ユニタリ変換としての Jordan-Wigner 変換

下村顕士

2023 年 5 月 12 日

X を有限集合とする．X 上のフェルミオン系の状態空間を,

$$\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^{X} \coloneqq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{|\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}} \mid \boldsymbol{n}\colon X \to \{0,1\}\right\}, \quad {}_{\mathrm{F}}\langle\boldsymbol{n}|\boldsymbol{n}'\rangle_{\mathrm{F}} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}' \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{n}' \end{cases} \tag{1}$$

なる複素内積空間として定義する[*1]．また, 単一のスピン $\frac{1}{2}$ 系の状態空間を

$$\mathcal{H}_{\mathrm{S}} \coloneqq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{|{\uparrow}\rangle, |{\downarrow}\rangle\right\}, \quad \langle\uparrow\mid\uparrow\rangle \coloneqq \langle\downarrow\mid\downarrow\rangle \coloneqq 1, \quad \langle\uparrow\mid\downarrow\rangle \coloneqq \langle\downarrow\mid\uparrow\rangle \coloneqq 0 \tag{2}$$

なる複素内積空間とし[*2], X 上のスピン系の Fock 空間を

$$\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^{X} \coloneqq \bigotimes_{x\in X} \mathcal{H}_{\mathrm{S}} \tag{3}$$

と定める．定義より

$$\dim \mathcal{H}_{\mathrm{F}}^{X} = 2^{|X|} = \dim \mathcal{H}_{\mathrm{S}}^{X}, \tag{4}$$

したがって, $\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^{X}$ と $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^{X}$ は $(\mathbb{C}^2)^{|X|} \simeq \mathbb{C}^{2^{|X|}}$ を通じて等長同型.

$\mathcal{H}_{\mathrm{S}}$ 上の線型演算子 $\hat{\sigma}^Z, \hat{\sigma}^+, \hat{\sigma}^- \in \operatorname{End}(\mathcal{H}_{\mathrm{S}})$ を

$$\hat{\sigma}^Z |{\uparrow}\rangle \coloneqq |{\uparrow}\rangle, \quad \hat{\sigma}^Z |{\downarrow}\rangle \coloneqq -|{\downarrow}\rangle, \tag{5}$$

$$\hat{\sigma}^+ |{\downarrow}\rangle \coloneqq |{\uparrow}\rangle, \quad \hat{\sigma}^+ |{\uparrow}\rangle \coloneqq 0, \tag{6}$$

$$\hat{\sigma}^- |{\uparrow}\rangle \coloneqq |{\downarrow}\rangle, \quad \hat{\sigma}^- |{\downarrow}\rangle \coloneqq 0 \tag{7}$$

で定義する．各 $x \in X$ に対し, $\hat{\sigma}_x^Z, \hat{\sigma}_x^+, \hat{\sigma}_x^- \in \operatorname{End}(\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^X)$ を

$$\hat{\sigma}_x^d \coloneqq \bigotimes_{y\in X} (\text{if } y = x \text{ then } \hat{\sigma}^d \text{ else } \hat{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{S}}}) \quad (d = Z, +, -) \tag{8}$$

により定める．$|{\downarrow}\rangle$ と $|{\uparrow}\rangle = \hat{\sigma}^+ |{\downarrow}\rangle$ は $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}$ を張るから, $|{\downarrow}\rangle^{\otimes X} \coloneqq \bigotimes_{x\in X} |{\downarrow}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{S}}^X$ と置くと

$$\left\{ \left(\prod_{x\in X} (\hat{\sigma}_x^+)^{\boldsymbol{n}(x)} \right) |{\downarrow}\rangle^{\otimes X} \in \mathcal{H}_{\mathrm{S}}^X \;\middle|\; \boldsymbol{n}\colon X \to \{0,1\} \right\} \tag{9}$$

は $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^X$ の正規直交基底を張る．

---

*1 $|\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}}$ はあくまでもシンボルであり, 異なる $\boldsymbol{n}$ に対して $|\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}}$ は互いに区別する．式 (1) では, シンボル $|\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}}$ を正規直交基底に持つような内積空間として $\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^X$ を定義している．

*2 $|{\uparrow}\rangle$, $|{\downarrow}\rangle$ はあくまでもシンボルであり, これらを正規直交基底に持つような内積空間として $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}$ を導入している．

$\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^X$ から $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^X$ への線形写像 $\hat{U}_{\mathrm{JW}}$ を

$$\hat{U}_{\mathrm{JW}} \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} := \left(\prod_{x\in X} (\hat{\sigma}_x^+)^{\boldsymbol{n}(x)}\right) \left|\downarrow\right\rangle^{\otimes X} \tag{10}$$

で定義する．$\hat{U}_{\mathrm{JW}}$ は $\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^X$ の正規直交基底を $\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^X$ の正規直交基底に写すからユニタリ演算子である[*3]．

以下では $X = [1, L] \cap \mathbb{Z} = \{1, 2, \ldots, L\}$ $(L \in \mathbb{Z}_{>0})$ とする．このとき，$\boldsymbol{n}\colon X \to \{0, 1\}$ は数列と見なせるので $n_x := \boldsymbol{n}(x)$ と書くことにする．これに伴って $\left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}}$ を $\left|n_1, n_2, \ldots, n_L\right\rangle$ と記すことにする．また，テンソル積 $\bigotimes_{x\in X}$ は x の昇順に左から右に並べて書くことにする: 例えば

$$\left|\downarrow\right\rangle^{\otimes X} = \left|\downarrow\right\rangle \otimes \cdots \otimes \left|\downarrow\right\rangle, \quad \hat{\sigma}_x^d = \underbrace{\hat{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{S}}}}_{1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\hat{\sigma}^d}_{x} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\hat{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{S}}}}_{L} \quad (d = Z, +, -). \tag{11}$$

各 $x \in X$ に対し，フェルミオンの消滅演算子 $\hat{c}_x \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^X)$ を

$$\hat{c}_x \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} := \begin{cases} -\exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \left|n_1, \ldots, n_x - 1, \ldots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = 1 \\ 0 & \text{if } n_x = 0 \end{cases} \tag{12}$$

により定義する[*4]．定義より $(\hat{c}_x)^2 = 0$ であり，また，$x < x'$ のとき

$$\begin{aligned} &\hat{c}_x \hat{c}_{x'} \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \begin{cases} \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x'} n_y\right) \left|n_1, \ldots, n_x - 1, \ldots, x_{x'} - 1, \ldots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = n_{x'} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\hat{c}_{x'} \hat{c}_x \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \begin{cases} \exp\left(i\pi \left(\sum_{y=1}^{x'} n_y - 1\right)\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \left|n_1, \ldots, n_x - 1, \ldots, x_{x'} - 1, \ldots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = n_{x'} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

より

$$\hat{c}_{x'} \hat{c}_x = e^{-i\pi} \hat{c}_x \hat{c}_{x'} = -\hat{c}_x \hat{c}_{x'} \tag{15}$$

である．これらの結果より，一般の $x, x' \in X$ に対して反交換関係

$$\{\hat{c}_x, \hat{c}_{x'}\} = 0 \tag{16}$$

が成り立つ．

$\hat{c}_x$ の共役演算子 $\hat{c}_x^\dagger$ の表示を与える:

$${}_{\mathrm{F}}\left\langle\boldsymbol{n}'\right| \hat{c}_x^\dagger \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} = \left({}_{\mathrm{F}}\left\langle\boldsymbol{n}\right| \hat{c}_x \left|\boldsymbol{n}'\right\rangle_{\mathrm{F}}\right)^* = \begin{cases} -\exp\left(-i\pi \sum_{y=1}^{x} n'_y\right) & \text{if } n'_x = 1 \ \&\ n_{x'} = n'_{x'} - \delta_{x,x'} \text{ for } x' \in X \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

$$= \begin{cases} \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) & \text{if } n_x = 0 \ \&\ n'_{x'} = n_{x'} + \delta_{x,x'} \text{ for } x' \in X \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{18}$$

[*3] 後で見るように，$\hat{U}_{\mathrm{JW}}$ はフェルミオン系とスピン系の Jordan-Wigner 変換を与える．式 (33), (34) を参照せよ．

[*4] 符号 $-\exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) = -(-1)^{\sum_{y=1}^{x} n_y}$ は，$\hat{c}_x$ の反交換関係から逆算して導入している．

より,

$$\hat{c}_x^\dagger \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} = \begin{cases} \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \left|n_1, \dots, n_x + 1, \dots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = 0 \\ 0 & \text{if } n_x = 1 \end{cases} . \tag{19}$$

$\hat{c}_x^\dagger$ たちをフェルミオンの生成演算子と呼ぶことにする. 生成演算子同士の交換関係は,

$${}_{\mathrm{F}}\left\langle\boldsymbol{n}'\right| \left\{\hat{c}_x^\dagger, \hat{c}_{x'}^\dagger\right\} \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} = \left({}_{\mathrm{F}}\left\langle\boldsymbol{n}\right| \left\{\hat{c}_x, \hat{c}_{x'}\right\} \left|\boldsymbol{n}'\right\rangle_{\mathrm{F}}\right)^* = 0 \tag{20}$$

より

$$\left\{\hat{c}_x^\dagger, \hat{c}_{x'}^\dagger\right\} = 0 \quad (x, x' \in X) \tag{21}$$

である.

次に, 生成演算子と消滅演算子の交換関係を計算する. $x, x' \in X$ について, $x < x'$ のとき

$$\begin{aligned} &\hat{c}_x \hat{c}_{x'}^\dagger \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \begin{cases} -\exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x'} n_y\right) \left|n_1, \dots, n_x - 1, \dots, n_{x'} + 1, \dots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = 1 \ \&\ n_{x'} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} , \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\hat{c}_{x'}^\dagger \hat{c}_x \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \begin{cases} -\exp\left(i\pi \left(\sum_{y=1}^{x'} n_y - 1\right)\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \left|n_1, \dots, n_x - 1, \dots, n_{x'} + 1, \dots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = 1 \ \&\ n_{x'} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} , \end{aligned} \tag{23}$$

$x > x'$ のとき

$$\begin{aligned} &\hat{c}_x \hat{c}_{x'}^\dagger \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \begin{cases} -\exp\left(i\pi \left(\sum_{y=1}^{x} n_y + 1\right)\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x'} n_y\right) \left|n_1, \dots, n_{x'} + 1, \dots, n_x - 1, \dots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = 1 \ \&\ n_{x'} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} , \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\hat{c}_{x'}^\dagger \hat{c}_x \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \begin{cases} -\exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x'} n_y\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \left|n_1, \dots, n_{x'} + 1, \dots, n_x - 1, \dots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = 1 \ \&\ n_{x'} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} , \end{aligned} \tag{25}$$

$x = x'$ のとき

$$\begin{aligned} &\hat{c}_x \hat{c}_x^\dagger \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \begin{cases} -\exp\left(i\pi \left(\sum_{y=1}^{x} n_y + 1\right)\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \left|n_1, \dots, n_x + 1 - 1, \dots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} = \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= (1 - n_x) \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &\hat{c}_x^\dagger \hat{c}_x \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \begin{cases} -\exp\left(i\pi \left(\sum_{y=1}^{x} n_y - 1\right)\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \left|n_1, \dots, n_x - 1 + 1, \dots, n_L\right\rangle_{\mathrm{F}} = \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} & \text{if } n_x = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= n_x \left|\boldsymbol{n}\right\rangle_{\mathrm{F}} . \end{aligned} \tag{27}$$

よって, 任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\left\{\hat{c}_x, \hat{c}_{x'}^\dagger\right\} = \delta_{x,x'} \tag{28}$$

が成り立つ.

なお, $\mathbf{0}\colon X \to \{0,1\}$ を 0 への恒等写像とすると,

$$\begin{aligned}\left(\prod_{x\in X} (\hat{c}_x^\dagger)^{n_x}\right) |\mathbf{0}\rangle_{\mathrm{F}} &\coloneqq (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1} \cdots (\hat{c}_{L-1}^\dagger)^{n_{L-1}} (\hat{c}_L^\dagger)^{n_L} |0,\ldots,0,0\rangle_{\mathrm{F}} = (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1} \cdots (\hat{c}_{L-1}^\dagger)^{n_{L-1}} |0,\ldots,0,n_L\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= \cdots = |n_1,\ldots,n_{L-1},n_L\rangle_{\mathrm{F}} = |\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}}\end{aligned} \tag{29}$$

が従う. これにより, 生成演算子 $\hat{c}_x^\dagger$ は実際に $\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^X$ を生成していることが分かる.

$\hat{\sigma}_x^d$ $(d = Z, +, -)$ をユニタリ演算子 $\hat{U}_{\mathrm{JW}}$ で変換しよう:

$$\hat{\sigma}_x^d \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^X) \mapsto \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{\sigma}_x^d \hat{U}_{\mathrm{JW}} \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^X. \tag{30}$$

式 (5), (6), (10), (19), (27) を用いると,

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{\sigma}_x^Z \hat{U}_{\mathrm{JW}} |\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}} &= \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{\sigma}_x^Z \left(\prod_{y\in X} (\hat{\sigma}_x^+)^{n_y}\right) |{\downarrow}\rangle^{\otimes X} \\ &= \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \left((\hat{\sigma}_x^+)^{n_1} |{\downarrow}\rangle \otimes \cdots \otimes \hat{\sigma}_x^Z (\hat{\sigma}_x^+)^{n_x} |{\downarrow}\rangle \otimes \cdots \otimes (\hat{\sigma}_L^+)^{n_L} |{\downarrow}\rangle\right) \\ &= \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \left((\hat{\sigma}_x^+)^{n_1} |{\downarrow}\rangle \otimes \cdots \otimes (2n_x - 1)(\hat{\sigma}_x^+)^{n_x} |{\downarrow}\rangle \otimes \cdots \otimes (\hat{\sigma}_L^+)^{n_L} |{\downarrow}\rangle\right) \\ &= (2n_x - 1)\hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \left(\prod_{y\in X} (\hat{\sigma}_x^+)^{n_y}\right) |{\downarrow}\rangle^{\otimes X} = (2n_x - 1)\hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{U}_{\mathrm{JW}} |\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}} \\ &= (2n_x - 1) |\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}} = (2\hat{c}_x^\dagger \hat{c}_x - 1) |\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}},\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{\sigma}_x^+ \hat{U}_{\mathrm{JW}} |\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}} &= \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \left((\hat{\sigma}_x^+)^{n_1} |{\downarrow}\rangle \otimes \cdots \otimes \hat{\sigma}_x^+ (\hat{\sigma}_x^+)^{n_x} |{\downarrow}\rangle \otimes \cdots \otimes (\hat{\sigma}_L^+)^{n_L} |{\downarrow}\rangle\right) \\ &= \begin{cases} \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \left((\hat{\sigma}_x^+)^{n_1} |{\downarrow}\rangle \otimes \cdots \otimes (\hat{\sigma}_x^+)^{n_x+1} |{\downarrow}\rangle \otimes \cdots \otimes (\hat{\sigma}_L^+)^{n_L} |{\downarrow}\rangle\right) & \text{if } n_x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} |n_1,\ldots,n_x+1,\ldots,n_L\rangle & \text{if } n_x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \exp\left(-i\pi \sum_{y=1}^{x} n_y\right) \hat{c}_x^\dagger |\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}} = -\exp\left(-i\pi \sum_{y=1}^{x} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right) \hat{c}_x^\dagger |\boldsymbol{n}\rangle_{\mathrm{F}}.\end{aligned} \tag{32}$$

よって,

$$\hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{\sigma}_x^Z \hat{U}_{\mathrm{JW}} = 2\hat{c}_x^\dagger \hat{c}_x - \hat{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^X}, \quad \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{\sigma}_x^+ \hat{U}_{\mathrm{JW}} = -\exp\left(-i\pi \sum_{y=1}^{x} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right) \hat{c}_x^\dagger = \hat{c}_x^\dagger \exp\left(-i\pi \sum_{y=1}^{x} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right). \tag{33}$$

が従う. $\hat{\sigma}^- = (\hat{\sigma}^+)^\dagger$, したがって $\hat{\sigma}_x^- = (\hat{\sigma}_x^+)^\dagger$ が成り立つことに注意すると,

$$\hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{\sigma}_x^- \hat{U}_{\mathrm{JW}} = (\hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \hat{\sigma}_x^+ \hat{U}_{\mathrm{JW}})^\dagger = -\hat{c}_x \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right) = \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right) \hat{c}_x \tag{34}$$

も従う．

$\hat{U}_{\mathrm{JW}}$ はユニタリなので，$\hat{H}_{\mathrm{S}} \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^{X})$ のスペクトルと $\hat{H}_{\mathrm{F}} \coloneqq \hat{U}_{\mathrm{JW}} \hat{H}_{\mathrm{S}} \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^{X})$ のスペクトルは一致する．例えば $\hat{H}_{\mathrm{S}}$ を横磁場 Ising モデルのハミルトニアンとしよう．すなわち，

$$\hat{\sigma}_x^X \coloneqq \hat{\sigma}_x^+ + \hat{\sigma}_x^- \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\mathrm{S}}^X) \tag{35}$$

を導入して

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} = J \sum_{x=1}^{L-1} \sigma_x^X \sigma_{x+1}^X + \sum_{x=1}^{L} \sigma_x^Z \quad (J \in \mathbb{R}) \tag{36}$$

とする．

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{\mathrm{JW}} \hat{\sigma}_x^+ \hat{\sigma}_{x+1}^+ \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} &= -\hat{c}_x^\dagger \exp\left(-i\pi \sum_{y=1}^{x} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right) \exp\left(-i\pi \sum_{y=1}^{x+1} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right) \hat{c}_{x+1}^\dagger \\
&= -\hat{c}_x^\dagger e^{-i\pi \hat{c}_{x+1}^\dagger \hat{c}_{x+1}} \hat{c}_{x+1}^\dagger = \hat{c}_x^\dagger \hat{c}_{x+1}^\dagger,
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{\mathrm{JW}} \hat{\sigma}_x^+ \hat{\sigma}_{x+1}^- \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} &= \hat{c}_x^\dagger \exp\left(-i\pi \sum_{y=1}^{x} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right) \exp\left(i\pi \sum_{y=1}^{x+1} \hat{c}_y^\dagger \hat{c}_y\right) \hat{c}_{x+1} \\
&= \hat{c}_x^\dagger e^{i\pi \hat{c}_{x+1}^\dagger \hat{c}_{x+1}} \hat{c}_{x+1} = \hat{c}_x^\dagger \hat{c}_{x+1}
\end{aligned} \tag{38}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\mathrm{F}} &= J \sum_{x=1}^{L-1} \hat{U}_{\mathrm{JW}} (\hat{\sigma}_x^+ \hat{\sigma}_{x+1}^+ + \hat{\sigma}_x^+ \hat{\sigma}_{x+1}^- + \mathrm{h.c.}) \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} + \sum_{x=1}^{L} \hat{U}_{\mathrm{JW}} \hat{\sigma}_x^Z \hat{U}_{\mathrm{JW}}^{-1} \\
&= J \sum_{x=1}^{L-1} (\hat{c}_x^\dagger \hat{c}_{x+1} + \hat{c}_{x+1}^\dagger \hat{c}_x + \hat{c}_x^\dagger \hat{c}_{x+1}^\dagger + \hat{c}_{x+1} \hat{c}_x) + \sum_{x=1}^{L} (2\hat{c}_x^\dagger \hat{c}_x - \hat{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{F}}^X})
\end{aligned} \tag{39}$$

が得られる．これは Kitaev 鎖モデルのハミルトニアンに他ならない．当然，$\hat{H}_{\mathrm{S}}$ と $\hat{H}_{\mathrm{F}}$ は同じスペクトルを与える．