Hatano-Nelson 模型に対する条件数の計算

下村顕士

2023 年 4 月 17 日

概要

開放端条件下の Hatano-Nelson 模型の規格化された (右) 固有ベクトルを並べてできる行列を V とする. 本ノートでは, V の条件数 $\kappa_2(\mathsf{V})$ が上下から同じオーダー (システムサイズの指数関数) の量で評価できることを示す.

1 V の定義

$L \in \mathbb{Z}_{>0}$, $r \in (0,1) \cup (1,\infty)$ に対し, 行列 $\mathsf{R}, \mathsf{U} \in \mathrm{Mat}_{L\times L}(\mathbb{C})$ を

$$(\mathsf{R})_{j,k} = r^{j-1}\delta_{j,k}, \quad (\mathsf{U})_{j,k} = \sqrt{\frac{2}{L+1}} \sin\frac{\pi jk}{L+1} \quad (j,k = 1,2,\dots,L) \tag{1}$$

により定める. U はユニタリ行列である. $\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{C}^L$ $(k = 1,2,\dots,L)$ を行列 RU の第 k 列に対応するベクトルとする:

$$\mathsf{RU} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_L \end{bmatrix}. \tag{2}$$

すなわち

$$(\boldsymbol{v}_k)_j = \sqrt{\frac{2}{L+1}} r^{j-1} \sin\frac{\pi jk}{L+1}. \tag{3}$$

さらに, 行列 $\mathsf{N} \in \mathrm{Mat}_{L\times L}(\mathbb{C})$ を

$$(\mathsf{N})_{j,k} = \|\boldsymbol{v}_k\|_2^{-1} \delta_{j,k} \tag{4}$$

によって定義し

$$\mathsf{V} \coloneqq \mathsf{RUN} = \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2} & \dfrac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|_2} & \cdots & \dfrac{\boldsymbol{v}_L}{\|\boldsymbol{v}_L\|_2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

と置けば, V の各列は 2-ノルムについて規格化されている.

V は開放端条件 (OBC) 下の Hatano-Nelson 模型を対角化することに注意せよ.

2 V の条件数の計算

V の条件数を

$$\kappa_2(\mathsf{V}) \coloneqq \|\mathsf{V}\|_2 \left\|\mathsf{V}^{-1}\right\|_2 \tag{6}$$

により定義する．以下では，$r > 1$ の場合

$$\left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} r^{L-1} < \kappa_2(\mathsf{V}) \le \sqrt{L} r^{L-1} \tag{7}$$

が，$0 < r < 1$ の場合

$$\left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} r^{-(L-1)} < \kappa_2(\mathsf{V}) \le \sqrt{L} r^{-(L-1)} \tag{8}$$

が成り立つことを示す．したがって，$\kappa_2(\mathsf{V})$ は $\mathcal{O}(e^{|\log r|(L-1)})$ のオーダーである．

2.1 準備

$r \in (0,1) \cup (1,\infty)$ を任意に取る．このとき

$$\|\mathsf{R}\|_2 = \max_{j=1,2,\ldots,L} r^{j-1} = \begin{cases} r^{L-1} & \text{if } r > 1 \\ 1 & \text{if } 0 < r < 1 \end{cases}, \tag{9}$$

$$\left\|\mathsf{R}^{-1}\right\|_2 = \max_{k=1,2,\ldots,L} r^{-k} = \begin{cases} 1 & \text{if } r > 1 \\ r^{-(L-1)} & \text{if } 0 < r < 1 \end{cases}, \tag{10}$$

$$\kappa_2(\mathsf{R}) = \begin{cases} r^{L-1} & \text{if } r > 1 \\ r^{-(L-1)} & \text{if } 0 < r < 1 \end{cases}. \tag{11}$$

また，各 $k = 1, 2, \ldots, L$ に対し

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_k\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{L} \left(\sqrt{\frac{2}{L+1}} r^{j-1} \sin\frac{\pi jk}{L+1}\right)^2 = \frac{2}{L+1}\sum_{j=1}^{L} r^{2(j-1)} \frac{1-\cos\frac{2\pi jk}{L+1}}{2} \\
&= \frac{1}{L+1}\left[\sum_{j=1}^{L} r^{2(j-1)} - \Re\sum_{j=1}^{L} r^{2(j-1)} e^{\frac{2\pi i}{L+1}jk}\right] = \frac{1}{L+1}\left[\frac{r^{2L}-1}{r^2-1} - \Re\left(e^{\frac{2\pi ik}{L+1}}\sum_{j=1}^{L}(r^2 e^{\frac{2\pi ik}{L+1}})^{j-1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{L+1}\left[\frac{r^{2L}-1}{r^2-1} - \Re\left(e^{\frac{2\pi ik}{L+1}}\frac{(r^2 e^{\frac{2\pi ik}{L+1}})^L - 1}{r^2 e^{\frac{2\pi ik}{L+1}} - 1}\right)\right] = \frac{1}{L+1}\left[\frac{r^{2L}-1}{r^2-1} - \Re\left(\frac{r^{2L}e^{\frac{2\pi iL}{L+1}k}-1}{r^2 - e^{-\frac{2\pi ik}{L+1}}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{L+1}\left[\frac{r^{2L}-1}{r^2-1} - \frac{\Re\left((r^2 - e^{\frac{2\pi ik}{L+1}})(r^{2L}e^{\frac{2\pi iL}{L+1}k}-1)\right)}{r^4 - 2r^2\cos\frac{2\pi k}{L+1} + 1}\right] \\
&= \frac{1}{L+1}\left[\frac{r^{2L}-1}{r^2-1} - \frac{r^{2L+2}\cos\left(\frac{2\pi L}{L+1}k\right) - r^{2L} - r^2 + \cos\frac{2\pi k}{L+1}}{r^4 - 2r^2\cos\frac{2\pi k}{L+1} + 1}\right] \\
&= \frac{1}{L+1}\left[\frac{r^{2L}-1}{r^2-1} - \frac{r^{2L+2}\cos\frac{2\pi k}{L+1} - r^{2L} - r^2 + \cos\frac{2\pi k}{L+1}}{r^4 - 2r^2\cos\frac{2\pi k}{L+1} + 1}\right] \\
&= \frac{1}{L+1}\frac{(r^{2L+2}-1)(r^2+1)(1-\cos\frac{2\pi k}{L+1})}{(r^2-1)(r^4-2r^2\cos\frac{2\pi k}{L+1}+1)} && (12) \\
&> \frac{1}{L+1}\frac{(r^{2L+2}-1)(r^2+1)(1-\cos\frac{2\pi k}{L+1})}{(r^2-1)(r^4+2r^2+1)} = \frac{2}{L+1}\frac{r^{2L+2}-1}{r^4-1}\sin^2\frac{\pi k}{L+1} && (13) \\
&\ge \frac{2}{L+1}\frac{r^{2L+2}-1}{r^4-1}\sin^2\frac{\pi}{L+1} \ge \frac{2}{L+1}\frac{r^{2L+2}-1}{r^4-1}\left(\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{L+1}\right)^2 = \left(\frac{2}{L+1}\right)^3\frac{r^{2(L-1)}-r^{-4}}{1-r^{-4}} && (14)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 特に $r > 1$ のとき

$$\|\boldsymbol{v}_k\|_2 > \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{1-r^{-2(L+1)}}{1-r^{-4}}} r^{L-1} \geq \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{1-r^{-4}}{1-r^{-4}}} r^{L-1} = \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} r^{L-1}, \quad (15)$$

$0 < r < 1$ のとき

$$\|\boldsymbol{v}_k\|_2 > \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{r^{-4}-r^{2(L-1)}}{r^{-4}-1}} \geq \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{r^{-4}-1}{r^{-4}-1}} = \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} \quad (16)$$

となる.

2.2 上からの評価

[1, Theorem 3.5] より

$$\kappa_2(\mathsf{V}) \leq \sqrt{L}\kappa_2(\mathsf{VN}^{-1}) = \sqrt{L}\kappa_2(\mathsf{RU}) = \sqrt{L}\kappa_2(\mathsf{R}) = \begin{cases} \sqrt{L}r^{L-1} & \text{if } r > 1 \\ \sqrt{L}r^{-(L-1)} & \text{if } 0 < r < 1 \end{cases} \quad (17)$$

が成り立つ.

2.3 下からの評価

2-ノルムと Frobenius ノルムとの間に成り立つ不等式

$$\frac{1}{\sqrt{L}} \|\mathsf{V}\|_{\mathrm{F}} \leq \|\mathsf{V}\|_2 \leq \|\mathsf{V}\|_{\mathrm{F}} \quad (18)$$

を用いると,

$$\|\mathsf{V}\|_{\mathrm{F}}^2 = \mathrm{Tr}\left[\mathsf{V}^\dagger \mathsf{V}\right] = \sum_{k=1}^{L} \left(\frac{\boldsymbol{v}_k}{\|\boldsymbol{v}_k\|_2}\right)^\dagger \frac{\boldsymbol{v}_k}{\|\boldsymbol{v}_k\|_2} = L \quad (19)$$

に注意して

$$1 \leq \|\mathsf{V}\|_2 \leq \sqrt{L} \quad (20)$$

を得る. これより

$$\kappa_2(\mathsf{V}) \geq \left\|\mathsf{V}^{-1}\right\|_2. \quad (21)$$

一方,

$$\left\|\mathsf{V}^{-1}\right\|_2 = \left\|\mathsf{N}^{-1}\mathsf{U}^\dagger \mathsf{R}^{-1}\right\|_2 \geq \|\mathsf{N}\|_2^{-1} \left\|\mathsf{U}^\dagger \mathsf{R}^{-1}\right\|_2 = \|\mathsf{N}\|_2^{-1} \left\|\mathsf{R}^{-1}\right\|_2 \quad (22)$$

$$= \left(\max_{k=1,2,\ldots,L} \|\boldsymbol{v}_k\|_2^{-1}\right)^{-1} \left\|\mathsf{R}^{-1}\right\|_2 = \left\|\mathsf{R}^{-1}\right\|_2 \min_{k=1,2,\ldots,L} \|\boldsymbol{v}_k\|_2. \quad (23)$$

$r > 1$ のとき

$$\left\|\mathsf{V}^{-1}\right\|_2 > 1 \cdot \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} r^{L-1} = \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} r^{L-1}, \quad (24)$$

$0 < r < 1$ のとき

$$\left\|\mathsf{V}^{-1}\right\|_2 > r^{-(L-1)} \cdot \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} = \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} r^{-(L-1)}. \tag{25}$$

よって,

$$\kappa_2(\mathsf{V}) > \begin{cases} \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} r^{L-1} & \text{if } r > 1 \\ \left(\frac{2}{L+1}\right)^{3/2} r^{-(L-1)} & \text{if } 0 < r < 1 \end{cases} \tag{26}$$

を得る.

参考文献

[1] A. van der Sluis, “Condition Numbers and Equilibration of Matrices”, *Numer. Math.* **14**, 14 (1969).