分類空間 BG について

G. 離散群の場合.

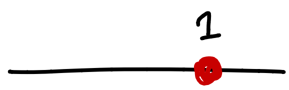
2019年 11月 14日

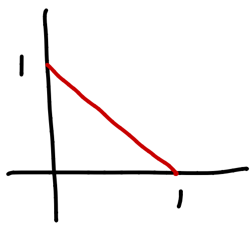
・ G を離散群とする.

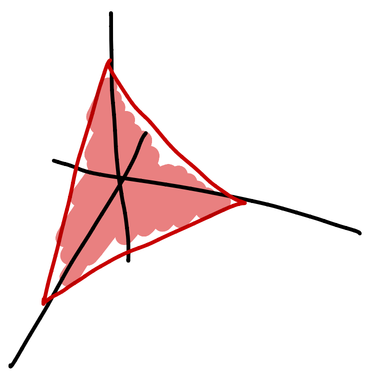
・ Δ_n : n 単体.

$$\Delta_n := \left\{ (t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1 \right\}$$

ex

$\Delta_0 =$ 

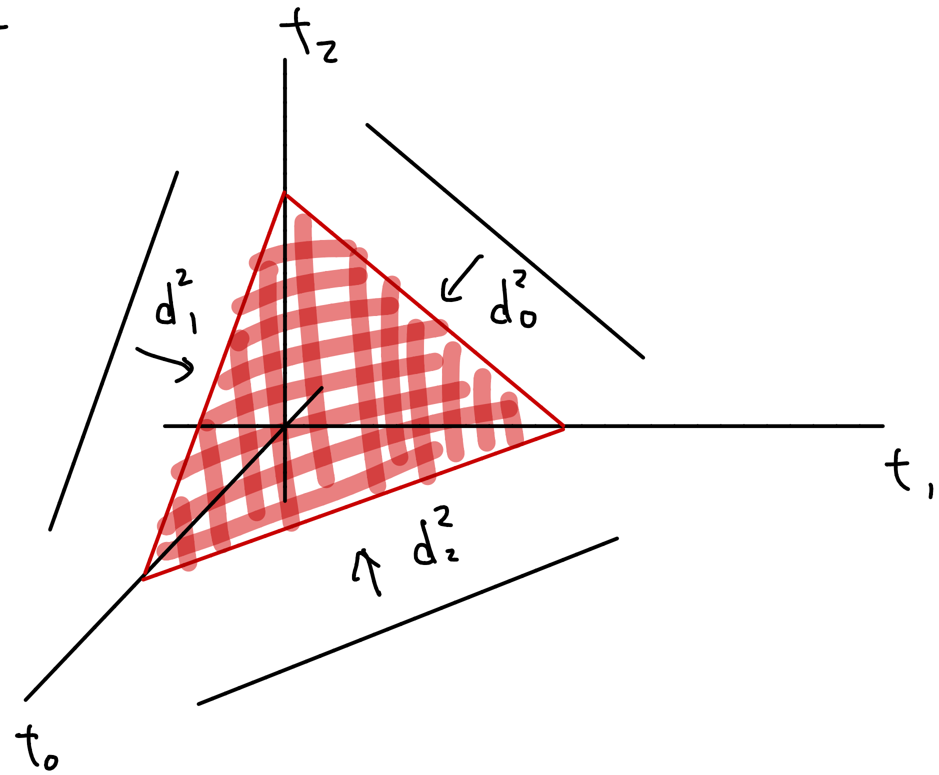
$\Delta_1 =$ 

$\Delta_2 =$ 

$d_i^n : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n \quad (0 \leq i \leq n)$ を次で定義。

$$d_i^n(x_0, \cdots, x_{n-1}) := (x_0, \cdots, x_i, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in \Delta_n$$

ex $n=2$



・ EG を次で定義する．

$$EG := \left(\bigcup_{n \geq 0} G^{n+1} \times \Delta_n \right) \Big/ \sim$$

ここで，$\sim$ は

$$(g_0, \cdots, g_n ; d_i^n(\vec{t}))$$
$$\sim (g_0, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1}, \cdots, g_{n-1} ; \vec{t})$$
$$\vec{t} \in \Delta_{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n .$$

$$EG_0 \subset EG_1 \subset EG_2 \subset \cdots\cdots$$

として，n 骨格 EG_n を順に見ていこう．

EG_0

$$EG_0 = G \times \Delta_0 = G.$$

0骨格 EG_0 は、集合 G.

<u>ex</u> $G = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$

$$\langle 0 \rangle \bullet \qquad\qquad \bullet \langle 1 \rangle$$

EG_1

$$EG_1 = G \amalg G^2 \times \Delta_1 \,/\sim .$$

$i=0$: $(g_0, g_1; d_0^1(\vec{t})) \sim (g_1; \vec{t})$, $\vec{t} \in \Delta_0$.

$\Leftrightarrow$ $(g_0, g_1; \text{"}1\text{"}) \sim g_1 \times pt$

$i=1$: $(g_0, g_1; d_1^1(\vec{t})) \sim (g_0; \vec{t})$, $\vec{t} \in \Delta_0$

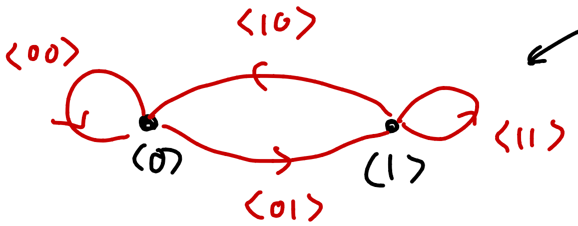
$\Leftrightarrow$ $(g_0, g, \text{"}0\text{"}) \sim g_0 \times pt$

なので、$(g, h) \in G^2$ に対して、

$$\begin{tikzcd} \langle g \rangle \arrow[r, "\langle gh \rangle"'] & \langle h \rangle \end{tikzcd}$$

と 1-cell を貼る。

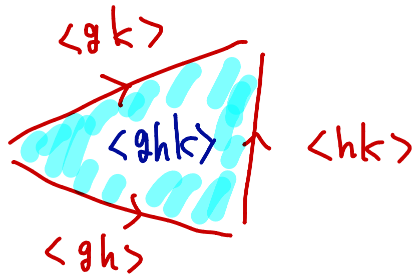
ex $G = \mathbb{Z}_2$



ループがあり
このままでは
$\pi_1(B\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$
とならないが、
2-cell を貼るので
問題なし。

EG_2

同様に、$(g, h, k) \in G^3$ に対して

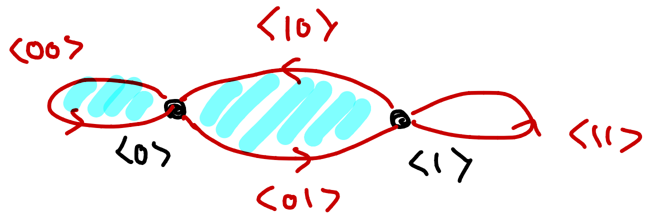


と、2-cell を貼る.

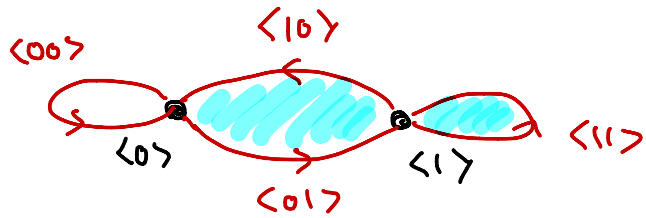
ex $G = \mathbb{Z}_2$.

全て異なる 2-cell

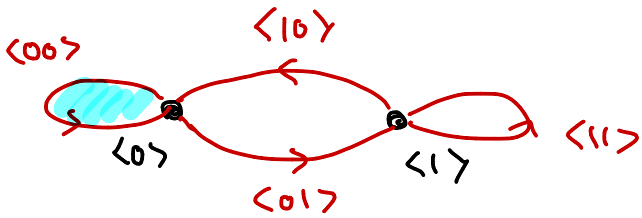
$\langle 001 \rangle$
$\langle 010 \rangle$
$\langle 011 \rangle$ =



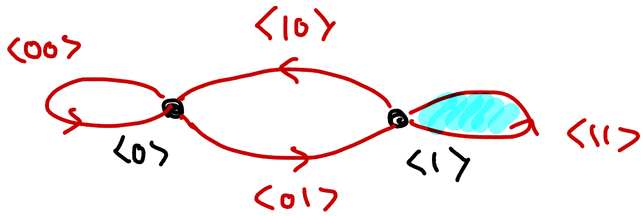
$\langle 110 \rangle$
$\langle 101 \rangle$
$\langle 100 \rangle$ =



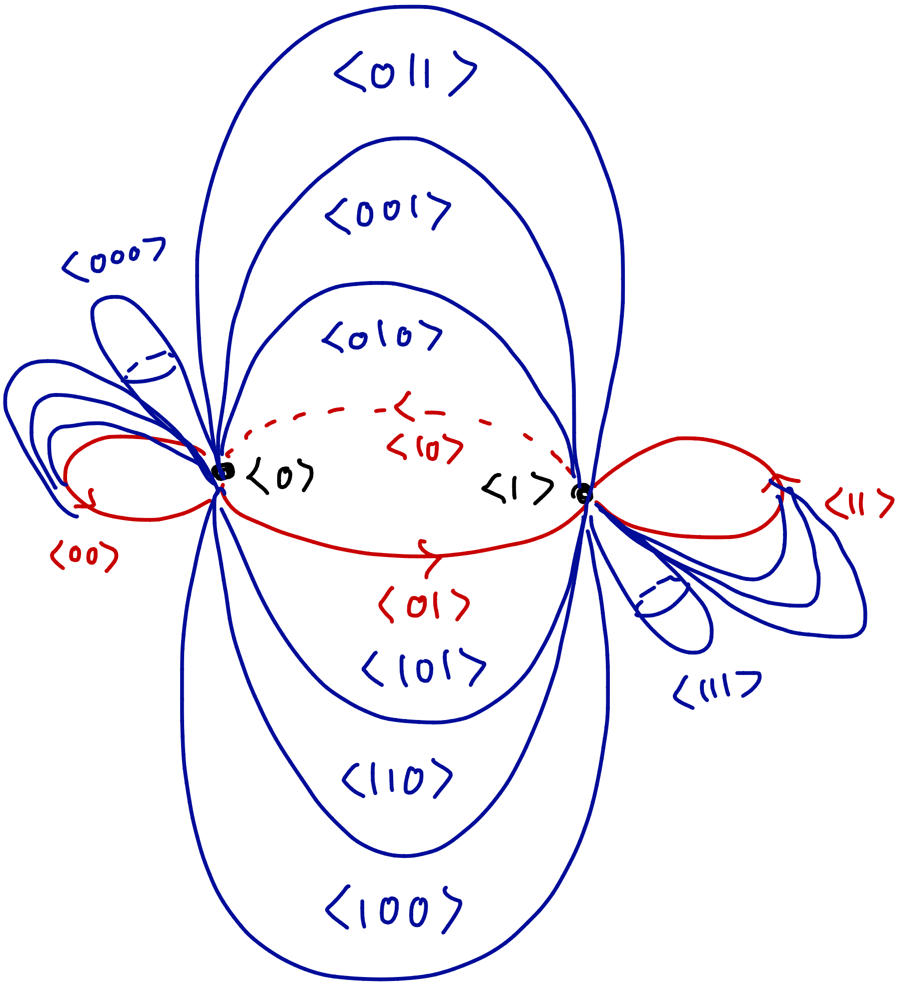
$\langle 000 \rangle$ =



$\langle 111 \rangle$ =



全てを絵で書くと.



こーなる.

- $G \curvearrowright EG$ を,

$$g(g_0, g_1, \cdots, g_n ; \vec{t}) := (gg_0, gg_1, \cdots, gg_n ; \vec{t})$$

で定義する.

- $BG := EG / G$.

☆ $H^*(BG, A) = H^*_{gr}(G, A)$ について.

($G \curvearrowright A$ が自明なとき)

p-cochain

$f \in C^p(EG, A)$ は.

$f(g_0, \cdots, g_p)$, $g_j \in G$.

で与えられる.

homogeneous condition

$$f(gg_0, \cdots, gg_p) = f(g_0, \cdots, g_p)$$

は. $f \in C^p(BG, A)$ に対応.

◎ $G \curvearrowright A$ 作用が非自明なときは、

$$f \in C^p(EG, A)$$

を G で割るときに、homogeneous 条件

$$gf(g_0, \cdots, g_p) \sim f(gg_0, \cdots, gg_p)$$

で割る。

$$\Rightarrow \quad C^p(BG, A) = C^p(G, A).$$

注）$BG = EG/G$ に $G \curvearrowright A$ の情報なし。