行列の条件数と固有ベクトルの条件数

下村顕士

2023 年 4 月 17 日

定義: 行列の条件数

正則行列 $\mathsf{M} \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ の条件数を

$$\kappa_{\mathrm{mat}}(\mathsf{M}) \coloneqq \|\mathsf{M}\|_2 \left\|\mathsf{M}^{-1}\right\|_2 \tag{1}$$

で定義する.

$\mathsf{A} \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{C})$ を対角化可能行列とする.

定義: 固有ベクトルの条件数

A の相異なる固有値の個数を p とし, 固有値 λ_α $(\alpha = 1, 2, \dots, p)$ の重複度[*1]を $d_\alpha \coloneqq \dim\ker(\mathsf{A} - \lambda_\alpha \mathsf{I}_N)$ と置く. λ_α に属する右固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{\alpha,\mu} \in \mathbb{C}^N$, 左固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{\alpha,\mu} \in \mathbb{C}^N$ とする $(\mu = 1, 2, \dots, d_\alpha)$. ここで, 右固有ベクトルと左固有ベクトルは双直交化しておく[*2]:

$$(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{\alpha,\mu})^\dagger \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{\beta,\nu} = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{\mu,\nu}. \tag{2}$$

このとき, 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L/R}}$ の条件数を

$$\kappa_{\mathrm{vec}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L/R}}^{\alpha,\mu}) \coloneqq \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{\alpha,\mu}\|_2 \, \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{\alpha,\mu}\|_2 \tag{3}$$

で定義する.

命題

A の左/右固有ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L/R}}^{\alpha,\mu}$ を上のように双直交に取る. 正則行列 $\mathsf{U} \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ を, この右固有ベクトルたちを並べてできる行列として定義する[*3]:

$$\mathsf{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{1,1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{1,d_1} & \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{2,1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{2,d_2} & \cdots\cdots & \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{p,1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{p,d_p} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

このとき,

$$\frac{1}{L}\sum_{\alpha,\mu} \kappa_{\mathrm{vec}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L/R}}^{\alpha,\mu}) \le \kappa_{\mathrm{mat}}(\mathsf{U}) \tag{5}$$

が成り立つ.

[*2] 右固有ベクトルがすべて与えられたとき, 双直交条件 (2) を満たす左固有ベクトルは一意に定まる.

Proof. まず, U^{-1} は左固有ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{\alpha,\mu}$ を用いて

$$(\mathsf{U}^{-1})^{\dagger} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{1,1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{1,d_1} & \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{2,1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{2,d_2} & \cdots\cdots & \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{p,1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{p,d_p} \end{bmatrix} \tag{6}$$

と書ける. これより, U, U^{-1} の Frobenius ノルムは

$$\|\mathsf{U}\|_{\mathrm{F}}^2 \coloneqq \mathrm{Tr}(\mathsf{U}^{\dagger}\mathsf{U}) = \sum_{\alpha,\mu} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{\alpha,\mu}\|_2^2, \quad \left\|\mathsf{U}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}}^2 \coloneqq \mathrm{Tr}(\mathsf{U}^{-1}(\mathsf{U}^{-1})^{\dagger}) = \sum_{\alpha,\mu} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{\alpha,\mu}\|_2^2 \tag{7}$$

である.

2-ノルムと Frobenius ノルムの関係

$$\|\mathsf{M}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{L}} \|\mathsf{M}\|_{\mathrm{F}} \tag{8}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathrm{mat}}(\mathsf{U}) = \|\mathsf{U}\|_2 \left\|\mathsf{U}^{-1}\right\|_2 \geq \frac{1}{L} \|\mathsf{U}\|_{\mathrm{F}} \left\|\mathsf{U}^{-1}\right\|_{\mathrm{F}} &= \frac{1}{L} \sqrt{\sum_{\alpha,\mu} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{\alpha,\mu}\|_2^2} \sqrt{\sum_{\alpha,\mu} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{\alpha,\mu}\|_2^2} \qquad (9) \\ &\geq \frac{1}{L} \sum_{\alpha,\mu} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{\alpha,\mu}\|_2 \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{L}}^{\alpha,\mu}\|_2 = \frac{1}{L} \sum_{\alpha,\mu} \kappa_{\mathrm{vec}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{L/R}}^{\alpha,\mu}) \qquad (10) \end{aligned}$$

を得る. なお, 2 番目の不等号では Cauchy–Schwarz の不等式を用いた. □

*3 ここで, 同じ固有値 λ_α に属する右固有ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{\alpha,1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}^{\alpha,d_\alpha}$ 同士は直交化されている必要はない.