ノート：ハンドル分解

塩崎 謙

• M : d- mfd. とする.

• k- handle $(1 \leq k \leq d)$ とは. pair のこと.

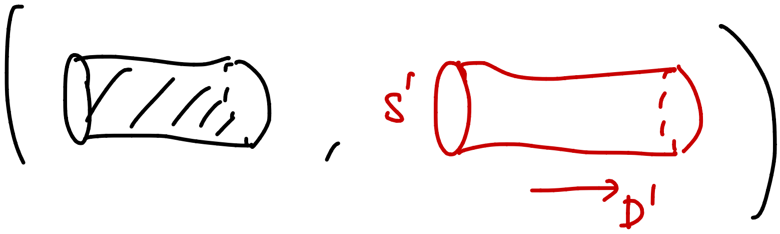
$$(D^k \times D^{d-k},\ S^{k-1} \times D^{d-k})$$

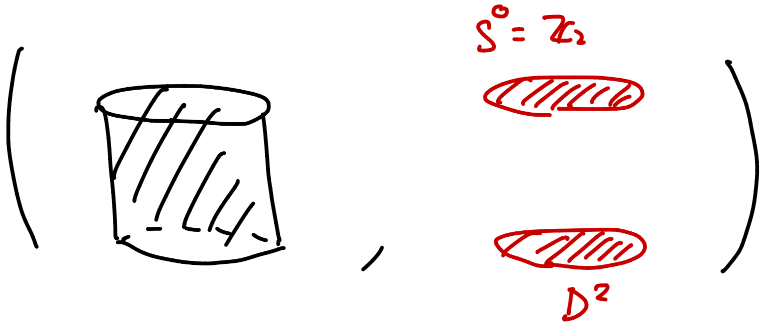
bdy.

こっちでくっつける.

<u>ex</u> $d=3$

3- handle : 

2- handle : 

1- handle : 

◎ ハンドル分解とは.

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_d = M$$

D^d

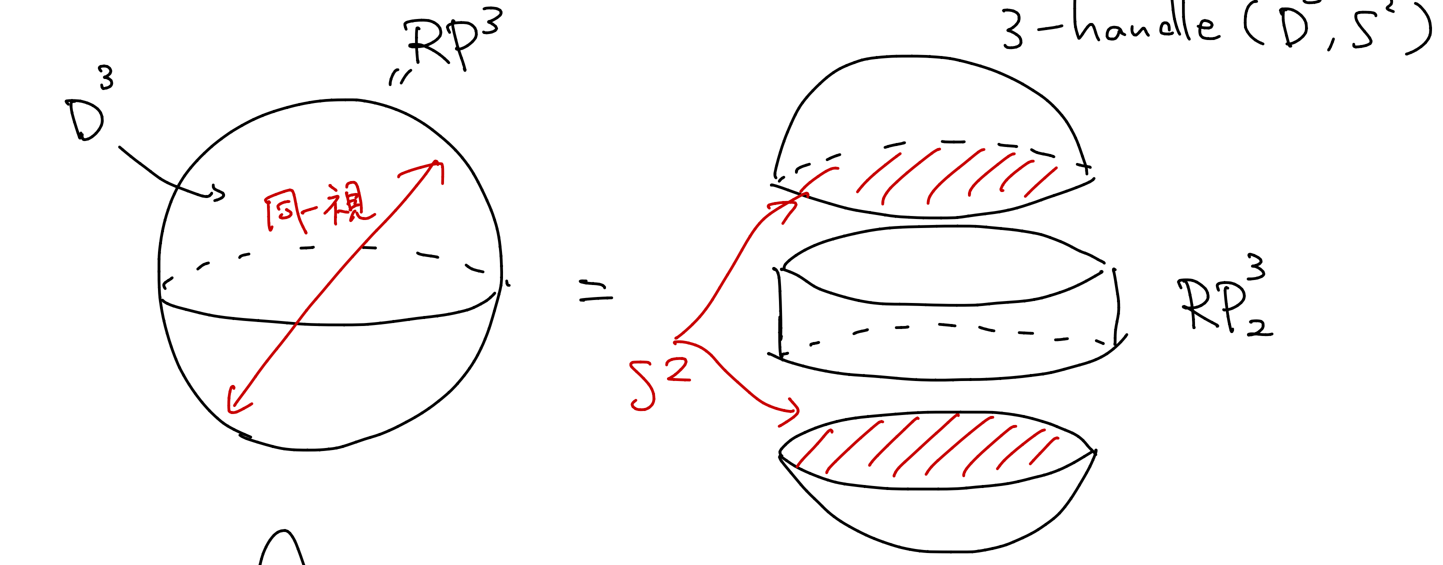
1-handleをくっつける

2-handleをくっつける

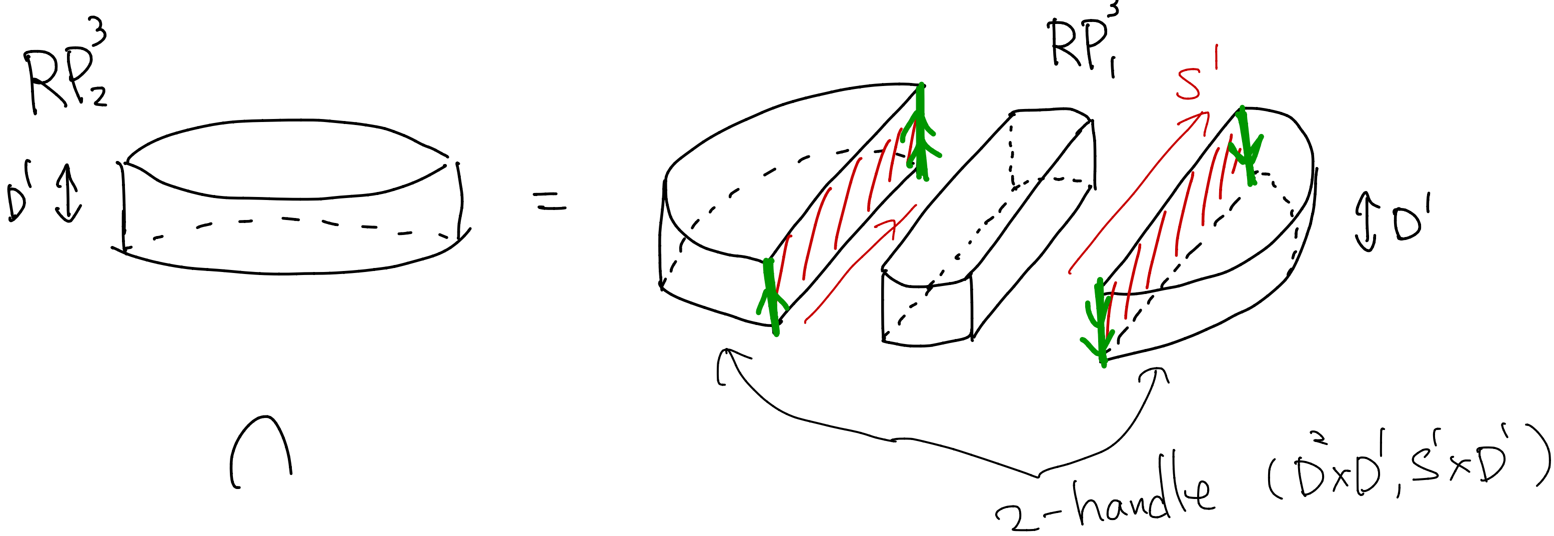
d-handleをくっつける.

のこと.

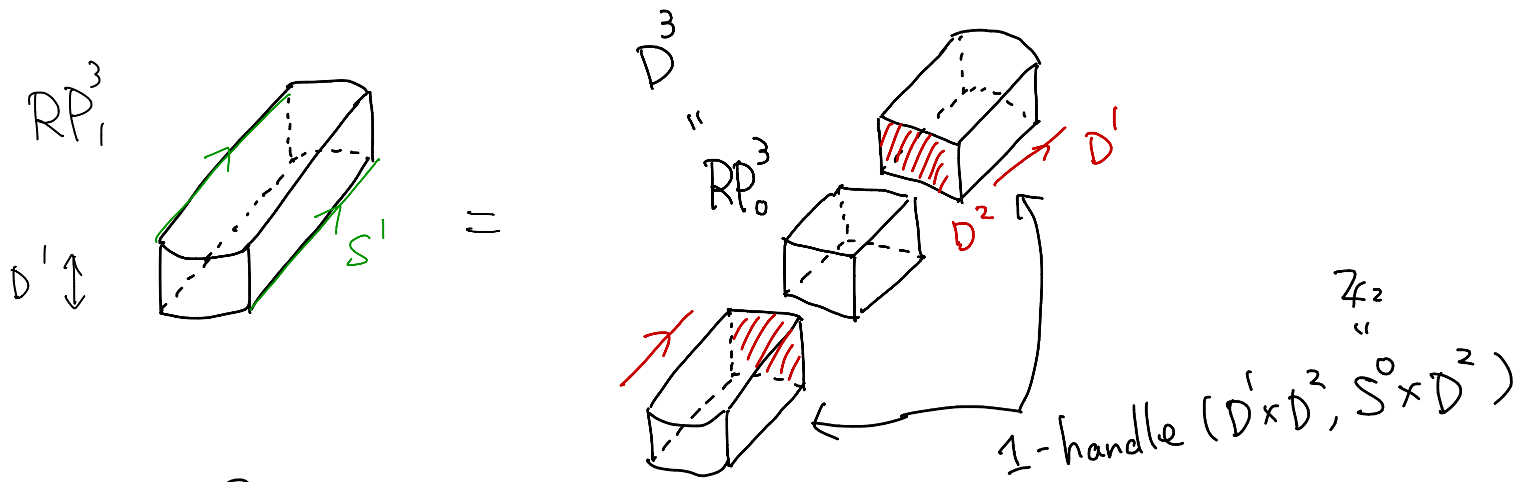
ex $\mathbb{R}P^3$



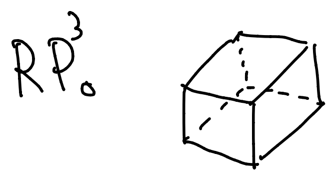
$\cap$



$\cap$



$\cap$



ex. レンズ空間 $L(k,1,1)$

$\mathbb{Z}_k$ 同変に S^3 を分割する.

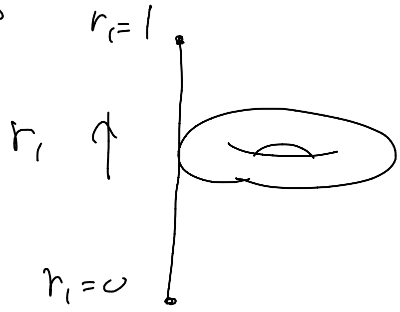
$$(z_1, z_2) \longmapsto (z_1 e^{\frac{2\pi i}{k}}, z_2 e^{\frac{2\pi i}{k}}).$$

S^3 を $\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = \sqrt{1-r_1^2}\, e^{i\theta_2} \end{cases}$, $\begin{cases} 0 \le r_1 \le 1, \\ 0 \le \theta_1 \le 2\pi \\ 0 \le \theta_2 \le 2\pi \end{cases}$

とする.

$r_1 = 0$ は θ_1 が pinch
$r_1 = 1$ は θ_2 が pinch.

$D^1 \times S^1 \times S^1$



S^3 の中にである?

$S^3 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$(x_1, x_2) = (r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$
$(x_3, x_4) = (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$ $r_1^2 + r_2^2 = 1$

とすると. 確かに…ある。

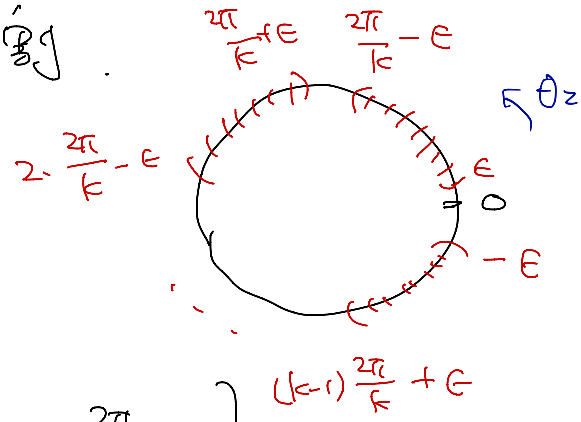
$$(r_1, \theta_1, \theta_2) \overset{\sigma}{\longmapsto} \left(r_1, \theta_1 + \frac{2\pi}{k}, \theta_2 + \frac{2\pi}{k}\right)$$ $\mathbb{Z}_k$ 作用.

この作用と両立するように. $\mathbb{Z}_k$ 同変 handle 分解をする.

$\mathbb{Z}_k$ 作用. $(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2) \longmapsto (r_1,\theta_1+\frac{2\pi}{k}, r_2, \theta_2+\frac{2\pi}{k})$

$r_1^2+r_2^2=1$.

① S^3 を $\mathbb{Z}_k$-3-handle と S^3_2 に分割.



$r_1=0$ は含む.

$\mathbb{Z}_k$-3-handle

$$= \left\{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2) \,\middle|\, r_2>\epsilon,\ \epsilon<\theta_2<\frac{2\pi}{k}-\epsilon\right\} \ \circlearrowleft \sigma$$

$$\amalg \left\{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2) \,\middle|\, r_2>\epsilon,\ \frac{2\pi}{k}+\epsilon<\theta_2<2\cdot\frac{2\pi}{k}-\epsilon\right\} \ \circlearrowleft \sigma$$

$\vdots$

$$\amalg \left\{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2) \,\middle|\, r_2>\epsilon,\ (k-1)\cdot\frac{2\pi}{k}+\epsilon<\theta_2<-\epsilon\right\} \ \circlearrowleft \sigma$$

② 共通部分なし?

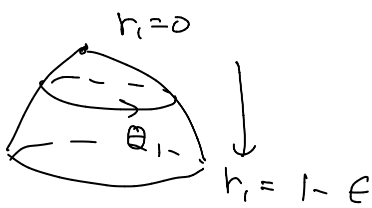
$r_1=0$ は含むが. $r_1=0$ では θ_1 が pinch される.

θ_2は pinch されないので. k 個の領域はつながっていない.

② 各領域の形は?

(r_1,θ_1,θ_2) で. $0\le r_1<1-\epsilon$.

(r_1,θ_1)だけみると. D^2:



これに $D^1=[\epsilon,\frac{2\pi}{k}-\epsilon]$

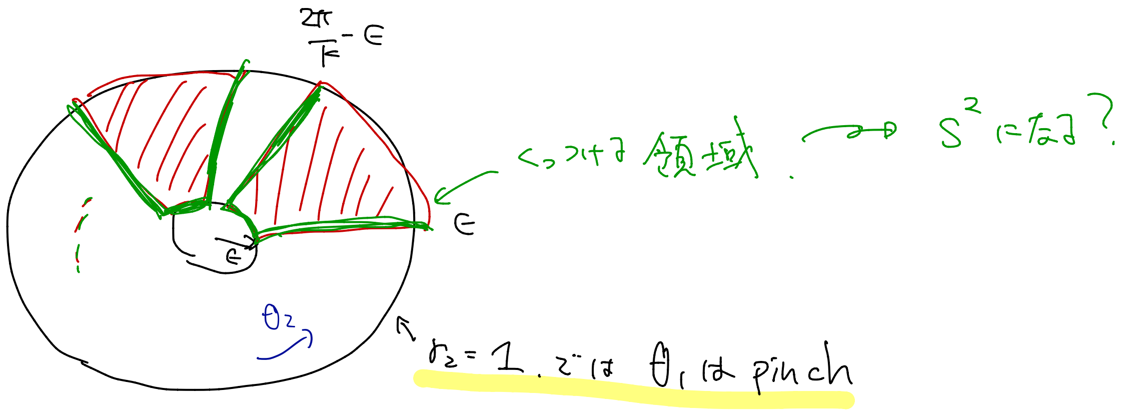
と直積すから.

$$D^2\times D^1 = D^3.$$

② くっつける領域の形は？

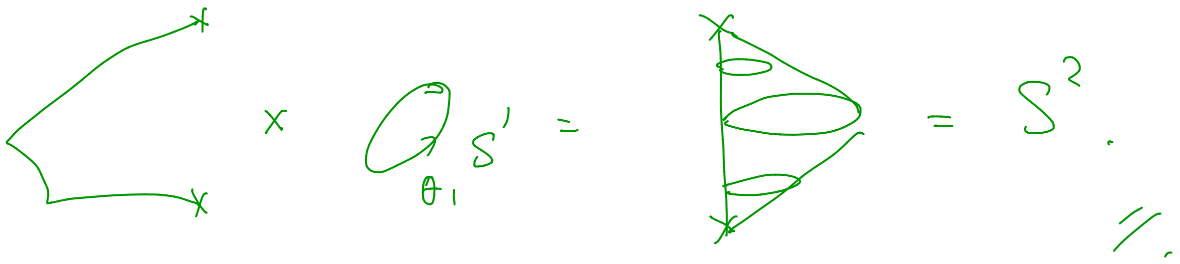
3-handle $(D^3, S^2) \times \mathbb{Z}_k$ になってる？

(r_2, θ_2) だけみると.



ここに書いていない方向は $\theta_1 \in [0, 2\pi]$.

$r_2 = 1$ $(r_1 = 0)$ では θ_1 は pinch.



⇒ なので. 確かに. $\mathbb{Z}_k \times$ 3-handle

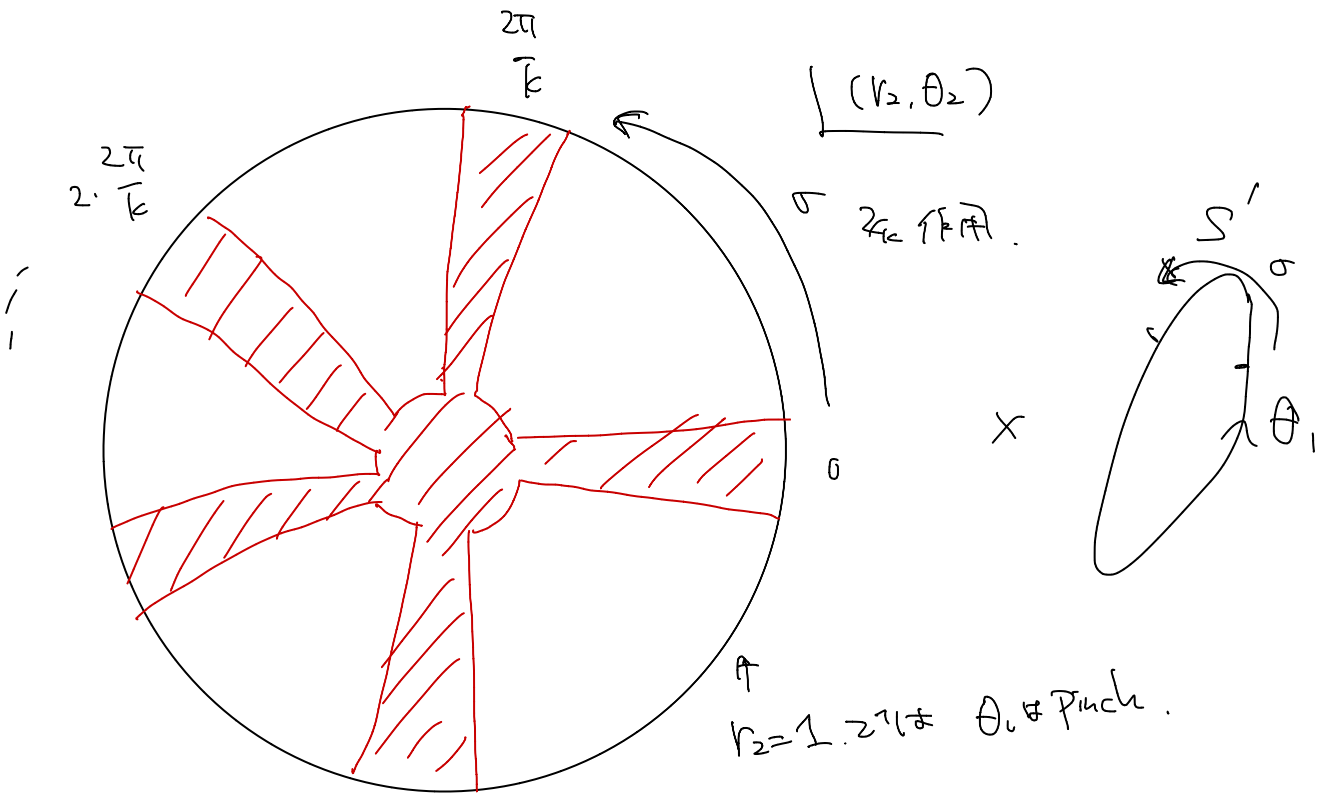
$$= \mathbb{Z}_k \times (D^3, S^2).$$

$$S^3_2 = \{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2) \mid r_2<\epsilon\}$$

$$\cup \left\{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2) \;\middle|\; r_2>\epsilon,\ \begin{array}{c} -\epsilon<\theta_2<\epsilon \\ \text{or} \\ \frac{2\pi}{k}-\epsilon<\theta_2<\frac{2\pi}{k}+\epsilon \\ \text{or} \\ \vdots \\ (k-1)\frac{2\pi}{k}-\epsilon<\theta_2<(k-1)\frac{2\pi}{k}+\epsilon \end{array}\right\}.$$

(r_2,θ_2) だけみると.

$S^3_2 =$



② S^3_2 を $\mathbb{Z}_k \times$ 2-handle と S^3_1 に分割.

disconnected.

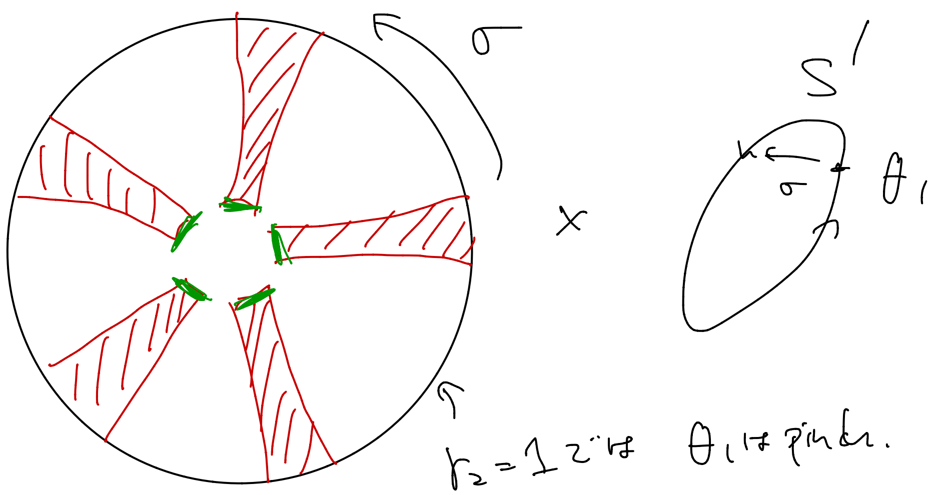
$\mathbb{Z}_k \times$ 2-handle

$$= \{(r_1, \theta_2, r_2, \theta_2) \mid r_2 > \epsilon, -\epsilon < \theta_2 < \epsilon\}$$

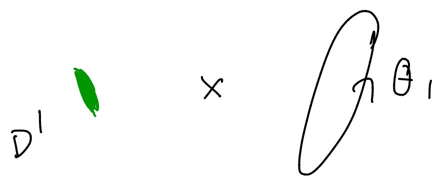
$$\amalg \{(\quad " \quad) \mid r_2 > \epsilon, \frac{2\pi}{k} - \epsilon < \theta_2 < \frac{2\pi}{k} + \epsilon\}$$

$$\amalg \cdots \amalg \{(\; " \;) \mid r_2 > \epsilon, (k-1)\frac{2\pi}{k} - \epsilon < \theta_2 < (k-1)\frac{2\pi}{k} + \epsilon\}$$

(r_2, θ_2) 空間でみると.



$r_2 = 1$ では θ_1 は pinch.

くっつける部分は, 

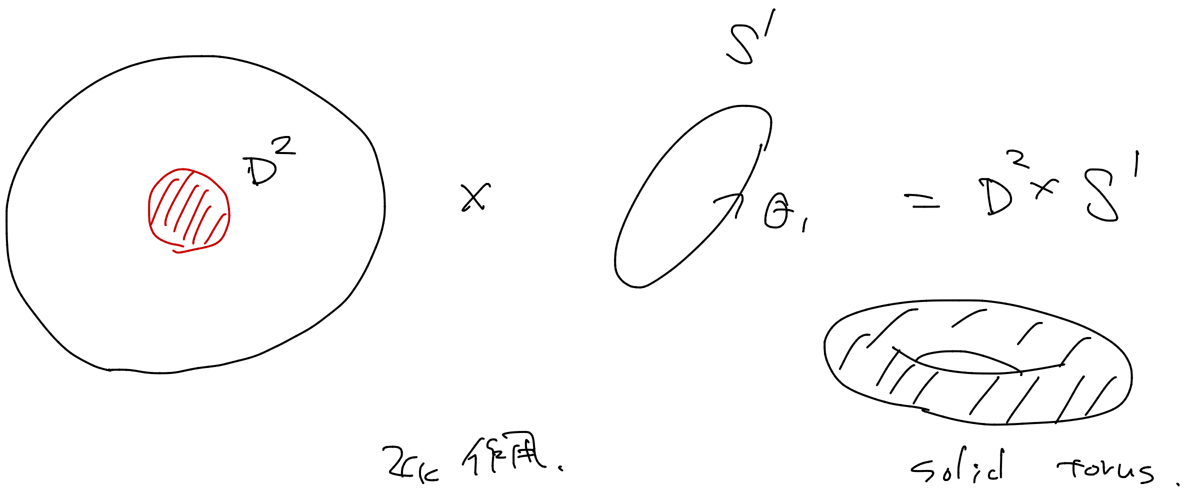
$= D^1 \times S^1$.

$\Rightarrow$ 2-handle.

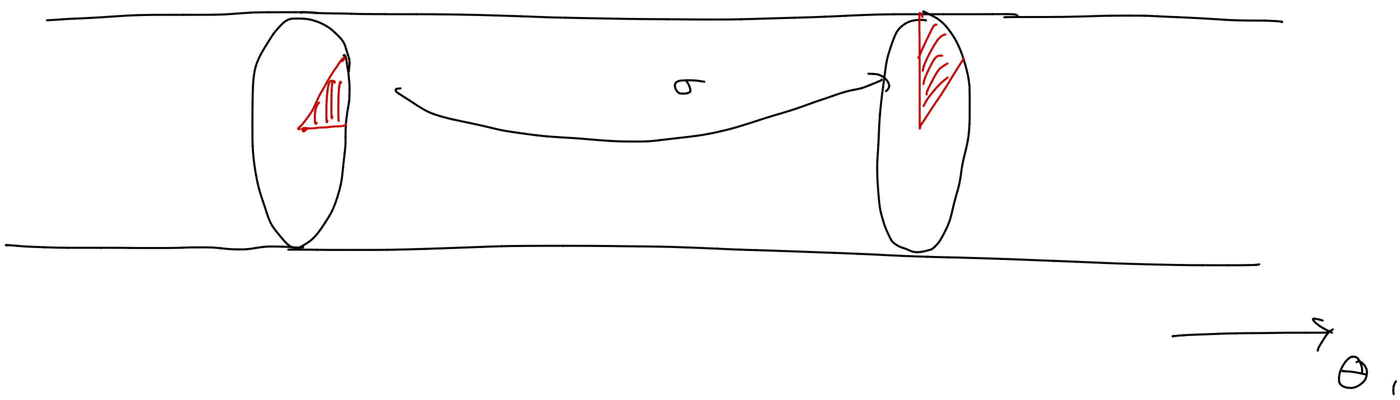
$$\mathbb{Z}_k \times (D^2 \times D^1, S^1 \times D^1).$$

残りは

$$S^3_1 = \{ (r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \mid r_2 < \epsilon \}.$$



2πに作用.



③ S^3_1 を $\mathbb{Z}_k \times$ 1-handle と S^3_0 に分割.

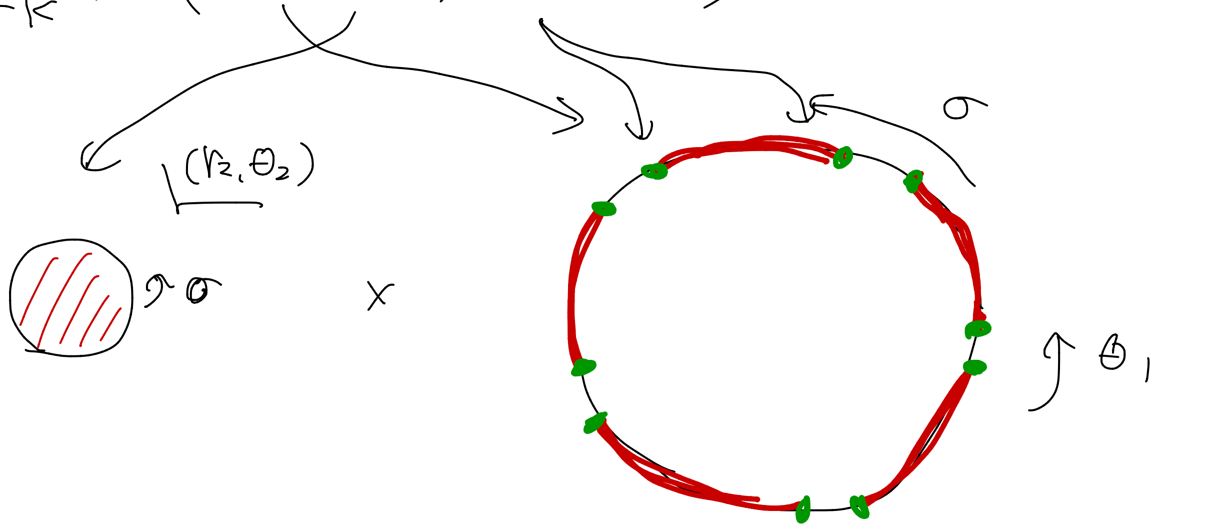
$\mathbb{Z}_k \times$ 1-handle

$$= \{(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2) \mid r_2<\epsilon,\ \epsilon<\theta_1<\tfrac{2\pi}{k}-\epsilon\} \circlearrowleft \sigma$$

$$\amalg \{(\ \ ,\ \ ) \mid r_2<\epsilon,\ \tfrac{2\pi}{k}+\epsilon<\theta_1<2\cdot\tfrac{2\pi}{k}-\epsilon\} \circlearrowleft \sigma.$$

$$\amalg \quad \cdots\cdots$$

$$\cong \mathbb{Z}_k \times (D^1\times D^2,\ \underset{\mathbb{Z}_2}{\overset{\shortparallel}{S^0}}\times D^2)$$



なので. 確かに. 1-handle $\times \mathbb{Z}_k$.

$\shortparallel$

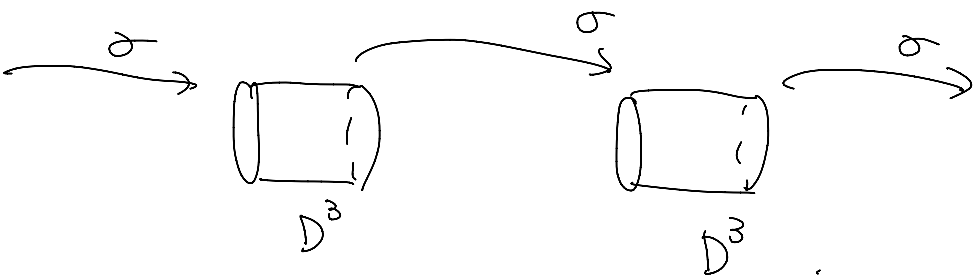
$(D^1\times D^2, S^0\times D^2)$.

0-handle.

$\downarrow$

残りは.

$$S^3_0 = \mathbb{Z}_k \times D^2 \times D^1 \cong \mathbb{Z}_k \times D^3.$$



//.