{2^n-1} \ell_{\sigma, [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}]} \ell_{\sigma, [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2p+2}{2^{n+1}}]} \quad (5.59)$$

$$\leq \mu_{\omega,\sigma}\mu_{\theta,\sigma} \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{2^n-1} \left( \ell_{\sigma, [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}]} + \ell_{\sigma, [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2p+2}{2^{n+1}}]} \right)^2 \quad (5.60)$$

$$= \mu_{\omega,\sigma}\mu_{\theta,\sigma} \frac{1}{4} 2^n \sum_{p=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left( \ell_{\sigma, [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}]} + \ell_{\sigma, [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2p+2}{2^{n+1}}]} \right)^2 \quad (5.61)$$

$$\leq \mu_{\omega,\sigma}\mu_{\theta,\sigma} \frac{1}{4} 2^n \left( \sum_{p=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left( \ell_{\sigma, [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}]} + \ell_{\sigma, [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2p+2}{2^{n+1}}]} \right) \right)^2 \quad (5.62)$$

$$= \mu_{\omega,\sigma}\mu_{\theta,\sigma} \frac{1}{4} 2^n \left( \frac{1}{2^n} \ell_{\sigma} \right)^2 \quad (5.63)$$

$$= \mu_{\omega,\sigma}\mu_{\theta,\sigma} \frac{1}{4} 2^{-n} (\ell_{\sigma})^2. \quad (5.64)$$

ここで, 凹関数 $x \mapsto x^2$ に対する不等式

$$\sum_p a_p x^2 \leq \left( \sum_p a_p x \right)^2, \quad \sum_p a_p = 1 \quad (5.65)$$

を用いた. よって, 無限和(5.41)は $T$ を固定したときに絶対収束する.

一般の $\omega \in \Omega^p, \theta \in \Omega^q$ の場合にも収束性を議論する必要があるが, 保留する.

## References

- [1] Massey, William S. Singular homology theory. Vol. 70. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] 服部晶夫, 「位相幾何学」, 岩波基礎数学選書.
- [3] Alexander, J. C., Harer, J. L., Cheeger, J., Simons, J. (1985). Differential characters and geometric invariants. In Geometry and Topology: Proceedings of the Special Year held at the University of Maryland, College Park 1983–1984 (pp. 50-80). Springer Berlin Heidelberg.
- [4] M. Kervaire, C.R. Acad. Sci. Paris 237, (1953), 1486-1488.