

# バンド理論とAtiyah-Hirzebruchスペクトル系列

塩崎 謙

基礎物理学研究所

January 14, 2022

## Abstract

本講義では

- 1日目: "ハミルトニアン"による $K$ 理論の構成方法について
- 2日目:  $K$ 理論におけるAtiyah-Hirzebruchスペクトル系列(AHSS)の一般論
- 3日目: AHSSの計算例について解説する.

このノートでは以下の表記を用いる.

$X, Y, A, B, \dots$	$K$ 群を計算したい, 何らかの空間.
ハミルトニアン	"エルミート" (自己共役) な行列のこと
$\approx$	ホモトピー同値
$H^\dagger$	$H$ の共役.
$H(\mathbf{k})$	ギャップのある有限次元ハミルトニアン. 組 $[H_0(\mathbf{k}), H_1(\mathbf{k})]$ が $K^0$ の元を表現する.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Pauli行列.
$h(\mathbf{k})$	無限次元ハミルトニアン. ギャップ条件は課さない. $K^1$ の元を表現する.
$U(\mathbf{k})$	有限次元ユニタリ行列. $K^{-1}, K^1$ の元を表現する.
$\Gamma$	カイラル対称性の対称性変換を表すユニタリ行列. $\Gamma = i\sigma_z$ として良い.
$G$	対称性群
$u_g(\mathbf{k})$	対称性変換におけるユニタリ行列. $g \in G$ は群要素.
$A, B, C, \dots,$	0セル.
$a, b, c, \dots,$	1セル.
$\alpha, \beta, \gamma$	2セル.

## 1 $K$ 理論

1日目は $K$ 理論のハミルトニアンによる記述を導入し, [1]  $K$ 群の次数, 微分について解説する. 時間が余ればMayer-Vietoris完全列についても解説する.

### 1.1 一般コホモロジー理論の公理

一般コホモロジー理論とは, 何らかの空間たちからアーベル群への反変関手である.  $(X, Y)$ と書くと, 空間 $X$ とその部分空間 $Y \subset X$ の組を表す. 反変関手とは, 空間対 $(X, Y)$ から整数 $n \in \mathbb{Z}$ でラベルされたアーベル群への対応

$$(X, Y) \Rightarrow h^n(X, Y) \tag{1}$$

であり、空間たちの間の写像  $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  に対して、誘導される準同型の向きが逆になるものを指す。

$$\begin{array}{ccc} (X, Y) & \xrightarrow{f} & (X', Y') \\ & \downarrow & \\ h^n(X, Y) & \xleftarrow{f^*} & h^n(X', Y'). \end{array} \quad (2)$$

このような対応  $h^*$  が与えられたときに、次の性質を満たすものを一般コホモロジー理論と呼ぶ。

- (ホモトピー公理) 写像  $f_i : X \rightarrow Y (i = 0, 1)$  がホモトピックならば、 $f_0^* = f_1^*$ .
- (切除公理)  $h^n(A \cup B, B) \cong h^n(A, A \cap B)$ .
- (完全性公理) 空間対  $(X, Y)$  に対して、次の長完全列が存在する。

$$\cdots h^n(X, Y) \rightarrow h^n(X) \rightarrow h^n(Y) \rightarrow h^{n+1}(X, Y) \rightarrow \cdots \quad (3)$$

- (加法性公理)

$$h^n(X \sqcup Y) \cong h^n(X) \oplus h^n(Y). \quad (4)$$

さらに、 $h^*$  が一般コホモロジー理論であるとき、次の長完全列がある。

- (Mayer-Vietoris完全列)

$$\cdots h^n(A \cup B) \rightarrow h^n(A) \oplus h^n(B) \rightarrow h^n(A \cap B) \rightarrow h^{n+1}(A \cup B) \rightarrow \cdots \quad (5)$$

さて、 $K$ 理論は一般コホモロジー理論の一種である。次を順番に見ていく。

- $K^0$ をギャップのある有限次元ハミルトニアン<sup>1</sup>の組で表現する方法。
- なぜ反変関手なのか。
- 微分  $K^0(Y) \xrightarrow{d} K^1(X, Y)$ の意味。
- $K^1$ はギャップレスのハミルトニアンによって表現されること。
- 完全性公理。
- Mayer-Vietoris完全列。

## 1.2 $K^0(X, Y)$ の構成

何らかのパラメタ空間  $X$  上<sup>1</sup>の有限次元の  $N \times N$ エルミート行列  $H(k), k \in X$  を考える。<sup>2</sup>  $H(k)$ は連続とする。

$$H(k), \quad k \in X, \quad H(k)^\dagger = H(k). \quad (6)$$

<sup>1</sup>  $X$ は局所的にユークリッド空間である必要はなく、閉じてなくても良い。

<sup>2</sup> ここでは簡単のためハミルトニアン  $H$ は自明なベクトル束  $X \times \mathbb{C}^N$ において定義されているとしたが、一般には有限次元のエルミートベクトル束  $E \rightarrow X$ 上の自己共役写像  $H : E \rightarrow E$ を考える。詳しくは[2].

さらに,  $H(k)$ の固有値に対して次の”ギャップ条件”を課す.  $H(k)$ がギャップのあるハミルトニアンとは,  $k \in X$ 依存しない有限のギャップ  $E_g > 0$ が存在して,  $H(k)$ の固有値を小さい方から  $E_j(k), (j = 1, \dots, N)$ と書いたとき,

$$E_1(k) \leq \dots \leq E_{N_1}(k) < -E_g/2 < E_g/2 < E_{N_1+1}(K) \leq \dots \leq E_N(k) \quad (7)$$

となるときを言う. 以下特に断らない限り,  $H$ はギャップのある有限次元ハミルトニアンを表すものとする. ギャップのある  $N$ 次元エルミート行列  $H_0, H_1$ の組たち

$$\{(H_0(k), H_1(k))\} \quad (8)$$

において, 連続的に移り変わるものを同一視する. この同値類を

$$[H_0(k), H_1(k)] \quad (9)$$

と書こう.  $[H_0(k), H_1(k)]$ たちが生成する自由アーベル群

$$F = \mathbb{Z}[[H_0(k), H_1(k)]] \oplus \mathbb{Z}[[H'_0(k), H'_1(k)]] \oplus \dots \quad (10)$$

を形式的に導入する. ここで, 行列次元は任意の正整数を走る.  $F$ に次の同値関係を導入する.

$$(a) [H(k), H(k)] \sim 0.$$

$$(b) [H_0(k) \oplus H'_0(k), H_1(k) \oplus H'_1(k)] \sim [H_0(k), H_1(k)] + [H'_0(k), H'_1(k)].$$

0次の  $K$ 群  $K^0(X)$ は  $F$ を同値関係  $\sim$ で割ることによって得られる.

$$K^0(X) = F / \sim. \quad (11)$$

構成から,  $K^0(X)$ は何らかのアーベル群であることに注意. 特に,

$$[H_0(k) \oplus H_1(k), H_1(k) \oplus H_0(k)] \sim 0 \quad (12)$$

より, 逆元は

$$-[H_0(k), H_1(k)] \sim [H_1(k), H_0(k)] \quad (13)$$

で与えられる. また, 同一視(a),(b)を組み合わせると, ハミルトニアンの自明な組  $[H(k), H(k)]$ を足しても  $K$ 群  $K^0(X)$ は値を変えないことがわかる.

$$[H_0(k) \oplus H(k), H_1(k) \oplus H(k)] \sim [H_0(k), H_1(k)]. \quad (14)$$

この性質は安定同値と呼ばれる.

相対  $K$ 群  $K^0(X, Y)$ は, ” $Y$ 上で自明なハミルトニアンの組”を分類する. 同一次元のハミルトニアンの組  $(H_0(k), H_1(k))$ として,  $Y$ 上でハミルトニアンが等しいものを考える.<sup>3</sup>

$$H_0(k) = H_1(k), \quad k \in Y. \quad (16)$$

このようなハミルトニアンの組について,  $K^0(X)$ の場合と同様にして相対  $K$ 群  $K^0(X, Y)$ が定義される.

以下, 単に  $[H_0(K), H_1(k)]$ と書いたときは  $K$ 群  $K^0(X), K^0(X, Y)$ の元を表すものとする.

例を見よう.

<sup>3</sup>以前のノートでは,  $Y$ 上でハミルトニアンが互いに連続変形で移り合うものを考える.

$$H_0(k) \approx H_1(k), \quad k \in Y. \quad (15)$$

としていましたが, これは間違いでした.

### 1.2.1 例 1. $K^0(\text{pt}) = \mathbb{Z}$

1点pt上のギャップのあるハミルトニアンは連続変形で

$$H \approx \begin{pmatrix} I_{N-N_1} & \\ & -I_{N_1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

と書けることに注意すると、ハミルトニアンの組は

$$\left[ \begin{pmatrix} I_{N-N_1} & \\ & -I_{N_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_{N-N_2} & \\ & -I_{N_2} \end{pmatrix} \right] \quad (18)$$

と書ける。同一視(a)と(b)に注意すると、エネルギー固有値が正負で共通の部分は落として良いので、結局

$$= \begin{cases} [-I_{N_1-N_2}, I_{N_1-N_2}] & (N_1 \geq N_2) \\ [I_{N_1-N_2}, -I_{N_1-N_2}] & (N_1 \leq N_2) \end{cases} \quad (19)$$

$$= (N_1 - N_2) \times [-1, 1] \quad (20)$$

となる。生成元は $[-1, 1]$ である。

### 1.2.2 例 2. $K^0(S^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

ギャップのあるハミルトニアンの固有値は $\pm 1$ としても良い。するとギャップのあるハミルトニアンは $U(k)$ をユニタリ行列として

$$H(k) = U(k) \begin{pmatrix} I_{N-N_1} & \\ & -I_{N_1} \end{pmatrix} U(k)^\dagger \quad (21)$$

と書ける。ユニタリ行列 $U(k)$ は一意ではなく、取り替え

$$U(k) \mapsto U(k) \begin{pmatrix} V(k) & \\ & W(k) \end{pmatrix} \quad (22)$$

に対してハミルトニアン $H(k)$ は不変である。よって、 $N_1$ 個の負の固有値をもつ $N$ 次元のギャップのあるハミルトニアンは

$$G_{N_1}(\mathbb{C}^N) = \frac{U(N)}{U(N - N_1) \times U(N_1)} \quad (23)$$

に値を取る。複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ から複素 $N_1$ 次元空間を選ぶ選び方の空間である。一般のパラメータ空間 $X$ については、 $X$ から $G_{N_1}(\mathbb{C}^N)$ への巻き付きが存在するため、(17)のような連続変形は大域的には正しくない。実際、

$$[S^2, G_1(\mathbb{C}^2)] = [S^2, S^2] = \mathbb{Z} \quad (24)$$

となり、<sup>4</sup> 非自明な巻き付きが存在する。ハミルトニアンをPauli行列を用いて

$$H(k) = \mathbf{h}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (25)$$

と書くと、 $S^2$ に値を取る単位ベクトル $\mathbf{h}(k)/|\mathbf{h}(k)|$ が $G_1(\mathbb{C}^2)$ 上の点に対応する。巻き付きが非自明なハミルトニアンは、例えば $S^2$ を $\mathbb{R}^2$ の1点コンパクト化 $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ として、

$$H(k_x, k_y) = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + (k_x^2 + k_y^2 - \mu) \sigma_z, \quad (\mu > 0) \quad (26)$$

<sup>4</sup> $G_1(\mathbb{C}^2) \cong S^2$ は2準位系の物理的状態空間であり、Bloch球面と呼ばれることがある。

で与えられる。  $\mu < 0$ は巻き付きゼロである。物性物理学ではChern絶縁体と呼ばれる。  $K$ 群  $K^0(S^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の生成元は

$$[H_0(\mathbf{k}) = -1, H_1(\mathbf{k}) = 1], \quad (27)$$

$$[H_0(\mathbf{k}) = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + (k_x^2 + k_y^2 - 1) \sigma_z, H_1(\mathbf{k}) = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + (k_x^2 + k_y^2 + 1) \sigma_z] \quad (28)$$

で与えられる。<sup>5</sup>

### 1.3 反変関手？

$K^0(X, Y)$ を構成したが<sup>3</sup>、反変関手だろうか。連続写像

$$f: X \rightarrow Y \quad (29)$$

が与えられたときに誘導される準同型

$$f^*: K^0(Y) \rightarrow K^0(X) \quad (30)$$

を考えよう。与えられた  $Y$  上のハミルトニアン  $H_Y(k \in Y)$  に対して、  $X$  上のハミルトニアン  $H_X(k \in X)$  が

$$H_X(k \in X) = H_Y(f(k)) \quad (31)$$

によって与えられる。このように、  $f: X \rightarrow Y$  が与えらえると、  $X, Y$  上に乗っている”関数”については写像の向きが逆になる。

### 1.4 空間対の完全列

完全性公理

$$\rightarrow K^0(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^0(X) \xrightarrow{j^*} K^0(Y) \xrightarrow{d} K^1(X, Y) \rightarrow \quad (32)$$

について考えよう。

$$i: X \rightarrow (X, Y), \quad j: Y \rightarrow X \quad (33)$$

はそれぞれ包含写像である。

- $i^*: K^0(X, Y) \rightarrow K^0(X)$ :  $Y$  上でホモトピー同値なハミルトニアンの組  $(H_0(k), H_1(k))$  を単に  $X$  上のハミルトニアンの組する。
- $j^*: K^0(X) \rightarrow K^0(Y)$ :  $X$  上のハミルトニアン  $H(k \in X)$  に対して、  $Y$  上のハミルトニアンを  $H(k \in Y) = H(k)$  と定義する。

完全性  $\text{Im } i^* = \text{Ker } j^*$  について考えよう。

- $\text{Im } i^* \subset \text{Ker } j^*$ .  
  $Y$  上でホモトピー同値なハミルトニアンの組を  $Y$  上に制限する。
- $\text{Ker } j^* \subset \text{Im } i^*$ .  
  $[H_0(k), H_1(k)] \in \text{Ker } j^*$  を仮定すると、  $H_0(k), H_1(k)$  は  $Y$  上でホモトピー同値より。

完全性公理の他の部分の完全性をみるには、微分の意味について考える必要がある。

<sup>5</sup> $K^0(S^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を示すには、後者の生成元がハミルトニアンの自明な組の直和(14)に対して安定であること、他に生成元が存在しないことを示す必要があるが、ここでは行わない。例えば、  $[S^3, G_1(\mathbb{C}^2)] = [S^3, S^2] = \mathbb{Z}$ であるが、安定同値(14)より  $K$ 群  $K^0(S^3)$ には寄与しない。

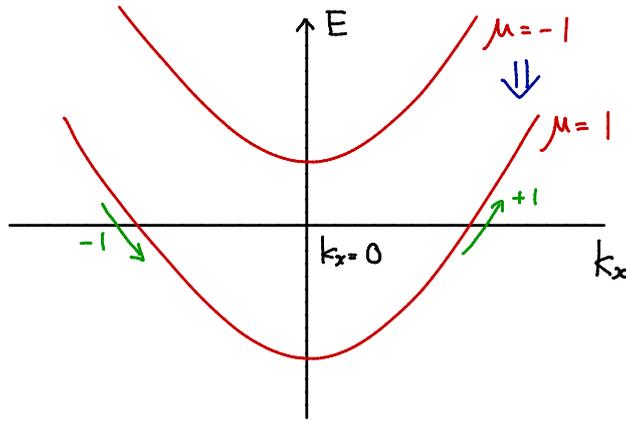


Figure 1: スペクトル流の対生成

## 1.5 微分と $K^1(X, Y)$

微分

$$d: K^0(Y) \rightarrow K^1(X, Y) \quad (34)$$

を自然に定義したい.  $Y$  上におけるハミルトニアン組  $[H_0(k), H_1(k)]$  から  $X$  上における何かを定義したい.

最も簡単な場合として,  $X$  を直線  $X = \mathbb{R}$  として,  $Y$  を原点  $Y = \{0\}$  としよう.  $\mathbb{R}$  上の点を  $k_x$  と書く.  $K^0(\{0\}) = \mathbb{Z}$  の生成元として, 組  $[H_0(0) = 1, H_1(0) = -1]$  を取る.  $Y$  上で 2 つのハミルトニアン  $H_0, H_1$  をつなぐハミルトニアン

$$h_{01}(0) = -\mu, \quad \mu \in [-1, 1] \quad (35)$$

は  $\mu = -1 \rightarrow \mu = 1$  の間に必ずギャップレス点がある.  $k_x = 0$  の近傍では何が起ころうか. ある種の正則化

$$h_{01}(k_x) = k_x^2 - \mu, \quad \mu \in [-1, 1] \quad (36)$$

を行うと, 変化  $\mu = -1 \rightarrow \mu = 1$  の間に  $k_x = 0$  から  $k_x > 0$  と  $k_x < 0$  においてそれぞれ正と負のスペクトル流が対生成されることがわかる. 図1を見よ.

スペクトル流は摂動に対して安定なある種の”トポロジカル”な何かである. すると,

- $K^1(X, Y)$  は  $Y$  上でギャップのある  $X$  上の無限次元ハミルトニアン  $h(k)$  の, なんらかの適切な意味でのホモトピー同値類

と定義するのが良さそうだ. ここでハミルトニアンは無限次元としたが, 実際,  $K^1(X, Y)$  を表現するハミルトニアン  $h(k)$  は必ずしも有限次元とは限らない. たとえば,  $K^1(S^1)$  を考えよう.  $S^1$  上のトポロジカルに安定なギャップレス点はスペクトル流のみなので,  $K^1(S^1) = \mathbb{Z}$  である.  $S^1$  上の有限次元ハミルトニアンの全スペクトル流は必ずゼロなので (図2[a]), 非自明なスペクトル流を持つには無限次元のハミルトニアンを導入する必要がある (図2[b]).

対応して, 微分  $d: K^0(Y) \rightarrow K^1(X, Y)$  は

- $Y$  上のハミルトニアン組  $[H_0(k), H_1(k)]$  において,  $H_0(k)$  から  $H_1(k)$  へとトポロジカル転移を起こした際に  $X$  における  $Y$  の近傍において生成されるギャップレスなハミルトニアン

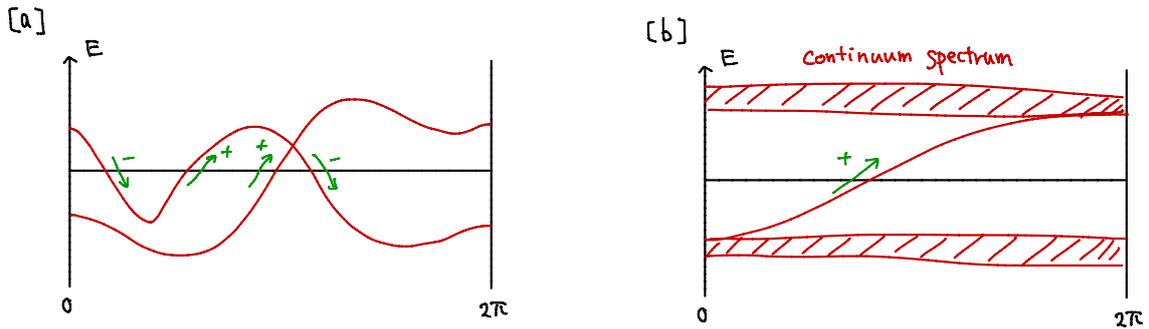


Figure 2: [a]有限次元ハミルトニアン of 全スペクトル流はゼロ. [b]無限次元ハミルトニアンであれば有限のスペクトル流を持っても良い.

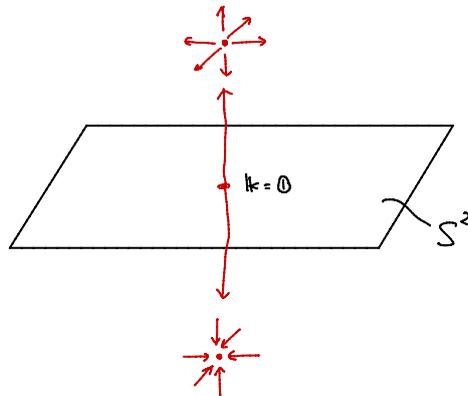


Figure 3: Weyl点の対生成

として適切に定義すれば良いだろう.

注意として,  $Y \subset X$  はどのような部分空間でも良い. 上の例と下の例では余次元1の場合を考えるためギャップレス点の対生成 ( $S^0 = \mathbb{Z}_2$ ) となるが, 一般にはギャップレス点のループ ( $S^1$ ), 閉曲面 ( $S^2$ ) などが生成されることもある.

スペクトル流に限らず, もっと一般の安定なギャップレス点がある.

### 1.5.1 Weyl点

3次元のパラメータ空間において, ギャップレス点

$$H(k_x, k_y, k_z) = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + k_z \sigma_z \quad (37)$$

は摂動に対して安定である. 物性物理学の分野ではWeyl点と呼ばれる. ギャップレス点  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  を囲む球面上  $S^2$  上においてはハミルトニアンはギャップがあるので, 1.2.2節と同様にして整数に値を取る巻き付き数が定義される.

このWeyl点は2次元的なパラメータ空間におけるギャップのあるハミルトニアンのトポロジカル転移によって生成される.

3次元空間 $X$ の, ある部分球面 $S^2 \subset X$ とその近傍について考えよう.  $S^2$ を $(k_x, k_y)$ で,  $S^2$ に垂直な方向を $k_z$ で座標を入れる. 上の例で見たように,  $K^0(S^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の片方の $\mathbb{Z}$ はハミルトニアン(28)で与えられた.  $\mu \in [-1, 1]$ としてハミルトニアン

$$h_{01}(k_x, k_y, k_z) = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \mu) \sigma_z, \quad \mu \in [-1, 1] \quad (38)$$

を考えよう. エネルギー固有値は

$$E^2 = k_x^2 + k_y^2 + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \mu)^2 \quad (39)$$

より,  $\mu < 0$ ではギャップがある.  $\mu = 0$ において $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ でWeyl点が生じ,  $\mu > 0$ では $(k_x, k_y, k_z) = (0, 0, \pm\sqrt{\mu})$ において電荷 $\pm 1$ のWeyl点が存在する. [図3](#)を見よ. 実際, ギャップレス点の近傍でハミルトニアン $h_{01}(\mathbf{k})$ を1次まで展開すると

$$h_{01}(k_x, k_y, k_z) \sim k_x \sigma_x + k_y \sigma_y \pm 2\sqrt{\mu}(k_z \mp \sqrt{\mu}) \sigma_z \quad (40)$$

となる.

$K$ 群とギャップレス点の関係をここでまとめておく.

$K$ 群	意味するところ
$K^0(\text{pt}) = \mathbb{Z}$	固有状態の数
$\tilde{K}^1(S^1) = 0$	n/a
$\tilde{K}^0(S^2) = \mathbb{Z}$	Chern絶縁体
$\tilde{K}^0(S^3) = 0$	n/a
$K^1(\text{pt}) = 0$	n/a
$K^1(S^1) = \mathbb{Z}$	スペクトル流
$K^1(S^2) = 0$	n/a
$K^1(S^3) = \mathbb{Z}$	Weyl点

ここで基点付きの空間 $(X, \text{pt}), \text{pt} \in X$ に対して簡約 $K$ 群

$$\tilde{K}^0(X) := K^0(X, \text{pt}) \quad (41)$$

を導入した.  $K^0(X, \text{pt})$ は $\text{pt}$ 上でホモトピー同値なハミルトニアンの組 $(H_0(k), H_1(k))$ によって表現されるので,  $K^0(\text{pt}) = \mathbb{Z}$ から生じる自明な寄与を消している. なお, 懸垂同型<sup>6</sup>とBott周期性より, 一般に

$$\tilde{K}^n(S^p) = K^{n-p}(\text{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n-p \in \text{even}) \\ 0 & (n-p \in \text{odd}) \end{cases} \quad (42)$$

である.

## 1.6 空間対の完全列 (つづき)

$K^1(X, Y)$ と微分 $d: K^0(Y) \rightarrow K^1(X, Y)$ の意味を決めたので, 完全性公理の残っていた部分の完全性を議論できる. 以下は雰囲気を書いただけで証明ではないが, 矛盾はなさそうである.

$$K^0(X) \xrightarrow{j^*} K^0(Y) \xrightarrow{d} K^1(X, Y) \quad (43)$$

- $\text{Im } j^* \subset \text{Ker } d$ .

$X$ 上のギャップのあるハミルトニアンの組 $[H_0(k), H_1(k)]$ を $Y$ 上に制限して $H_0(k)$ から $H_1(k)$ へのトポロジカル転移を起こしても, 元来 $X$ 上のギャップのあるハミルトニアンの組なので必ずギャップレス点の電荷はキャンセルするから.

<sup>6</sup> $\tilde{h}^{*+p}(S^p \wedge X) = \tilde{h}^*(X)$ .

- $\text{Ker } d \subset \text{Im } j^*$ .

$[H_0(k), H_1(k)] \in \text{Ker } d$ は、 $Y$ 上のハミルトニアン $H_0(k)$ から $H_1(k)$ へのトポロジカル転移に伴い生成された $X$ 上のギャップレス点の電荷がキャンセルすることを意味する。これは $X$ 上にハミルトニアン $H_0(k), H_1(k)$ を拡張できることを意味する。

$$K^0(Y) \xrightarrow{d} K^1(X, Y) \xrightarrow{i^*} K^1(X) \quad (44)$$

- $\text{Im } d \subset \text{Ker } i^*$

$Y$ 上のギャップのあるハミルトニアンの組 $[H_0(k), H_1(k)]$ に対して、 $H_0(k)$ から $H_1(k)$ へのトポロジカル転移によって生成された $X$ 上のギャップレス点は、 $Y$ 上におけるギャップ条件を外せば必ずキャンセルするから。

- $\text{Ker } i^* \subset \text{Im } d$

$X$ 上のギャップレスなハミルトニアン $h(k)$ に対して、 $Y$ 上のギャップ条件を外すと $X$ 上でギャップがあるハミルトニアンに変形できると仮定すると、 $h(k)$ のギャップレス点は $Y$ でのみ対生成されることを意味する。 $h(k)$ のギャップレス点を生成する $Y$ 上のギャップのあるハミルトニアンの組 $[H_0(k), H_1(k)]$ が存在するだろう。

## 1.7 $K^1(X, Y)$ とユニタリ行列, カイラル対称性

1次の $K$ 群 $K^1(X, Y)$ は無次元のギャップレスなハミルトニアン $h(k)$ によって表現される。ギャップレス点の持つ電荷によって $K$ 群 $K^1(X, Y)$ が特徴づけられると期待されるので、固有値ゼロ近傍以外は重要ではないだろう。固有値ゼロ近傍の様子を再現できれば、 $K^1(X, Y)$ の表現としてどのようなものを用いても良いだろう。有限次元ユニタリ行列の $\log$ を取ると無次元のギャップレスなハミルトニアンが構成できる。

$$h(\mathbf{k}) = -i \log U(\mathbf{k}). \quad (45)$$

- $K^1(X, Y)$ は有限次元ユニタリ行列 $U(\mathbf{k})$ であり、 $Y$ 上で自明 $U(\mathbf{k}) = -I$ なものによって表現される。<sup>7</sup>

あるいは同じことだが、

- $K^1(X, Y)$ は有限次元ユニタリ行列の組 $(U_0(\mathbf{k}), U_1(\mathbf{k}))$ であり、 $Y$ 上で $U_0(\mathbf{k})U_1(\mathbf{k})^{-1} = -I$ を満たすものによって表現される。

例： $K^1(S^1) = \mathbb{Z}$ .  $U(k_x) = e^{ik_x}$ とすると、 $h(k_x) = k_x$ .

ユニタリ行列が与えられたとき、

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} & U(\mathbf{k}) \\ U(\mathbf{k})^\dagger & \end{pmatrix}_\sigma \quad (46)$$

とすると、有限次元のギャップのあるエルミート行列が得られる。構成から必ず次のカイラル対称性

$$\Gamma H(\mathbf{k}) + H(\mathbf{k}) \Gamma = 0, \quad \Gamma = i\sigma_z \quad (47)$$

<sup>7</sup>(-1)次の $K$ 群 $K^{-1}(X, Y)$ がユニタリ行列によって表現される。とした方が微分の意味を考えると正確だろう。実際、反ユニタリな対称性を含む場合は、 $K^{-1}(X, Y)$ がユニタリ行列によって表現される。

を有する。<sup>8</sup> 逆に、カイラル対称性を有する有限次元の固有値 $\pm 1$ を持つギャップのあるハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ が与えられたとき、 $\Gamma = i\sigma_z$ の基底を取ると(46)と書ける。よって、

- $K^1(X, Y)$ は、 $X$ 上の共通のカイラル対称性 $\Gamma$ を持つ有限次元ハミルトニアンの組 $(H_0(\mathbf{k}), H_1(\mathbf{k}))$ であり、 $Y$ 上でホモトピー同値 $H_0(\mathbf{k}) \approx H_1(\mathbf{k})$ なものによって表現される。

## 1.8 Bott周期性

前節で、1次の $K$ 群はカイラル対称性を満たすハミルトニアンの組によって表現されることを見た。一般に $n$ 次の $K$ 群は次の $n$ 個のカイラル対称性を満たすハミルトニアンの組によって表現される。

$$\Gamma_i H(\mathbf{k}) + H(\mathbf{k}) \Gamma_i = 0, \quad \{\Gamma_i, \Gamma_j\} = -2\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (48)$$

カイラル対称性が2つ存在するとき、ハミルトニアンの分類はカイラル対称性が存在しない場合と一致する。一般性を失うことなく2つのカイラル対称性を

$$\Gamma_1 = i\sigma_x, \quad \Gamma_2 = i\sigma_y \quad (49)$$

として良い。すると、カイラル対称性を満たすハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ は

$$H(\mathbf{k}) = \tilde{H}(\mathbf{k}) \otimes \sigma_z \quad (50)$$

と形が決まってしまう。これからBott周期性

$$K^{n+2}(X, Y) \cong K^n(X, Y) \quad (51)$$

が導かれる。

同様に、負の次数の $K$ 群 $K^{-n}(X, Y)$ は2乗して+1となる $n$ 個のカイラル対称性

$$\gamma_i H(\mathbf{k}) + H(\mathbf{k}) \gamma_i = 0, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (52)$$

によって定義される。

反ユニタリな対称性が存在しない場合は $\Gamma_i$ と $\gamma_i$ は同一の $K$ 群を与えるが、反ユニタリな対称性が存在する場合は $\Gamma_i$ と $\gamma_i$ は異なる $K$ 群を与える。

## 1.9 懸垂同型

一般コホモロジー理論においては懸垂同型

$$\tilde{h}^{n+1}(\Sigma X) \cong \tilde{h}^n(X) \quad (53)$$

が成立する。ここで $X$ は基点付き空間 $(X, \text{pt})$ であり、 $X$ の約懸垂 $\Sigma X$ は

$$\Sigma X := X \times I / (X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{\text{pt}\} \times I) \quad (54)$$

として定義される。図4を見よ。

ここでは $K$ 理論における懸垂同型を説明しよう。線分 $I$ を $\theta \in [0, \pi]$ とラベルしよう。 $X$ 上のギャップのある有限次元ハミルトニアンであり、基点 $\text{pt} \in X$ 上でホモトピー同値 $H_0(\text{pt}) \approx H_1(\text{pt})$ な

<sup>8</sup>反ユニタリな対称性が存在する場合はカイラル演算子の $U(1)$ 位相 $\Gamma^2 = 1$ と $\Gamma^2 = -1$ は異なる。次数が+1されるのは $\Gamma^2 = -1$ のとき。

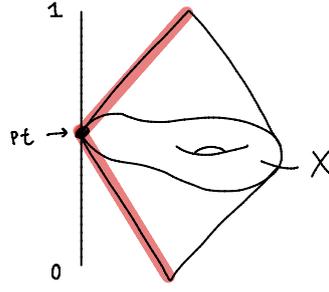


Figure 4:  $X$ の約懸垂  $\Sigma X$ .

組  $H_i(\mathbf{k})$ ,  $(i = 0, 1)$  に対して,  $\Sigma X$  上のカイラル対称性  $\Gamma$  のあるハミルトニアン  $\tilde{H}_i(\mathbf{k}, \theta)$ ,  $(i = 0, 1)$  を次のように導入する.

$$\tilde{H}_i(\mathbf{k}, \theta) = \sin \theta H_i(\mathbf{k}) + \cos \theta \Gamma, \quad i = 0, 1. \quad (55)$$

約懸垂  $\Sigma X$  上のハミルトニアンとして well-defined かどうかについてを確認すると

$$\tilde{H}_i(\mathbf{k}, \theta = 0) = \Gamma, \quad (56)$$

$$\tilde{H}_i(\mathbf{k}, \theta = \pi) = -\Gamma, \quad (57)$$

$$\tilde{H}_i(\text{pt}, \theta) = \sin \theta H_i(\text{pt}) + \cos \theta \Gamma, \quad i = 0, 1 \quad (58)$$

となり, 確かに  $(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{\text{pt}\} \times I)$  においては  $\tilde{H}_i(\mathbf{k}, \theta)$ ,  $i = 0, 1$  はホモトピー同値である. この対応により準同型

$$\tilde{K}^n(X) \ni [H_0(\mathbf{k}), H_1(\mathbf{k})] \mapsto [\tilde{H}_0(\mathbf{k}, \theta), \tilde{H}_1(\mathbf{k}, \theta)] \in \tilde{K}^{n+1}(\Sigma X) \quad (59)$$

が得られるが, 実は逆の構成も可能であり, 同型を与える.<sup>9</sup>

$$\tilde{K}^n(X) \cong \tilde{K}^{n+1}(\Sigma X). \quad (60)$$

さらに, 約懸垂については

$$\Sigma(\Sigma^p X) = \Sigma^{p+1} X. \quad (61)$$

が成立するので, 結局

$$\tilde{K}^n(\Sigma^p X) \cong \tilde{K}^{n-p}(X). \quad (62)$$

が成立する.

特に,  $X$  として  $S^0 = \mathbb{Z}_2$  とすると<sup>10</sup>, 球面上の  $K$  群が完全に決まる.

$$\tilde{K}^n(S^p) = \tilde{K}^n(\Sigma^p S^0) \cong \tilde{K}^{n-p}(S^0) \cong K^{n-p}(\text{pt}) \quad (63)$$

$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & (n - p \in \text{even}), \\ 0 & (n - p \in \text{odd}). \end{cases} \quad (64)$$

## 1.10 Mayer-Vietoris 完全列

$X = A \cup B$  のように 2 つの空間  $A, B$  を用いてコホモロジー群を計算したい空間  $X$  を覆うことができるとき,  $A, B$  上のコホモロジー群を用いて  $X$  のコホモロジー群を近似する手法が Mayer-Vietoris (MV) 完全列である. 有用な計算ツールなのでここで紹介する.

<sup>9</sup>例えば, [3] の Appendix A には, 作用汎関数 (Morse 関数) を用いた説明がある.

<sup>10</sup> $\mathbb{Z}_2$  の 2 点のうち, 片方を基点とする.

空間について包含の列

$$A \cup B \xleftarrow{i_A, i_B} A \sqcup B \xleftarrow{j_A, j_B} A \cap B \quad (65)$$

に対して、次の可換図式に注目する。各行については空間対の完全列である。

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & K^n(A \cup B, A) & \longrightarrow & K^n(A \cup B) & \xrightarrow{i_A^*} & K^n(A) & \longrightarrow & K^{n+1}(A \cup B, A) & \longrightarrow \\ & \downarrow \cong & & \downarrow i_B^* & & \downarrow j_A^* & & \downarrow \cong & \\ \longrightarrow & K^n(B, A \cup B) & \longrightarrow & K^n(B) & \xrightarrow{j_B^*} & K^n(A \cap B) & \xrightarrow{d} & K^{n+1}(B, A \cup B) & \longrightarrow \end{array} \quad (66)$$

ここで、 $i_A, i_B, j_A, j_B$ はそれぞれ包含

$$i_A : A \rightarrow A \cup B, \quad i_B : B \rightarrow A \cup B, \quad (67)$$

$$j_A : A \cap B \rightarrow A, \quad j_B : A \cap B \rightarrow B \quad (68)$$

である。合成

$$\delta : K^n(A \cap B) \xrightarrow{d} K^{n+1}(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} K^{n+1}(A \cup B, A) \rightarrow K^{n+1}(A \cup B) \quad (69)$$

として $\delta$ を定義すると、次の長完全列（MV完全列）がある。（Barratt-Whiteheadと呼ばれるらしい）

$$\cdots \rightarrow K^n(A \cup B) \xrightarrow{(i_A^*, i_B^*)} K^n(A) \oplus K^n(B) \xrightarrow{j_A^* - j_B^*} K^n(A \cap B) \xrightarrow{\delta} K^{n+1}(A \cup B) \rightarrow \cdots \quad (70)$$

$K^n(A \cap B) \xrightarrow{d} K^{n+1}(B, A \cap B)$ に注目すると、 $\delta$ の意味は、 $A \cap B$ においてトポロジカル転移に伴って生成される $B$ におけるギャップレス点、という意味がある。完全性については各自で確認して欲しい。

## 2 Atiyah-Hirzebruchスペクトル系列

表題のAtiyah-Hirzebruchスペクトル系列（Atiyah-Hirzebruch Spectral Sequence. AHSSと略す）に移る。一般に、スペクトル系列とは一般（コ）ホモロジー理論を計算するための計算ツールであり、Atiyah-Hirzebruch以外にも、Leray-Serre, Adams, ...など種類がある。AHSSは、（コ）ホモロジーを計算したい空間 $X$ の分割に基づく。

本節の内容は[6]に基づく。

### 2.1 準備 1. 対称性について

バンド理論においては、時間反転対称性、電子・正孔対称性、磁気空間群対称性などの各種対称性と両立するハミルトニアンを分類を考える。対称性はハミルトニアンに対して次の形の制限を与える。[4] 有限群 $G$ の対称性群に対して、パラメータ空間 $X$ への群作用が定義されている。

$$\mathbf{k} \rightarrow g\mathbf{k} \quad (71)$$

と書く。対称性の型を指定する $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ への2つの準同型がある。

$$\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} : g \in G \text{がユニタリか, 反ユニタリかを指定する。} \quad (72)$$

$$c : G \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} : g \in G \text{がハミルトニアンと可換か, 反可換かを指定する。} \quad (73)$$

$\phi_g \in \{1, -1\}$ に応じて、対称性変換を

$$\rho_g(\mathbf{k}) = \begin{cases} u_g(\mathbf{k}) & (\phi_g = 1) \\ u_g(\mathbf{k})K & (\phi_g = -1) \end{cases} \quad (74)$$

とする。ここで  $u_g(\mathbf{k})$  はユニタリ行列、 $K$  は複素共役である。量子力学においては対称性はHilbert空間における何らかの射影表現で表現されることを思い出すと、対称性変換同士の乗数系を決める必要がある。

$$\rho_g(h\mathbf{k})\rho_h(\mathbf{k}) = z_{g,h}(\mathbf{k})\rho_{gh}(\mathbf{k}), \quad z_{g,h}(\mathbf{k}) \in U(1). \quad (75)$$

$z_{g,h}(\mathbf{k})$  は何らかの  $U(1)$  位相であるが、対称性変換が作用させる順番に依存しないこと

$$\rho_g(h\ell\mathbf{k})\left(\rho_h(\ell\mathbf{k})\rho_\ell(\mathbf{k})\right) = \left(\rho_g(h\ell\mathbf{k})\rho_h(\ell\mathbf{k})\right)\rho_\ell(\mathbf{k}) \quad (76)$$

を要請すると次の2コサイクル条件を満たす。

$$\left. \begin{array}{l} z_{g,hk}(h\ell\mathbf{k})z_{h,\ell}(\mathbf{k}) \\ z_{g,hk}(h\ell\mathbf{k})z_{h,\ell}(\mathbf{k})^* \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\phi_g = 1) \\ (\phi_g = -1) \end{array} = z_{g,h}(\ell\mathbf{k})z_{gh,\ell}(\mathbf{k}). \quad (77)$$

まとめると、バンド理論において対称性は

- 有限群  $G$
- $G$  のパラメータ空間  $X$  への群作用
- $\phi_g \in \pm 1$
- $c_g \in \pm 1$
- 乗数系  $z_{g,h}(\mathbf{k}) \in U(1)$

によって指定される。対称性はハミルトニアン  $H(\mathbf{k})$  に対して次の制限を与える。

$$\rho_g(\mathbf{k})H(\mathbf{k}) = c_g H(g\mathbf{k})\rho_g(\mathbf{k}), \quad g \in G. \quad (78)$$

この対称性と両立するハミルトニアンの組  $(H_0(\mathbf{k}), H_1(\mathbf{k}))$  より 1.2 節と同様にして  $K$  群  $K^0(X, Y)$  が定義される。

## 2.2 同変 $K$ 群の性質

本講義では簡単のため

$$\phi_g \equiv 1, \quad c_g \equiv 1, \quad z_{g,h}(\mathbf{k}) \equiv 1 \quad (79)$$

とする。<sup>11</sup>  $G$  対称なハミルトニアンの組

$$u_g(\mathbf{k})H_i(\mathbf{k}) = H_i(g\mathbf{k})u_g(\mathbf{k}), \quad g \in G, \quad i = 0, 1 \quad (80)$$

によって構成される  $K$  群を

$$K_G^*(X, Y) \quad (81)$$

と書く。カイラル対称性  $\Gamma_i, (i = 1, 2, \dots)$  と群作用は可換

$$u_g(\mathbf{k})\Gamma_i = \Gamma_i u_g(\mathbf{k}) \quad (82)$$

とする。

<sup>11</sup> 物性物理学においては、時間反転対称性のないスピinless電子系の絶縁体の分類に対応する。Segalの同変  $K$  理論 [5] に対応する。

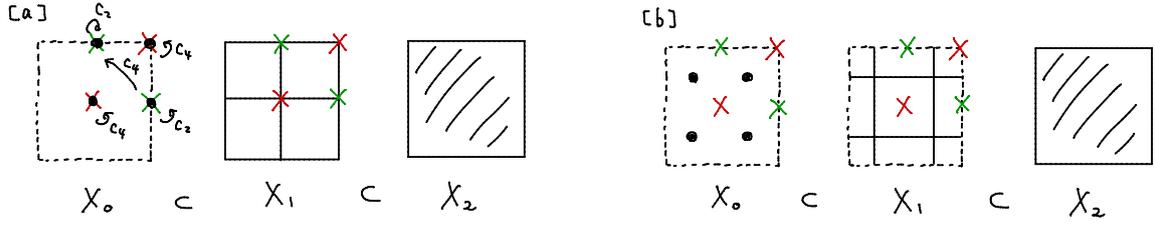


Figure 5:  $\mathbb{Z}_4$ 作用付き2次元トーラスのフィルトレーションの例. 赤バツは $\mathbb{Z}_4$ 対称な点, 緑バツは $\mathbb{Z}_2 = \{e, c^2\}$ 対称な点を表す. [a]と[b]は双対に取った.

対称性変換 $u_g(\mathbf{k})$ はハミルトニアン, カイラル演算子と可換なので, 1.8と同様にしてBott周期性

$$K_G^{n+2}(X, Y) \cong K_G^n(X, Y) \quad (83)$$

が成立する.

群 $G$ が $X$ に自明に作用

$$g\mathbf{k} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \in X, \quad g \in G \quad (84)$$

する場合は, 対称性変換のユニタリ行列 $u_g(\mathbf{k})$ は $\mathbf{k}$ 依存せず,  $u_g$ は $G$ の既約表現の直和となる.

$$u_g = u_g^\alpha \oplus u_g^\beta \oplus \dots \quad (85)$$

ハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ も既約表現にブロック対角化されるので

$$H(\mathbf{k}) = H^\alpha(\mathbf{k}) \oplus H^\beta(\mathbf{k}) \oplus \dots \quad (86)$$

結局,  $K$ 群は単に群 $G$ の既約表現でラベルされる.

$$K_G^*(X, Y) \cong \bigoplus_{\alpha \in \{\text{irreps}\}} K^*(X, Y). \quad (87)$$

## 2.3 準備2. 空間 $X$ の $G$ 対称なフィルトレーション

空間 $X$ への有限群 $G$ の作用が与えられているものとする. 空間 $X$ のフィルトレーションとは $G$ が作用する部分空間の列

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X \quad (88)$$

のことを言う. 各部分空間 $X_p$ は $G$ 作用について閉じている, つまり,

$$\mathbf{k} \in X_p \Leftrightarrow g\mathbf{k} \in X_p, \quad g \in G \quad (89)$$

に注意.  $X$ の $G$ 対称なフィルトレーションは一意ではない.

例. (p4) 2次元トーラス

$$(k_x, k_y) \sim (k_x + 2\pi, k_y) \sim (k_x, k_y + 2\pi) \quad (90)$$

に $\mathbb{Z}_4 = \{e, c, c^2, c^3\}$ が4回回転

$$c(k_x, k_y) = (-k_y, k_x) \quad (91)$$

と作用している状況を考える. 図5の[a]と[b]が $\mathbb{Z}_4$ 対称なフィルトレーションの例である.

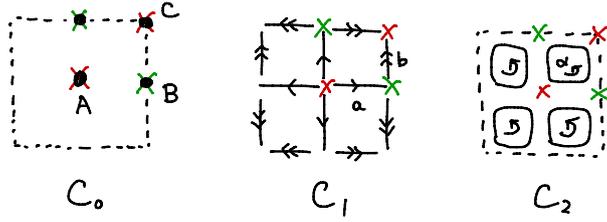


Figure 6:  $\mathbb{Z}_4$ 作用付き2次元トーラスのセル分割の例. 赤バツは $\mathbb{Z}_4$ 対称な点, 緑バツは $\mathbb{Z}_2 = \{e, c^2\}$ 対称な点を表す.

## 2.4 準備3. セル分割

AHSSは任意のフィルトレーションについて定義されるが, 本節で導入するある特別なフィルトレーションについては $E_2$ ページの計算が簡単になる. まず, このノートで $p$ セルと言ったときは向き付けられた $p$ 次元円板の内部 $D^p \cong \mathbb{R}^p$ とする.  $G$ 作用付きの空間 $X$ に対して,  $p$ セルの集合 $\mathcal{C}_p = \{D_j^p\}$ を次の規則で導入する.

- $p$ セル $D_j^p$ 間に交わりは, ない.  $D_i^p \cap D_j^p = \emptyset, (i \neq j)$ .
- $p$ セル $D_j^p$ に対して,  $G$ 作用 $g \in G$ は $p$ セル $D_j^p$ の点を固定するか, あるいは, 別の $p$ セル $D_{g(j)}^p, g(j) \neq j$ に飛ばす. つまり,

$$\mathbf{k} \in D_j^p, g \in G \Rightarrow g\mathbf{k} = \mathbf{k}, \text{ または, } g\mathbf{k} \in D_{g(j)}^p, g(j) \neq j. \quad (92)$$

- $p$ セルの向きは $G$ 対称に取る. つまり,  $g \in G$ が向きを保つ (保たない) 場合は $D_j^p$ と $D_{g(j)}^p$ の向きを一致 (不一致) させる.
- 任意の $p$ セル $D_j^p$ は少なくともひとつの $p+1$ セル $D_i^{p+1}$ と接する.

フィルトレーションは

$$X_0 = \mathcal{C}_0, \quad X_p = X_{p-1} \cup \mathcal{C}_p \quad (93)$$

として得られる. このように構成された空間 $X$ の分割をこのノートでは単にセル分割と呼ぶことにする.  $X_p$ を $p$ 骨格と呼ぶ.  $\mathbb{Z}_4$ 作用付きの2次元トーラスのセル分割の一例は, 図6で与えられ, 対応するフィルトレーションが図5 [a]である.  $p$ セルは軌道に分裂する. 軌道のラベルを $a$ とする. 軌道 $a$ から代表 $p$ セル $D_a^p$ をひとつ選ぶと,  $D_a^p$ の点を不変に保つ $G$ の部分群 $G_{D_a^p} \subset G$ が決まる.  $G_{D_a^p}$ は, バンド理論において小群と呼ばれる. 軌道 $a$ は

$$(G/G_{D_a^p}) \times D_a^p \quad (94)$$

の形をしており, 全体では

$$\mathcal{C}_p = \prod_{a \in \{\text{orbits}\}} (G/G_{D_a^p}) \times D_a^p \quad (95)$$

となる.

## 2.5 スペクトル系列の一般論

スペクトル系列は, 計算したいコホモロジー群 $h^*(X, Y)$ に対して $E_1$ ページ, あるいは $E_2$ ページ

$$E_1^{p,q} \text{ or } E_2^{p,q} = \text{何らかの計算できるもの}$$

から出発して、微分

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (96)$$

$$d_r \circ d_r = 0 \quad (97)$$

を計算し、 $E_{r+1}$  ページをコホモロジー

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\text{Ker}[d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}]}{\text{Im}[d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}]} \quad (98)$$

によって定義し、この列が収束する場合

$$E_1 \Rightarrow E_2 \Rightarrow E_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow E_\infty \quad (99)$$

に $E_\infty$  ページが計算したいコホモロジー群 $h^*(X, Y)$ を近似する、という構造をしている。計算したいコホモロジー群に対してフィルタレーション

$$\dots \subset F^p h^* \subset \dots \subset F^1 h^* \subset F^0 h^* = h^*(X, Y) \quad (100)$$

があり、 $E_\infty$  ページとは次の関係がある。

$$F^p h^n / F^{p+1} h^n = E_\infty^{p,-p+n}. \quad (101)$$

よって、 $F^{p+1} h^*$  の  $E_\infty^{p,-p+*}$  による拡大問題を何らかの方法で解いて  $F^p h^*$  を得て、 $F^p h^*$  の  $E_\infty^{-1,-p+1+*}$  による拡大問題を何らかの方法で解いて  $F^{p-1} h^*$  を得て、... と拡大問題を順番に解くことによりコホモロジー群  $h^*(X, Y)$  を得る。

## 2.6 $K$ 理論における、セル分割に基づく AHSS

有限次元の空間  $X$  に対し、有限群  $G$  の  $X$  への作用  $k \mapsto gk, k \in X, g \in G$  が与えられているものとする。一般に、 $X$  のフィルタレーションに対して  $E_1$  ページが

$$E_1^{p,q} = K_G^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \quad (102)$$

と定義される。 $K$  群のフィルタレーションは

$$F^p K_G^n := \text{Ker}[i^* : K_G^n(X) \rightarrow K_G^n(X_{p-1})], \quad (103)$$

$$\dots \subset F^p K_G^* \subset \dots \subset F^1 K_G^* \subset F^0 K_G^* = K_G^*(X). \quad (104)$$

と定義される。ここで、 $i : X_{p-1} \rightarrow X$  は包含である。 $F^p K_G^*$  の意味は、 $X$  上のハミルトニアン組  $(H_0, H_1)$  のうち、部分空間  $X_{p-1}$  に制限すると自明 (ホモトピー同値) となるもの、である。

### 2.6.1 $E_1$ ページ

空間  $X$  のフィルタレーションとして、前節で導入したセル分割に基づくものをひとつ選ぶ。セル分割の場合は、 $E_1$  ページは各軌道  $a$  からの寄与の直和になり、かつ、各軌道  $a$  の  $K$  群は代表  $p$  セル  $D_a^p$  の小群で決まる。

$$E_1^{p,q} \cong \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} K_G^{p+q} \left( (G/G_{D_a^p}) \times D_a^p, (G/G_{D_a^p}) \times \partial D_a^p \right) \quad (105)$$

$$\cong \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} K_{G_{D_a^p}}^{p+q} (D_a^p, \partial D_a^p). \quad (106)$$

さらに，セル分割の定義から小群 $G_{D_a^p}$ は代表 $p$ セル $D_a^p$ に自明に作用すること，懸垂同型 $\tilde{K}^n(S^p) = K^{n-p}(\text{pt})$ を用いると，結局 $E_1$ ページは代表 $p$ セル $D_a^p$ の既約表現だけで決まる．

$$\cong \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} \tilde{K}_{G_{D_a^p}}^{p+q}(D_a^p / \partial D_a^p) \quad (107)$$

$$\cong \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} \tilde{K}_{G_{D_a^p}}^q(D_a^p) \quad (108)$$

$$\cong \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} \bigoplus_{\alpha \in \{\text{irreps of } G_{D_a^p}\}} K_{G_{D_a^p}}^\alpha(D_a^p) \quad (109)$$

$$\cong \begin{cases} \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} \bigoplus_{\alpha \in \{\text{irreps of } G_{D_a^p}\}} \mathbb{Z} & (q \in \text{even}) \\ 0 & (q \in \text{odd}) \end{cases} \quad (110)$$

$E_1$ ページを次のように表で書く．<sup>12</sup>

$$\begin{array}{c|cccc} \vdots & & & & \\ q = 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q = 0 & \mathbb{Z}^{n_0} & \mathbb{Z}^{n_1} & \mathbb{Z}^{n_2} & \mathbb{Z}^{n_3} \\ q = -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q = -2 & \mathbb{Z}^{n_0} & \mathbb{Z}^{n_1} & \mathbb{Z}^{n_2} & \mathbb{Z}^{n_3} \\ \vdots & & & & \\ \hline E_1^{p,q} & p = 0 & p = 1 & p = 2 & p = 3 \quad \dots \end{array} \quad (111)$$

アーベル群としては各 $p$ セルにおける既約表現を数えることにより $E_1$ ページが得られるが，もともとは空間対 $(D_a^p, \partial D_a^p)$ における $p+q$ 次の $K$ 群

$$\tilde{K}_{G_{D_a^p}}^{p+q}(D_a^p / \partial D_a^p) \cong \bigoplus_{\alpha \in \{\text{irreps of } G_{D_a^p}\}} \tilde{K}^{\alpha}(D_a^p / \partial D_a^p) \quad (112)$$

だった． $K$ 群の元は，ギャップのあるハミルトニアンとギャップレスなハミルトニアンの2通りの表現があることに対応して， $E_1$ ページには2通りの解釈がある．

- $E_1^{p,-p} = \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} \tilde{K}_{G_{D_a^p}}^0(D_a^p / D_a^p)$  :  $p$ セル $D_a^p$ におけるギャップのあるハミルトニアン．
- $E_1^{p,-p+1} = \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} \tilde{K}_{G_{D_a^p}}^1(D_a^p / D_a^p)$  :  $p$ セル $D_a^p$ におけるギャップレスなハミルトニアン．

と理解すべきであり，また，カイラル対称性のあるハミルトニアンとしては，

- $E_1^{p,-p+1} = \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} \tilde{K}_{G_{D_a^p}}^1(D_a^p / D_a^p)$  :  $p$ セル $D_a^p$ におけるギャップのあるカイラル対称なハミルトニアン．
- $E_1^{p,-p+2} = \bigoplus_{a \in \{\text{orbits}\}} \tilde{K}_{G_{D_a^p}}^2(D_a^p / D_a^p)$  :  $p$ セル $D_a^p$ におけるギャップレスなカイラル対称なハミルトニアン．

と理解されなければならない． $E_1$ ページの表に図を書いておくと良いだろう．前者を図7 [a]に，後者を図7 [b]に示した．

<sup>12</sup>記号を合わせて $\mathbb{Z}^{\oplus n}$ などを書くべきだが，混乱が生じない限り $\oplus$ を $+$ と書く．

[a]					[b]				
$\xi=0$			*	*	$\xi=0$	*			*
$\xi=1$	0	0	0	0	$\xi=1$	0	0	0	0
$\xi=2$	*	*			$\xi=2$	*	*	*	
$E_1^{p,\xi}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$E_1^{p,\xi}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$

Figure 7:  $E_1$  ページの意味するところ. [a] はカイラル対称性のないハミルトニアンとして. [b] はカイラル対称性のあるハミルトニアンとして.

## 2.7 第1微分 $d_1$

第1微分

$$d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q} \quad (113)$$

は微分  $d : K^*(Y) \rightarrow K^{*+1}(X, Y)$  と一致するように定義する. つまり, 合成

$$K_G^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \rightarrow K_G^{p+q}(X_p) \xrightarrow{d} K_G^{p+q+1}(X_{p+1}, X_p) \quad (114)$$

として  $d_1^{p,q}$  を定義する. セル分割の場合は  $p$  セル軌道  $a$  から  $(p+1)$  セル軌道  $b$  への寄与

$$[d_1^{p,q}]_{a,b} : K_{G_{D_a^p}}^{p+q}(D_a^p, \partial D_a^p) \rightarrow K_{G_{D_b^{p+1}}}^{p+q+1}(D_b^{p+1}, \partial D_b^{p+1}) \quad (115)$$

を全ての軌道について集めたものとして与えられるが, この表式と微分  $d$  の意味を思い出すと明らかのように, 第1微分は

- $d_1^{p,q}$ :  $p$  セル  $D_a^p$  における,  $p+q$  個のカイラル対称性が存在するギャップのあるハミルトニアン  $H(\mathbf{k})$  のトポロジカル転移に伴う,  $p+1$  セル  $D_b^{p+1}$  へのギャップレス点の対生成

と理解できる.

$d_1^{p,q}$  の具体的な計算は, セルの向きと, 表現の既約分解によって容易に与えられる. ここでは詳しく述べないが, 後で計算例をいくつか示す.

第1微分  $d_1$  は”微分性”を満たす

$$d_1^{p+1,q} d_1^{p,q} = 0 \quad (116)$$

これは意味を考えれば明らかであるが, あとで計算例で確認する.

$d_1 \circ d_1 = 0$  なのでコホモロジーを取ることができる.  $E_2$  ページはコホモロジー

$$E_2^{p,q} = \frac{\text{Ker}[d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}]}{\text{Im}[d_1^{p-1,q} : E_1^{p-1,q} \rightarrow E_1^{p,q}]} \quad (117)$$

として定義される. 分母と分子はそれぞれ

- $\text{Ker } d_1^{p,q}$ :  $p$ セルにおける,  $p+q$ 個のカイラル対称性が存在するギャップのあるハミルトニアンのうち, ギャップを保ったまま $p+1$ セルに拡張できるもの.
- $\text{Im } d_1^{p-1,q}$ :  $p$ セルにおける,  $p+q$ 個のカイラル対称性が存在するギャップのあるハミルトニアンのうち,  $p-1$ セルより自明化を受けないもの.

という意味がある.  $\text{Im } d_1^{p-1,q}$ の方の解釈は,  $(-1)$ 次の $K$ 群 $K^{-1}$ がユニタリ行列によって表現され, ユニタリ行列をベクトル束の変換関数と同一視することにより得られる.

したがって $E_2$ ページは

- $E_2^{p,q}$ :  $p$ セルにおける,  $p+q$ 個のカイラル対称性が存在するギャップのあるハミルトニアンのうち, ギャップを保ったまま $p+1$ セルに拡張でき, かつ,  $p-1$ セルより自明化を受けないもの.

と理解できる.

## 2.8 高次微分 $d_r$

第1微分は, 次元が $\pm 1$ だけ異なる $p$ セル間を”大域化”したに過ぎない. 次元が $r$ だけ異なる $p$ セルを張り合わせる際の障害を計算する準同型が第 $r$ 微分

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (118)$$

である.

- $d_r^{p,q}$ :  $p$ セル $D_a^p$ における,  $p+q$ 個のカイラル対称性が存在するギャップのあるハミルトニアン $H(\mathbf{k})$ のトポロジカル転移に伴う,  $p+r$ セル $D_b^{p+r}$ へのギャップレス点の対生成

と理解できる. 後で $d_3^{0,0}$ が非自明な具体例を見る.

$E_2$ ページと同様に $E_{r+1}$ ページが $d_r$ のコホモロジー(98)によって定義される.  $E_{r+1}$ ページの各項は,

- $E_{r+1}^{p,q}$ :  $p$ セルにおける,  $p+q$ 個のカイラル対称性が存在するギャップのあるハミルトニアンのうち, ギャップを保ったまま $p+1, \dots, p+r$ セルに拡張でき, かつ,  $p-1, \dots, p-r$ セルより自明化を受けないもの.

と理解できる.

注)  $K$ 理論, あるいは $KO$ 理論のAHSSにおいては, Steenrod平方 $Sq^i$ で与えられる寄与がある. 本節で与えた高次微分の解釈との関係は, いまのところ不明である.

## 2.9 $E_\infty$ ページと拡大問題

$X$ が有限次元であれば,  $r+1$ 以上の高次微分は消える.  $E_\infty$  ページの意味は

- $E_\infty^{p,n-p}$ :  $p$ セルにおける,  $n$ 個のカイラル対称性が存在するギャップのあるハミルトニアンのうち, ギャップを保ったまま $X$ 全体に拡張でき. かつ低次元のセルより自明化を受けないもの.

である。一方で、 $K$ 群のフィルトレーション

$$\cdots \subset F^p K_G^n \subset \cdots \subset F^1 K_G^n \subset F^0 K_G^n = K_G^n(X). \quad (119)$$

は

$$F^p K_G^n := \text{Ker} [i^* : K_G^n(X) \rightarrow K_G^n(X_{p-1})] \quad (120)$$

で与えられた。意味を考えると

$$F^p K_G^n / F^{p+1} K_G^n = E_\infty^{p,n-p} \quad (121)$$

が確認できる。

短完全列で書くと近似の構造がより明白かもしれない。  $X$ が3次元以下の空間の場合は

$$0 \rightarrow F^1 K_G^n \rightarrow K_G^n(X) \rightarrow E_\infty^{0,n} \rightarrow 0, \quad (122)$$

$$0 \rightarrow F^2 K_G^n \rightarrow F^1 K_G^n \rightarrow E_\infty^{1,n-1} \rightarrow 0, \quad (123)$$

$$0 \rightarrow F^3 K_G^n \rightarrow F^2 K_G^n \rightarrow E_\infty^{2,n-2} \rightarrow 0, \quad (124)$$

$$0 \rightarrow F^4 K_G^n \rightarrow F^3 K_G^n \rightarrow E_\infty^{3,n-3} \rightarrow 0 \quad (125)$$

となるが、次元論的理由で  $F^4 K_G^n = 0$ なので、4つ目の短完全列は  $F^3 K_G^n \cong E_\infty^{3,n-3}$ を意味するので、結局

$$0 \rightarrow F^1 K_G^n \rightarrow K_G^n(X) \rightarrow E_\infty^{0,n} \rightarrow 0, \quad (126)$$

$$0 \rightarrow F^2 K_G^n \rightarrow F^1 K_G^n \rightarrow E_\infty^{1,n-1} \rightarrow 0, \quad (127)$$

$$0 \rightarrow E_\infty^{3,n-3} \rightarrow F^2 K_G^n \rightarrow E_\infty^{2,n-2} \rightarrow 0 \quad (128)$$

を得る。順番に拡大問題を解くことにより  $K$ 群が決まる。さらに、反ユニタリな対称性が存在せず、かつハミルトニアンと反可換な対称性が存在しない場合は、 $E_1^{p,\text{odd}} = 0$ に注意すると、結局、

$$0 \rightarrow E_\infty^{2,-2} \rightarrow K_G^0(X) \rightarrow E_\infty^{0,0} \rightarrow 0, \quad (129)$$

$$0 \rightarrow E_\infty^{2,-1} \rightarrow K_G^1(X) \rightarrow E_\infty^{1,0} \rightarrow 0 \quad (130)$$

が成立する。  $E_\infty^{0,0} \subset E_1^{0,0}$ は自由アーベル群なので、  $K_G^0(X)$ に関してはAHSSの計算よりアーベル群の構造が決まる。

$$K_G^0(X) \cong E_\infty^{0,0} \oplus E_\infty^{2,-2}. \quad (131)$$

一方で、  $E_\infty^{1,0}$ はねじれ群を含む可能性があるので、  $K_G^1(X)$ のアーベル群の構造を決定するには拡大問題を解く必要がある。空間群に対する具体的な  $E_\infty$  ページの計算結果については[6]を見て頂きたい。

### 3 計算例

最後にAHSSの計算例 [6]をいくつか紹介する。

#### 3.1 2次元トーラス $T^2$

$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ と略記する。2次元トーラス

$$\mathbf{k} \sim (k_x + 2\pi, k_y) \sim (k_x, k_y + 2\pi) \quad (132)$$

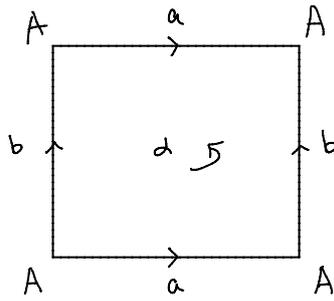


Figure 8:  $T^2$ のセル分割

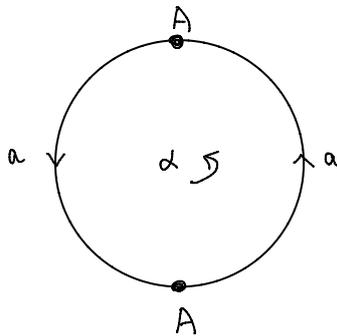


Figure 9:  $RP^2$ のセル分割

上の  $K$  群  $K^n(T^2)$  を AHSS で計算してみよう.  $T^2$  を図8のようにセル分割する.  $E_1$  ページは各  $p$  セル上の既約表現 (自明表現のみ) の数で与えられる.

$$\begin{array}{c|ccc}
 q = 1 & 0 & 0 & 0 \\
 q = 0 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\
 q = -1 & 0 & 0 & 0 \\
 q = -2 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\
 \hline
 E_1^{p,q} & \{A\} & \{a, b\} & \{\alpha\} \\
 & p = 0 & p = 1 & p = 2
 \end{array} \tag{133}$$

第1微分は全て自明.

$$d_1^{0,0} = 0, \quad d_1^{1,0} = 0. \tag{134}$$

よって,  $E_2 = E_1$  で, かつ第2微分以降も自明だから,  $E_\infty = E_1$ .  $E_\infty$  ページから  $K$  群が決まる.

$$K^0(T^2) \cong E_\infty^{2,-2} \oplus E_\infty^{0,0} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad K^1(T^2) \cong E_\infty^{1,0} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \tag{135}$$

### 3.2 実射影平面 $RP^2$

実射影平面上の $K$ 群をAHSSで計算しよう．図9のようにセル分割する． $E_1$ ページは各 $p$ セル上の既約表現（自明表現のみ）の数で与えられる．

$$\begin{array}{c|ccc}
 q = 1 & 0 & 0 & 0 \\
 q = 0 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\
 q = -1 & 0 & 0 & 0 \\
 q = -2 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\
 \hline
 E_1^{p,q} & \{A\} & \{a\} & \{\alpha\} \\
 & p=0 & p=1 & p=2
 \end{array} \tag{136}$$

トーラスの場合と異なり， $d_1^{1,0}$ が非自明である．

$$d_1^{1,0} : E_1^{1,0} \rightarrow E_1^{2,0}, \quad 1 \mapsto 2. \tag{137}$$

$E_1^{1,0} = K^1(D_a^1, \partial D_a^1) = \mathbb{Z}$ は1セル $a$ 上のカイラル対称性があるハミルトニアン

$$H = k_x \sigma_x + (k_x^2 - \mu) \sigma_y, \quad \Gamma = \sigma_z \tag{138}$$

によって生成される．一方で $E_1^{2,0} = K^{1+1}(D_\alpha^2, \partial D_\alpha^2)$ はクラスAIIIのギャップレス・ハミルトニアン

$$h = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y, \quad \Gamma = \sigma_z \tag{139}$$

によって生成される． $d_1^{1,0}$ は1セル $a$ でトポロジカル転移を起こして2セル $\alpha$ にギャップレス点を生成する過程，と理解できた．トポロジカル転移は $a$ に垂直な方向の座標を $k_y$ として

$$H = k_x \sigma_x + (k_x^2 + k_y^2 - \mu) \sigma_y, \quad \Gamma = \sigma_z \tag{140}$$

と書ける．1セル $a$ の向きに注意すると，生成されるギャップレスの電荷が同符号であることがわかる．

$d_1$ のコホモロジーを取り $E_2 = E_\infty$ ページを得る．

$$\begin{array}{c|ccc}
 q = 1 & 0 & 0 & 0 \\
 q = 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_2 \\
 q = -1 & 0 & 0 & 0 \\
 q = -2 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_2 \\
 \hline
 E_2^{p,q} & p=0 & p=1 & p=2
 \end{array} \tag{141}$$

これから

$$K^0(RP^2) \cong \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z} \tag{142}$$

と $K^0$ に $\mathbb{Z}_2$ が出現する．実際， $RP^2$ 上の複素ベクトル束においては $\mathbb{Z}_2$ 不変量が定義できる．[7] ( $H^2(RP^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ である．)  $RP^2$ 上の $U(N)$ ゲージ場 $A$ とその曲率 $F$ に対して次の量を考える．

$$i\theta = \oint_a \text{tr} A - \frac{1}{2} \int_{RP^2} \text{tr} F \in \mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z}. \tag{143}$$

$a$ は $\pi_1(RP^2) = \mathbb{Z}_2$ の非自明なループである．2倍すると，ストークスの定理より，

$$2i\theta = \oint_{a+a} A - \int_{RP^2} F = 0. \tag{144}$$

よって， $\theta$ は量子化する．

$$\theta \in \{0, \pi\}. \tag{145}$$



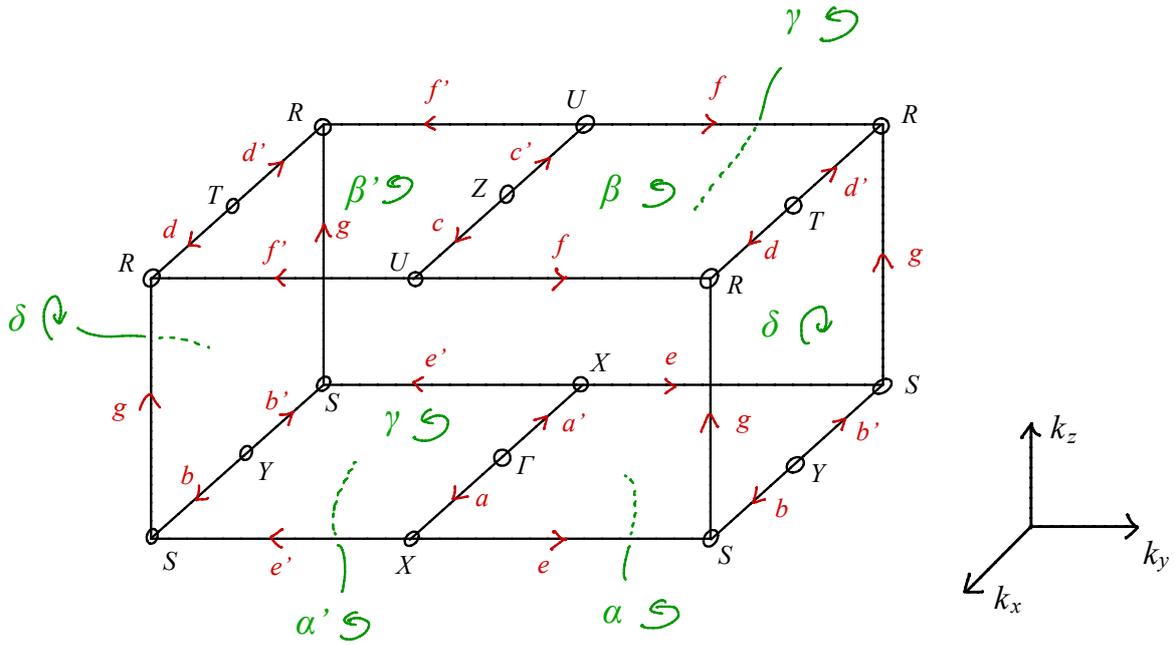


Figure 11:  $T^3$ の $\mathbb{Z}_2$ 同変なセル分割. 図は”基本領域”である $T^3$ の2分の1のみ表示した. 図中で, プライム付き記号はプライムなし記号と対称性変換で移り合うことを意味する. 図は[6]より.

さて, アーベル群としては $K_{\mathbb{Z}_4}^0(T^2) \cong \mathbb{Z}^9$ と決まる.

アーベル群の構造が決まっても,  $K$ 群は $E_2^{0,0}$ と $E_2^{2,-2}$ 単なる直積ではない.  $E_2^{2,-2} = \mathbb{Z}$ の生成元はトーラスの $1/4$ である2セル $\alpha$ におけるChern数1のChern絶縁体を表すため, トーラス全体としてはChern数4を与える. 一方で, トーラス全体で $\mathbb{Z}_4$ 対称性と両立するChern数1のChern絶縁体のモデルが存在する. トポロジカル絶縁体などへの応用の観点からは, アーベル群の構造だけでは情報が不十分な場合がある.

### 3.4 $\text{P}\bar{1}$ (空間群No. 2)

本節では第3微分が非自明になる例を見る. 3次元トーラス

$$\mathbf{k} \sim (k_x + 2\pi, k_y, k_z) \sim (k_x, k_y + 2\pi, k_z) \sim (k_x, k_y, k_z + 2\pi) \quad (153)$$

に対して, 次の $\mathbb{Z}_2 = \{e, I\}$ 対称性 (反転対称性) を考える.

$$u_I(\mathbf{k})H(\mathbf{k})u_I(\mathbf{k})^{-1} = H(-\mathbf{k}), \quad u_I(-\mathbf{k})u_I(\mathbf{k}) = 1. \quad (154)$$

$\mathbb{Z}_2$ 対称なセル分割として, 図11を取る. 0セルにおける小群は $\mathbb{Z}_2$ , 1,2,3における小群は自明群 $\mathbb{Z}_1 = \{e\}$ である.  $E_1$ ページは以下ようになる.

$q = 1$	0	0	0	0
$q = 0$	$\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$q = -1$	0	0	0	0
$q = -2$	$\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$E_1^{p,q}$	$\{\Gamma, X, Y, S, Z, U, T, R\}$	$\{a, b, c, d, e, f, g\}$	$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$	$\{vol\}$
	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$

(155)



となる。第2微分は自明なので  $E_3 = E_2$ 。

さて、 $E_3$  ページを見ると

$$d_3^{0,0} : \mathbb{Z}^9 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad (163)$$

が非自明になり得る。  $d_3^{0,0}$  が非自明であることを以下のように示すことができる。  $E_3^{0,0} \cong \mathbb{Z}^9$  の生成元のうち、

$$(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^{\text{tr}}, \quad (164)$$

つまり、 $\Gamma$  点における  $\mathbb{Z}_2$  の自明表現と非自明表現によって生成されているものに注目する。  $\mathbb{Z}_2$  対称性、及びハミルトニアンのは

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (165)$$

によって与えられる。  $H_0$  から  $H_1$  への”トポロジカル転移”が起こったときに、近傍において何が起きるだろうか。トポロジカル転移のモデルは

$$H = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \mu) \sigma_z, \quad I = \sigma_z \quad (166)$$

と構成できる。容易にわかるように、 $\mu > 0$  のとき  $k_z > 0$  と  $k_z < 0$  において、電荷が異符号のWeyl点がひとつずつ存在する。他の0セルからの寄与も同様なので、 $d_3^{0,0} : \mathbb{Z}^9 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  は

$$d_3^{0,0} = \frac{\Gamma \quad X \quad Y \quad S \quad Z \quad U \quad T \quad R \quad \text{total filling}}{1 \quad 1 \quad 0} \Bigg|_{\text{vol}} \quad (167)$$

となる。  $d_3$  のコホモロジーを取り  $E_\infty$  ページは

$$\begin{array}{c|cccc} q=1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q=0 & \mathbb{Z}^9 & 0 & \mathbb{Z}^3 & 0 \\ q=-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q=-2 & \mathbb{Z}^9 & 0 & \mathbb{Z}^3 & 0 \\ \hline E_\infty^{p,q} & p=0 & p=1 & p=2 & p=3 \end{array} \quad (168)$$

となる。ここでアーベル群として  $E_\infty^{0,0} \cong \mathbb{Z}^9$  であるが、  $E_3^{0,0}$  とは異なる  $E_1^{0,0}$  の部分格子であることに注意したい。

### 3.5 P222 (空間群No. 16)

比較的単純な対称性によって  $\mathbb{Z}_2$  が生じる例を見る。

$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  と略記する。3次元トーラス

$$\mathbf{k} \sim (k_x + 2\pi, k_y, k_z) \sim (k_x, k_y + 2\pi, k_z) \sim (k_x, k_y, k_z + 2\pi) \quad (169)$$

に対して、次の  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{e, c_x, c_y, c_x c_y\}$  対称性を考える。まず、トーラスへの作用を

$$c_x \mathbf{k} = (k_x, -k_y, -k_z), \quad (170)$$

$$c_y \mathbf{k} = (-k_x, k_y, -k_z). \quad (171)$$

とする。ハミルトニアンの対称性は

$$u_{c_x}(\mathbf{k})H(\mathbf{k}) = H(c_x \mathbf{k})u_{c_x}(\mathbf{k}), \quad u_{c_x}(c_x \mathbf{k})U_{c_x}(\mathbf{k}) = 1, \quad (172)$$

$$u_{c_y}(\mathbf{k})H(\mathbf{k}) = H(c_y \mathbf{k})u_{c_y}(\mathbf{k}), \quad u_{c_y}(c_y \mathbf{k})u_{c_y}(\mathbf{k}) = 1, \quad (173)$$

$$u_{c_x}(c_y \mathbf{k})u_{c_y}(\mathbf{k}) = u_{c_y}(c_x \mathbf{k})u_{c_x}(\mathbf{k}) \quad (174)$$

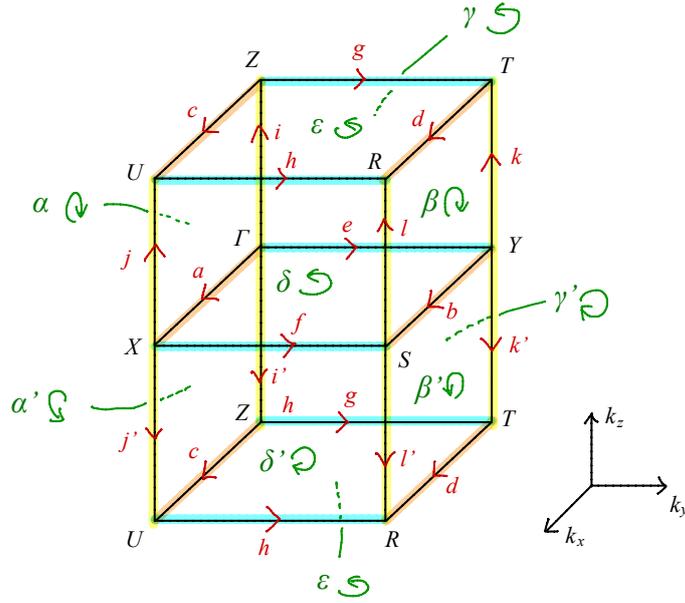


Figure 12:  $T^3$ の $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 同変なセル分割. 図は”基本領域”である $T^3$ の4分の1のみ. 図は[6]より.

とする. トーラスの $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称なセル分割を図12のように取る. 各 $p$ セルは

$$\begin{aligned}
 0\text{セル} &: \{\Gamma, X, Y, S, Z, U, T, R\}, \\
 1\text{セル} &: \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell\}, \\
 2\text{セル} &: \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}, \\
 3\text{セル} &: \{\text{vol}(\text{図12の領域})\}.
 \end{aligned}$$

となる. 0セルにおいては,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称性が, 1セルにおいては $\mathbb{Z}_2$ 対称性が残るので,  $E_1$ ページは

$$E_1^{0,0} = K_{D_2}^0(0\text{-cells}) = \underbrace{\mathbb{Z}^4}_{\Gamma} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^4}_X \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^4}_Y \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^4}_S \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^4}_Z \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^4}_U \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^4}_T \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^4}_R, \quad (175)$$

$$E_1^{1,0} = K_{D_2}^0(1\text{-cells}) = \underbrace{\mathbb{Z}^2}_a \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_b \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_c \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_d \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_e \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_f \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_g \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_h \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_i \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_j \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_k \oplus \underbrace{\mathbb{Z}^2}_\ell, \quad (176)$$

$$E_1^{2,0} = K_{D_2}^0(2\text{-cells}) = \underbrace{\mathbb{Z}}_\alpha \oplus \underbrace{\mathbb{Z}}_\beta \oplus \underbrace{\mathbb{Z}}_\gamma \oplus \underbrace{\mathbb{Z}}_\delta \oplus \underbrace{\mathbb{Z}}_\varepsilon, \quad (177)$$

$$E_1^{3,0} = K_{D_2}^0(3\text{-cells}) = \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{vol}}. \quad (178)$$

となる. 表も書いておくと

$q = 1$	0	0	0	0
$q = 0$	$\mathbb{Z}^{32}$	$\mathbb{Z}^{24}$	$\mathbb{Z}^5$	$\mathbb{Z}$
$q = -1$	0	0	0	0
$q = -2$	$\mathbb{Z}^{32}$	$\mathbb{Z}^{24}$	$\mathbb{Z}^5$	$\mathbb{Z}$
$E_1^{p,q}$	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$

(179)

第1微分は

$$\mathbb{Z}^{32} \xrightarrow{d_1^{0,0}} \mathbb{Z}^{24} \xrightarrow{d_1^{1,0}} \mathbb{Z}^5 \xrightarrow{d_1^{2,0}} \mathbb{Z}, \quad (180)$$

の形をしている。第1微分は、表現の既約分解により機械的に計算される。

$$d_1^{0,0} = \begin{array}{c|cccccccccccc|} \Gamma & X & Y & S & Z & U & T & R & & & & & & \\ AB_1B_2B_3 & & & & & & \\ \hline 1 & -1 & & & & & & & & & & & & A \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & & & B \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 1 & -1 & & & & & & & & & & A \\ & & 0 & 0 & & & & & & & & & & B \\ & & 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & 1 & -1 & & & & & & & & A \\ & & & & 0 & 0 & & & & & & & & B \\ & & & & 0 & 0 & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & 1 & -1 & & & & & & A \\ & & & & & & 0 & 0 & & & & & & B \\ & & & & & & 0 & 0 & & & & & & \\ \hline 1 & & -1 & & & & & & & & & & & A \\ 0 & & 0 & & & & & & & & & & & B \\ 0 & & 0 & & & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & & -1 & & & & & & & & & & A \\ & 0 & & 0 & & & & & & & & & & B \\ & 0 & & 0 & & & & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & -1 & & & & & & & & & A \\ & & & 0 & 0 & & & & & & & & & B \\ & & & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & -1 & & & & & & & & & A \\ & & & 0 & 0 & & & & & & & & & B \\ & & & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \hline \end{array} \quad (181)$$

$$d_1^{1,0} = \begin{array}{c|cccccccccccc|} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & \ell & & \\ AB & & \\ \hline 1 & & -1 & -1 & & & & & & -1 & -1 & & & \alpha \\ & 1 & & -1 & -1 & & & & & & & -1 & -1 & \beta \\ & & & & 1 & 1 & & -1 & -1 & & & 1 & 1 & \gamma \\ & & & & & 1 & 1 & & -1 & -1 & & & 1 & 1 & \delta \\ & & & 1 & 1 & & -1 & -1 & & 1 & 1 & & & & \varepsilon \\ \hline \end{array} \quad (182)$$

$$d_1^{2,0} = \begin{array}{c|cccccc|} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & vol \\ \hline \end{array} \quad (183)$$

第一微分が計算できれば、そのコホモロジーを取る。

$$\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m \quad (184)$$

の形の準同型の処理は、スミス標準形を使うと良い。ここでは結果だけ書く。

$$E_2^{0,0} = \text{Ker}(d_1^{0,0}) = \mathbb{Z}^{13}, \quad (185)$$

$$E_2^{1,0} = \text{Ker}(d_1^{1,0})/\text{Im}(d_1^{0,0}) = \mathbb{Z}_2, \quad (186)$$

$$E_2^{2,0} = \text{Ker}(d_1^{2,0})/\text{Im}(d_1^{1,0}) = 0, \quad (187)$$

$$E_2^{3,0} = \text{Coker}(d_1^{2,0}) = \mathbb{Z}. \quad (188)$$

より  $E_2$  ページは

$$\begin{array}{c|cccc} q=1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q=0 & \mathbb{Z}^{13} & \mathbb{Z}_2 & 0 & \mathbb{Z} \\ q=-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q=-2 & \mathbb{Z}^{13} & \mathbb{Z}_2 & 0 & \mathbb{Z} \\ \hline E_2^{p,q} & p=0 & p=1 & p=2 & p=3 \end{array} \quad (189)$$

となる。奇数次の  $K$  群が0なので、第2微分  $d_2 = 0$ 。よって  $E_3 = E_2$ 。さて、第3微分のうち

$$d_3^{0,0} : E_3^{0,0} \rightarrow E_3^{3,-2} \quad (190)$$

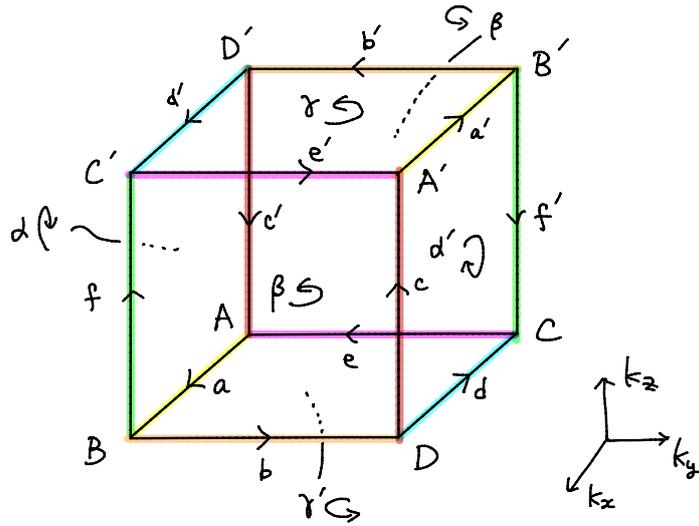


Figure 13: (192)式で定義される $T^3$ の $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 同変なセル分割. 図は”基本領域”である $T^3$ の4分の1のみ書いた.  $A = (0, 0, 0), B = (2\pi, 0, 0), C = (0, 2\pi, 0), D = (0, 0, 2\pi)$ である. 図中で, プライム付き記号はプライムなし記号と対称性変換で移り合うことを意味する.

が非自明になり得る. 詳しくは述べないが,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 加群の構造に注目すると $d_3^{0,0} = 0$ を示すことができる. <sup>13</sup> よって,  $E_\infty = E_3$ を得る.

奇数次の $K$ 群に注目しよう,  $K$ 群は次の短完全列に入る.

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{E_\infty^{3,-2}} \rightarrow K_{D_2}^1(T^3) \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{E_\infty^{1,0}} \rightarrow 0. \quad (191)$$

実は, この短完全列の拡大は非自明であることが示すことができるが, ここでは $E_\infty^{1,0} = \mathbb{Z}_2$ に注目したい. 1骨格上で $\mathbb{Z}_2$ 不変量が定義できることを意味する.  $\mathbb{Z}_2$ 不変量の具体的構成については[6]を見て頂きたい.

### 3.6 F222 (空間群No. 22)

以下のように $R^3$ の点を同一視することにより3次元トーラスをつくる.

$$\mathbf{k} \sim (k_x - 2\pi, k_y + 2\pi, k_z + 2\pi) \sim (k_x + 2\pi, k_y - 2\pi, k_z + 2\pi) \sim (k_x + 2\pi, k_y + 2\pi, k_z - 2\pi). \quad (192)$$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の $T^3$ への作用は前節と同じとする. <sup>14</sup>  $T^3$ の $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 対称な分割例として, 図13を取る. 特徴として, 向かい合った2セルは対称性変換によって移り合う. 実際, 2セル $\alpha$ と $\alpha'$ は

$$\alpha' = c_y(\alpha) + (2\pi, 2\pi, 2\pi) = c_y(\alpha) + (-2\pi, 2\pi, 2\pi) + (2\pi, -2\pi, 2\pi) + (2\pi, 2\pi, -2\pi) \quad (193)$$

<sup>13</sup>  $E_3^{3,-2} = \mathbb{Z}$ はWeyl点を表す. Weyl点は回転に対して電荷を変えないことから,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の $E_3^{3,-2} = \mathbb{Z}$ への作用は自明であることが分かる. 一方で,  $d_3^{0,0}$ はある0セルにおけるバンド反転に伴うWeyl点の生成を意味するので,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の非自明な既約表現を含むバンド反転でなければならない.  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 加群の構造が異なるので, 非自明な準同型が存在しない.

<sup>14</sup>空間群F222に対応する.

と関係する. 各 $p$ セルにおける小群の既約表現の数から,  $E_1$ ページは

$$\begin{array}{c|cccc}
q = 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q = 0 & \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}^4 & \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 & \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\
q = -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q = -2 & \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}^4 & \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 & \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\
\hline
E_1^{p,q} & \{A, B, C, D\} & \{a, b, c, d, e, f\} & \{\alpha, \beta, \gamma\} & \{vol\} \\
& p = 0 & p = 1 & p = 2 & p = 3
\end{array} \quad (194)$$

となる. ここでは

$$d_1^{1,0} : E_1^{1,0} \rightarrow E_1^{2,0} \quad (195)$$

に注目しよう. 意味は,

$$\underbrace{E_1^{1,0}}_{1 \text{ セル上のクラスAIIIトポロジカル絶縁体}} \rightarrow \underbrace{E_1^{2,0}}_{2 \text{ セル上のクラスAIIIギャップレス点}}$$

だった.  $d_1^{1,0}$ 自体は, 表現の既約分解とセルの向きから計算され, ( $RP^2$ の第1微分の計算と同様にして)

$$d_1^{1,0} = \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|c}
a & b & c & d & e & f & & & \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \alpha \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & \beta \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & \gamma
\end{array} \quad (196)$$

となる. 目の子で

$$\text{Im } d_1^{1,0} = \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (197)$$

がわかり, すこし変形して

$$= \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (198)$$

となるので,  $\text{Coker } d_1^{1,0} = \mathbb{Z}_2$ がわかる. 他の第1微分も計算すると $E_2$ ページは

$$\begin{array}{c|cccc}
q = 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q = 0 & \mathbb{Z}^7 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z} \\
q = -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q = -2 & \mathbb{Z}^7 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z} \\
\hline
E_1^{p,q} & p = 0 & p = 1 & p = 2 & p = 3
\end{array} \quad (199)$$

となる. 前節と同様の議論から第3微分 $d_3^{0,0} = 0$ を示すことができ,  $E_\infty$ ページを得る. 偶数次の $K$ 群は

$$K_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}^0(T^3) = \mathbb{Z}^7 + \mathbb{Z}_2 \quad (200)$$

となる. よって,  $K$ 群を特徴づける $\mathbb{Z}_2$ 不変量が存在する.  $\mathbb{Z}_2$ の出自は2セルにあるが, 実際, 図13をよくみると, 2骨格は実射影平面 $RP^2$ に他ならない. よって $RP^2$ の場合と同一の $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル不変量が定義できる.

$$i\theta = \oint_{a+b+c} A - \frac{1}{2} \int_{\alpha+\beta+\gamma} F \in \{0, i\pi\}. \quad (201)$$

## A 完全列

$A, B, C$ をアーベル群,  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ を準同型とする.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad (202)$$

が完全とは,

$$\text{Im } f = \text{Ker } g \quad (203)$$

が成立するときを言う.

準同型  $f: A \rightarrow B$  が単射であることは

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \quad (204)$$

が完全である, 言い換えることができる.

同様に, 準同型  $f: A \rightarrow B$  が全射であることは

$$A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0 \quad (205)$$

が完全である, と言い換えることができる.

特に,

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \quad (206)$$

の形の完全列を短完全列と呼ぶ.

## B 群の拡大

アーベル群  $A, B, C$  に対して,  $B$  が  $C$  の  $A$  による拡大とは, 次の短完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \quad (207)$$

が存在することを言う. なぜ拡大と呼ばれるかを理解するために次の例を考えよう.

右手で1から10まで数を数えて, 10の桁の数は左手で数えよう. すると0から99までの数を両手で記録できる. 右手を $\mathbb{Z}_{10}^{\text{右手}}$ , 左手を $\mathbb{Z}_{10}^{\text{左手}}$ , 0から99までの数を $\mathbb{Z}_{100}$ と書こう. すると, 次の短完全列の構造がある.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}^{\text{左手}} \xrightarrow{n \mapsto 10n} \mathbb{Z}_{100} \xrightarrow{\text{1の位}} \mathbb{Z}_{10}^{\text{右手}} \rightarrow 0. \quad (208)$$

完全性については定義と比較して確かめて欲しい. 右手で10まで数える毎に左手で1増やす点が拡大というわけである.

$C$  の  $A$  による拡大は一意ではない. 上の例では,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}^{\text{左手}} \xrightarrow{n \mapsto (n,0)} \mathbb{Z}_{10}^{\text{左手}} \times \mathbb{Z}_{10}^{\text{右手}} \xrightarrow{(n,m) \mapsto m} \mathbb{Z}_{10}^{\text{右手}} \rightarrow 0 \quad (209)$$

という $\mathbb{Z}_{10}^{\text{右手}}$  の  $\mathbb{Z}_{10}^{\text{左手}}$  による自明な拡大がある. 上の例とは, 単に左手と右手で独立に10を数えている点が異なる.

## C Smith標準形

格子 $\mathbb{Z}^n$ から格子 $\mathbb{Z}^m$ への準同型

$$f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m \quad (210)$$

を適当な基底で行列表示する.

$$f(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_m)M_f. \quad (211)$$

ここで,  $M_f$ は $m \times n$ の整数行列である. 格子の基底を上手く選んで, つまり, ユニモジュラ行列 $u, v$ を用いて $M_f$ を次の形に”対角化”できる.

$$uM_fv = \left[ \begin{array}{ccc|c} d_1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & d_q & \\ \hline & & & O \end{array} \right], \quad 1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_q. \quad (212)$$

これをスミス標準形と呼ぶ.

$g \circ f = 0$ を満たす準同型

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^k \quad (213)$$

について, コホモロジー  $\text{Ker } g / \text{Im } f$ はスミス標準形を用いて容易に計算される. 準同型 $g$ のSmith標準形を

$$u'M_gv' = \left[ \begin{array}{ccc|c} d'_1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & d'_{q'} & \\ \hline & & & O \end{array} \right], \quad 1 \leq d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_{q'} \quad (214)$$

とすると,

$$\text{Ker } g / \text{Im } f \cong \mathbb{Z}^{\oplus(m-q-q')} \oplus \bigoplus_{j=1}^{q'} \mathbb{Z}/d_j\mathbb{Z} \quad (215)$$

となる.

## D 既約表現の構成

AHSSの計算においては任意の有限群 $G$ と任意の乗数系  $z_{g,h} \in U(1)$ ,

$$\hat{g}\hat{h} = z_{g,h}\widehat{gh}, \quad g, h \in G, \quad (216)$$

に対する既約指標が要る. ここでは対称性を満たすハミルトニアンをできるだけランダムに構成して, そのハミルトニアンを対角化することにより既約指標を構成する方法を紹介する. <sup>15</sup>

任意の行列 $H$ に対して次の行列を考える.

$$H^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \hat{g}H\hat{g}^{-1}. \quad (217)$$

<sup>15</sup>例えば, [8].

明らかに、 $H^G$ は $G$ 対称性を持つ。

$$\hat{h}H^G\hat{h}^{-1} = H^G, \quad h \in G. \quad (218)$$

よって、 $H^G$ を対角化すると、固有関数は $G$ のなんらかの表現であり、 $G$ 対称性以外の余分な対称性がなくなるように $H$ をランダムに選ぶと、 $H^G$ の固有関数は $G$ の既約表現に分解する。

そこで、与えられた群 $G$ からひとつの表現を構成する標準的な方法が問題となるが、正則表現がある。群 $G$ の左正則表現とは、 $\{|g\rangle\}_{g \in G}$ を表現基底として以下によって定義される。

$$\hat{g}|k\rangle = z_{g,k}|gk\rangle = \sum_{h \in G} |h\rangle [z_{g,k}\delta_{h,gk}]. \quad (219)$$

表現行列は $[D_g]_{hk} = z_{g,k}\delta_{h,gk}$ である。

$$\sum_{k \in G} [D_g]_{hk}[D_{g'}]_{kl} = \sum_{k \in G} z_{g,k}\delta_{h,gk}z_{g',l}\delta_{k,g'l} = z_{g,g'l}\delta_{h,gg'l}z_{g',l} = z_{g,g'}z_{gg',l}\delta_{h,gg'l} = z_{g,g'}[D_{gg'}]_{hl} \quad (220)$$

に注意。ここで2コサイクル条件を用いた。正則表現 $R$ については以下の性質がある。

$$R = \bigoplus_{\alpha \in \{\text{irreps}\}} \alpha^{\oplus \dim \alpha}. \quad (221)$$

ここでの重要点は、正則表現は全ての既約表現を含む点にある。既約表現 $\alpha$ は $\dim \alpha$ 回出現するが、ハミルトニアン $H$ をランダムに取れば $\dim \alpha$ の偶然縮退は生じない。よって、任意の乗数系に対して既約表現が構成できる。計算確認として、次の関係式が有用である。

$$\sum_{\alpha \in \{\text{irreps}\}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g,h \in G, gh=hg} \frac{z_{g,h}}{z_{h,g}}. \quad (222)$$

## References

- [1] A. Kitaev, *Periodic table for topological insulators and superconductors*, AIP Conf. Proc. **1134**, 22. (2009).
- [2] M. Karoubi, *K-theory: An introduction*. Vol. 226. Springer Science & Business Media, 2008.
- [3] J. C. Y. Teo, C. L. Kane, *Topological defects and gapless modes in insulators and superconductors*, PRB **82**, 115120 (2010).
- [4] D. Freed, G. W. Moore, *Twisted equivariant matter*, Annales Henri Poincaré. **14**, 1927 (2013).
- [5] G. Segal, *Equivariant K-theory*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **34**, 129 (1968).
- [6] K. Shiozaki, M. Sato, K. Gomi, *Atiyah-Hirzebruch spectral sequence in band topology: General formalism and topological invariants for 230 space groups* arXiv:1802.06694.
- [7] D. S. Freed, *Determinants, torsion, and strings*, Communications in mathematical physics, **107** 483 (1986).
- [8] 渡辺悠樹, 「空間群・点群の既約表現」, 固体物理, **54**, 4 (2019).