MPSの簡約に関する定理

塩崎謙

December 8, 2025

Abstract

[1]のApp. Bより，MPSの簡約に関する定理の証明を追う．

1 準備

ボンド次元がDのMPS$\{A^i\}_{i=1}^d, A^i \in \mathrm{M}_D(\mathbb{C})$，$D$-MPSと呼ぶ．ボンド次元の指定が不要であれば単にMPSと書く． MPS $\{A^i\}_i$が injective とは，線形写像

$$f_A : X \mapsto \sum_i \mathrm{tr}\,[XA^i]\,|i\rangle \tag{1.1}$$

が injective であるときを指す． MPSがinjective であることは，A^iが左逆

$$\sum_i [A^i]_{ab}[A^{-1}]^i_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd} \tag{1.2}$$

を有することと同値．実際，左逆が存在すれば

$$\mathrm{tr}\,[XA^i] = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \sum_i \mathrm{tr}\,[XA^i][A^{-1}]^i_{cd} = \sum_i \sum_{ab} X_{ba}[A^i]_{ab}[A^{-1}]^i_{ab} = \sum_{ab} X_{ba}\delta_{ac}\delta_{bd} = X_{dc} \tag{1.3}$$

より．逆に，$\{A^i\}_i$が単射であればマップ

$$f_A : \mathbb{C}^{D^2} \to \mathbb{C}^d \tag{1.4}$$

は適当に基底を選んで行列表示

$$f_A = \begin{pmatrix} I_{D^2} \\ O_{d-D^2} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

とできる．このとき左逆は

$$\begin{pmatrix} I_{D^2} & * \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

と与えられる．

MPS$\{A^i\}_i$が normal とは，ある自然数$\ell \in \mathbb{N}$が存在して，ℓ個のMPSを blocking したMPS

$$\{\tilde{A}^I\}_I = \{A^{i_1} \cdots A^{i_\ell}\}_{i_1,\cdots,i_\ell} \tag{1.7}$$

が injective であると定義する．

MPS$\{A^i\}$より構成される長さnのベクトルを

$$V_n(A) = \sum_{i_1 \cdots i_n} \mathrm{tr}\,[A^{i_1} \cdots A^{i_n}]\,|i_1 \cdots i_n\rangle \tag{1.8}$$

と略記する．

2 簡約定理

Proposition 2.1. *A*を*normal* な*D-MPS, B*を*D′-MPS*とする．

$$V_n(B) = V_n(A), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

が成立するならば [a]，ある矩形行列$V \in \mathrm{M}_{D\times D'}(\mathbb{C}), W \in \mathrm{M}_{D'\times D}(\mathbb{C})$が存在して，

$$VW = I_D, \tag{2.3}$$
$$VB^{i_1}\cdots B^{i_n}W = A^{i_1}\cdots A^{i_n}, \quad \forall (i_1,\ldots,i_n) \in \{1,\ldots,d\}^{\times n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

[a] [1]では，ある$\lambda \in \mathbb{C}$が存在して

$$V_n(B) = \lambda^n V_n(A), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

としているが，λは再定義$B^i \mapsto \lambda B^i$で消すことができる．[1]においても証明では$\lambda = 1$が暗に仮定されている．

(証明) Aは normal であるから，ある$L \in \mathbb{N}$が存在して$\tilde{A}^I = A^{i_1}\cdots A^{i_L}$がinjectiveであり，左逆$\tilde{A}^{-1}$が存在する．そこで$\tilde{B}^I = B^{i_1}\cdots B^{i_L}$としてJordan分解

$$\sum_I \tilde{B}^I \otimes [\tilde{A}^{-1}]^I = U(\bigoplus_k J_{a_k}(\lambda_k))U^{-1} \tag{2.5}$$

を考える．ここで，

$$J_a(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_a(\mathbb{C}). \tag{2.6}$$

各Jordan細胞を

$$J_a(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

と分けることにより，分解

$$\sum_I \tilde{B}^I \otimes [\tilde{A}^{-1}]^I = S + N \tag{2.8}$$

であって，Sは対角化可能，Nは冪零，$[S, N] = O$なる分解が存在することがわかる．

MPS A, Bが同一ベクトルを生成する仮定より，

$$\sum_{I_1\cdots I_n} \mathrm{tr}\,[\tilde{B}^{I_1}\cdots\tilde{B}^{I_n}]\mathrm{tr}\,[[\tilde{A}^{-1}]^{I_1}\cdots[\tilde{A}^{-1}]^{I_n}] = \sum_{I_1\cdots I_n}\sum_{I_1\cdots I_n} \mathrm{tr}\,[\tilde{A}^{I_1}\cdots\tilde{A}^{I_n}]\mathrm{tr}\,[[\tilde{A}^{-1}]^{I_1}\cdots[\tilde{A}^{-1}]^{I_n}] = D^n. \tag{2.9}$$

一方で左辺は

$$\mathrm{Tr}\,(S+N)^n = \mathrm{Tr}\,S^n + \mathrm{Tr}\,N^n = \mathrm{Tr}\,S^n = \sum_k a_k\lambda_k^n \tag{2.10}$$

であるから

$$\sum_{k=1} a_k\lambda_k^n = D^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

が成立する．左辺は固有値が等しいJordan細胞が存在すれば和をまとめることにより，相異なる非ゼロの固有値$\lambda_1,\dots,\lambda_M$と$b_k\in\mathbb{N}$を用いて

$$\sum_{k=1}^{M} b_k\lambda_k^n = D^n, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{2.12}$$

が成立する．方程式の$n=1,\dots,M+1$を用いると，

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & D \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{M+1} & \lambda_2^{M+1} & \dots & D^{M+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{2.13}$$

となるが，係数行列V（Vandermonde行列）の行列式は

$$\det V = (\lambda_1\dots\lambda_M D)\prod_{1\le i<j\le M+1}(\lambda_j-\lambda_i) \tag{2.14}$$

($\lambda_{M+1}=D$と置いた．）は仮に$\lambda_1,\dots,\lambda_M,D$が全て異なれば非ゼロであるので矛盾する．よって$D$はいずれかの$\lambda_k$に等しい． $\lambda_1=D$としてよい．すると

$$(b_1-1)\lambda_1^n+\sum_{k=2}^{M} b_k\lambda_k^n = 0, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{2.15}$$

が成立するが，同様に

$$b_1=1, \quad b_2=\cdots=b_M=0, \tag{2.16}$$

つまり，Sの非ゼロの固有値はDに限り，また固有値DのJordan細胞は1×1がひとつであることがわかった：

$$\sum_I \tilde{B}^I\otimes[\tilde{A}^{-1}]^I = U\left((D)\oplus\bigoplus_k J_{a_k}(0)\right)U^{-1}. \tag{2.17}$$

Sはランク1であるから分解

$$[S]_{ac,bd}=W_{ac}V_{db}, \quad \mathrm{tr}\,VW=\mathrm{Tr}\,S=D, \tag{2.18}$$

が存在する．また，

$$SN=NS=0 \tag{2.19}$$

が成立し，特に，Nの指数を$n=\min\{k\in\mathbb{N}|N^k=O\}$とすると

$$(S+N)^n=S^n=D^{n-1}S \tag{2.20}$$

が成立する． $n\le DD'$に注意.

さてnをNの指数として以下の表式を考える.

$$\sum_{I_1\cdots I_n}\mathrm{tr}\,[\tilde{B}^{I_1}\cdots\tilde{B}^{I_n}B^{i_1}\cdots B^{i_m}][[\tilde{A}^{-1}]^{I_1}\cdots[\tilde{A}^{-1}]^{I_n}]_{ab}. \tag{2.21}$$

まずA,Bは同一状態を与えるから，$\tilde{A}$の左逆より

$$= \sum_{I_1\cdots I_n}\mathrm{tr}\,[\tilde{A}^{I_1}\cdots\tilde{A}^{I_n}A^{i_1}\cdots A^{i_m}][[\tilde{A}^{-1}]^{I_1}\cdots[\tilde{A}^{-1}]^{I_n}]_{ab} \tag{2.22}$$

$$= D^{n-1}[A^{i_1}\cdots A^{i_m}]_{ba}. \tag{2.23}$$

一方で，分解(2.8)を用いると

$$= D^{n-1}[VB^{i_1}\cdots B^{i_m}W]_{ba} \tag{2.24}$$

となる．とくに，$m=0$のときは

$$VW = I_D. \quad \square \tag{2.25}$$

Proposition 2.2. *V,WをMPS BからAへの簡約とする．*

$$N^i := B^i - WA^iV \tag{2.26}$$

とする．$\{N^i\}_i$によって生成される代数は冪零である．つまり，代数

$$\mathcal{A} = \mathrm{Span}\left(\{N^{i_1}\cdots N^{i_n} | \forall (i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,d\}^{\times n}, \forall n\in\mathbb{N}\}\right) \tag{2.27}$$

の任意の元$x\in\mathcal{A}$に対してある$k\in\mathbb{N}$が存在して$x^k=0$が成立する．

(証明) まず，以下を示す．

$$VN^{i_1}\cdots N^{i_m}W = 0, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{2.28}$$

$m=1$は

$$VN^iW = V(B^i - WA^iV)W = VB^iW - A^i = 0 \tag{2.29}$$

より． $m-1$まで成立を仮定すると

$$\begin{aligned} VN^{i_1}\cdots N^{i_m}W &= V(B^{i_1} - WA^{i_1}V)N^{i_2}\cdots N^{i_m}W = VB^{i_1}N^{i_2}\cdots N^{i_m}W && (2.30)\\ &= \cdots && (2.31)\\ &= VB^{i_1}B^{i_2}\cdots B^{i_{m-1}}(B^{i_m} - WA^{i_m}V)W = VB^{i_1}\cdots B^{i_m}W - A^{i_1}\cdots A^{i_m} = 0 && (2.32)\end{aligned}$$

より．すると

$$\mathrm{tr}\,[B^{i_1}\cdots B^{i_m}] = \mathrm{tr}\,[(N^{i_1}+WA^{i_1}V)\cdots(N^{i_m}+WA^{i_m}V)] = \mathrm{tr}\,[A^{i_1}\cdots A^{i_m}] + \mathrm{tr}\,[N^{i_1}\cdots N^{i_m}] \tag{2.33}$$

となり，A,Bは同一状態であるから

$$\mathrm{tr}\,[N^{i_1}\cdots N^{i_m}] = 0, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{2.34}$$

特に，任意の$x\in\mathcal{A}$に対して，任意の$n\in\mathbb{N}$に対して$\mathrm{tr}\,[x^n]=0$となり，xの固有値は0のみ．よって$\mathcal{A}$の任意の元は冪零． □

さらに以下を示す．

Proposition 2.3. *V,WをMPS BからAへの簡約，$N^i := B^i - WA^iV$とする．*

$$N^{i_1}\cdots N^{i_{D'}} = 0, \quad \forall (i_1,\ldots,i_{D'})\in\{1,\ldots,d\}^{\times D'}. \tag{2.35}$$

ただし，D'はB^iの行列サイズである．

(証明 [1]) まず，

$$\bigcap_{i=1}^{d} \ker N^i \neq \{0\}, \tag{2.36}$$

[1] 以下の証明は下村顕士氏によるもの．

つまり，ある$v \neq 0$が存在して任意の$i=1,\dots,d$に対して$N^i v = 0$が成立することを背理法で示す．

任意の$v \neq 0$に対してあるiが存在して$N^i v \neq 0$を仮定する．すると，任意の非ゼロベクトルvから出発して逐次的に$D'+1$個の非ゼロのベクトル

$$v = v_0, \tag{2.37}$$

$$v_n = N^{i_n} v_{n-1}, \quad n = 1,\dots,D' \tag{2.38}$$

が得られる． $v_0,\dots,v_{D'}$が線形独立であることを示す．

$$\alpha_0 v_0 + \cdots \alpha_{D'} v_{D'} = \alpha_0 v + \alpha_1 N^{i_1} v + \alpha_2 N^{i_2} N^{i_1} v + \cdots + \alpha_{D'} N^{i_{D'}} \cdots N^{i_1} v = 0 \tag{2.39}$$

とする．

$$-\alpha_0 v = \underbrace{(\alpha_1 N^{i_1} + \alpha_2 N^{i_2} N^{i_1} + \cdots + \alpha_{D'} N^{i_{D'}} \cdots N^{i_1})}_{\in \mathcal{A}} v \tag{2.40}$$

であるが，$\mathcal{A}$の任意の元の固有値はゼロであるから$\alpha_0 = 0$．同様に

$$-\alpha_1 v_1 = \underbrace{(\alpha_2 N^{i_2} + \cdots + \alpha_{D'} N^{i_{D'}} \cdots N^{i_2})}_{\in \mathcal{A}} v_1 \tag{2.41}$$

より$\alpha_1 = 0$．同様にして，$\alpha_0 = \cdots = \alpha_{D'-1} = 0$が示され，$\alpha_{D'} v_{D'} = 0$より$\alpha_{D'} = 0$．よって，$v_0,\dots,v_{D'}$は線形独立であるが，これは$N^i$が定義されているベクトル空間が$D'$次元であることに矛盾する．

よって，あるベクトル$e_1 \neq 0$が存在して，任意の$i=1,\dots,d$に対して$N^i v = 0$である．ベクトル空間$\mathbb{C}^{D'}$の基底として$e_2,\dots,e_{D'}$を付け加えて

$$(e_1, e_2, \dots, e_{D'}) \tag{2.42}$$

においてN^iは以下の表示を持つ：

$$N^i (e_1, e_2, \dots, e_{D'}) = (e_1, e_2, \dots, e_{D'}) \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \tilde{N}^i \end{pmatrix}, \quad i = 1,\dots,d. \tag{2.43}$$

すると$\{\tilde{N}^i\}_{i=1}^d$の生成する代数は再び冪零であり，同様の議論を続けると，$N^1,\dots,N^d$は冪零かつ同時三角化可能である． □

長さD'は行列のサイズ由来の上限値である．

$$N_0(V,W) := \min_n \{N^{i_1} \cdots N^{i_{n+1}} = O, \forall (i_1,\dots,i_{n+1}) \in \{1,\dots,d\}^{\times(n+1)}\} \tag{2.44}$$

を，MPS BからAへ簡約(V,W)の冪零長と呼ぶことにする．つまり，長さ$N_0(V,W)$に対してN^iの積は非ゼロであるが，長さ$N_0(V,W)+1$に対してはN^iの積はゼロである．

Theorem 2.4. $(V,W),(V',W')$を*MPS* BからAへの簡約とする． N_0を簡約$(V,W),(V',W')$の冪零長の最大値とする：

$$N_0 = \max\{N_0(V,W), N_0(V',W')\}. \tag{2.45}$$

このとき，ある$\lambda \in \mathbb{C}$が存在して，任意の$n > 2N_0$に対して

$$VB^{i_1} \cdots B^{i_n} = \lambda V' B^{i_1} \cdots B^{i_n}, \tag{2.46}$$

$$B^{i_1} \cdots B^{i_n} W = \lambda^{-1} B^{i_1} \cdots B^{i_n} W' \tag{2.47}$$

が成立する．

(証明)

$$N^i = B^i - WA^iV, \quad N'^i = B^i - W'A^iV' \tag{2.48}$$

と置く．まず，任意の$n \in \mathbb{N}$について成立する以下に注意する：

$$\begin{aligned}
B^{i_1}\cdots B^{i_n} &= N^{i_1}\cdots N^{i_n} + \sum_{0\le k<l\le n} N^{i_1}\cdots N^{i_k} W A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_l} V N^{i_{l+1}}\cdots N^{i_n} \\
&= N^{i_1}\cdots N^{i_n} + \sum_{0\le k<l\le n, k\le N_0, n-N_0\le l} N^{i_1}\cdots N^{i_k} W A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_l} V N^{i_{l+1}}\cdots N^{i_n}, \qquad (2.49)\\
VB^{i_1}\cdots B^{i_n} &= VN^{i_1}\cdots N^{i_n} + \sum_{0<l\le n} A^{i_1}\cdots A^{i_l} V N^{i_{l+1}}\cdots N^{i_n} = \sum_{0\le l\le n} A^{i_1}\cdots A^{i_l} V N^{i_{l+1}}\cdots N^{i_n} \\
&= \sum_{\max(0,n-N_0)\le l\le n} A^{i_1}\cdots A^{i_l} V N^{i_{l+1}}\cdots N^{i_n}, \qquad (2.50)\\
B^{i_1}\cdots B^{i_n}W &= N^{i_1}\cdots N^{i_n}W + \sum_{0\le k<n} N^{i_1}\cdots N^{i_k} W A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_n} = \sum_{0\le k\le n} N^{i_1}\cdots N^{i_k} W A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_n} \\
&= \sum_{0\le k\le \min(n,N_0)} N^{i_1}\cdots N^{i_k} W A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_n}. \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

簡約(V', W')に対する同様の関係式が成立する．

Lをnormal MPS Aの injective length とし，長さ$m = 2N_0 + L$として以下を 2 通りの方法で表す．

$$VB^{i_1}\cdots B^{i_{2N_0+L}}W' \qquad (2.52)$$

(2.53)より

$$= \sum_{N_0+L\le l\le 2N_0+L} A^{i_1}\cdots A^{i_l} V N^{i_{l+1}}\cdots N^{i_{2N_0+L}}W'. \qquad (2.53)$$

(2.54)より

$$= \sum_{0\le k\le N_0} N'^{i_1}\cdots N'^{i_k} W' A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_{2N_0+L}}. \qquad (2.54)$$

$N_0+1, \ldots, N_0+L$サイトに対して左逆$\tilde{A}^{-1}$との縮約を取ると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_{N_0+1},\ldots,i_{N_0+L}} [VB^{i_1}\cdots B^{i_{2N_0+L}}W']_{ab}[\tilde{A}^{-1}]_{cd}^{i_{N_0+1}\cdots i_{N_0+L}} \qquad (2.55)\\
&= [A^{i_1}\cdots A^{i_{N_0}}]_{ac} \sum_{N_0+L\le l\le 2N_0+L} [A^{i_{N_0+L+1}}\cdots A^{i_l} V N^{i_{l+1}}\cdots N^{i_{2N_0+L}}W']_{db} \qquad (2.56)\\
&= \sum_{0\le k\le N_0} [VN'^{i_1}\cdots N'^{i_k} W' A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_{N_0}}]_{ac}[A^{i_{N_0+L+1}}\cdots A^{i_{2N_0+L}}]_{db}. \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

したがって，$\lambda \in \mathbb{C}$が存在して

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k\le N_0} VN'^{i_1}\cdots N'^{i_k} W' A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_{N_0}} &= \lambda A^{i_1}\cdots A^{i_{N_0}}, \qquad (2.58)\\
\sum_{0\le k\le N_0} A^{i_1}\cdots A^{i_k} V N^{i_{k+1}}\cdots N^{i_{N_0}}W' &= \lambda^{-1} A^{i_1}\cdots A^{i_{N_0}}, \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

が成立する．すると簡約(V', W')に対する(2.52)より

$$VB^{i_1}\cdots B^{i_n} = VN'^{i_1}\cdots N'^{i_n} + \sum_{0\le k<l\le n} VN'^{i_1}\cdots N'^{i_k} W' A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_l} V' N'^{i_{l+1}}\cdots N'^{i_n} \qquad (2.60)$$

となり，第 2 項の和は$0 \le k \le N_0, n - N_0 \le l \le n$のみ有限に残る．すると$n > 2N_0$の場合は

$$VB^{i_1}\cdots B^{i_n} = \sum_{0\le k\le N_0<n-N_0\le l\le n} VN'^{i_1}\cdots N'^{i_k} W' A^{i_{k+1}}\cdots A^{i_l} V' N'^{i_{l+1}}\cdots N'^{i_n} \quad (n > 2N_0) \qquad (2.61)$$

となり(2.61)より

$$VB^{i_1}\cdots B^{i_n}=\lambda A^{i_1}\cdots A^{i_{N_0}}\sum_{n-N_0\le l\le n}A^{i_{N_0+1}}\cdots A^{i_l}V'N'^{i_{l+1}}\cdots N'^{i_n}\quad (n>2N_0) \tag{2.62}$$

であるが，簡約(V',W')に対する(2.53)より

$$VB^{i_1}\cdots B^{i_n}=\lambda V'B^{i_1}\cdots B^{i_n}\quad (n>2N_0) \tag{2.63}$$

となる．同様に，表式

$$V'B^{i_1}\cdots B^{i_m}W \tag{2.64}$$

から出発すると

$$B^{i_1}\cdots B^{i_m}W=\lambda^{-1}B^{i_1}\cdots B^{i_m}W' \tag{2.65}$$

が得られる． □

さらに，十分長くMPS Bが左右に存在すれば，「バルク部分」はAで置き換えることができることを保証する以下も成立する [2]．

Proposition 2.5. (V,W)を*MPS* BからAへの簡約とし，$N_0=N_0(V,W)$をその冪零長とする．$m,m'\ge N_0$のとき，任意の$n\ge 1$に対して

$$B^{i_1}\cdots B^{i_m}WA^{i_{m+1}}\cdots A^{i_{m+n}}VB^{i_{m+n+1}}\cdots B^{i_{m+n+m'}}=B^{i_1}\cdots B^{i_{m+n+m'}}, \tag{2.66}$$

$m\ge N_0$のとき，任意の$n\ge 0$に対して

$$B^{i_1}\cdots B^{i_m}WA^{i_{m+1}}\cdots A^{i_{m+n}}=B^{i_1}\cdots B^{i_{m+n}}W, \tag{2.67}$$

$$A^{i_1}\cdots A^{i_n}VB^{i_{n+1}}\cdots B^{i_{n+m}}=VB^{i_1}\cdots B^{i_{n+m}}. \tag{2.68}$$

(証明) (2.53), (2.54)より任意のm,m',nに対して

$$B^{i_1}\cdots B^{i_m}WA^{i_{m+1}}\cdots A^{i_{m+n}}VB^{i_{m+n+1}}\cdots B^{i_{m+n+m'}} \tag{2.69}$$

$$=\left(\sum_{0\le k\le \min(m,N_0)}N^{i_1}\cdots N^{i_k}WA^{i_{k+1}}\cdots A^{i_m}\right)A^{i_{m+1}}\cdots A^{i_{m+n}} \tag{2.70}$$

$$\left(\sum_{\max(m+n,m+n+m'-N_0)\le m+n+l\le m+n+m'}A^{i_{m+n+1}}\cdots A^{i_{m+n+l}}VN^{i_{m+n+l+1}}\cdots N^{i_{m+n+m'}}\right). \tag{2.71}$$

これが$B^{i_1}\cdots B^{i_{m+n+m'}}$の書き換え(2.52)と一致するのは

$$m+n+m'>N_0,\quad m<m+n,\quad m\ge N_0,\quad m'\ge N_0, \tag{2.72}$$

つまり，

$$m,m'\ge N_0,\quad n\ge 1 \tag{2.73}$$

のとき．同様に任意のm,nに対して

$$B^{i_1}\cdots B^{i_m}WA^{i_{m+1}}\cdots A^{i_{m+n}} \tag{2.74}$$

$$=\left(\sum_{0\le k\le m}N^{i_1}\cdots N^{i_k}WA^{i_{k+1}}\cdots A^{i_m}\right)A^{i_{m+1}}\cdots A^{i_{m+n}} \tag{2.75}$$

[2] この命題は[1]において明示的に述べられていないが，後続の著者の一部を含む論文で繰り返し使われており，[1]が引用されている．

であるがこれが$B^{i_1}\cdots B^{i_{m+n}}W$の書き換え(2.54)に一致するのは$m\geq N_0$のとき．（2.71)も同様． □

例えば，$N_0=1$のとき，

$$
\begin{aligned}
B^iB^jB^k &= (N^i+WA^iV)(N^j+WA^jV)(N^k+WA^kV) &(2.76)\\
&= N^iWA^jVN^k+N^iWA^jA^kV+WA^iA^jVN^k+WA^iA^jA^kV &(2.77)\\
&= (N^i+WA^iV)WA^jV(N^k+WA^kV) &(2.78)\\
&= B^iWA^jVB^k. &(2.79)
\end{aligned}
$$

まとめ：

MPS Aに対して，

$$V_n(A)=\mathrm{tr}\left[A^{i_1}\cdots A^{i_n}\right] \tag{2.80}$$

と書く．

- MPS Bとnormal MPS Aに対して，任意の$n\in\mathbb{N}$に対して$V_n(B)=V_n(A)$が成立するとき，ある矩形行列V,Wが存在して次が成立する：

$$VW=I_D, \tag{2.81}$$

$$V\underbrace{B\cdots B}_{\geq 0}W=A\cdots A. \tag{2.82}$$

  WVは射影である．

- 簡約(V,W)に対して定義される行列の集合$N^i=B^i-WA^iV$の
  N_0を$N^i=B^i-WA^iV$の生成する代数の冪零長（積$N^{i_1}\cdots N^{i_n}$が有限となる最大の長さn．つまり，$n>N_0$のとき，$N^{i_1}\cdots N^{i_n}=O$．）とすると，以下が成立する．

$$\underbrace{B\cdots B}_{\geq N_0}W\underbrace{A\cdots A}_{\geq 1}V\underbrace{B\cdots B}_{\geq N_0}=B\cdots B. \tag{2.83}$$

$$\underbrace{B\cdots B}_{\geq N_0}W\underbrace{A\cdots A}_{\geq 0}=B\cdots BW. \tag{2.84}$$

$$\underbrace{A\cdots A}_{\geq 0}V\underbrace{B\cdots B}_{\geq N_0}=VB\cdots B. \tag{2.85}$$

- $(V,W),(V',W')$をBからAへの簡約とし，N_0,N_0'をそれぞれ$(V,W),(V',W')$の冪零長とする．このとき，ある$\lambda\in\mathbb{C}$が存在して以下が成立する．

$$V\underbrace{B\cdots B}_{\geq 2\max(N_0,N_0')+1}=\lambda V'B\cdots B, \tag{2.86}$$

$$\underbrace{B\cdots B}_{\geq 2\max(N_0,N_0')+1}W=\lambda^{-1}B\cdots BW'. \tag{2.87}$$

- 冪零長はブロッキングで不変か？例えば，冪零長がℓであるときに，ℓサイトのブロッキングにより冪零長を1にすることができるか？素朴には，

$$N^{i_1}N^{i_2}=(B^{i_1}-WA^{i_1}V)(B^{i_2}-WA^{i_2}V)\neq B^{i_1}B^{i_2}-WA^{i_1}A^{i_2}V \tag{2.88}$$

であるので，ブロッキングにより冪零長は変化すると思われるが...

- N^iの積がゼロとなる最小の長さではなく，(2.86),(2.87),(2.88)が成立するBの長さを[2]では冪零長とおそらく呼んでいる．ブロッキングに対して簡約(V,W)は不変に取ることができるから，N_0個のブロッキングによって，(2.86),(2.87),(2.88)は長さ1で満たすことができる．この意味では，[2]に主張である，ブロッキングで冪零長は常に1に取ることができる，は正しい．

References

[1] Andras Molnar, Yimin Ge, Norbert Schuch, J. Ignacio Cirac, *A generalization of the injectivity condition for Projected Entangled Pair States*, arXiv:1706.07329.

[2] Adrián Franco-Rubio, Arkadiusz Bochniak, J. Ignacio Cirac, *Symmetry defects and gauging for quantum states with matrix product unitary symmetries*, arXiv:2502.20257.