

# 低エネルギー重イオン反応 における量子多体ダイナミクス ～核融合反応を中心として～

東北大学

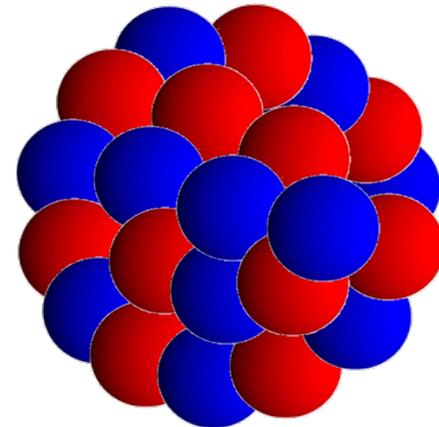
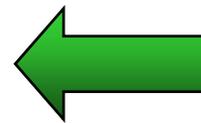
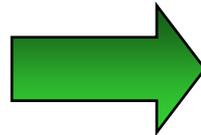
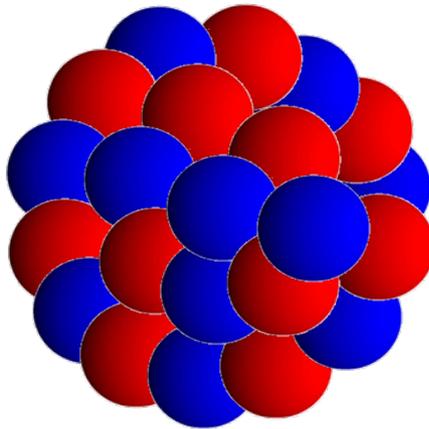
萩野浩一



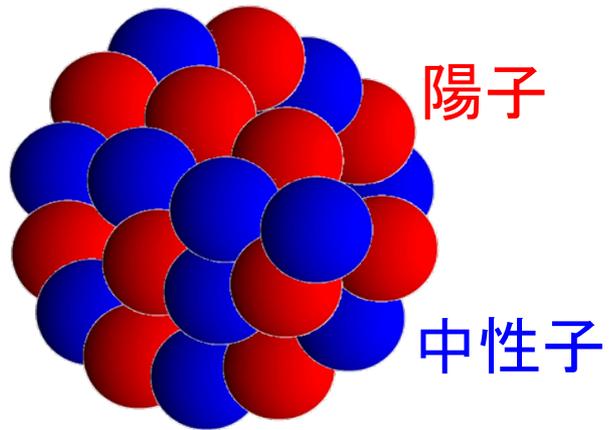
東北大学

[hagino@nucl.phys.tohoku.ac.jp](mailto:hagino@nucl.phys.tohoku.ac.jp)

[www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino](http://www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino)



原子核 = 強い相互作用をする粒子(ハドロン)  
の集合体



Z個の陽子と

N個の中性子

フェルミオン多体系

- 有限量子多体系
- 自己束縛系

粒子が**多体系**をつくることによって初めて現われる豊富で多様な物理現象の解明

「量子多体論」

- そのような原子核2つが衝突するとどのようなことが起こるのか？
- 量子力学の具体的な応用

## 講義の内容(予定)

1. 核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習
2. 重イオン反応の概観
3. 核融合反応に対する古典模型
4. 核融合反応と量子トンネル効果
5. ポテンシャル模型：成功と失敗
6. 原子核の低励起集団運動
7. 反応への影響：結合チャンネル方程式
8. *Sub-barrier Fusion* と障壁分布法
9. 量子反射と重イオン準弾性散乱
10. その他 1：中性子捕獲反応
11. その他 2：アイコナル近似  
(高エネルギー原子核反応)

# 参考図書・参考文献

## 原子核物理に関して

- 高田健次郎 インターネット・セミナー 「原子核の世界」

<http://www2.kutl.kyushu-u.ac.jp/seminar/MicroWorld3/MicroWorld3.html>

## 核反応一般

- 市村宗武、坂田文彦、松柳研一 「原子核の理論」  
(岩波講座・現代の物理学)
- 河合光路、吉田思郎 「原子核反応論」 (朝倉物理学大系)
- G.R. Satchler, “*Direct Nuclear Reactions*”
- R.A. Broglia and A. Winther, “*Heavy-Ion Reactions*”
- D.M. Brink, “*Semi-classical method in nucleus-nucleus collisions*”
- P. Frobrich and R. Lipperheide, “*Theory of Nuclear Reactions*”
- C.A. Bertulani and P. Danielewicz, “*Introduction to Nuclear Reactions*”

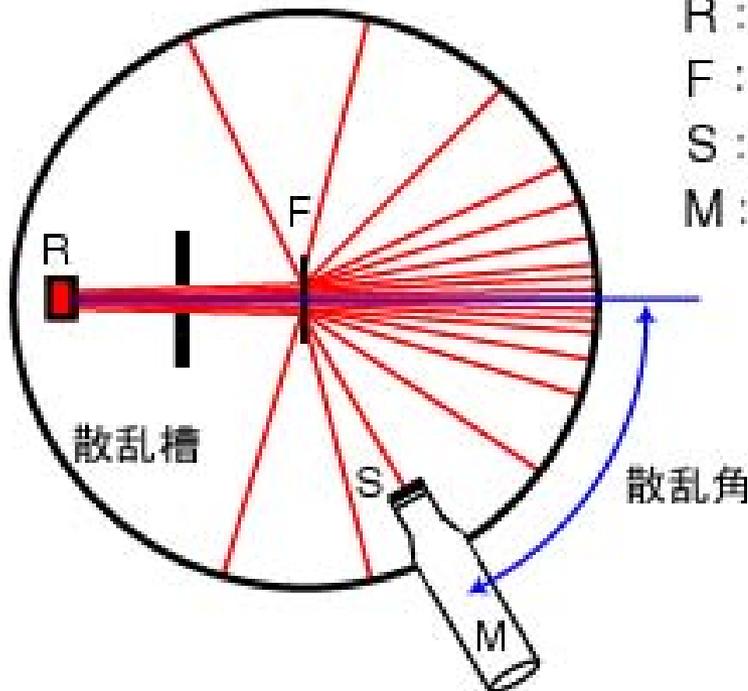
## 重イオン核融合反応に関するもの

- M. Dasgupta et al., Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 48('98) 401
- A.B. Balantekin and N. Takigawa, Rev. Mod. Phys. 70('98) 77
- 萩野浩一、滝川昇、日本物理学会誌 57('02)588

# 核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験  
cf. ラザフォードの実験( $\alpha$  散乱)

(A) 原子による $\alpha$ 粒子の散乱実験の概要



R:  $\alpha$ 線源  
F: 金属箔  
S: 蛍光物質  
M: 顕微鏡

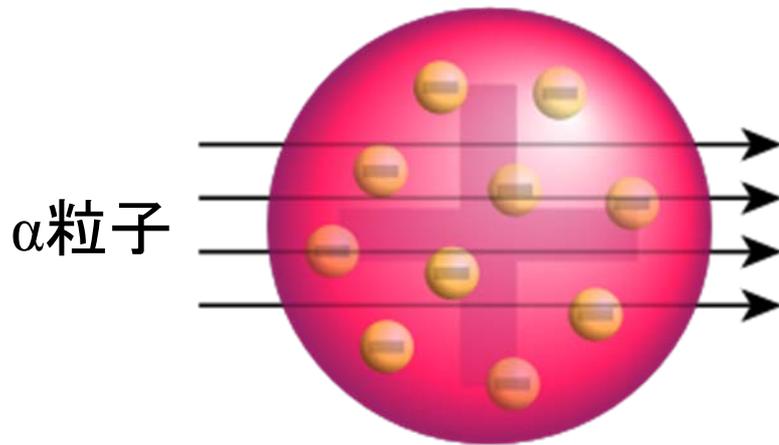
アルファ粒子 ( $^4\text{He}$  原子核) を金属薄膜に照射し、散乱された角度を測定 (ラザフォード、1911)



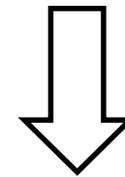
大部分はまっすぐ直進するが、ごくたまに90度以上に散乱される場合もある

# 核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験  
cf. ラザフォードの実験( $\alpha$  散乱)



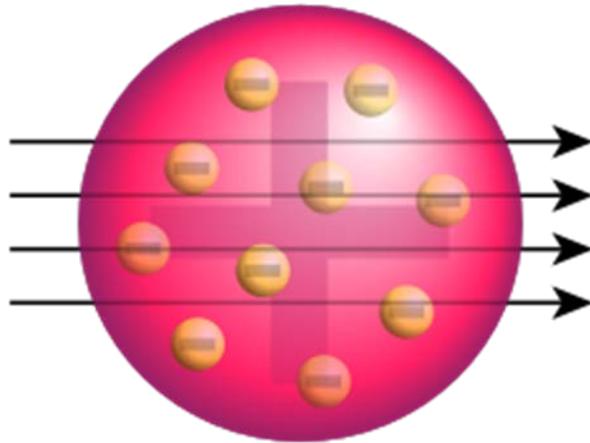
J.J. トムソンのぶどうパン模型



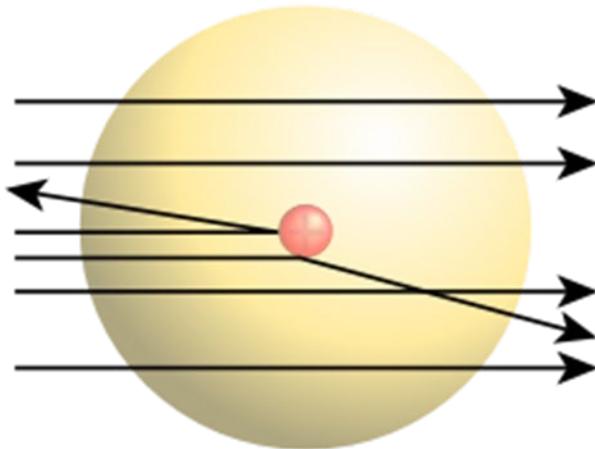
散乱の角度は高々 0.01 度

# 核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験  
cf. ラザフォードの実験( $\alpha$  散乱)



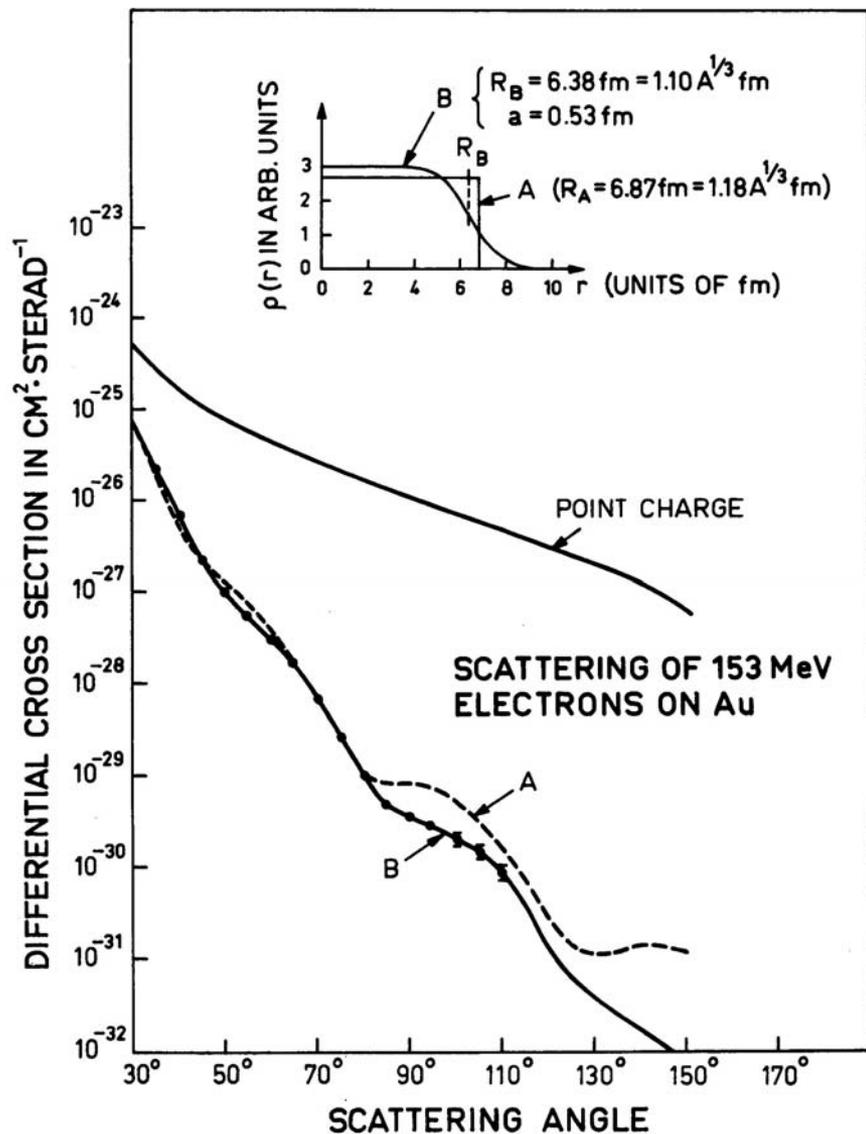
J.J. トムソンのぶどうパン模型



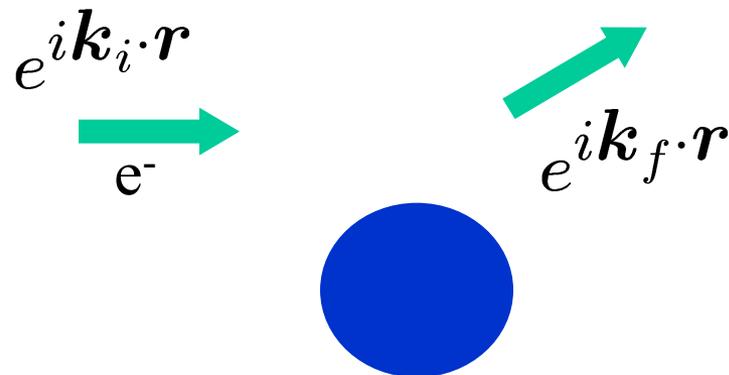
ラザフォードの有核原子模型  
(原子核を点状粒子とみなした  
解析)

# 原子核の密度分布

高エネルギー電子散乱  
(エネルギーを上げて原子核を見る)



ボルン近似:

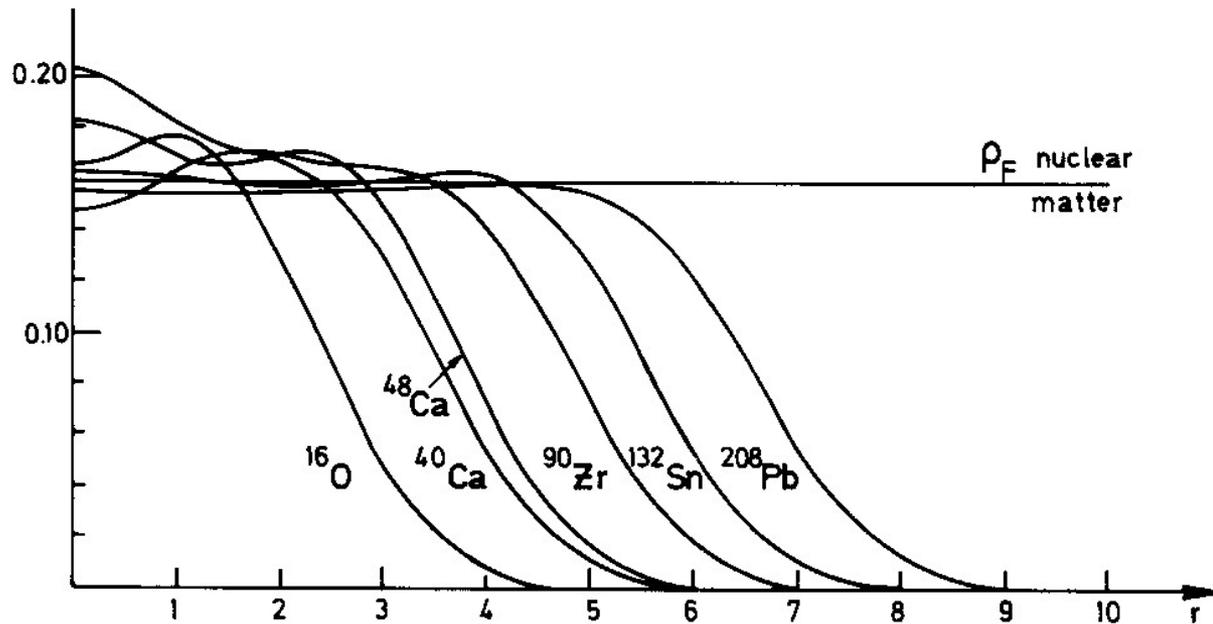


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_P^2 e^4}{(4E \sin^2 \theta/2)^2} |F(\mathbf{q})|^2$$

形状因子 (Form factor)

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

(密度のフーリエ変換)



## フェルミ分布

$$\rho(r) = \rho_0 / [1 + \exp((r - R_0)/a)]$$

$$\rho_0 \sim 0.17 \text{ (fm}^{-3}\text{)} \quad \leftarrow \text{原子核の飽和性}$$

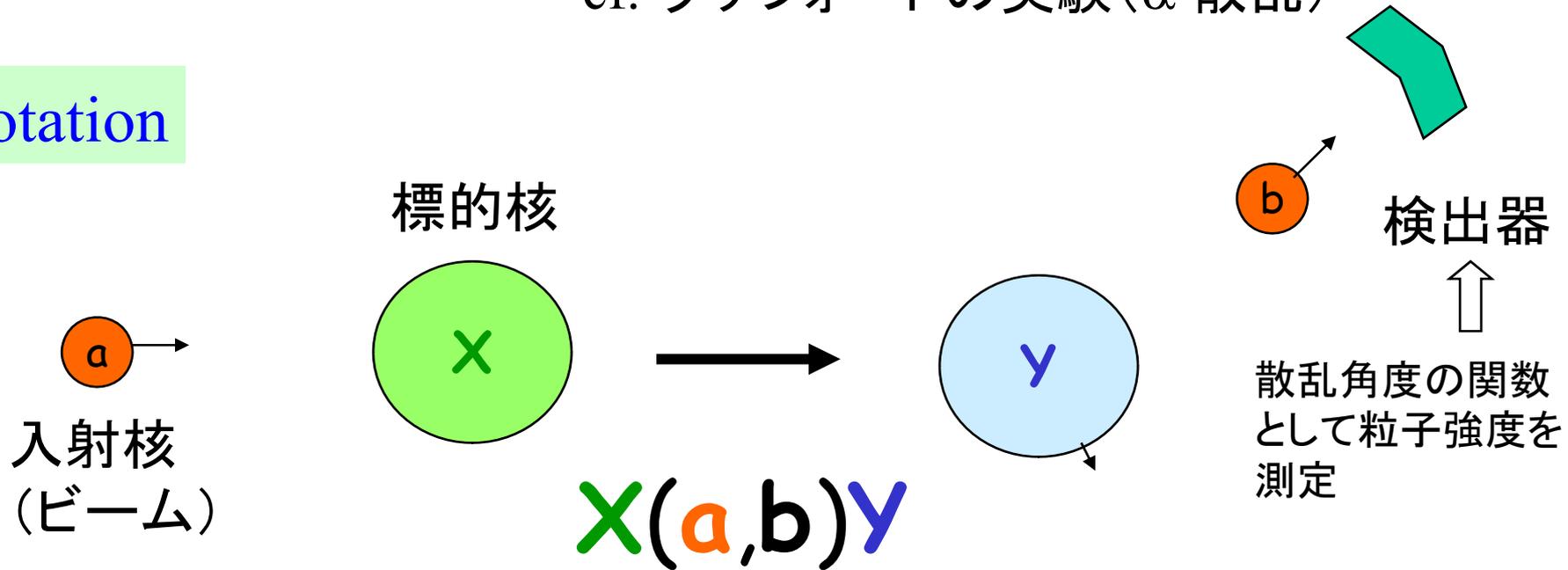
$$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \text{ (fm)}$$

$$a \sim 0.57 \text{ (fm)}$$

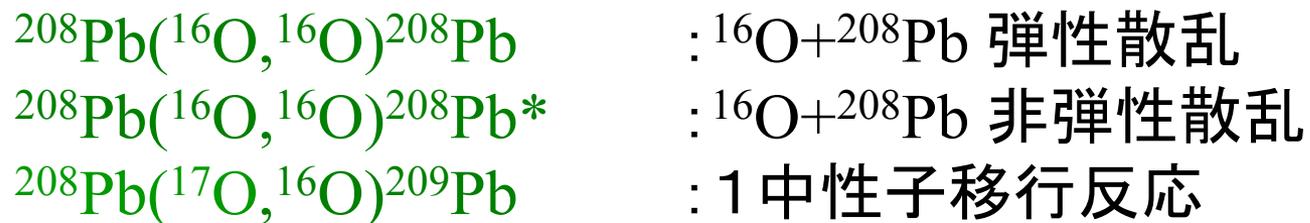
# 核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験  
cf. ラザフォードの実験 ( $\alpha$  散乱)

## Notation

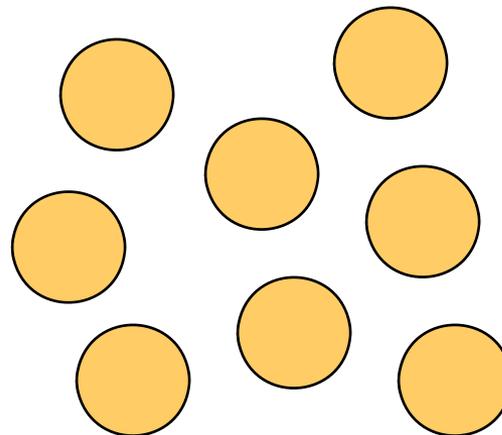
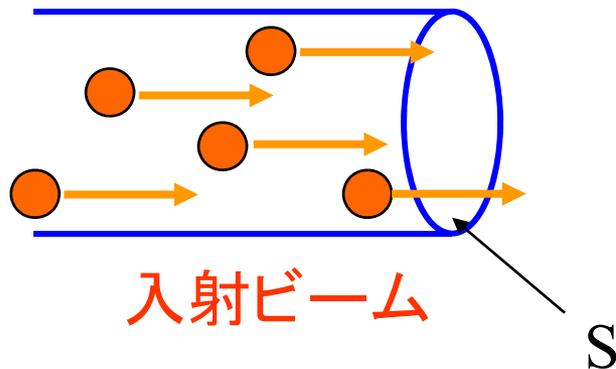


## 反応チャンネルの例



この他に複合核合成反応も

# 散乱断面積



単位時間当たりに標的粒子  
1個に対する反応の起きる数

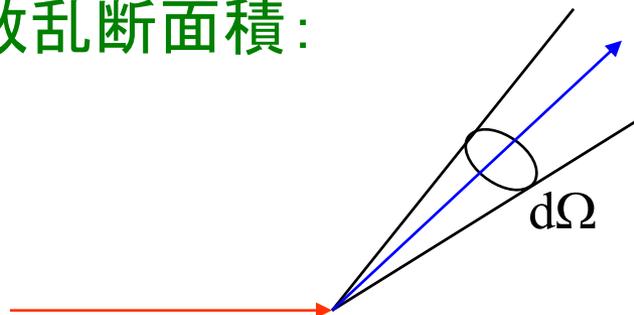
=

$\sigma \cdot$  単位時間当たり単位面積  
を通過する入射粒子の数

$\sigma/S$  = ビーム中の入射粒子1個が標的1個と衝突した時に散乱の起こる確率

単位: 1 barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup> = 100 fm<sup>2</sup> (1 mb =  $10^{-3}$  b = 0.1 fm<sup>2</sup>)

微分散乱断面積:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

# 入射粒子の種類と断面積の特徴

ノート参照

# 散乱振幅

自由粒子の運動:  $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi = \frac{k^2\hbar^2}{2m}\psi$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

$$\rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \left[ e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right] P_l(\cos\theta)$$

ポテンシャルがある場合:  $\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) - E \right] \psi = 0$

波動関数の漸近形

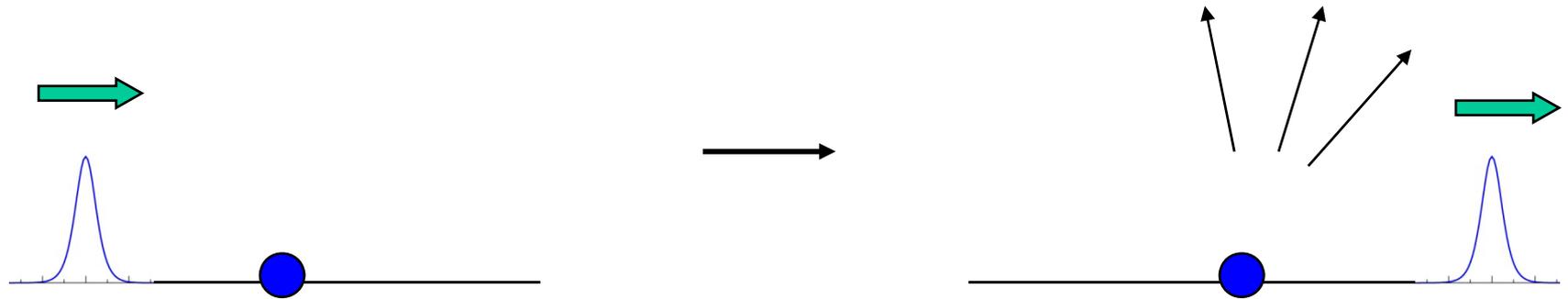
$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \left[ e^{-i(kr-l\pi/2)} - \underline{S_l} e^{i(kr-l\pi/2)} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \left[ \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta) \right] \frac{e^{ikr}}{r}$$

$f(\theta)$  (散乱振幅)

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \left[ \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta) \right] \frac{e^{ikr}}{r}$$

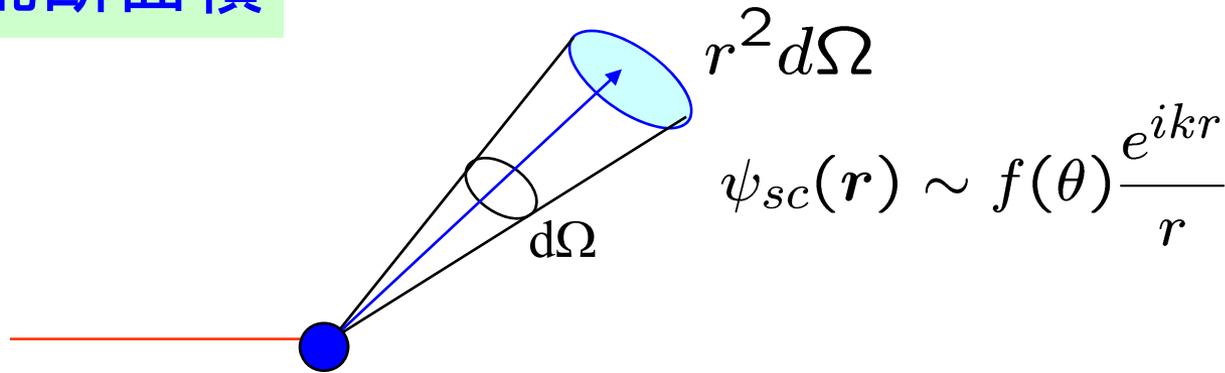
$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad = (\text{入射波}) + (\text{散乱波})$$



弾性散乱のみが起こる場合:  $|S_l| = 1$  (フラックスの保存)

$$S_l = e^{2i\delta_l} \quad \delta_l : \text{位相のずれ (phase shift)}$$

# 微分散乱断面積



単位時間に立体角  $d\Omega$  に散乱される粒子の数:

$$N_{\text{scatt}} = \mathbf{j}_{sc} \cdot \mathbf{e}_r r^2 d\Omega$$

$$\mathbf{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2im} [\psi_{sc}^* \nabla \psi_{sc} - c.c.] \sim \frac{k\hbar}{m} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

(散乱波に対するフラックス)

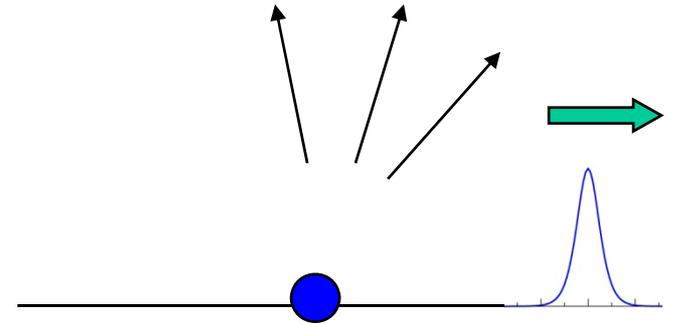
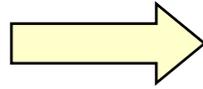

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l + 1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos \theta)$$

# 光学ポテンシャルと吸収断面積

## 反応プロセス

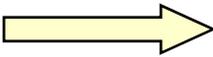
- 弾性散乱
- 非弾性散乱
- 粒子移行
- 複合粒子形成(核融合)



弾性フラックスの減少(吸収)

## 光学ポテンシャル

$$V_{\text{opt}}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) - iW(\mathbf{r}) \quad (W > 0)$$

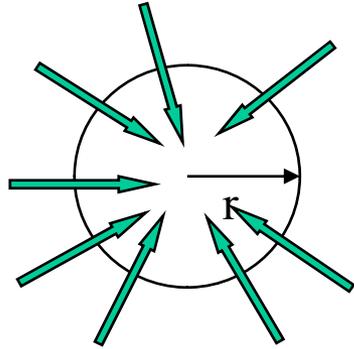

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \dots = -\frac{2}{\hbar} W |\psi|^2$$

(note) ガウスの定理

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV$$

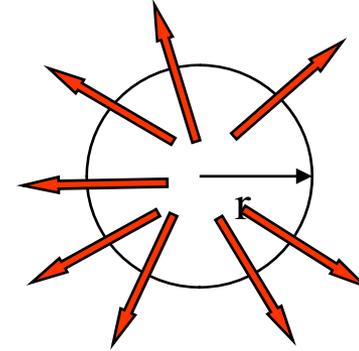
$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) i^l \frac{1}{r} \left[ \underbrace{e^{-i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{in}}} - \underbrace{S_l e^{i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{out}}} \right] P_l(\cos\theta)$$

全内向フラックス:



$$j_{\text{in}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)$$

全外向フラックス:



$$j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l|^2$$

減少したフラックス:  $j_{\text{in}}^{\text{net}} - j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2)$

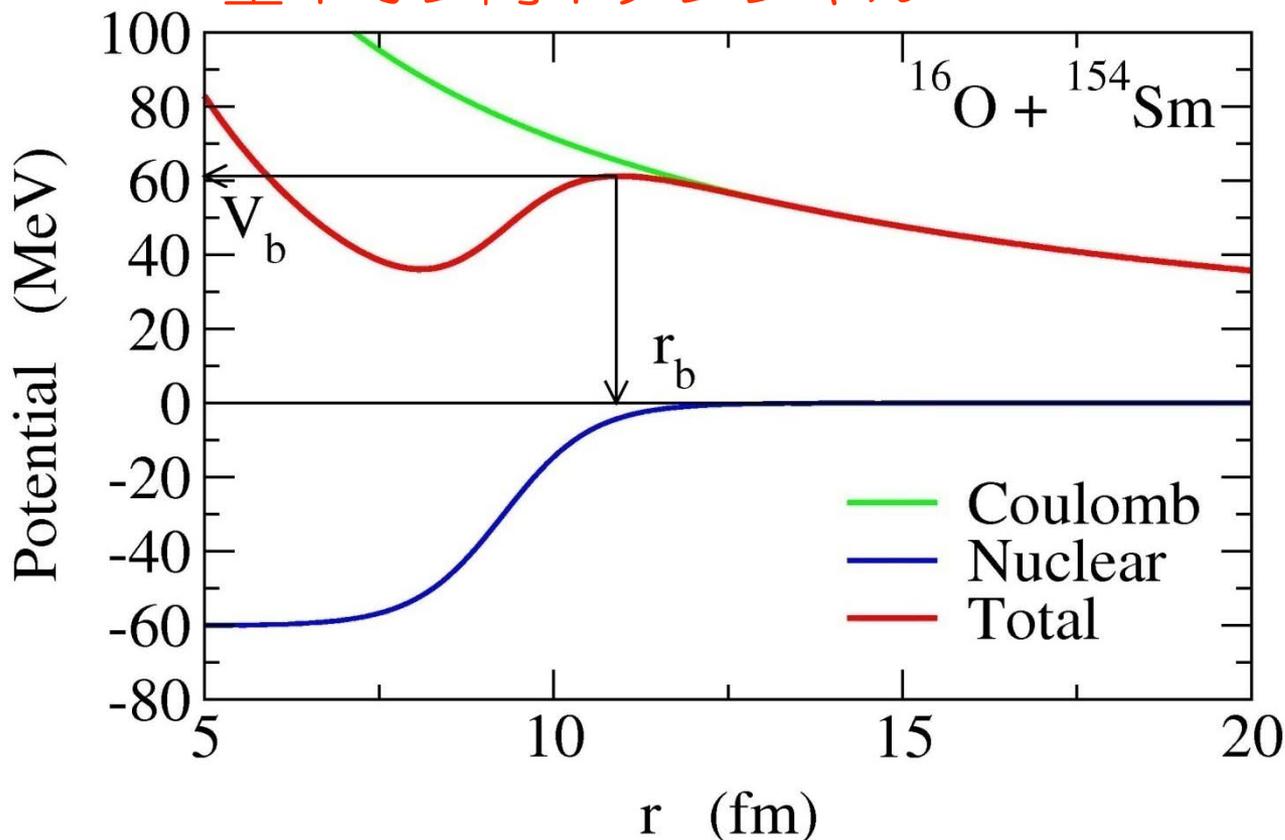
吸収断面積

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2)$$

# 重イオン反応の概観

重イオン:  ${}^4\text{He}$  より重い原子核

## 重イオン間ポテンシャル



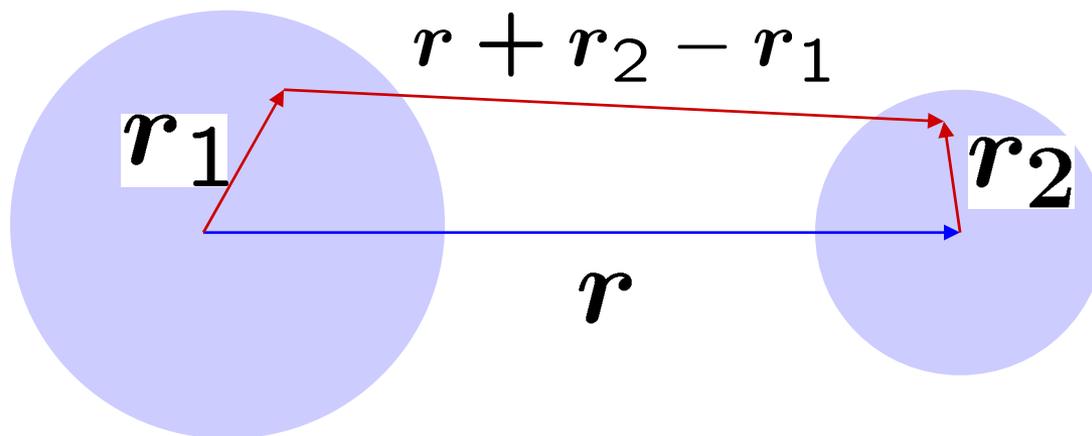
2つの力:

1. クーロン力  
長距離斥力
2. 核力  
短距離引力



両者の打ち消しあいによりポテンシャル障壁が形成  
(クーロン障壁)

- 二重畳み込みポテンシャル (Double Folding Potential)



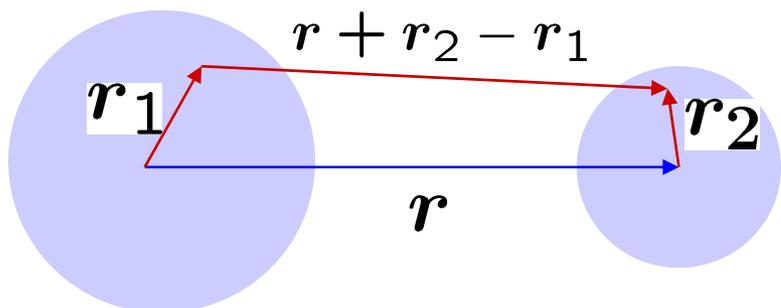
$$V_{DF}(r) = \int dr_1 dr_2 \rho_1(r_1) \rho_2(r_2) \times v(r + r_2 - r_1)$$

$v$  : 核子間相互作用

- 現象論的ポテンシャル

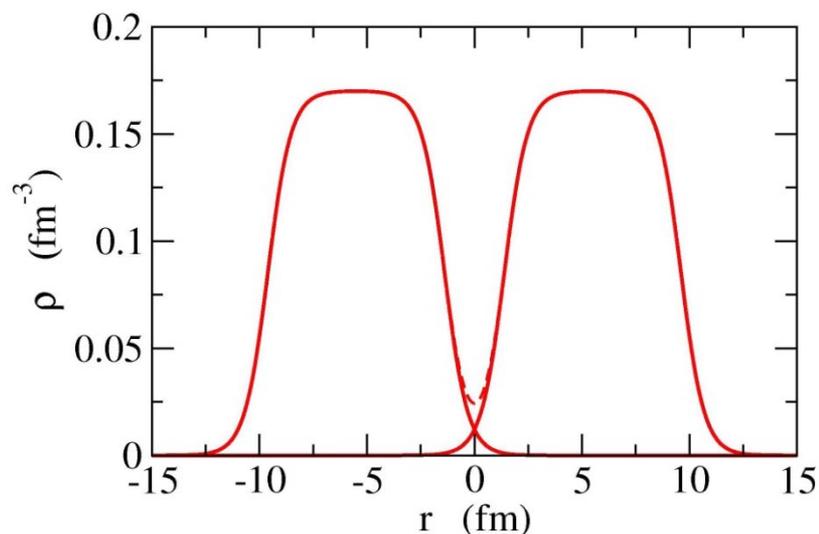
$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$

## ● Double Folding Potential



$$V_{DF}(r) = \int dr_1 dr_2 \rho_1(r_1) \rho_2(r_2) \times v_{nn}(r + r_2 - r_1)$$

(微視的ポテンシャルの直接項に相当)



$$\rho(r) \sim \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R_d)/a_d]}$$

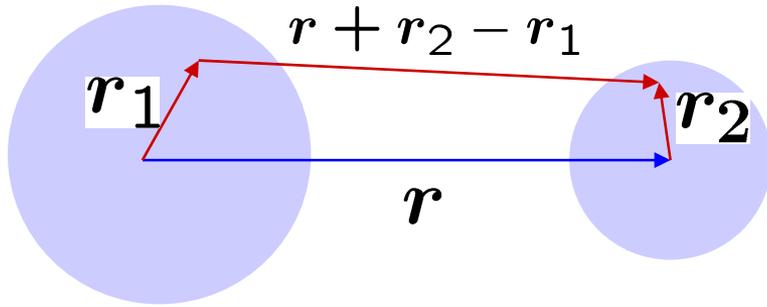
$$a_d \sim 0.54 \text{ (fm)}$$

## ● Phenomenological potential

$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$

$$a \sim 0.63 \text{ (fm)}$$

# Double folding potential



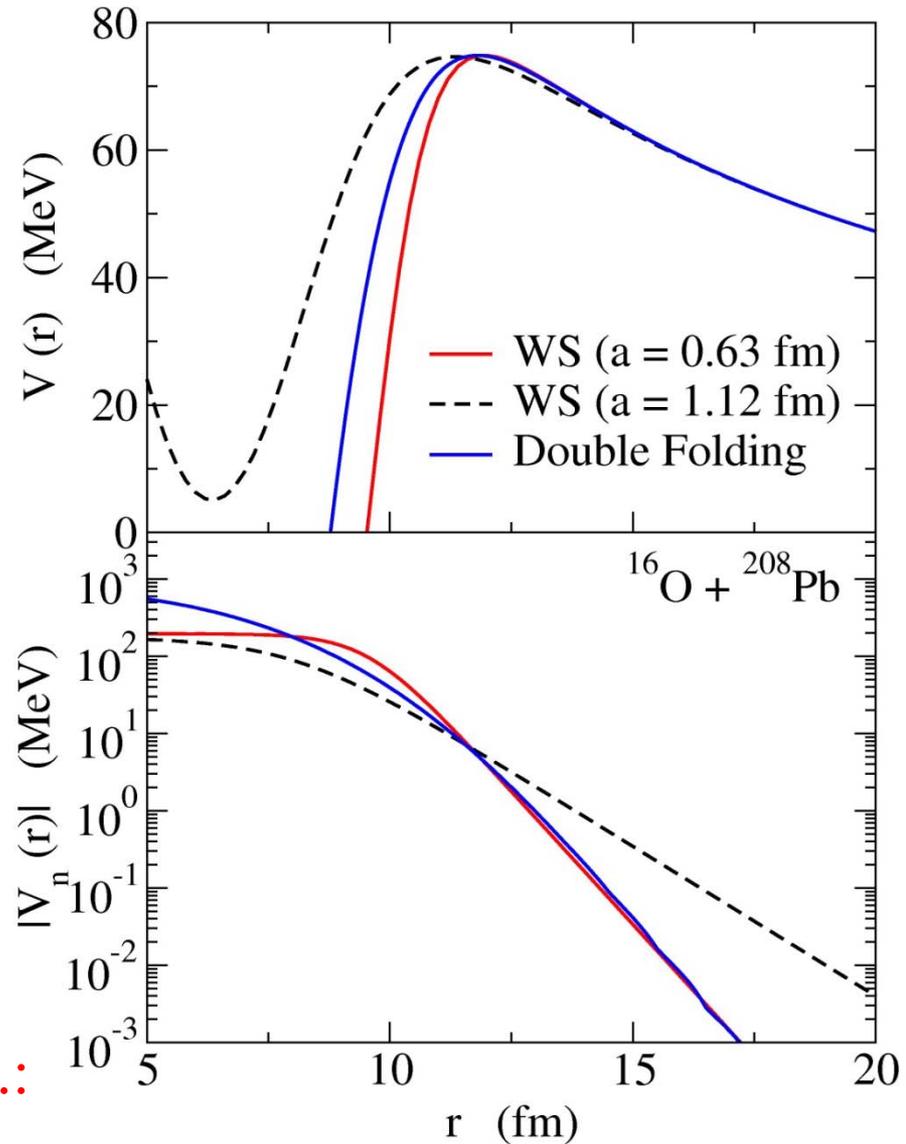
$$V_{DF}(r) = \int dr_1 dr_2 \rho_1(r_1) \rho_2(r_2) \times v(r + r_2 - r_1)$$

cf. Michigan 3 range Yukawa (M3Y) interaction

$$v_{nn}(r) = 7999 \frac{e^{-4r}}{4r} - 2134 \frac{e^{-2.5r}}{2.5r} - 276 \delta(r) \text{ (MeV)}$$

Phenomenological Woods-Saxon pot.:

$$V_N(r) = -V_0 / [1 + \exp((r - R_0)/a)]$$



# 重イオン反応の3つの特徴

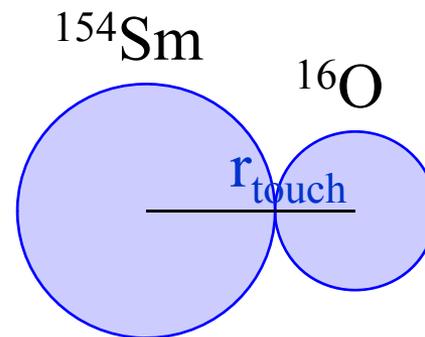
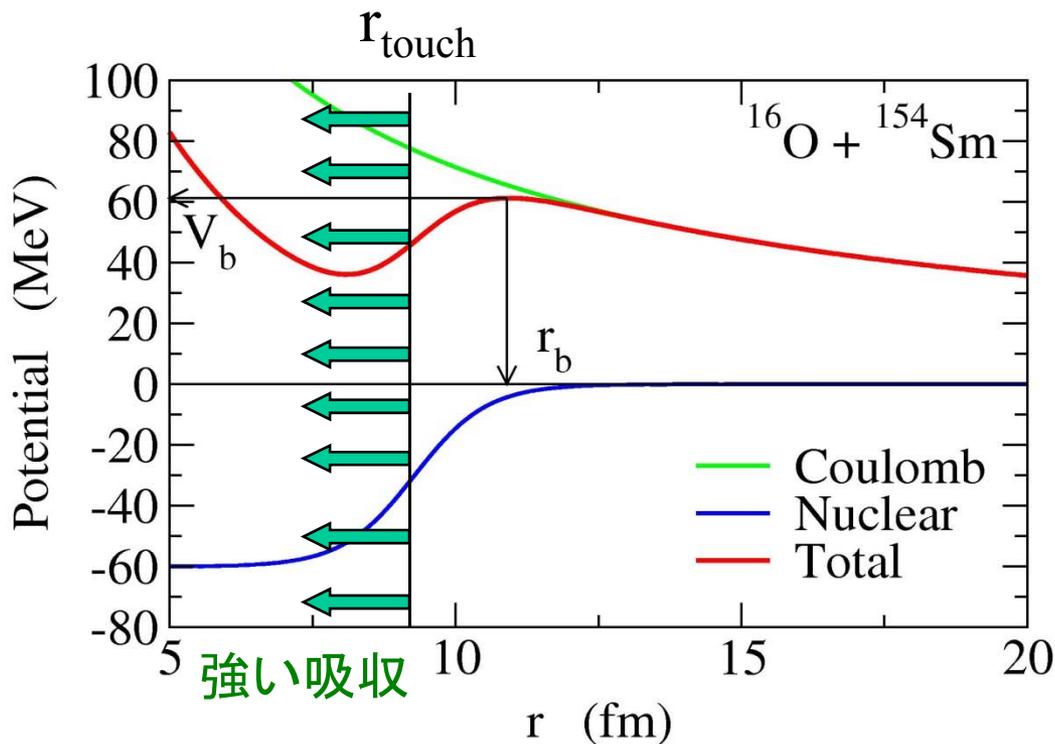
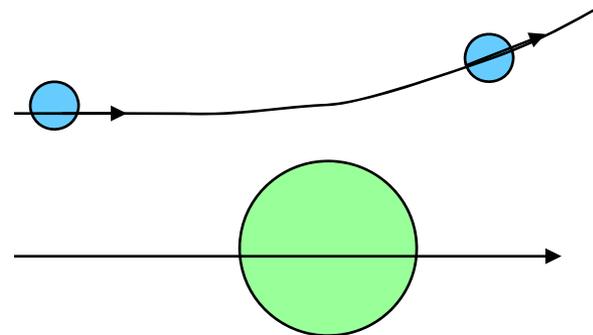
1. クーロン相互作用: 重要

2. 換算質量 (reduced mass): 大きい  $\longrightarrow$  (半)古典的な描像

$$\mu = m_T m_P / (m_T + m_P)$$

軌道の概念

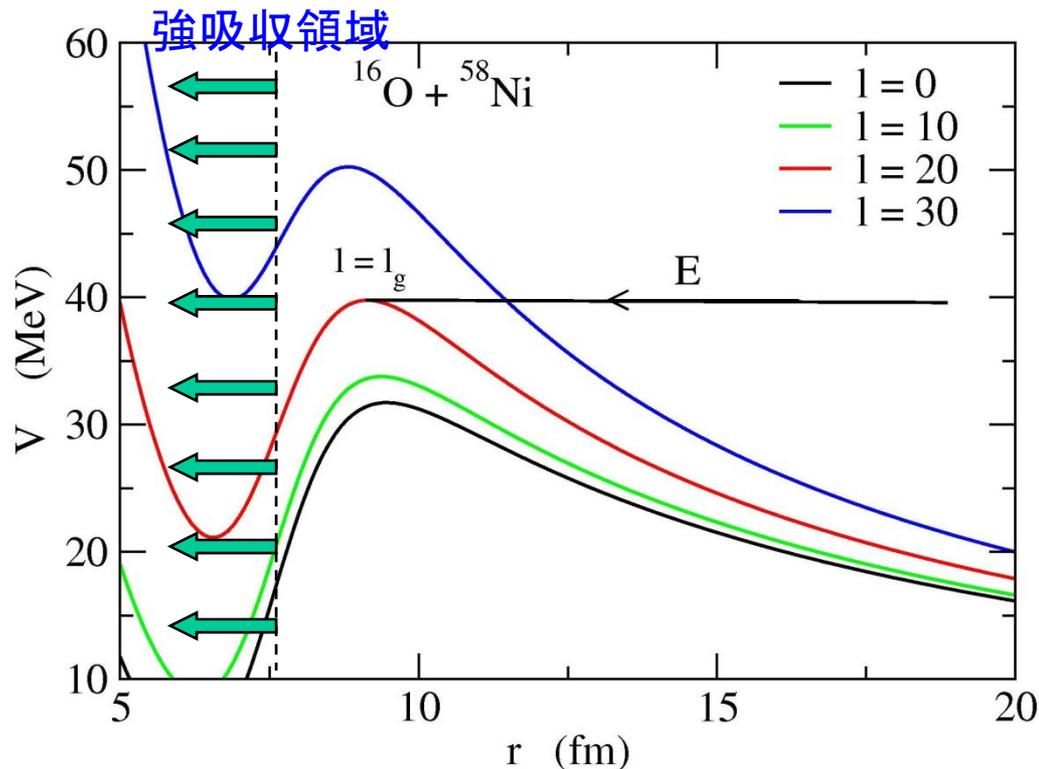
3. クーロン障壁内部での強い吸収



一度接触すると自動的に複合核を形成 (強吸収の仮定)

# 擦り角運動量 (grazing angular momentum)

$$V_l(r) = V_0(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$



Grazing 角運動量:  $V_{l_g}(r_b) = E$

$l < l_g$  : 古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$  : 古典的には強吸収領域に到達できない

⇒ ある与えられた  $E$  に対し、反応は  $l=l_g$  を境に急激に変化

i)  $l \gg l_g$  or  $E \ll V_b$

古典的転回点: 非常に遠方

- 
- クーロン力による弾性散乱 (Rutherford 散乱)
  - 散乱核のクーロン場による励起 (クーロン励起)



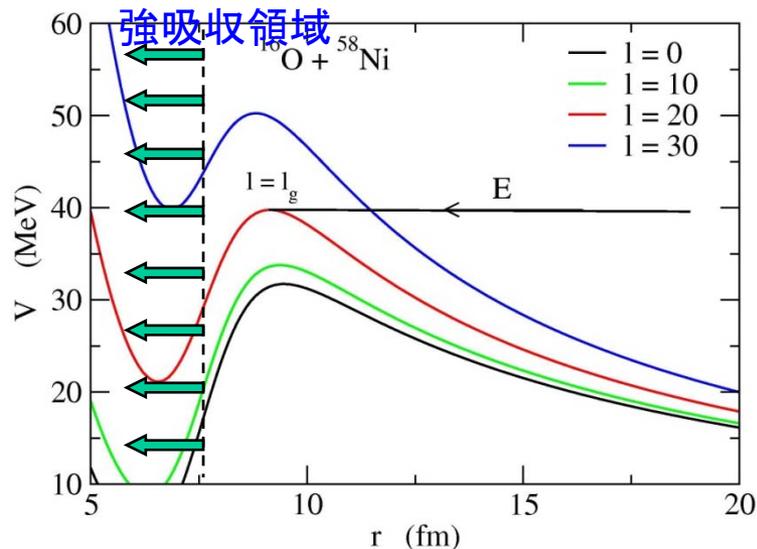
低励起集団運動

ii)  $l \gtrsim l_g$

核力の効果が重要になる

- 直接反応
- 弾性散乱
  - 非弾性散乱
  - 核子移行反応
- 準弾性散乱

多体系としてのダイナミクス

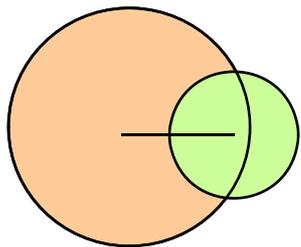


$l < l_g$ : 古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$ : 古典的には強吸収領域に到達できない

iii)  $l < l_g$

相対距離が小さく、従って密度の重なり  
が大きい領域に到達



- 高状態密度 (複合系)
- 非常に多くの内部自由度



相対運動のエネルギーはすぐに  
失われ内部エネルギーに転化



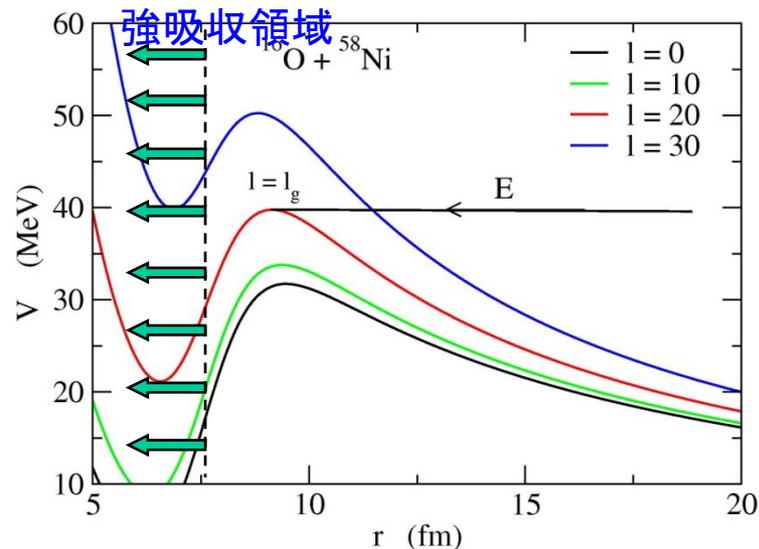
熱い複合核の形成 (核融合反応)

iv)  $l_c < l_g$  となる場合

$l = l_c$  でクーロン・ポケットが消失

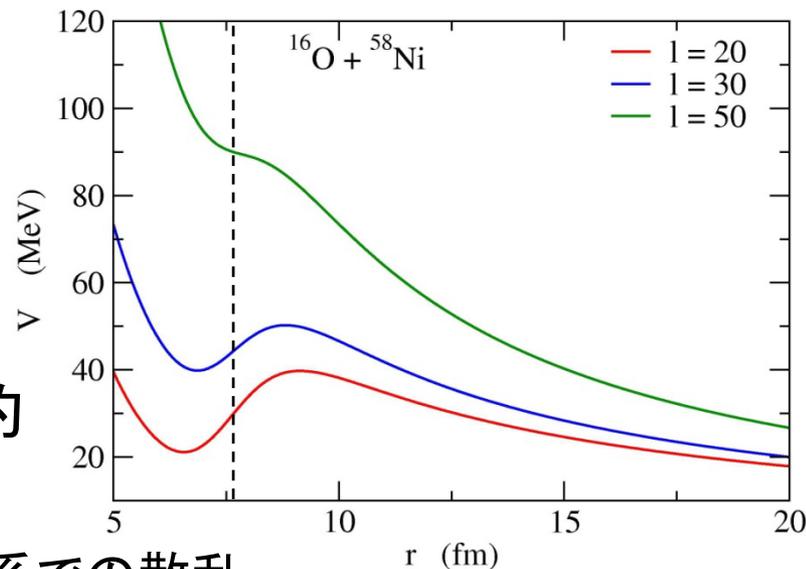
⇒ 直接反応と核融合反応の中間的  
な反応: 深部非弾性散乱 (DIC)

← 比較的高エネルギーでの散乱や重い系での散乱

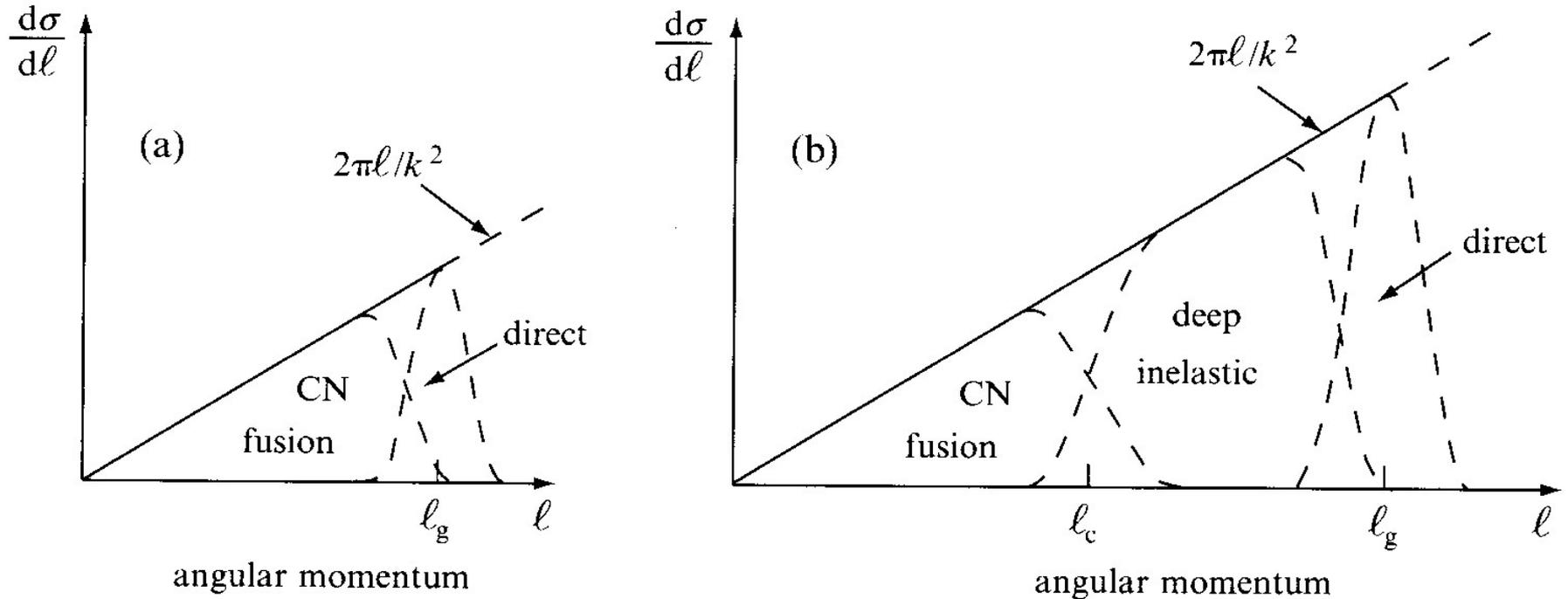


$l < l_g$ : 古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$ : 古典的には強吸収領域に到達できない



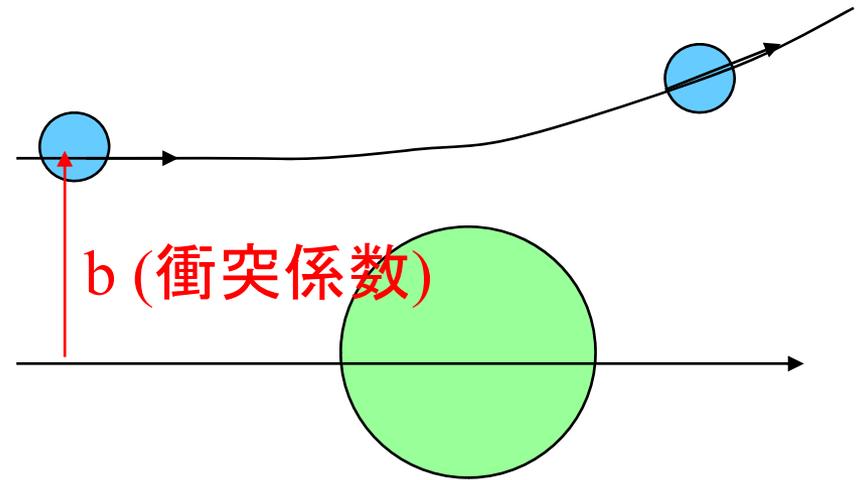
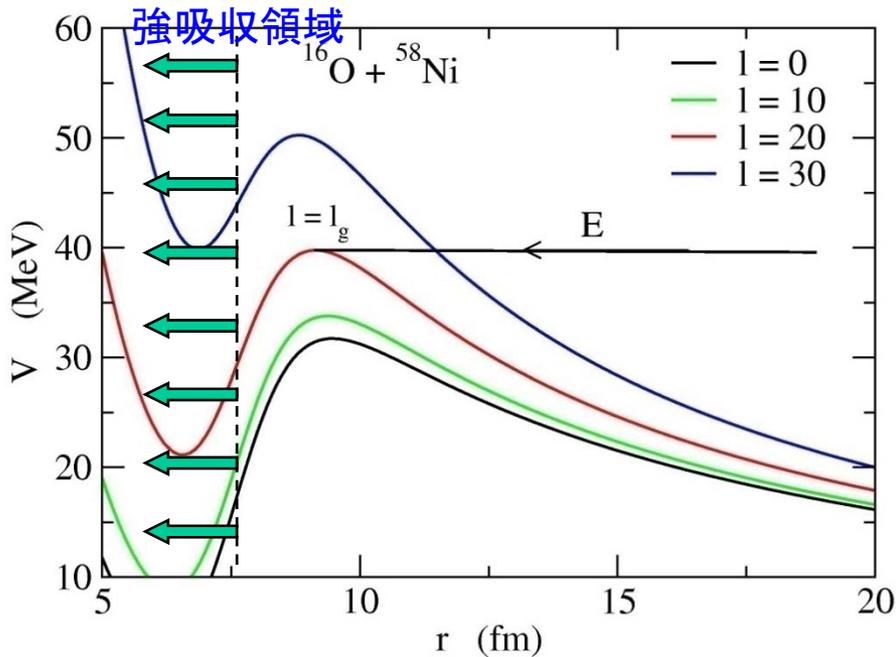
## Partial decomposition of reaction cross section



**Figure 4.18** Schematic decomposition of the total heavy-ion reaction cross section into contributions from different partial waves when (a) the grazing angular momentum (quantum number  $l_g$ ) is below the critical angular momentum (quantum number  $l_c$ ) that can be carried by the compound nucleus, and (b) when  $l_g$  exceeds  $l_c$ . In both (a) and (b) the straight line is obtained from Equation (4.3) and the dashed areas indicate regions in which different types of heavy-ion nuclear reaction mechanisms predominate.

Taken from J.S. Lilley,  
"Nuclear Physics"

# 核融合反応に対する古典的な模型

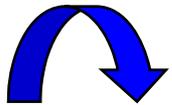


$$l_{cl} = kb \quad k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$$

$$\Rightarrow b_g = l_g/k$$

$$\sigma^{cl} = 2\pi \int_0^{b_g} b db = \pi b_g^2$$

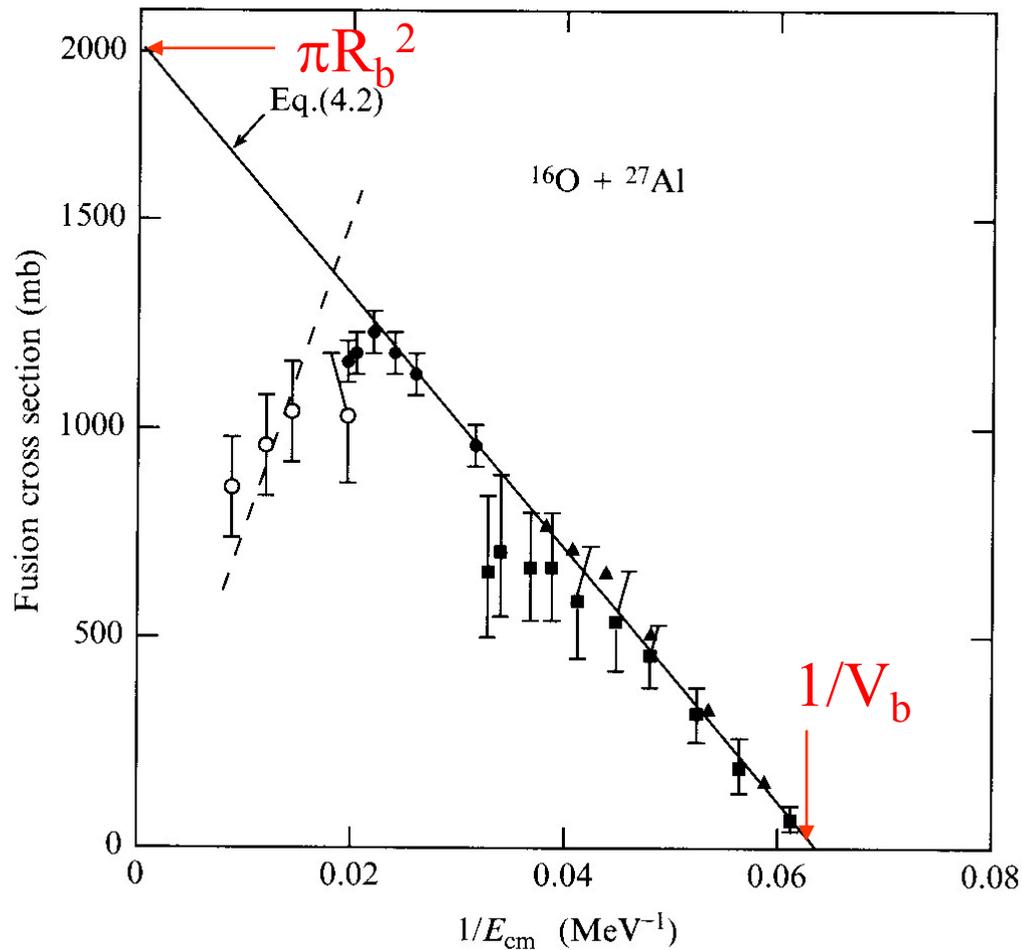
$$V_b + \frac{(kb_g)^2 \hbar^2}{2\mu R_b^2} = E$$



$$\sigma_{\text{fus}}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left( 1 - \frac{V_b}{E} \right)$$

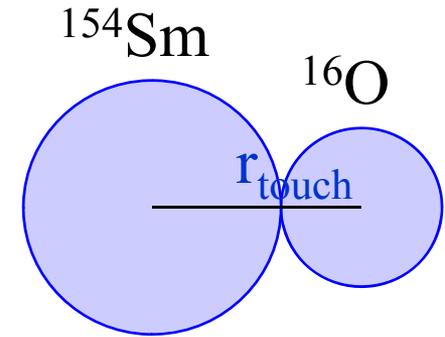
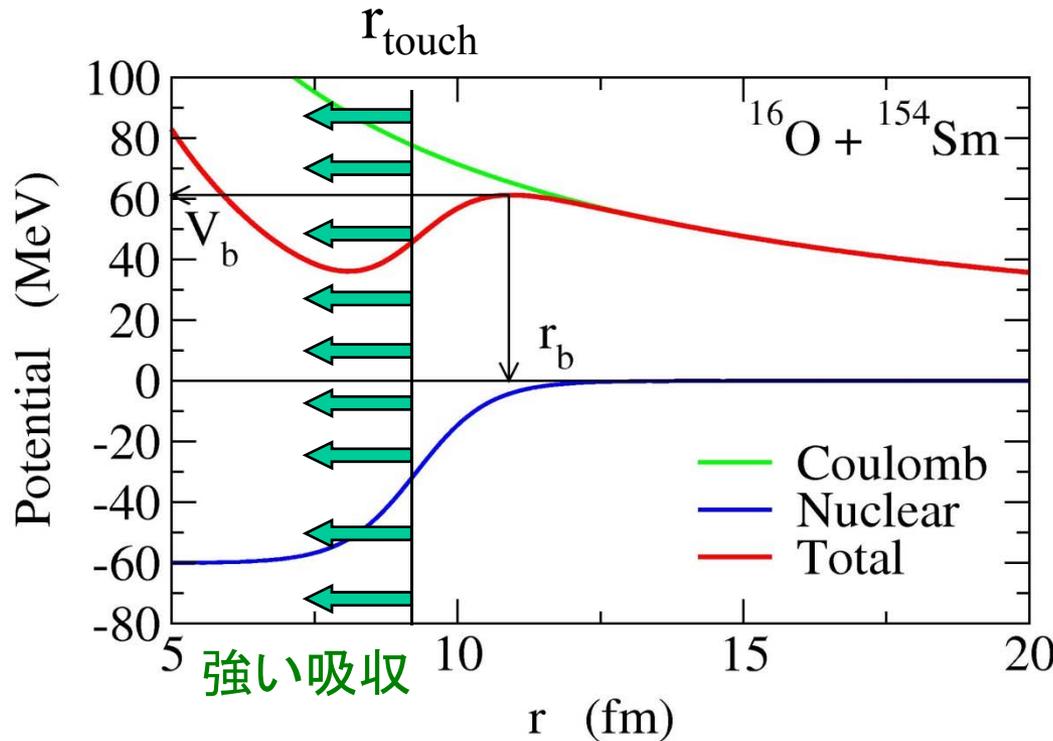
$$\sigma_{\text{fus}}^{\text{cl}}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right)$$

→ 古典的な核融合反応断面積は  $1/E$  に比例する



Taken from J.S. Lilley,  
"Nuclear Physics"

# 核融合反応と量子トンネル効果



一度接触すると自動的に複合核を形成(強吸収の仮定)



核融合の確率

$= r_{\text{touch}}$  に到達する確率

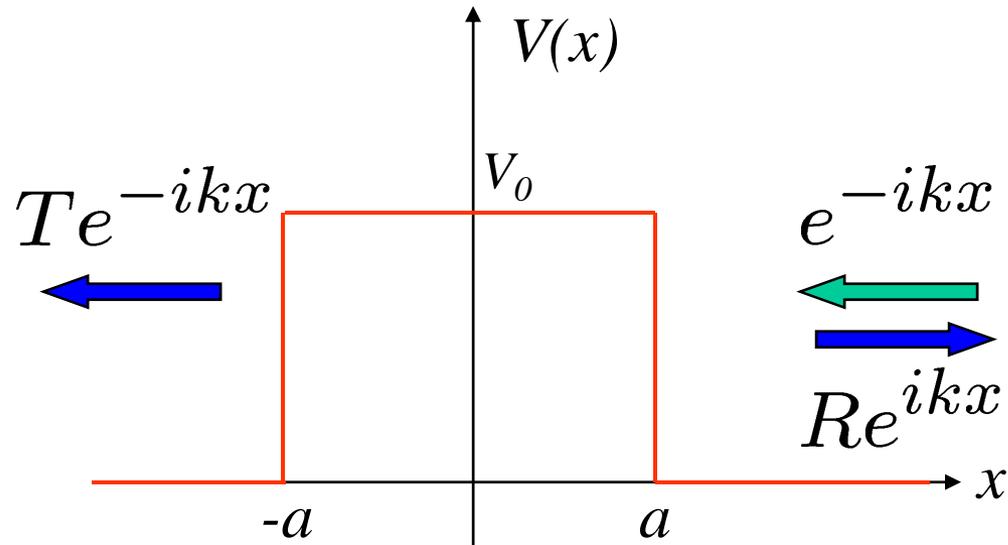


障壁の透過確率

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) P_l(E)$$

低エネルギーでは核融合反応はトンネル効果で起きる!

# 量子トンネル現象

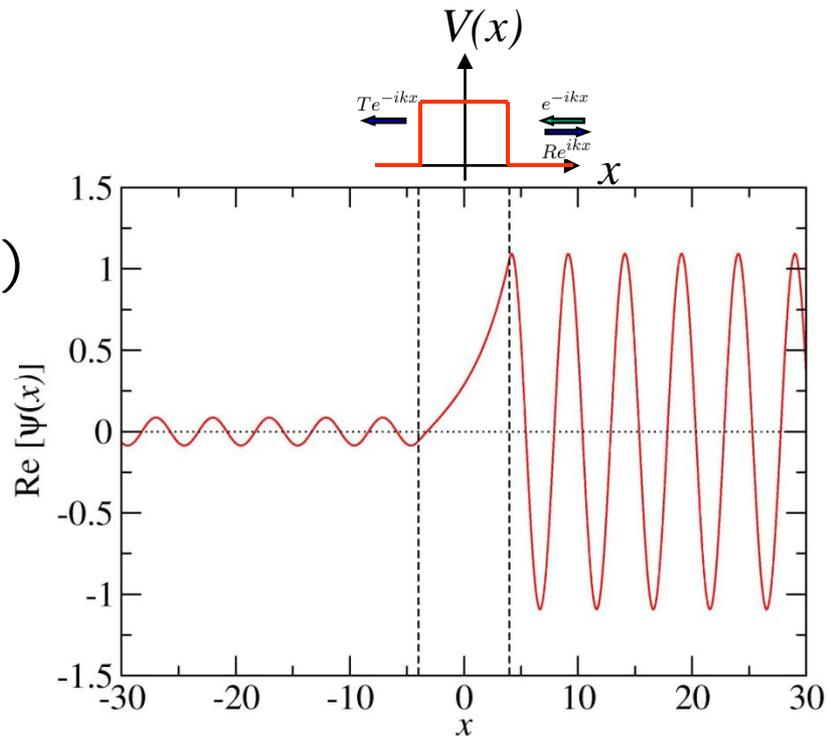


$$\begin{aligned}\psi(x) &= T e^{-ikx} & (x \leq -a) \\ &= A e^{-\kappa x} + B e^{\kappa x} & (-a < x < a) \\ &= e^{-ikx} + R e^{ikx} & (x \geq a)\end{aligned}$$

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

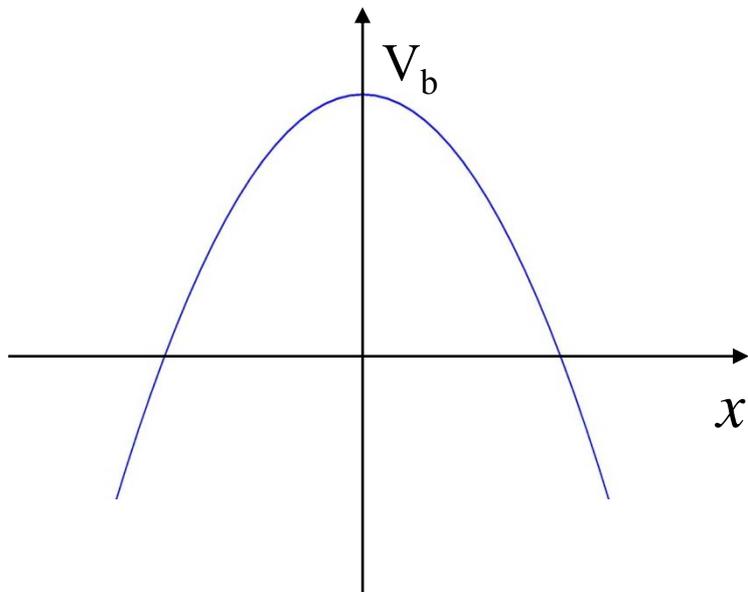
$$\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$$

トンネル確率:  $P(E) = |T|^2$

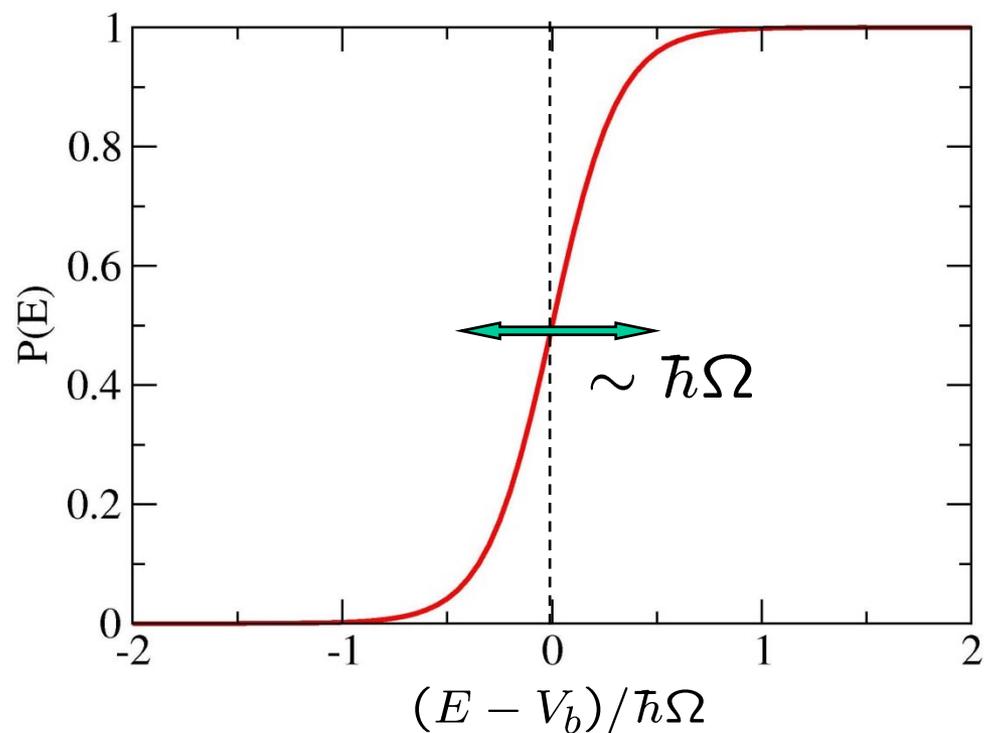


# 放物線障壁だと.....

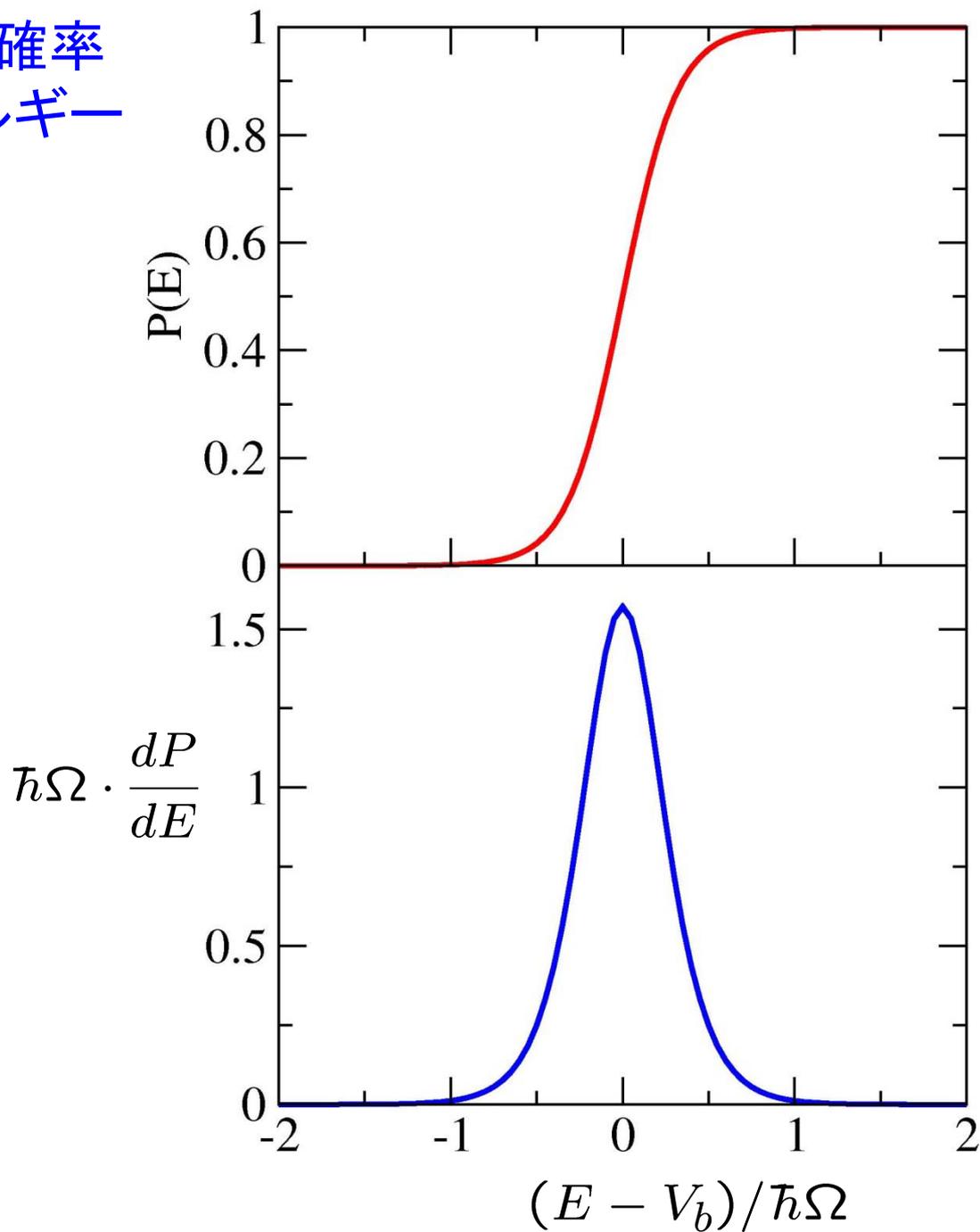
$$V(x) = V_b - \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$$



$$P(E) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]}$$



トンネル確率  
のエネルギー  
微分

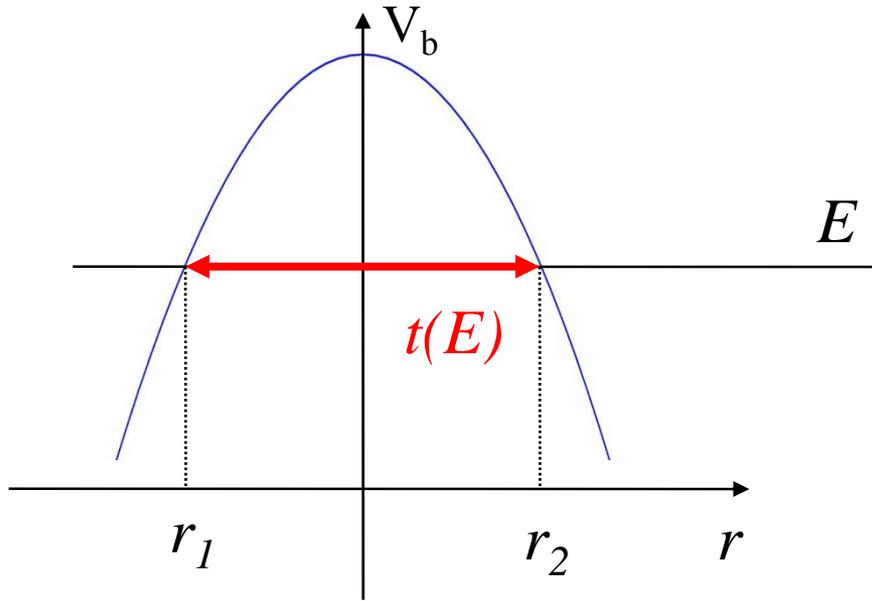


(note) 古典極限

$$P(E) = \theta(E - V_b)$$

$$dP/dE = \delta(E - V_b)$$

# (note) WKB近似によるトンネル確率

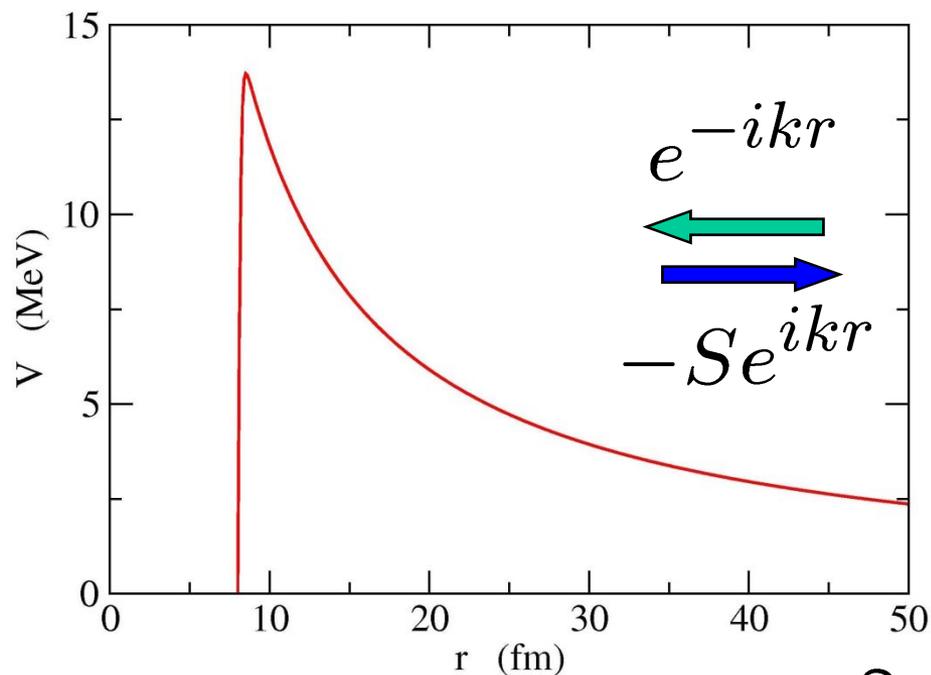


$$P_0(E) = \frac{1}{1 + e^{2S_0(E)}}$$

$$S_0(E) = \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (V(r) - E)}$$

## 球対称3次元ポテンシャルの場合

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) i^l \frac{1}{r} \left[ e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)} \right] P_l(\cos\theta)$$



$$-S_l \sim R \text{ (反射係数)} \quad \longrightarrow \quad P = |T|^2 = 1 - |S_l|^2$$

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1 - |S_l|^2) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)P_l$$

# ポテンシャル模型：成功と失敗

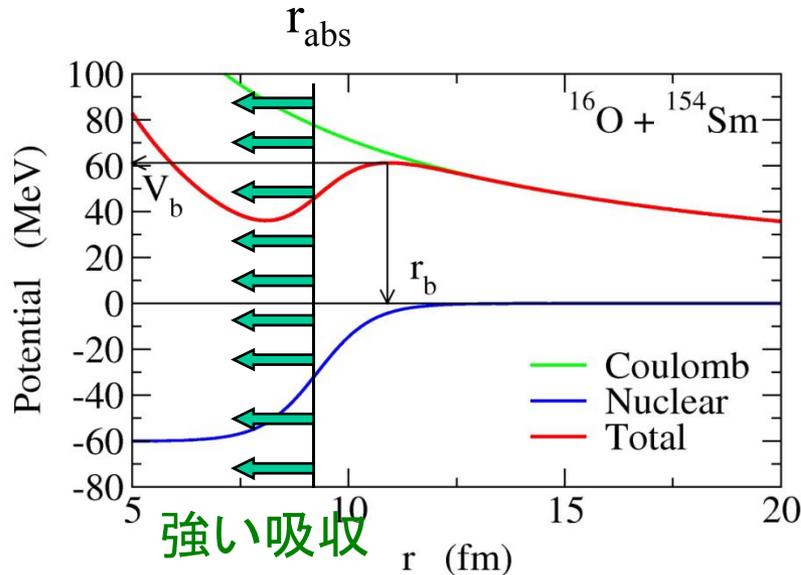
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - E \right] u_l(r) = 0$$

遠方での境界条件:  $u_l(r) \rightarrow H_l^{(-)}(kr) - S_l H_l^{(+)}(kr)$

核融合反応断面積:  $\sigma_{\text{fus}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) P_l$

複合核の平均角運動量:  $\langle l \rangle = \frac{\sum_l l(2l+1) P_l}{\sum_l (2l+1) P_l}$

$$P_l = 1 - |S_l|^2$$



遠方での境界条件:  $u_l(r) \rightarrow H_l^{(-)}(kr) - S_l H_l^{(+)}(kr)$

核融合反応断面積:  $\sigma_{\text{fus}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) P_l$

内側での境界条件:  $P_l = 1 - |S_l|^2$

(i) 吸収ポテンシャルを使う場合

$$V(r) = V_R(r) - iW(r)$$

$$u_l(r) \sim r^{l+1}$$

(ii) IWBC

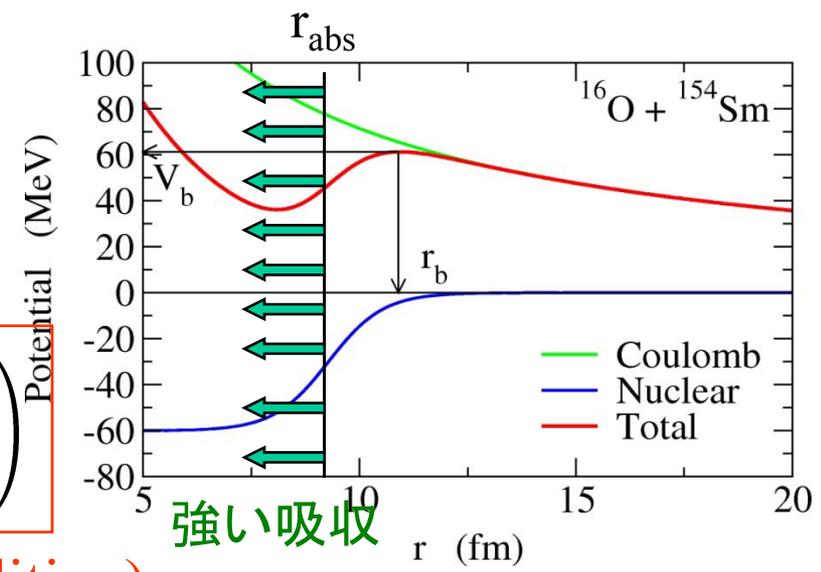
W が非常に大きい極限

$$u_l(r) = T_l \exp\left(-i \int_{r_{\text{abs}}}^r k_l(r') dr'\right)$$

(Incoming Wave Boundary Condition)

$$k_l(r) = \sqrt{2\mu/\hbar^2 [E - V_R(r) - l(l+1)\hbar^2/2\mu r^2]}$$

- Real Potential のみ必要 (Imaginary part は不要)
- $P_l = |T_l|^2$



# IWBCの適用例: $1/\nu$ 則の導出

ノート参照

# Wong の公式

C.Y. Wong, Phys. Rev. Lett. 31 ('73)766

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) P_l(E)$$

i) クーロン障壁を放物線で近似  $V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$

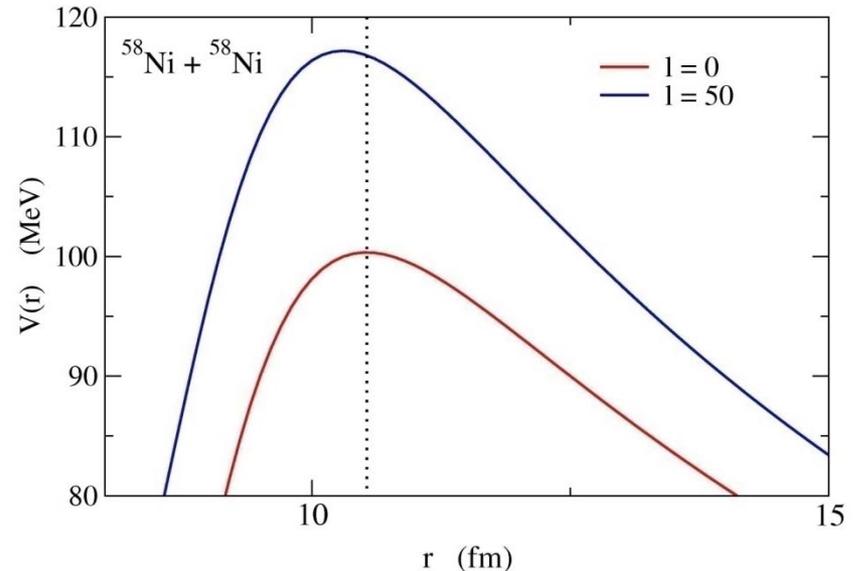
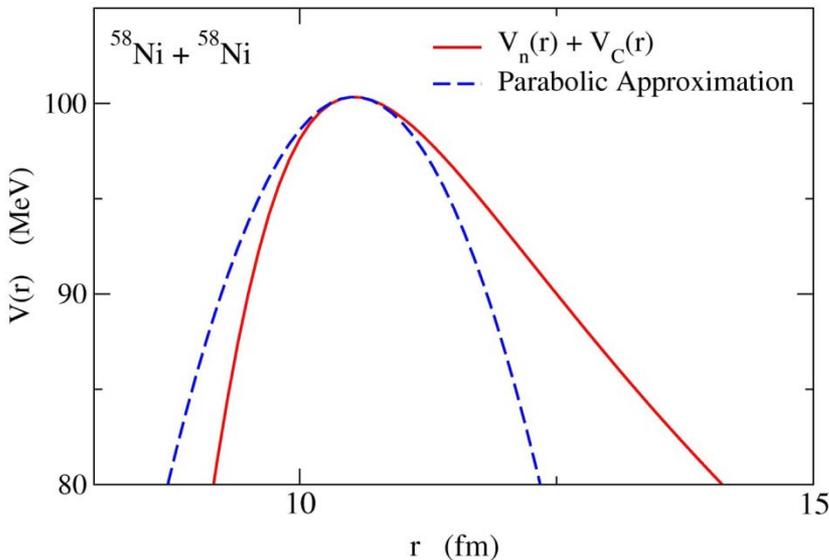
→  $P_0(E) = 1 / \left( 1 + \exp \left[ \frac{2\pi}{\hbar\Omega} (V_b - E) \right] \right)$

ii) 角運動量  $l$  の透過確率を角運動量  $l=0$  の透過確率を用いて近似

$$P_l(E) \sim P_0 \left( E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R_b^2} \right)$$

(曲率及び障壁の位置が角運動量  $l$  に依らないと仮定)

iii)  $l$  の和を積分に置き換える





$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log \left[ 1 + \exp \left( \frac{2\pi}{\hbar\Omega} (E - V_b) \right) \right]$$

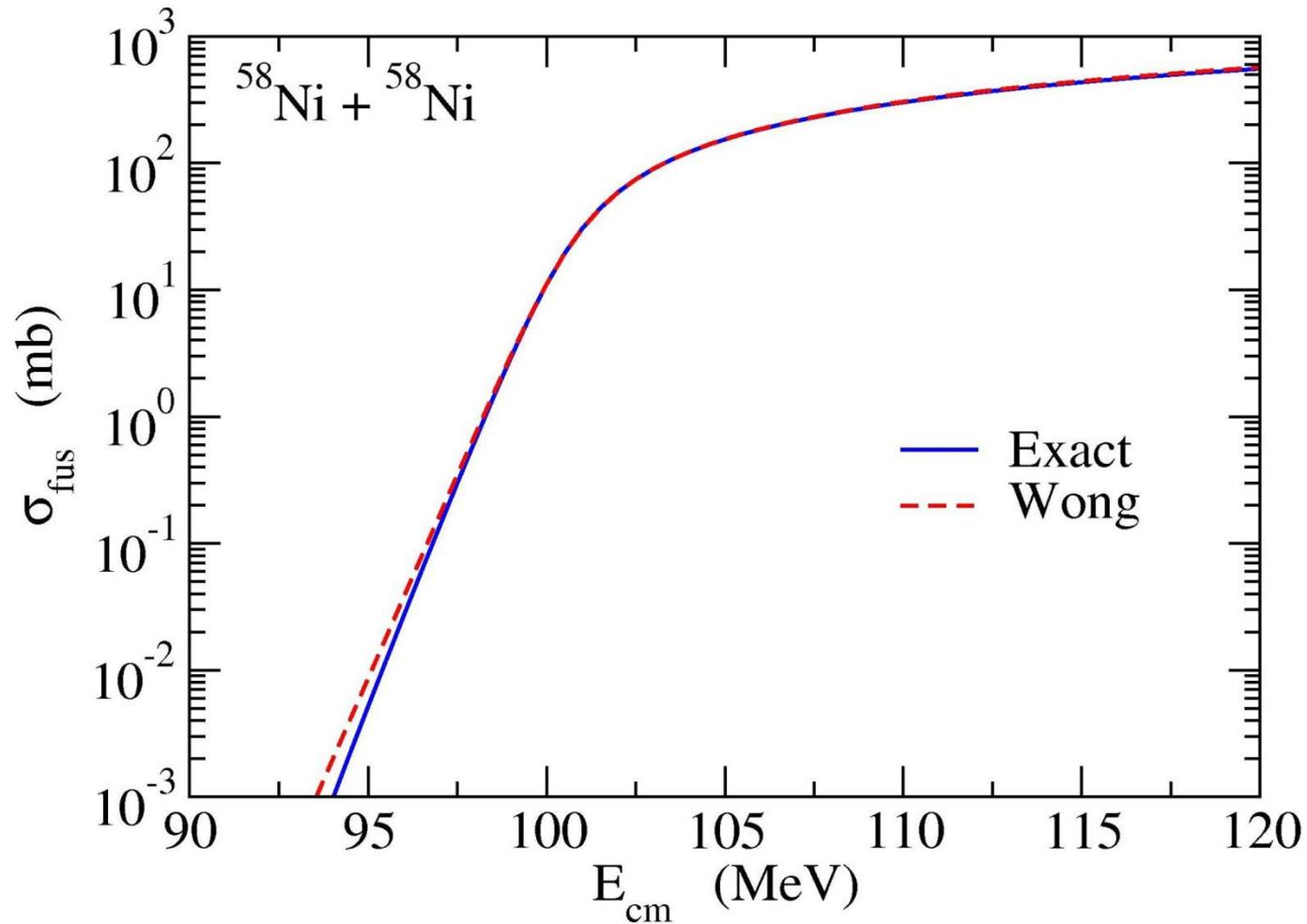
(note)  $E \gg V_b$  の時  $1 \ll \exp \left( \frac{2\pi}{\hbar\Omega} (E - V_b) \right)$

$$\implies \sigma_{\text{fus}}(E) \sim \pi R_b^2 \left( 1 - \frac{V_b}{E} \right) = \sigma_{\text{fus}}^{\text{cl}}(E)$$

(note)

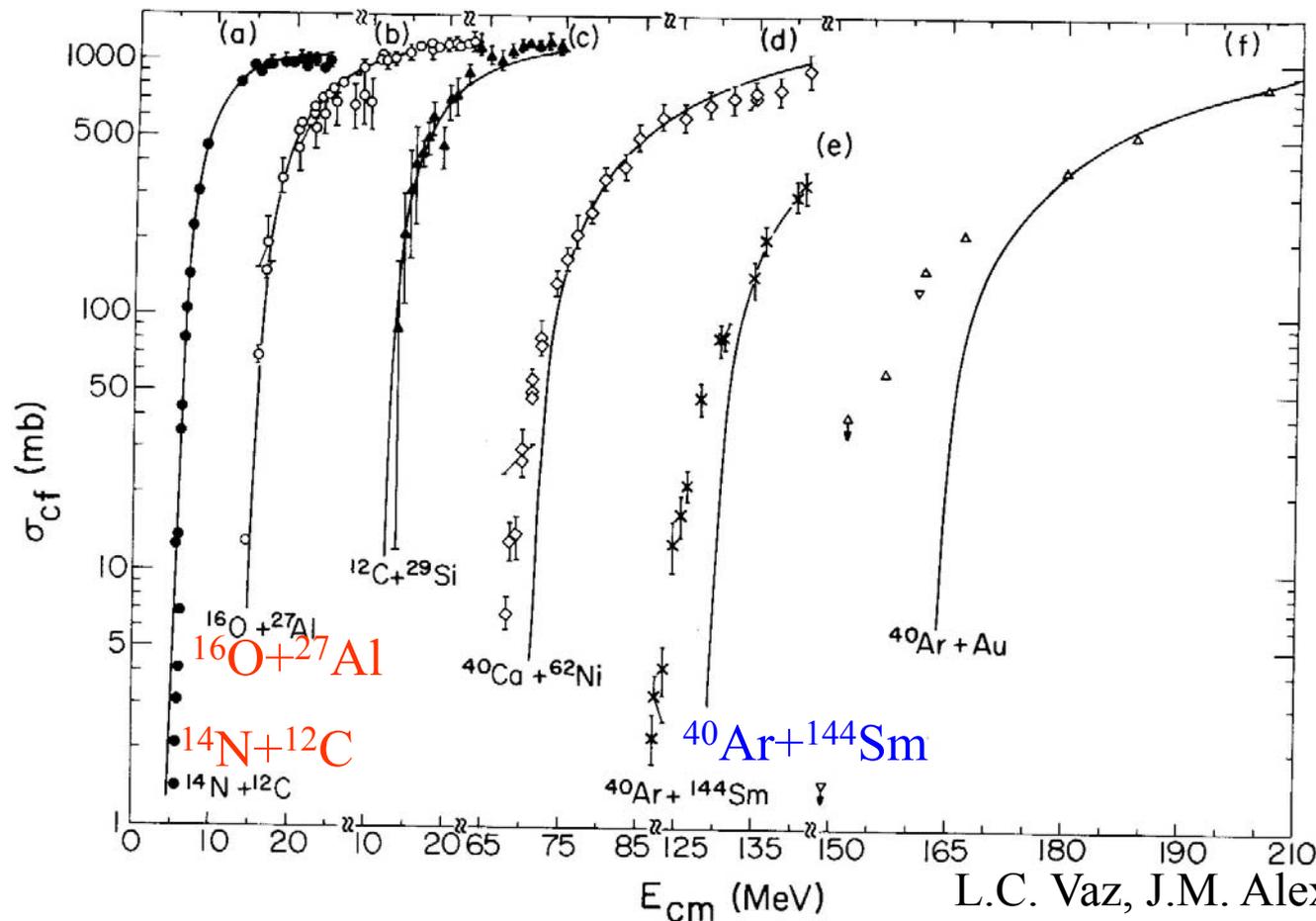
$$\frac{d(E\sigma_{\text{fus}})}{dE} = \frac{\pi R_b^2}{1 + \exp \left[ \frac{2\pi}{\hbar\Omega} (V_b - E) \right]} = \pi R_b^2 \cdot P_{l=0}(E)$$

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log \left[ 1 + \exp \left( \frac{2\pi}{\hbar\Omega} (E - V_b) \right) \right]$$



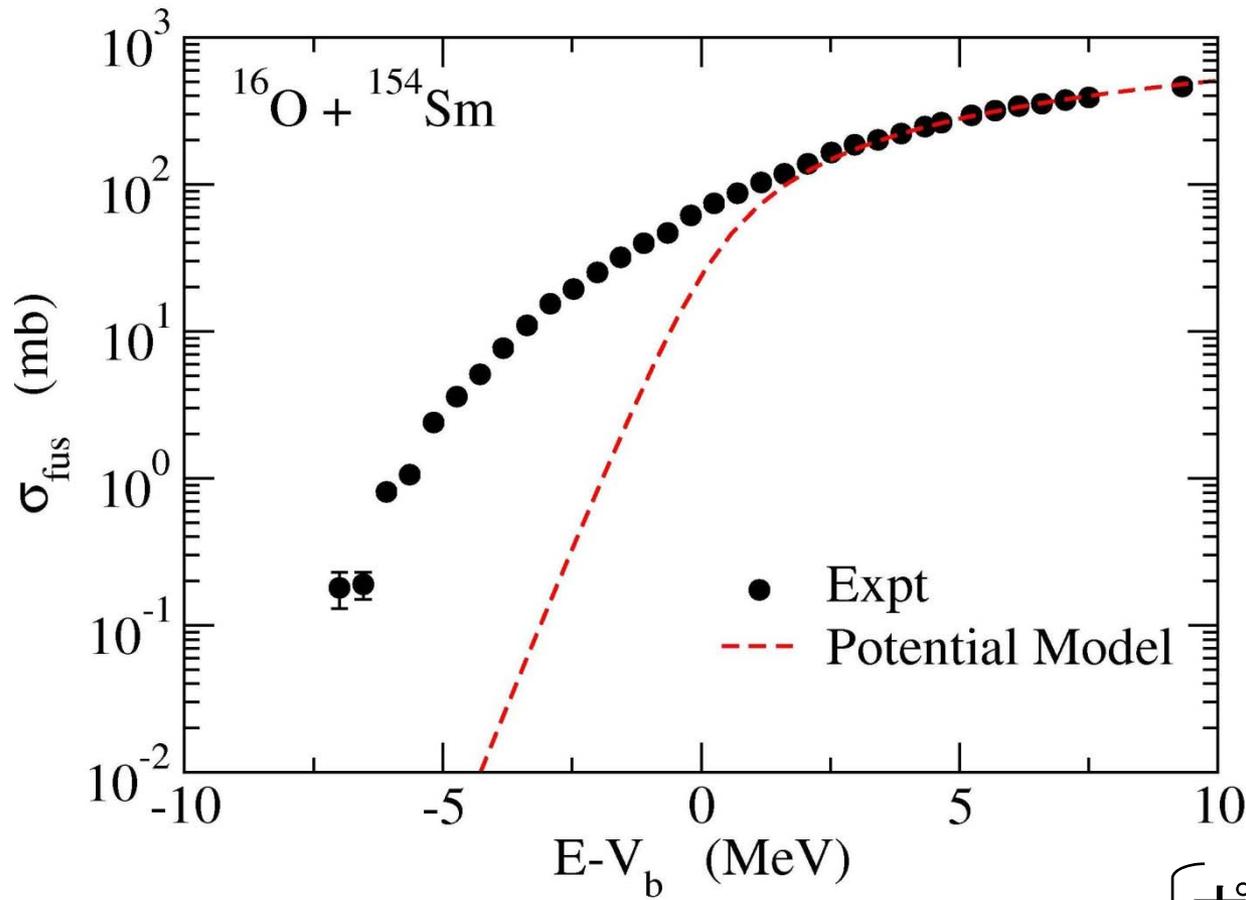
# ポテンシャル模型と実験データの比較

エネルギーに依存しない静的なポテンシャルによる核融合反応断面積



L.C. Vaz, J.M. Alexander, and  
G.R. Satchler, Phys. Rep. 69('81)373

- 比較的軽い系では実験データを再現
- 系が重くなると過小評価(低エネルギー)



ポテンシャル模型:

$E > V_b$  では大体データを再現

$E < V_b$  では核融合断面積を過小に評価



何が原因?

{ ポテンシャルが不十分?  
他の要因?

# Potential Inversion

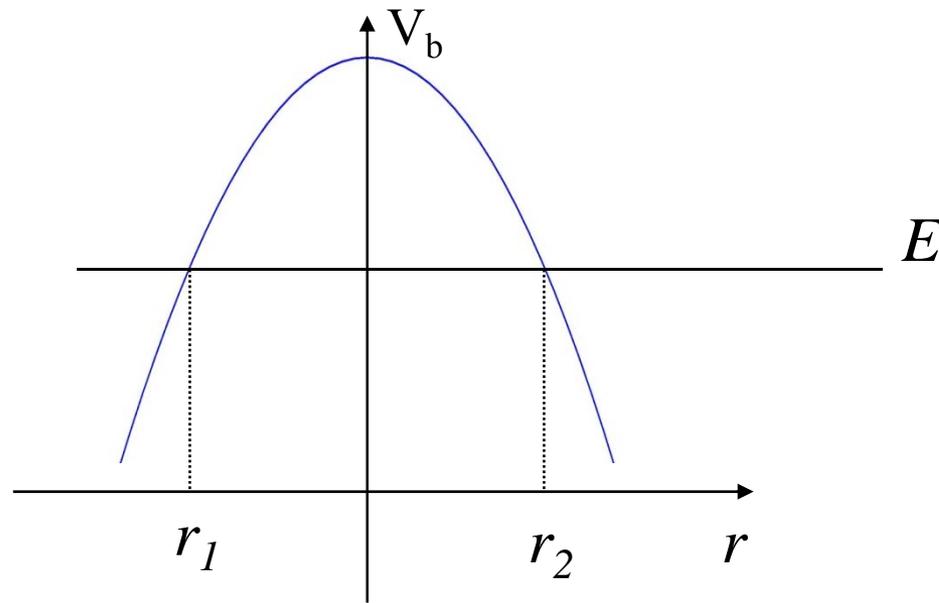
$$P_0(E) = \frac{1}{\pi R_b^2} \frac{d(E\sigma_{\text{fus}})}{dE}$$

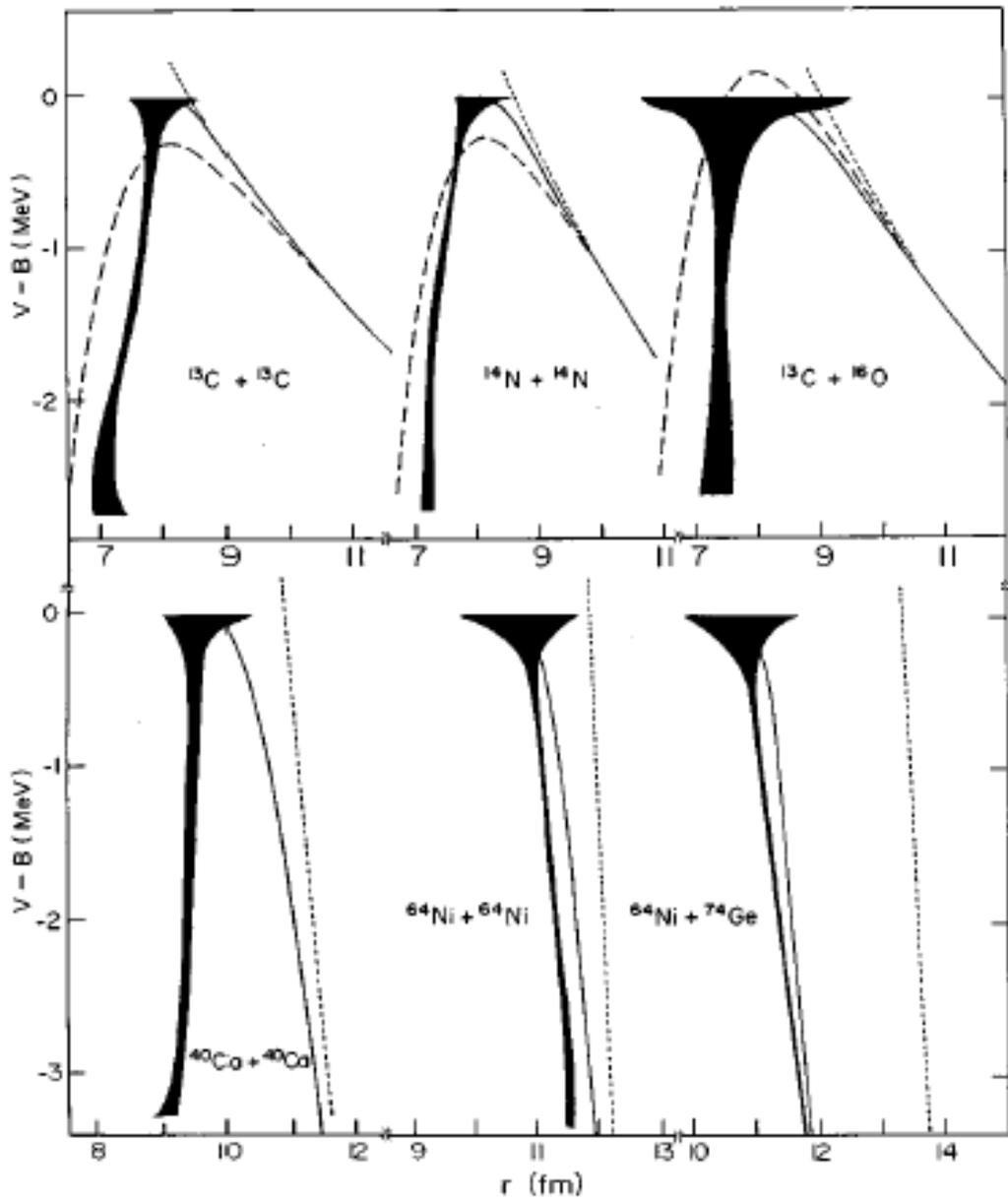
(note)

$$P_0(E) = 1/[1 + e^{2S_0(E)}], \quad S_0(E) = \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)}$$



$$t(E) \equiv r_2 - r_1 = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}} \int_E^{V_b} \frac{\frac{dS_0(E')}{dE'}}{\sqrt{E' - E}} dE'$$





$$P_0(E) = \frac{1}{\pi R_b^2} \frac{d(E\sigma_{\text{fus}})}{dE}$$

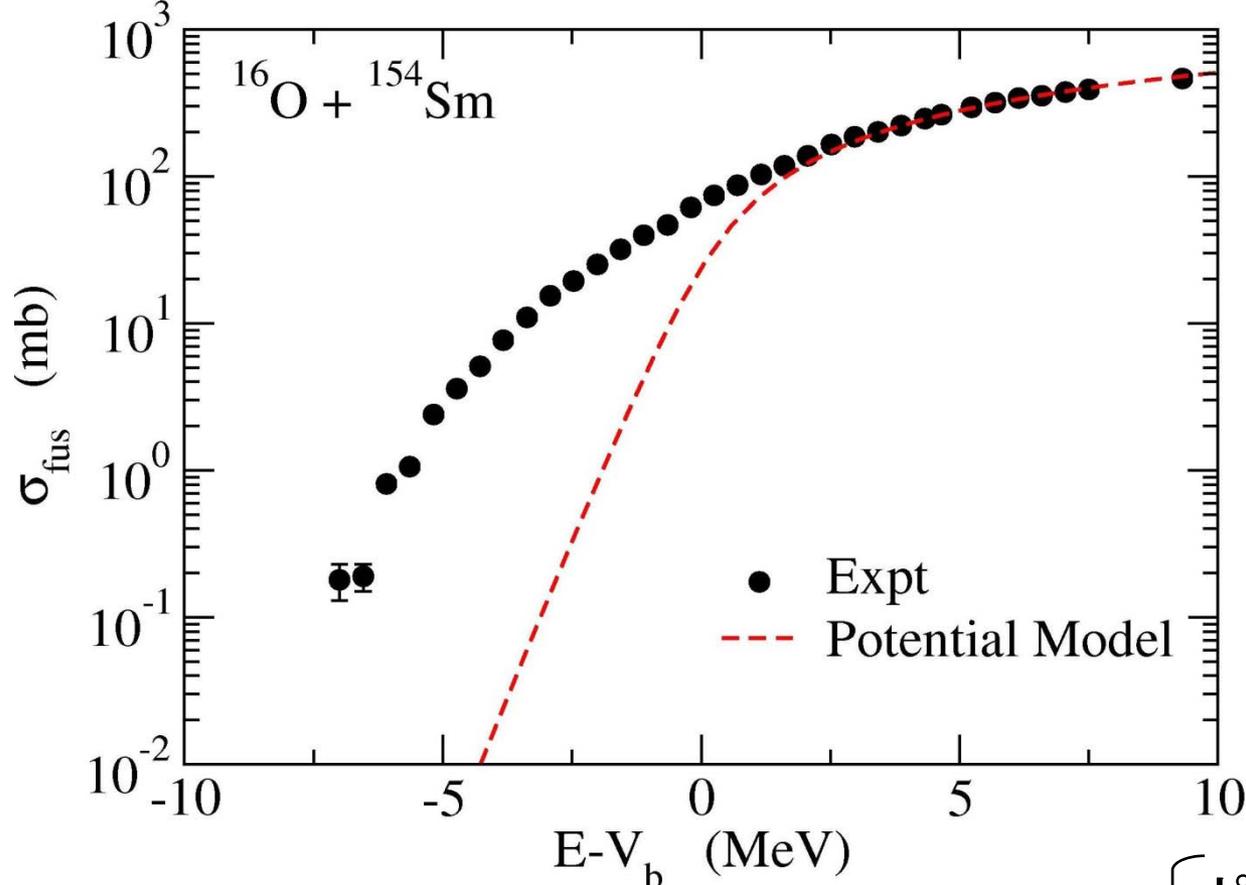
Balantekin et al. ('83):  
 E-indep, local, single-ch.  
 ポテンシャル模型を仮定



非物理的なポテンシャル

A.B. Balantekin, S.E. Koonin, and  
 J.W. Negele, PRC28('83)1565

# エネルギーに依存しない静的なポテンシャルによる核融合反応断面積



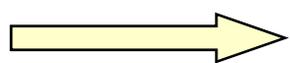
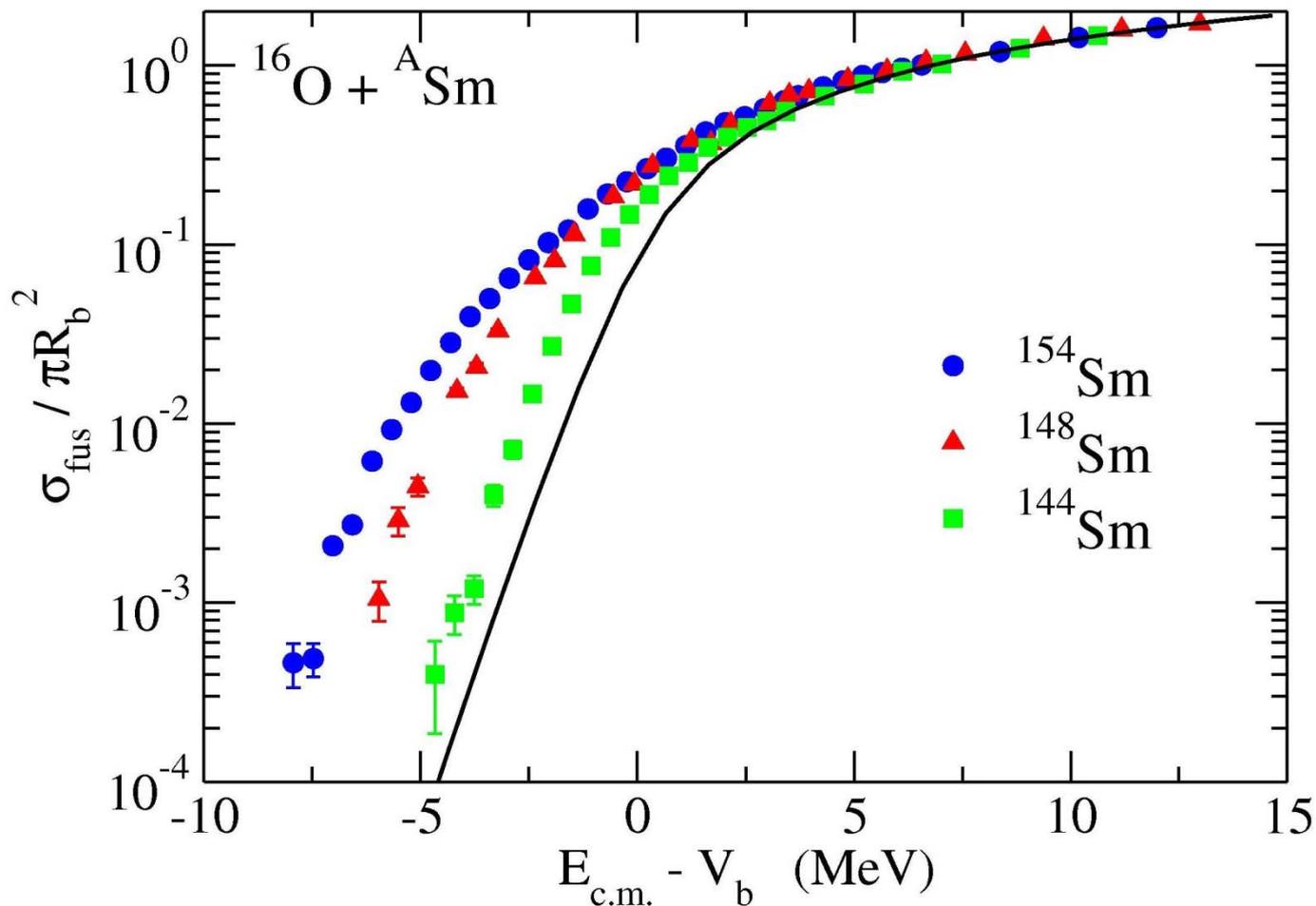
$E > V_b$  では大体データを再現

$E < V_b$  では核融合断面積を過小に評価

↑  
何が原因？

{ ~~ポテンシャルが不十分？~~  
他の要因？

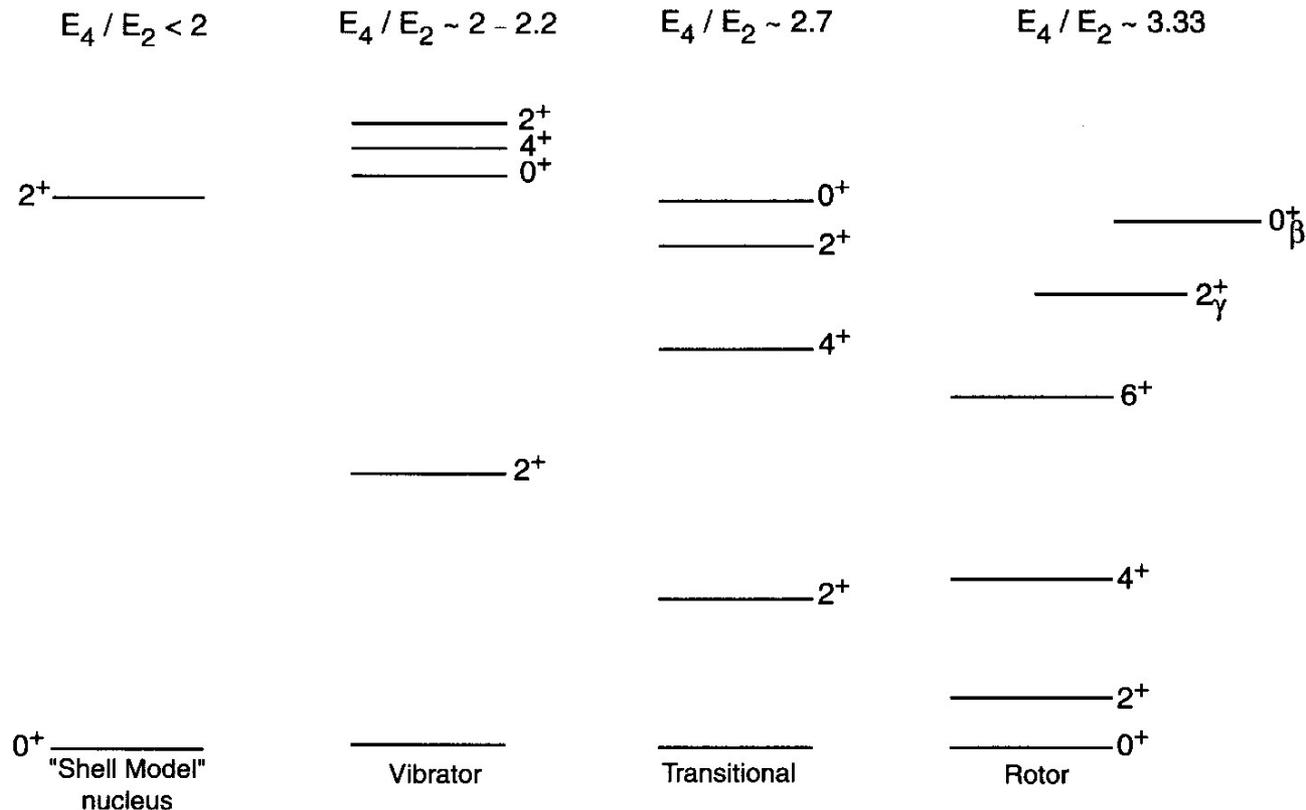
# 核融合断面積の標的核依存性



$E < V_b$  において強い標的核依存性

# 原子核の低励起集団運動

偶々核の低エネルギーに現れる励起状態は集団励起状態であり、対相関と殻構造を強く反映する。



SCHEMATIC EVOLUTION OF STRUCTURE  
NEAR CLOSED - SHELL → MID SHELL

Taken from R.F. Casten,  
“Nuclear Structure from a  
Simple Perspective”

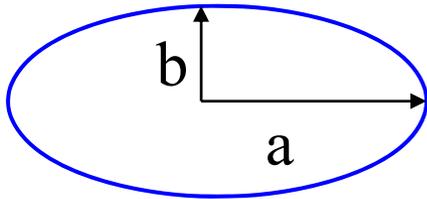


# 振動励起状態

Bethe-Weizacker formula: Liquid-drop model に基づく質量公式

$(A, Z)$   $B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$

→ 変形すると



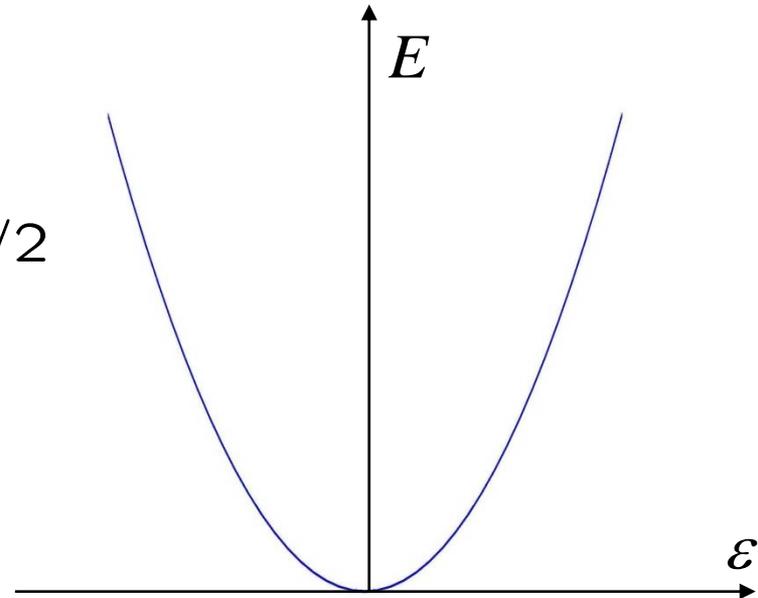
$$a = R \cdot (1 + \epsilon)$$

$$b = R \cdot (1 + \epsilon)^{-1/2}$$

↪

$$E_{\text{surf}} = E_{\text{surf}}^{(0)} (1 + 2\epsilon^2/5 + \dots)$$

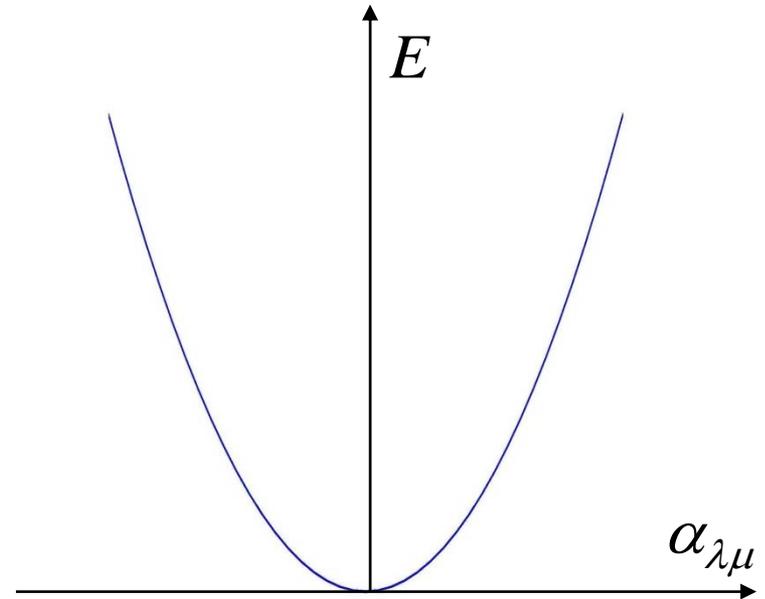
$$E_C = E_C^{(0)} (1 - \epsilon^2/5 + \dots)$$



一般に  $R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \right)$

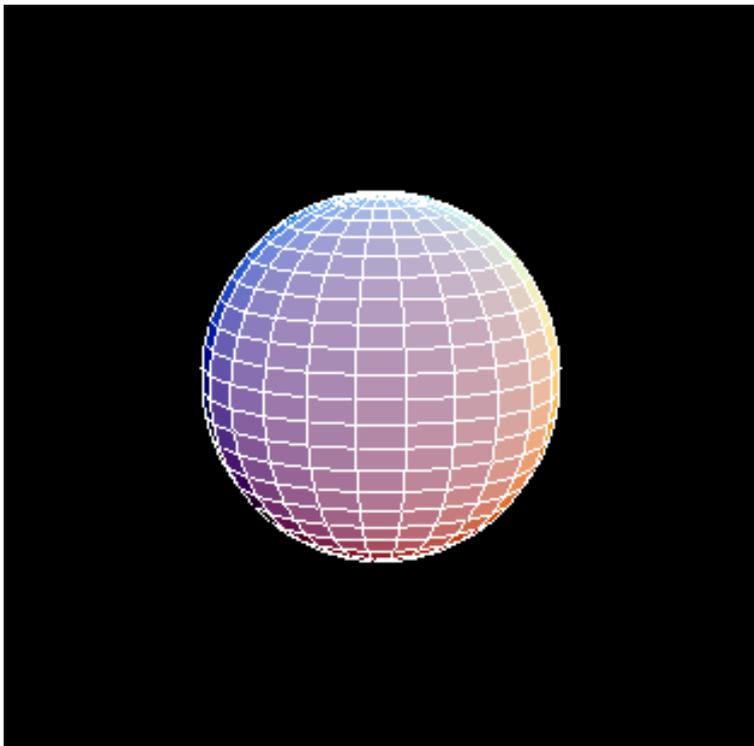
$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2$

調和振動子型の運動



$\lambda=2$ : Quadrupole vibration

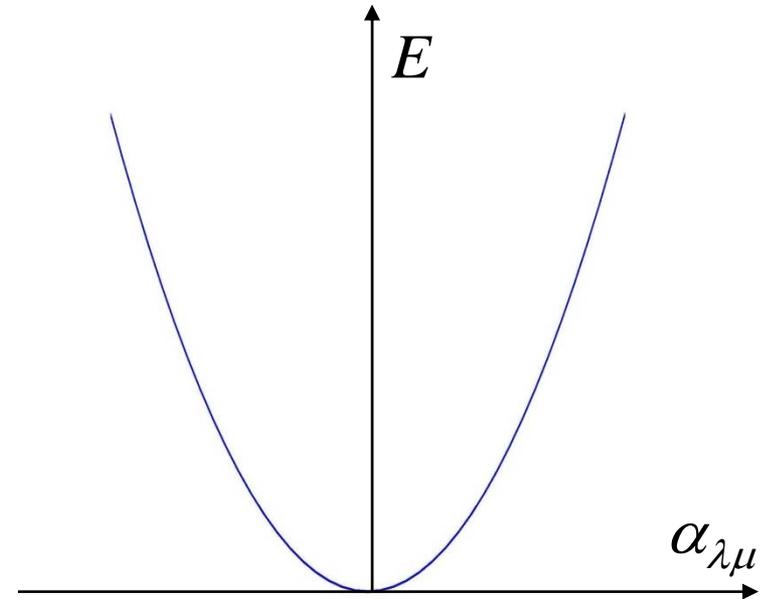
ムービー: 在田謙一郎氏 (名工大)  
<http://www.phys.nitech.ac.jp/~arita/>



一般に  $R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \right)$

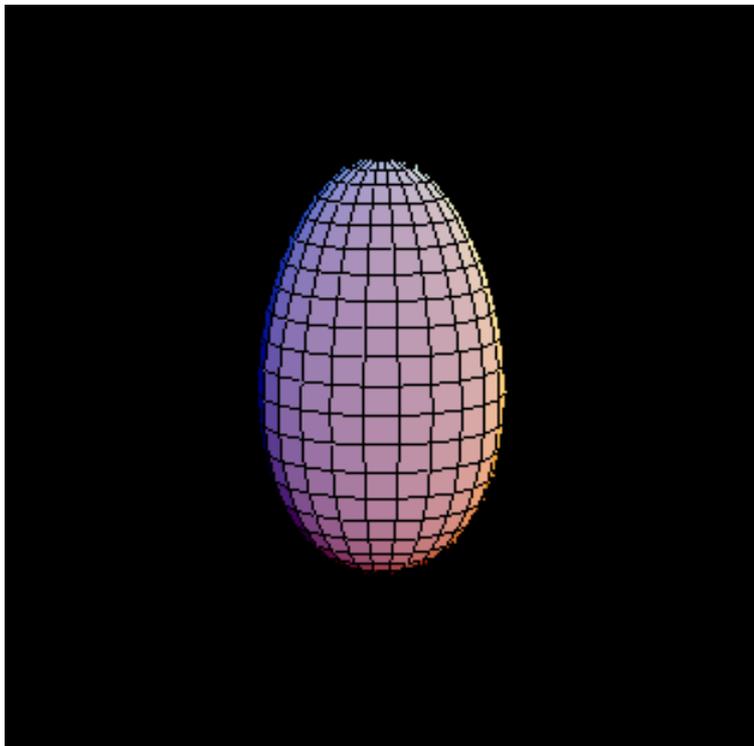
$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2$

調和振動子型の運動



$\lambda=3$ : Octupole vibration

ムービー: 在田謙一郎氏 (名工大)  
<http://www.phys.nitech.ac.jp/~arita/>



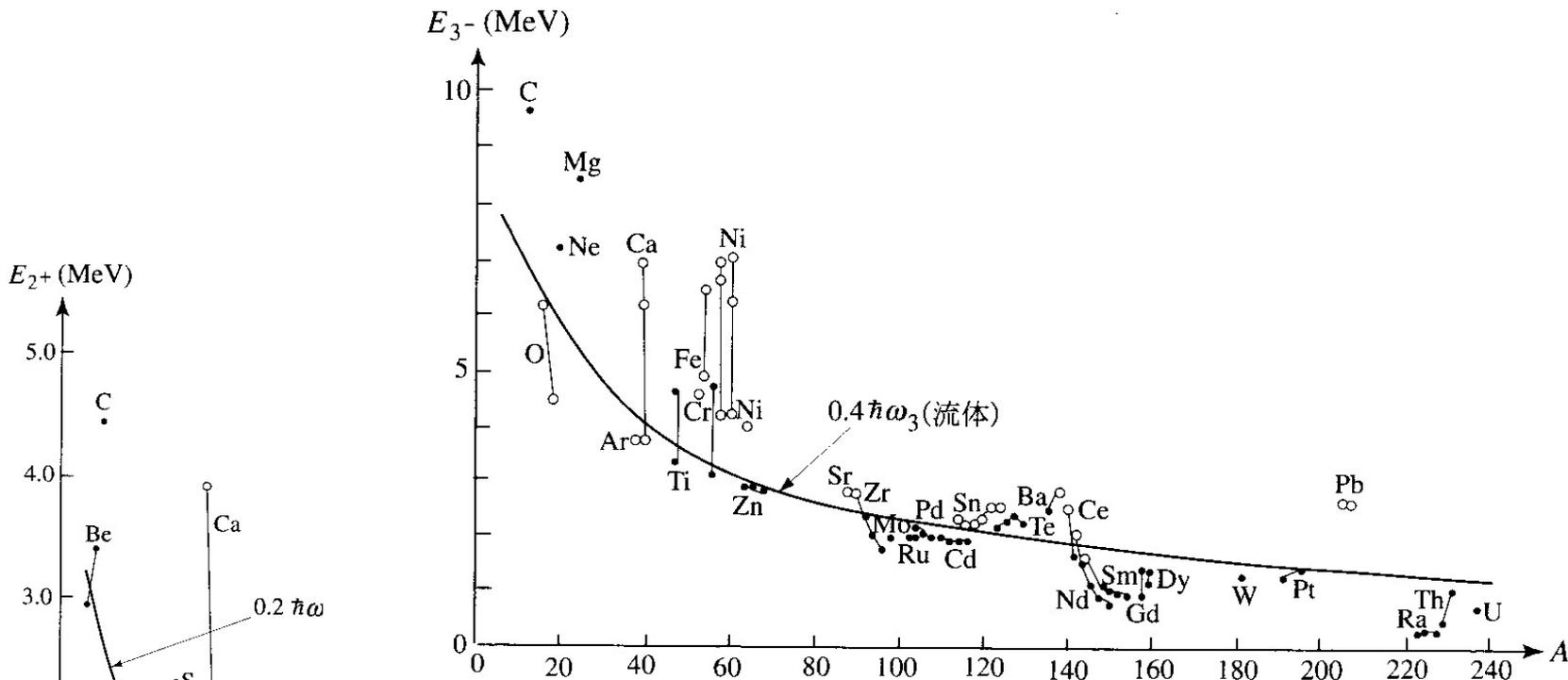


図 3.3 偶々核の第 1 励起 3- 状態の励起エネルギー

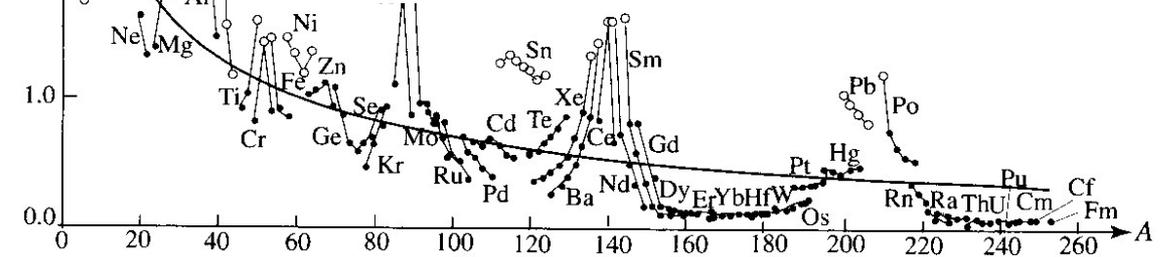


図 3.2 偶々核の第 1 励起 2+ 状態の励起エネルギー

Double phonon states

4+ ————— 1.282 MeV  
 2+ ————— 1.208 MeV  
 0+ ————— 1.133 MeV

2+ ————— 0.558 MeV

0+ —————  
<sup>114</sup>Cd

図: 高田、池田  
 「原子核構造論」より

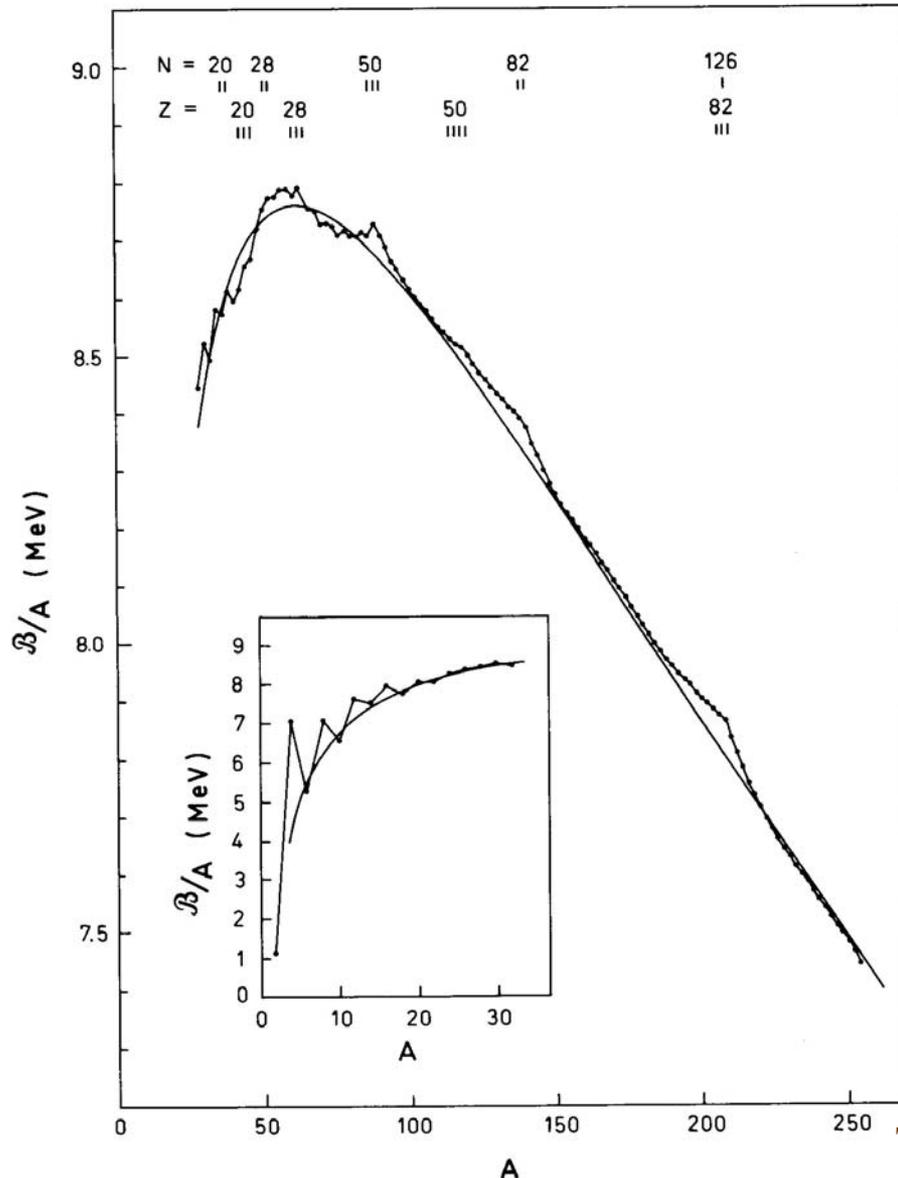
Microscopic description

⇒ Random phase approximation (RPA)  
 (別ファイル)

# 回転励起状態

## ●殻エネルギー

$$B(N, Z) = B_{\text{macro}}(N, Z) + B_{\text{micro}}(N, Z)$$



### ●Smooth part

$$B_{\text{macro}}(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

### ●Fluctuation part

$$B_{\text{micro}} = B_{\text{pair}} + B_{\text{shell}}$$

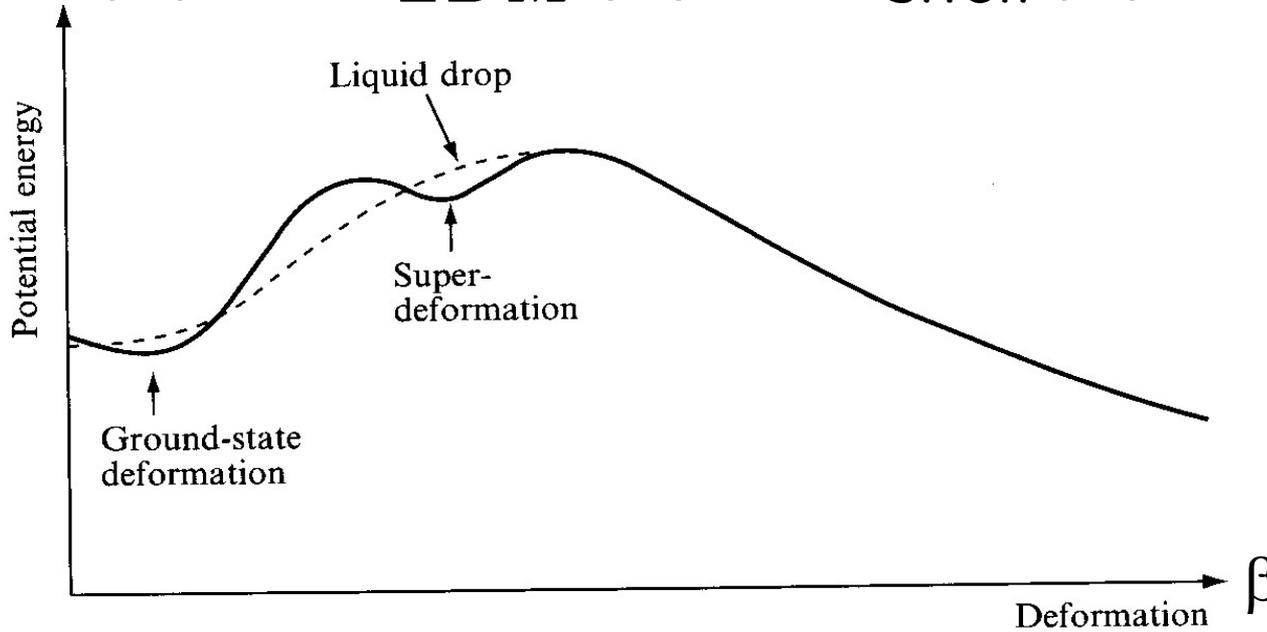
Liquid drop model:

$$B_{\text{LDM}} = B_{\text{macro}} + B_{\text{pair}}$$

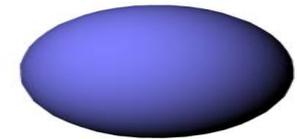
Taken from Bohr-Mottelson

Deformed energy surface for a given nucleus

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{shell}(\beta)$$

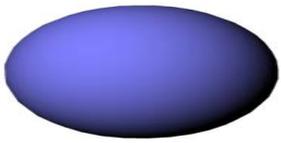


Taken from J.S. Lilley,  
“Nuclear Physics”

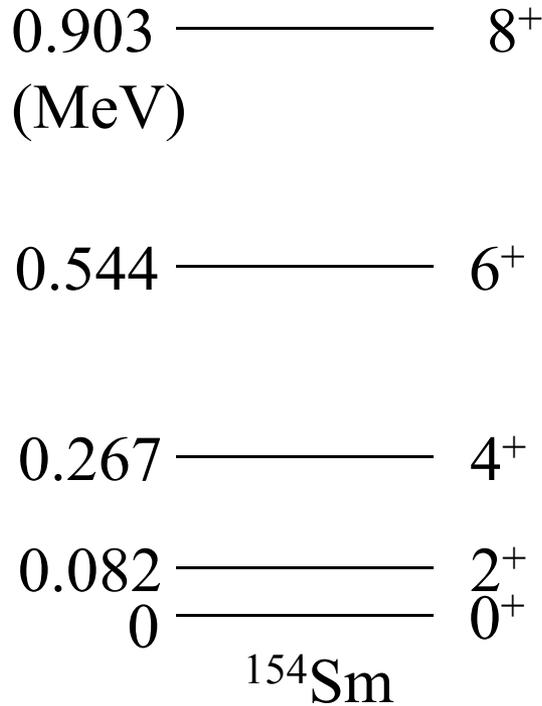


LDM only  $\longrightarrow$  always spherical ground state  
Shell correction  $\longrightarrow$  may lead to a **deformed g.s.**

\* Spontaneous Symmetry Breaking



# $^{154}\text{Sm}$ の励起スペクトル

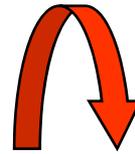


$$E_I \sim \frac{I(I + 1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

Cf. 剛体の回転エネルギー(古典力学)

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J}\omega, \omega = \dot{\theta})$$

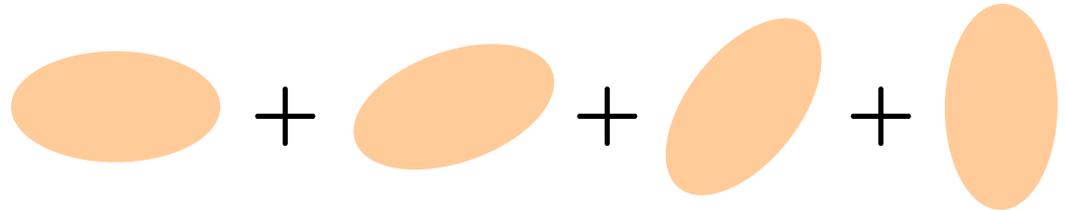


$^{154}\text{Sm}$  は変形している

(note)  $0^+$  状態とは(量子力学)?

$0^+$ : 空間の異方性がない

→ 色々な向きが等確率で混ざっている



c.f. HF + Angular Momentum Projection

# Evidences for nuclear deformation

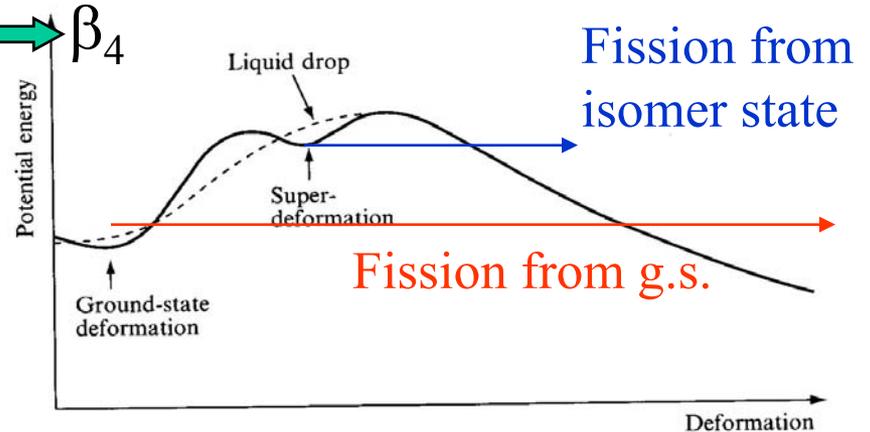
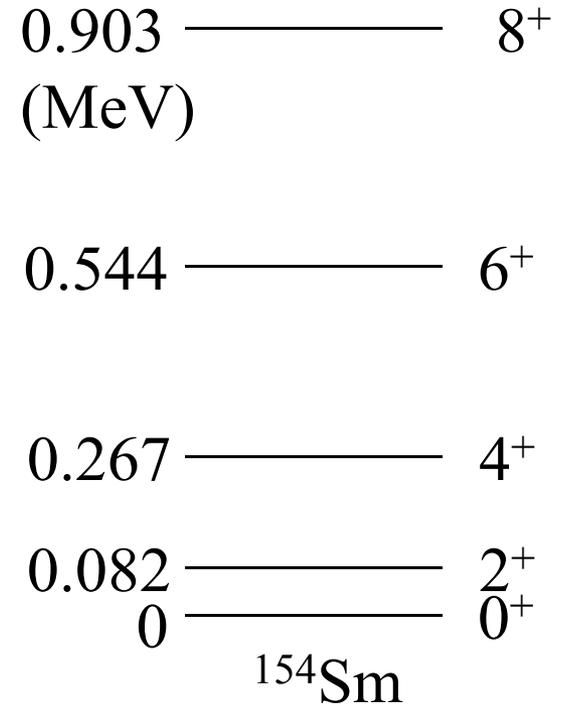
- The existence of rotational bands

$$E_I = \frac{I(I + 1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

- Very large quadrupole moments (for odd-A nuclei)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \Psi_{II} | r^2 Y_{20} | \Psi_{II} \rangle$$

- Strongly enhanced quadrupole transition probabilities
- Hexadecapole matrix elements  $\longleftrightarrow \beta_4$
- Single-particle structure
- Fission isomers



# 核融合反応に対する集団励起の影響：回転の場合

エネルギー・スケールの比較

$$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{トンネル運動: } E_{\text{tun}} \sim \hbar\Omega \sim 3.5 \text{ MeV (クーロン障壁の曲率)} \\ \text{回転運動: } E_{\text{rot}} \sim E_{2^+} \sim 0.08 \text{ MeV} \end{array} \right.$$

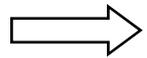
↷  $E_{\text{tun}} \gg E_{\text{rot}} = I(I+1)\hbar^2/2\mathcal{J} \rightarrow 0$

↔  $\mathcal{J} \rightarrow \infty$

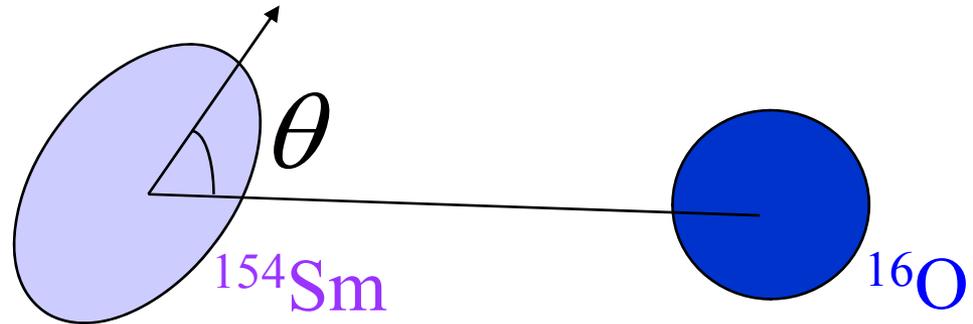
↷  $^{154}\text{Sm}$  の方向は反応中にほとんど変化しない

(note)

反応の初期は基底状態  
( $0^+$  状態)



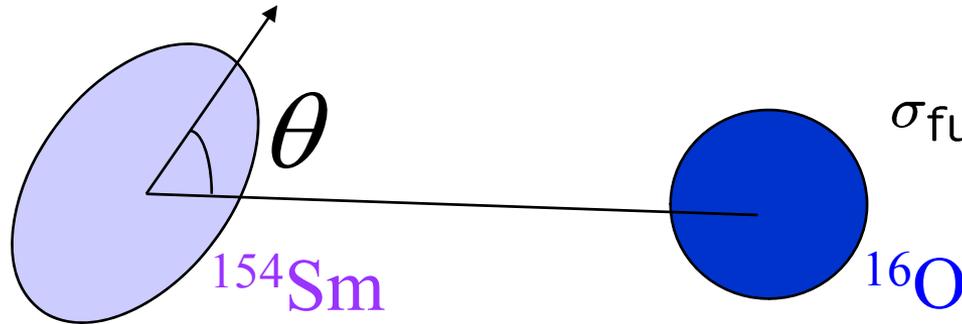
あらゆる方向が等確率  
で混ざっている



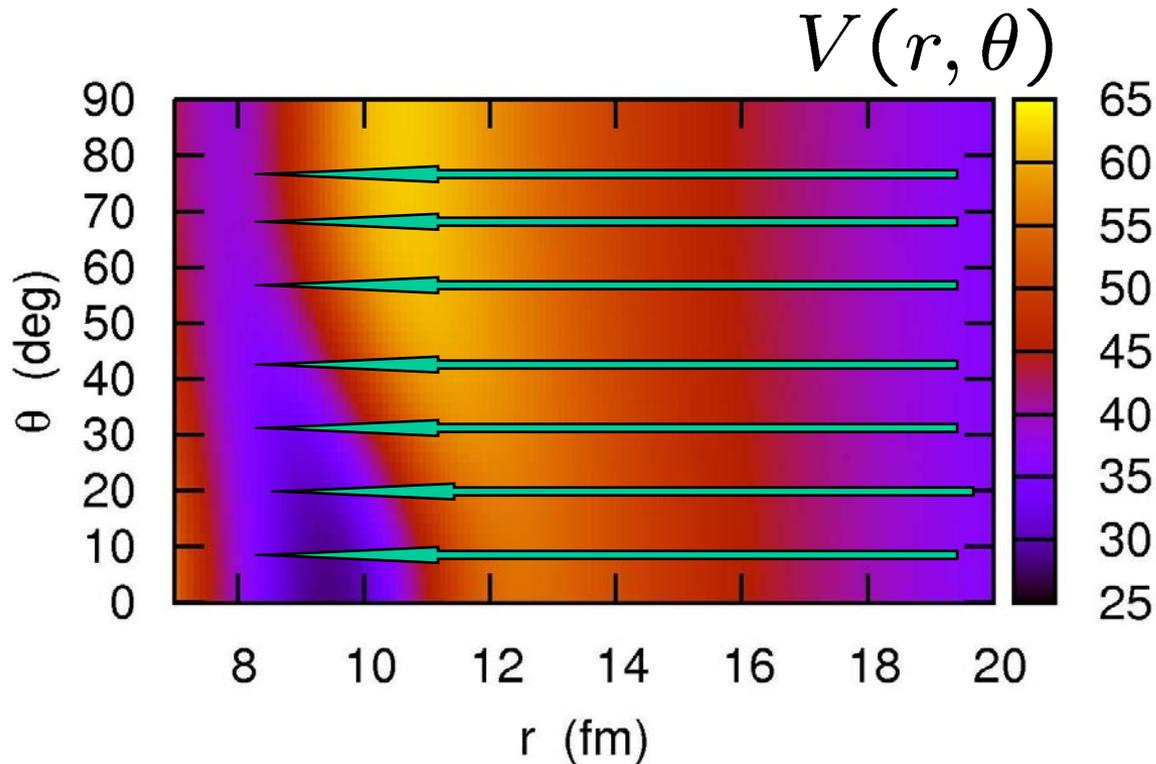
$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos \theta) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta)$$

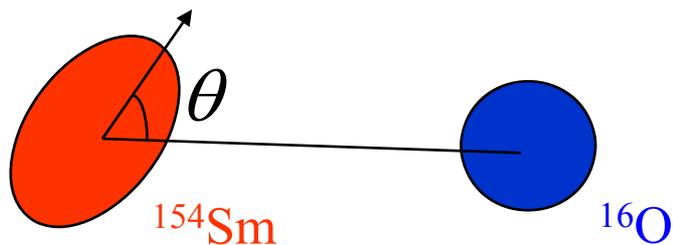
# Effect of collective excitation on $\sigma_{\text{fus}}$ : rotational case

↪ The orientation angle of  $^{154}\text{Sm}$  does not change much during fusion

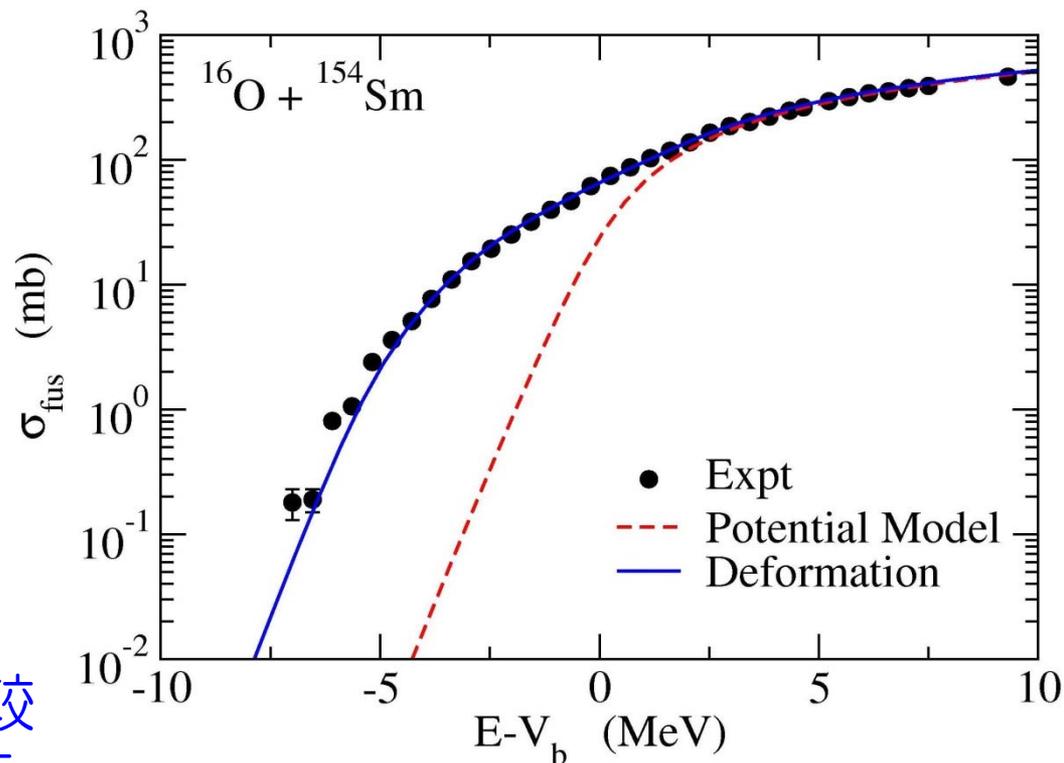
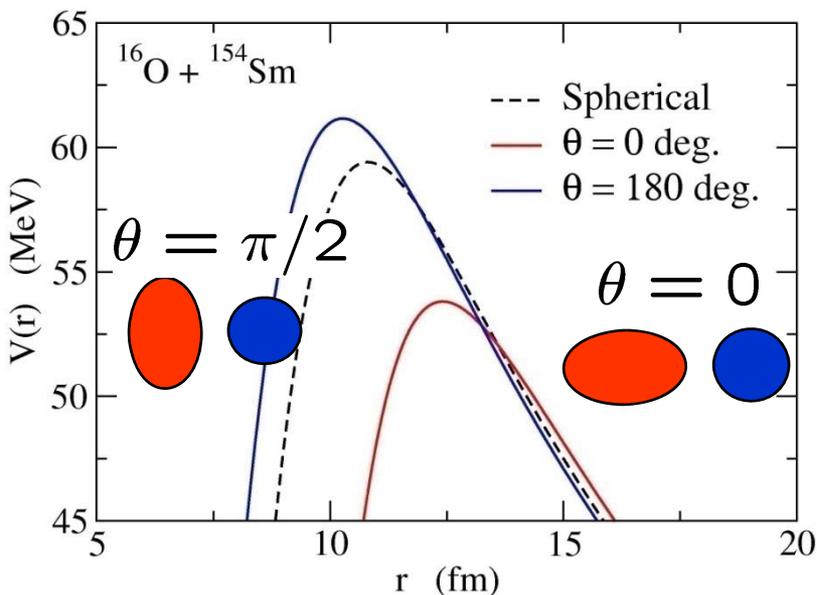


$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos \theta) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta)$$





$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos \theta) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta)$$



$\theta = 0$  では引力の核力が比較的遠方から働くため障壁が下がる。

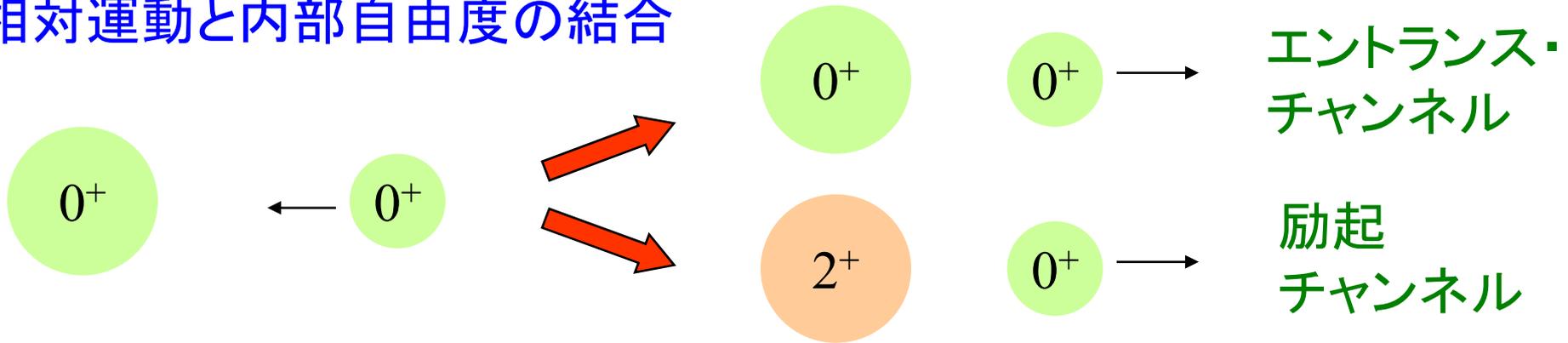
$\theta = \pi/2$  はその逆。近づかないと引力が働かないため障壁は上がる。

**変形の効果:** 核融合断面積が 10~100 倍増大

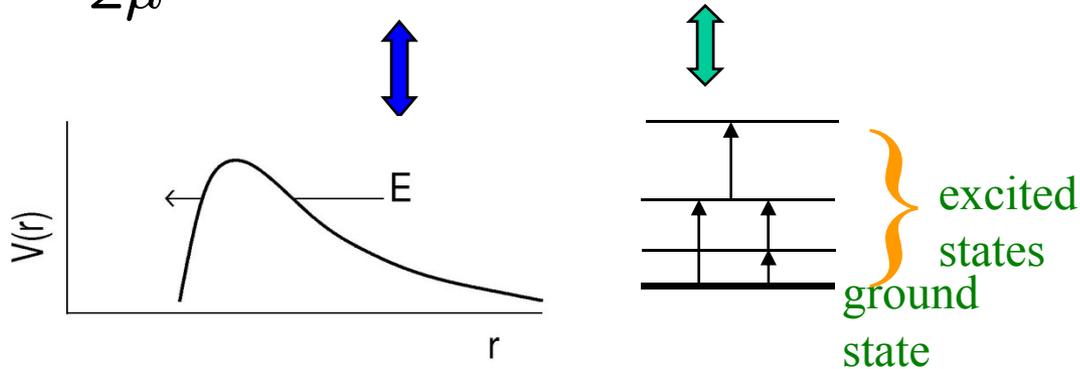
⇒ **核融合反応:** 核構造に対する興味深いプローブ

# より量子的な取り扱い：結合チャンネル法

相対運動と内部自由度の結合



$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(r, \xi)$$



$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k \phi_k(\xi)$$

$$\Psi(r, \xi) = \sum_k \psi_k(r) \phi_k(\xi)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(\mathbf{r}, \xi)$$

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum_k \psi_k(\mathbf{r})\phi_k(\xi) \quad H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k \phi_k(\xi)$$

Schroedinger equation:  $(H - E)\Psi(\mathbf{r}, \xi) = 0$

$$\langle \phi_k | \rightarrow$$

$$\langle \phi_k | H - E | \Psi \rangle = 0$$

or

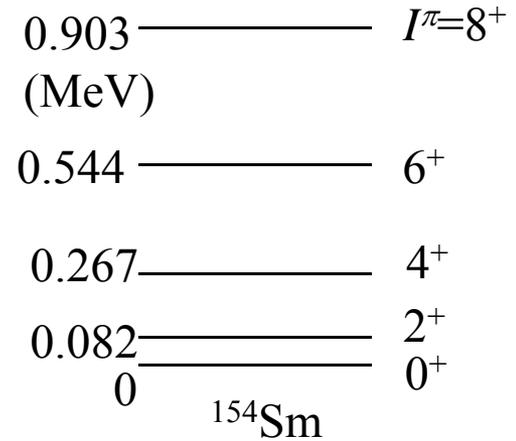
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E \right] \psi_k(\mathbf{r}) + \sum_{k'} \langle \phi_k | V_{\text{coup}} | \phi_{k'} \rangle \psi_{k'}(\mathbf{r}) = 0$$

結合チャンネル方程式

# 角運動量結合

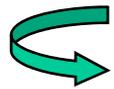
$$H_0(\xi)\phi_{nIm_I}(\xi) = \epsilon_{nI}\phi_{nIm_I}(\xi)$$

全角運動量:  $I + l = J$



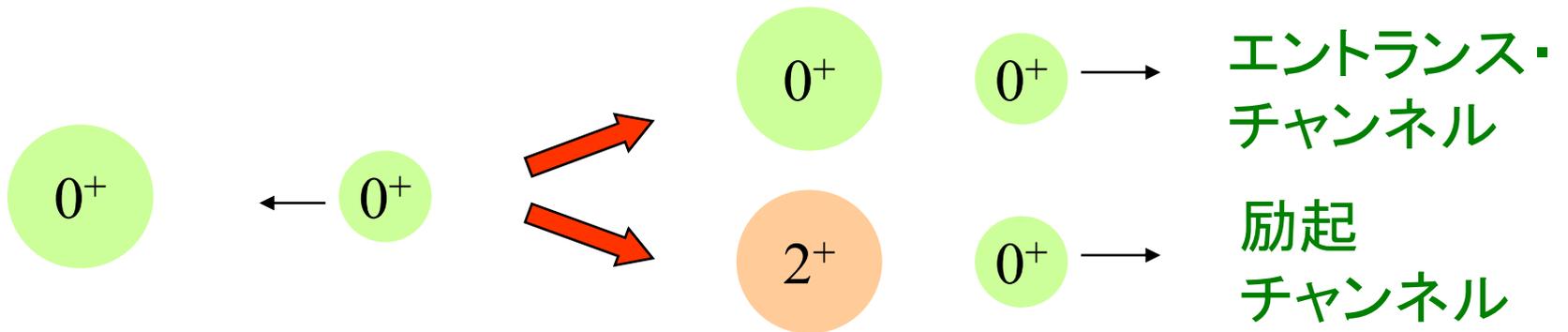
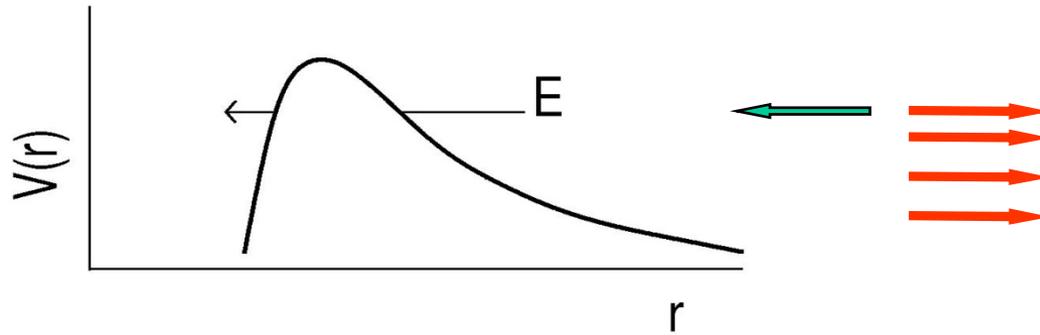
$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum_k \psi_k(\mathbf{r})\phi_k(\xi) = \sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r} [Y_l(\hat{\mathbf{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}$$

$$\langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)} | H - E | \Psi \rangle = 0$$



$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) - E + \epsilon_{nI} \right] u_{nlI}(r) + \sum_{n'l'I'} \langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)} | V_{\text{coup}}(r) | [Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)} \rangle u_{n'l'I'}(r) = 0$$

# 境界条件



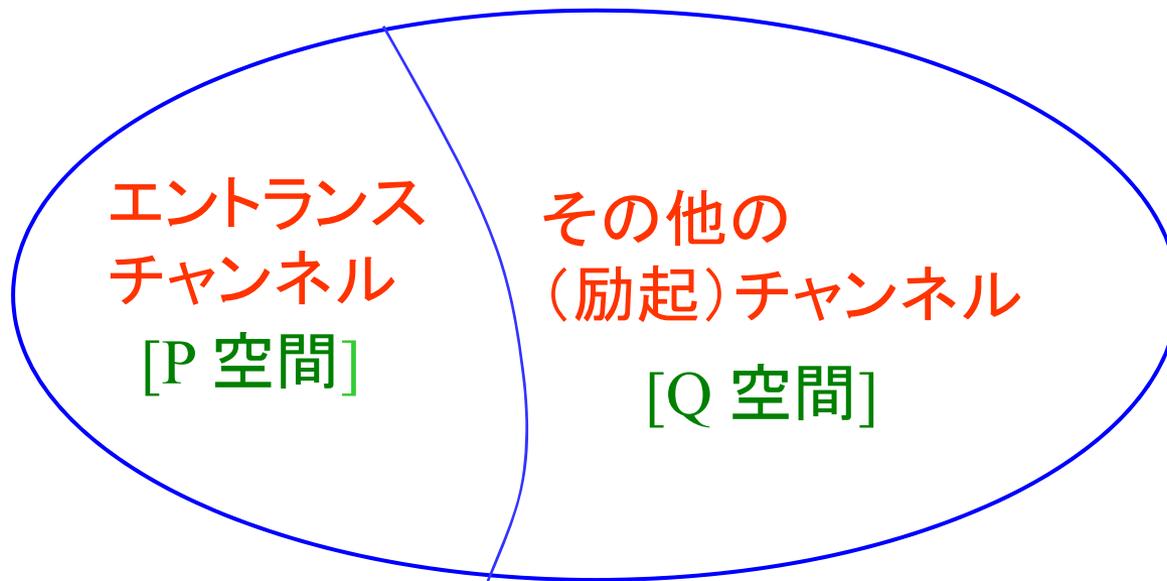
$$\Psi(r, \xi) = \sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r} [Y_l(\hat{r}) \phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}$$

$$u_{nlI}(r) \rightarrow H_l^{(-)}(k_{nI}r) \delta_{n,n_i} \delta_{l,l_i} \delta_{I,I_i} - \sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}} S_{nlI} H_l^{(+)}(k_{nI}r)$$

$$P_l(E) = 1 - \sum_{nI} |S_{nlI}|^2$$

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) P_l(E)$$

## (note) Dynamical Polarization Potential



考えている全ヒルベルト空間(概念図)

Q 空間を「消去」して P 空間に射影

→ P 空間(エントランス・チャンネル)に対する effective potential (dynamical polarization potential)

↶ エネルギー依存、non-local、複素ポテンシャル

↔ 光学ポテンシャル  $V_{\text{opt}}$

## 例: 2チャンネル問題

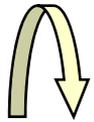
$$\underbrace{\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) \right]}_{\equiv \hat{h}_l} + \begin{pmatrix} 0 & F(r) \\ F(r) & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(r) \\ u_1(r) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_0(r) \\ u_1(r) \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{cases} \hat{h}_l u_0(r) + F(r)u_1(r) = E u_0(r) & (1) \\ \hat{h}_l u_1(r) + F(r)u_0(r) = (E - \epsilon)u_1(r) & (2) \end{cases}$$

$$(2) \longrightarrow u_1(r) = - \int_0^\infty dr' G^{(+)}(r, r'; E - \epsilon) F(r') u_0(r')$$

$$G^{(+)}(r, r'; E - \epsilon) = \left( \frac{1}{\hat{h}_l - (E - \epsilon) + i\eta} \right)_{r, r'}$$



$$\hat{h}_l u_0(r) - F(r) \int_0^\infty dr' G^{(+)}(r, r'; E - \epsilon) F(r') u_0(r') = E u_0(r)$$

## 例: 2チャンネル問題(続き)

$$\hat{h}_l u_0(r) - F(r) \int_0^\infty dr' G^{(+)}(r, r'; E - \epsilon) F(r') u_0(r') = E u_0(r)$$
$$= \int_0^\infty dr' V_{\text{DPP}}(r, r') u_0(r')$$

$$V_{\text{DPP}}(r, r') = -F(r) G^{(+)}(r, r'; E - \epsilon) F(r')$$

$$G^{(+)}(r, r'; E) = \left( \frac{1}{\hat{h}_l - E + i\eta} \right)_{r, r'}$$
$$= \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{f_l(kr_{<}) \tilde{h}_l^{(+)}(kr_{>})}{W}$$

$$f_l \rightarrow \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$$

(regular solution)

$$\tilde{h}_l \rightarrow \exp[i(kr - l\pi/2 + \delta_l)]$$

(outgoing solution)

$$W = f'_l \tilde{h}_l - f_l \tilde{h}'_l = k$$

(Wronskian)

より一般的には: Feshbach formalism (ノート参照)

## 結合チャンネル法まとめ

$$\left\{ \begin{array}{l} H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(r, \xi) \\ \Psi(r, \xi) = \sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r} [Y_l(\hat{r}) \phi_{nI}(\xi)]^{(JM)} \end{array} \right.$$

$$H_0(\xi) \phi_{nIm_I}(\xi) = \epsilon_{nI} \phi_{nIm_I}(\xi)$$

$$\langle [Y_l \phi_{nI}]^{(JM)} | H - E | \Psi \rangle = 0$$



$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) - E + \epsilon_{nI} \right] u_{nlI}(r) + \sum_{n'l'I'} \langle [Y_l \phi_{nI}]^{(JM)} | V_{\text{coup}}(r) | [Y_{l'} \phi_{n'I'}]^{(JM)} \rangle u_{n'l'I'}(r) = 0$$

$$u_{nlI}(r) \rightarrow H_l^{(-)}(k_{nI}r) \delta_{n,n_i} \delta_{l,l_i} \delta_{I,I_i} - \sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}} S_{nlI} H_l^{(+)}(k_{nI}r)$$

$$P_l(E) = 1 - \sum_{nI} |S_{nlI}|^2$$

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) P_l(E)$$

## 結合チャンネル方程式の2通りの解き方

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(r, \xi)$$

$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k \phi_k(\xi)$$

### 1) 連立(2階)微分方程式を解く

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum_k \psi_k(\mathbf{r})\phi_k(\xi)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E \right] \psi_k(\mathbf{r}) + \sum_{k'} \langle \phi_k | V_{\text{coup}} | \phi_{k'} \rangle \psi_{k'}(\mathbf{r}) = 0$$

### 2) 時間発展方程式を解く(1)の半古典近似)

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) \quad \text{を用いて } r(t) \text{ の軌道を決定}$$

$$\longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = [H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(r(t), \xi)] |\Psi(t)\rangle$$

$$\text{を } |\Psi(t)\rangle = \sum_k a_k(t) |\phi_k(\xi)\rangle \quad \text{と展開して解く}$$

## 結合チャンネル方程式の2通りの解き方

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(r, \xi)$$

### 2) 時間発展方程式を解く(1)の半古典近似)

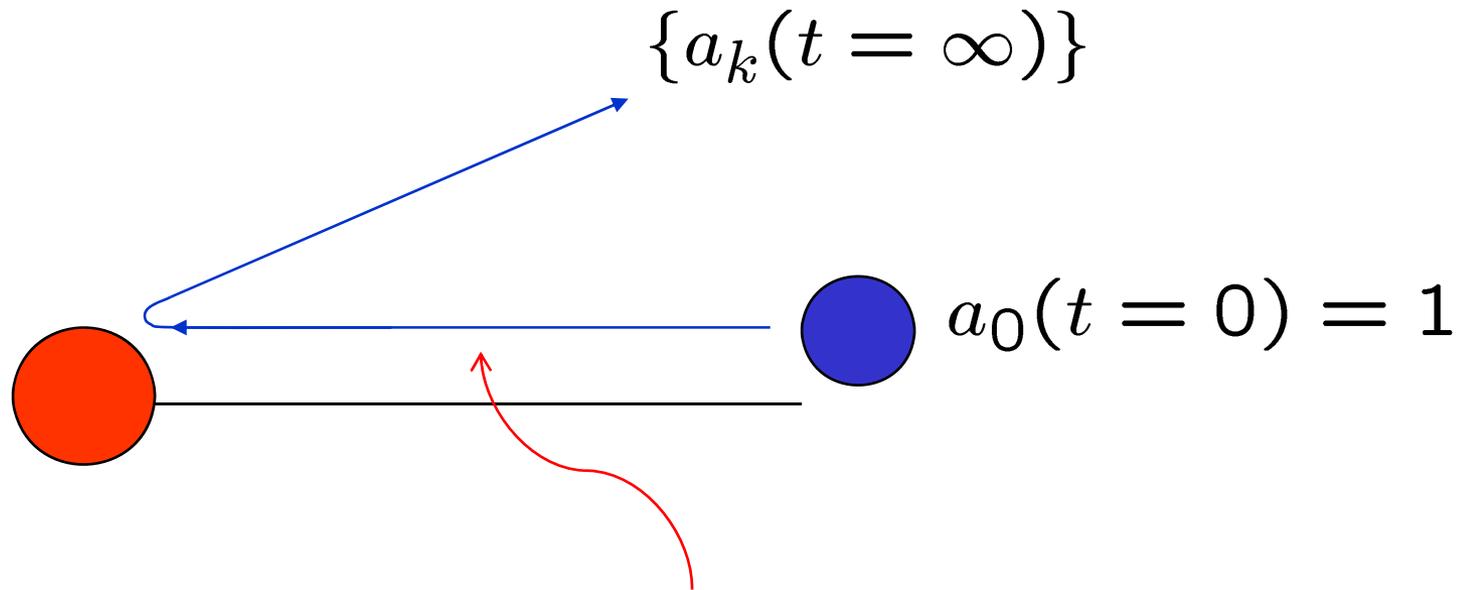
$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) \quad \text{を用いて } r(t) \text{ の軌道を決定}$$


$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = [H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(r(t), \xi)]|\Psi(t)\rangle$$

を  $|\Psi(t)\rangle = \sum_k a_k(t)|\phi_k(\xi)\rangle$  と展開して解く


$$i\hbar\dot{a}_k(t) = \epsilon_k a_k(t) + \sum_{k'} a_{k'}(t)\langle\phi_k|V_{\text{coup}}(t)|\phi_{k'}\rangle$$

- 1階の微分方程式なので、計算が楽(より多くのチャンネルを入れることができる)。  $\longrightarrow$  クーロン励起への応用多数
- ただし、トンネルが関係する計算は不得手。

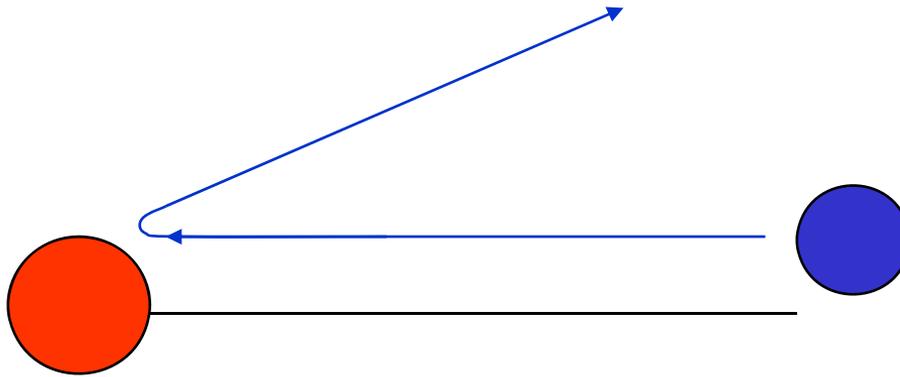


古典軌道 (ラザフォード軌道など)  $r(t)$

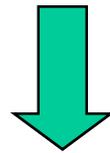
反応が終わった後、 $k$  状態にある確率:

$$P_k = |a_k(t = \infty)|^2$$

# 原子核の励起状態の性質



原子核同士を衝突させて標的核を励起させる



入射核との相互作用に  
標的核がどのように応答するか？

標準的なアプローチ: 結合チャンネル法を用いた解析

- 非弾性散乱の断面積
- 弾性散乱の断面積
- 核融合反応断面積



S 行列  $S_{nll}$

# Coupling Potential: Collective Model

$$R(\theta, \phi) = R_T \left( 1 + \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right)$$

(note) rotating frame  $\wedge$  の座標変換 ( $\hat{r} = 0$ ):

## ➤ 振動励起の場合

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \frac{\beta_{\lambda}}{\sqrt{2\lambda+1}} (a_{\lambda\mu}^{\dagger} + (-)^{\mu} a_{\lambda\mu}) \\ H_0 = \hbar\omega_{\lambda} \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}^{\dagger} a_{\lambda\mu} \end{cases}$$

$$\sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \rightarrow \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \alpha_{\lambda 0}$$

## ➤ 回転励起の場合

Body-fixed 系への座標変換:

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} \beta_{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\theta_d, \phi_d) \quad (\text{軸対称変形の場合}) \\ H_0 = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}} \end{cases}$$

いずれの場合も  $\beta_{\lambda} = \frac{4\pi}{3Z_T R_T^{\lambda}} \sqrt{\frac{B(E\lambda) \uparrow}{e^2}}$

## Deformed Woods-Saxon model:

$$\begin{aligned} V_{WS}(r) &= -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]} \\ &= -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_P - R_T)/a]} \end{aligned}$$

$$R_T \rightarrow R_T \left( 1 + \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right)$$



$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0 - R_T \alpha_{\lambda} \cdot Y_{\lambda}(\hat{\mathbf{r}}))/a]}$$

## Deformed Woods-Saxon model (collective model)

K.H., N. Rowley, and A.T. Kruppa,  
Comp. Phys. Comm. 123('99)143

$$V_{\text{coup}}(r, \hat{O}) = V_{\text{coup}}^{(N)}(r, \hat{O}) + V_{\text{coup}}^{(C)}(r, \hat{O})$$

Nuclear coupling:

$$V_{\text{coup}}^{(N)}(r, \hat{O}) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0 - R_T \hat{O})/a]}$$

Coulomb coupling:

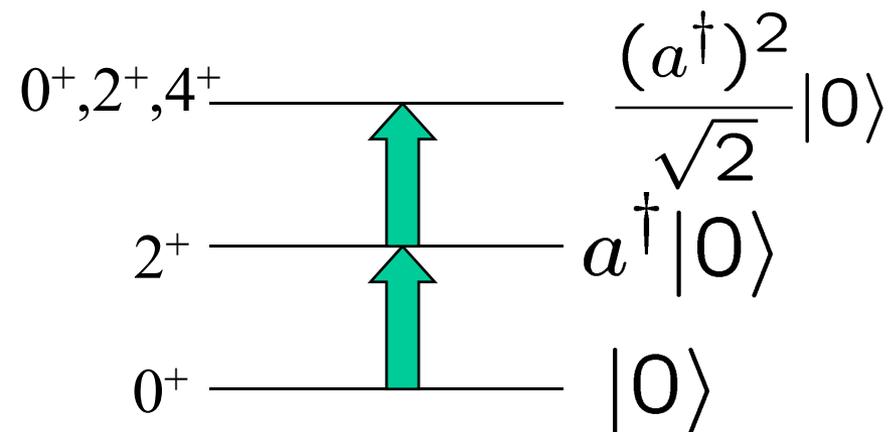
$$V_{\text{coup}}^{(C)}(r, \hat{O}) = \frac{3}{2\lambda + 1} Z_P Z_T e^2 \frac{R_T^\lambda}{r^{\lambda+1}} \hat{O}$$

**Rotational coupling:**  $\hat{O} = \beta Y_{20}(\theta)$

**Vibrational coupling:**  $\hat{O} = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}(a + a^\dagger)$

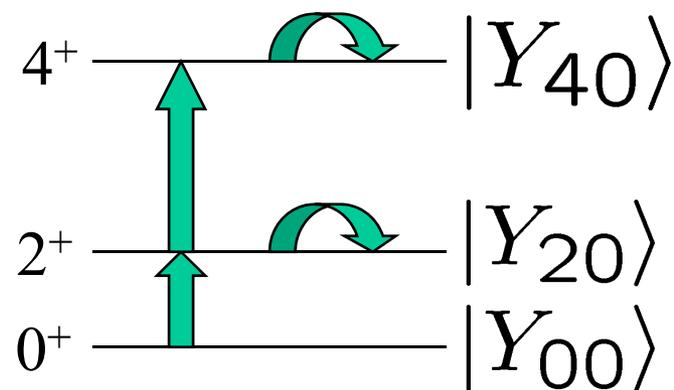
## Vibrational coupling

$$\hat{O} = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}(a + a^\dagger)$$



## Rotational coupling

$$\hat{O} = \beta Y_{20}(\theta)$$

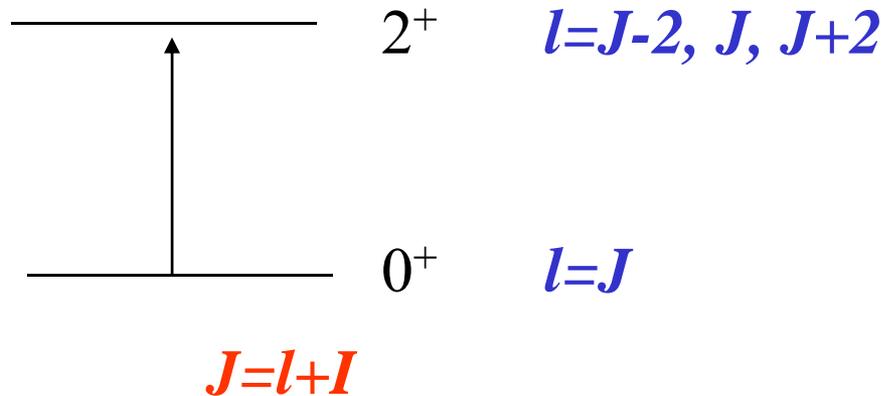


$$\begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon & \sqrt{2}F \\ 0 & \sqrt{2}F & 2\epsilon \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon + \frac{2\sqrt{5}}{7}F & \frac{6}{7}F \\ 0 & \frac{6}{7}F & \frac{10\epsilon}{3} + \frac{20\sqrt{5}}{77}F \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}$$

# Iso-centrifugal approximation

- No-Coriolis approximation
- Rotating frame approximation

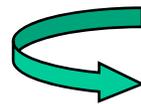
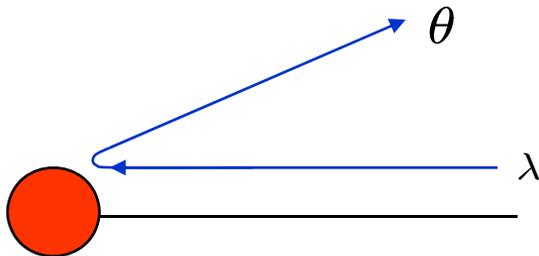


Truncation	Dimension
2 <sup>+</sup>	4 → 2
4 <sup>+</sup>	9 → 3
6 <sup>+</sup>	16 → 4
8 <sup>+</sup>	25 → 5

## Iso-centrifugal approximation:

$\lambda$ : independent of excitations

$$\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \rightarrow \frac{J(J+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$



$$V_{\text{coup}}(\mathbf{r}, \xi) = f(r) Y_{\lambda}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot T_{\lambda}(\xi)$$

transform to  
the rotating frame

$$\rightarrow \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} f(r) T_{\lambda 0}(\xi)$$

“Spin-less system”

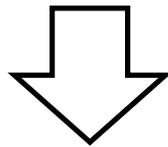
## 結合チャンネル方程式：DWBA

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) - E + \epsilon_{nI} \right] u_{nlI}(r) + \sum_{n'l'I'} \langle [Y_l \phi_{nI}]^{(JM)} | V_{\text{coup}}(r) | [Y_{l'} \phi_{n'I'}]^{(JM)} \rangle u_{n'l'I'}(r) = 0$$

$$u_{nlI}(r) \rightarrow H_l^{(-)}(k_{nI}r) \delta_{n,n_i} \delta_{l,l_i} \delta_{I,I_i} - \sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}} S_{nlI} H_l^{(+)}(k_{nI}r)$$

$$P_l(E) = 1 - \sum_{nI} |S_{nlI}|^2 \quad \sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) P_l(E)$$

数値的に結合チャンネル方程式を解いてS行列や核融合反応断面積を計算



結合が弱ければ摂動論が使える(DWBA)

# Distorted Wave Born Approximation (DWBA)

ノート参照

## 結合チャンネル方程式：2つの極限

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) - E + \epsilon_{nI} \right] u_{nlI}(r) + \sum_{n'l'I'} \langle [Y_l \phi_{nI}]^{(JM)} | V_{\text{coup}}(r) | [Y_{l'} \phi_{n'I'}]^{(JM)} \rangle u_{n'l'I'}(r) = 0$$

$$u_{nlI}(r) \rightarrow H_l^{(-)}(k_{nI}r) \delta_{n,n_i} \delta_{l,l_i} \delta_{I,I_i} - \sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}} S_{nlI} H_l^{(+)}(k_{nI}r)$$

$$P_l(E) = 1 - \sum_{nI} |S_{nlI}|^2 \quad \sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) P_l(E)$$

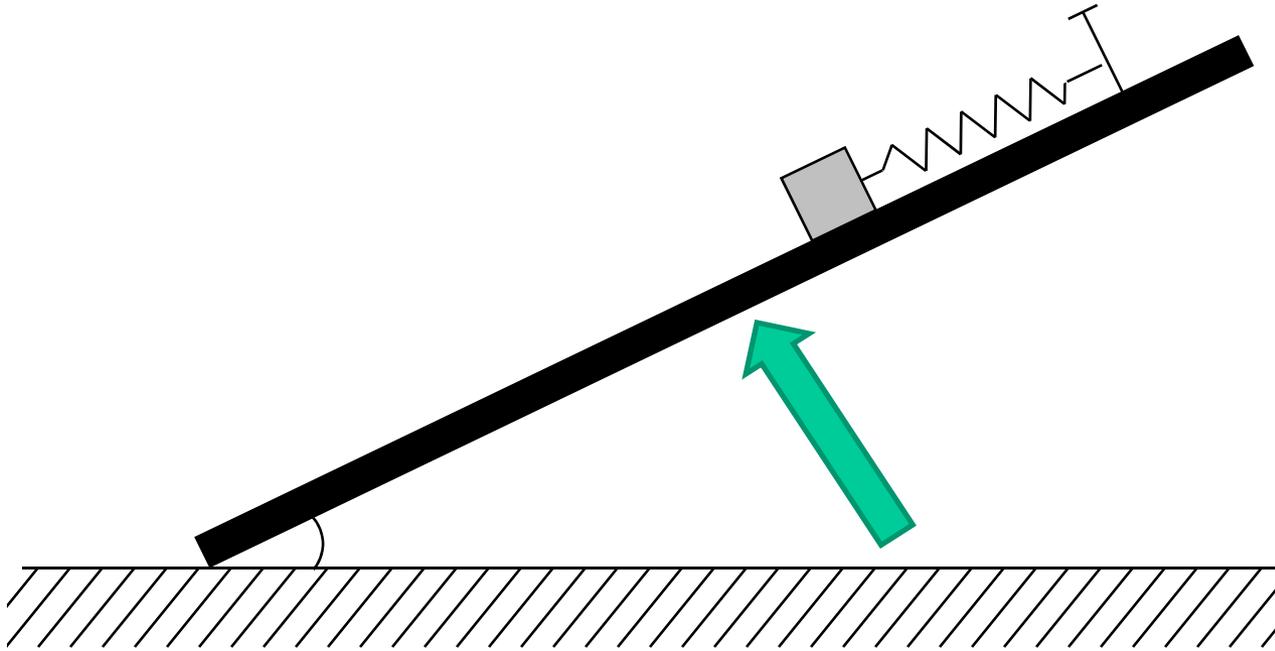
数値的に結合チャンネル方程式を解いて核融合反応断面積を計算

→ 結果を解釈(理解)するために2つの極限を考えてみよう

- $\epsilon_{nI}$ : 非常に大きい場合 (断熱極限) *Adiabatic limit*
- $\epsilon_{nI}$ : ゼロの極限 (瞬間極限) *Sudden limit*

## 2つの自由度の時間スケールの差を考える

わかりやすい例：斜面上におかれたバネの問題

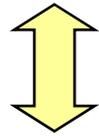


ゆっくりと斜面を動かすか、瞬間的に動かすか

## 2つの極限: (i) 断熱極限

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(\mathbf{r}, \xi)$$

相対運動が内部運動に比べて非常にゆっくりしている場合



相対運動の典型的なエネルギー・スケールが内部運動のエネルギー・スケールにくらべて非常に小さい場合

$$\hbar\Omega \ll \epsilon$$

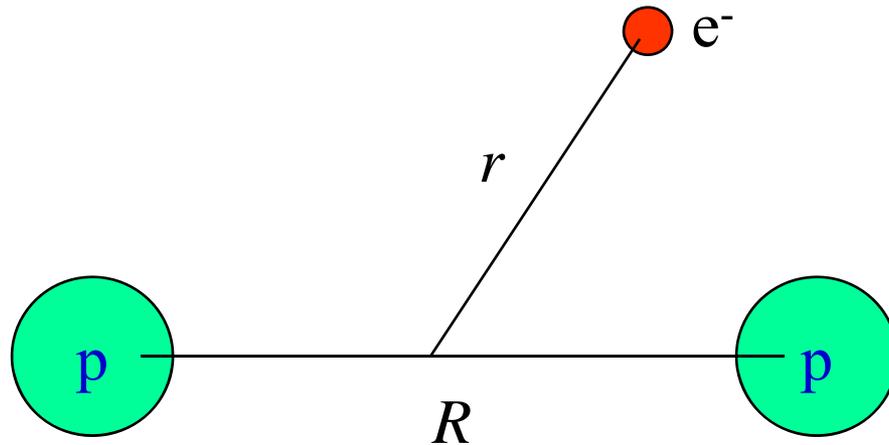
(障壁の曲率 v.s. 内部自由度の励起エネルギー)


$$[H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(\mathbf{r}, \xi)]\varphi_0(\xi; \mathbf{r}) = \epsilon_0(r)\varphi_0(\xi; \mathbf{r})$$



$$H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(\mathbf{r}, \xi) \rightarrow \epsilon_0(r)$$

## c.f. 水素分子に対する Born-Oppenheimer 近似



$$[T_R + T_r + V(r, R)]\Psi(r, R) = E\Psi(r, R)$$

1. まず陽子が止まっているとして電子の運動を考える

$$[T_r + V(r, R)]u_n(r; R) = \epsilon_n(R)u_n(r; R)$$

2.  $\epsilon_n(R)$  を  $R$  に関して最小化する

Or 2'. ポテンシャル  $\epsilon_n(R)$  中の陽子間の運動を考える

$$[T_R + \epsilon_n(R)]\phi_n(R) = E\phi_n(R)$$

# Adiabatic Potential Renormalization

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(\mathbf{r}, \xi)$$

When  $\varepsilon$  is large,

$$H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(\mathbf{r}, \xi) \rightarrow \epsilon_0(r)$$

where

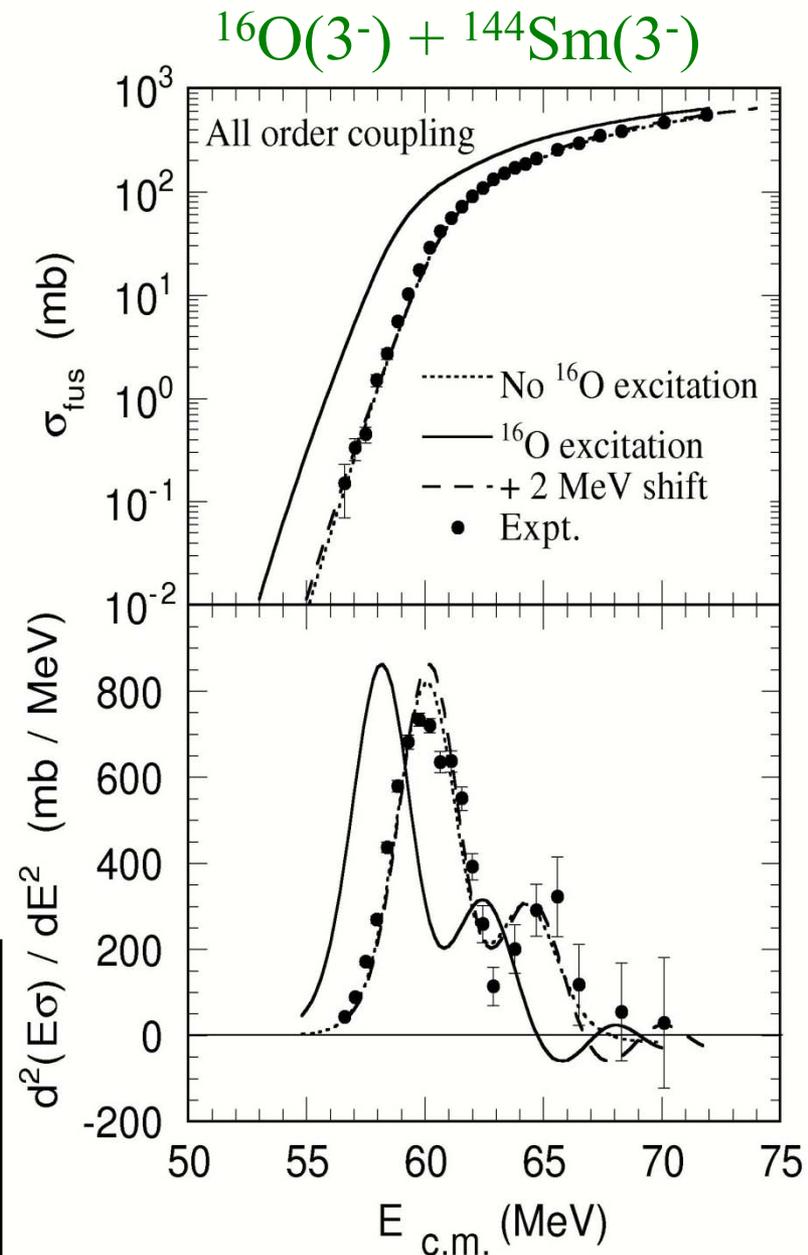
$$\begin{aligned} [H_0(\xi) + V_{\text{coup}}(\mathbf{r}, \xi)]\varphi_0(\xi; \mathbf{r}) \\ = \epsilon_0(r) \varphi_0(\xi; \mathbf{r}) \end{aligned}$$

Fast intrinsic motion

→ Adiabatic potential renormalization

$$V_{\text{ad}}(r) = V_0(r) + \epsilon_0(r)$$

Giant Resonances,  $^{16}\text{O}(3^-)$  [6.31 MeV]



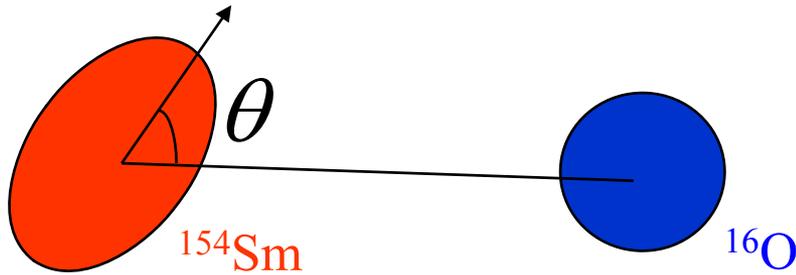
K.H., N. Takigawa, M. Dasgupta,  
D.J. Hinde, J.R. Leigh, PRL79('99)2014

## 2つの極限: (ii) 瞬間極限

$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$\epsilon_I = I(I + 1)\hbar^2/2\mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} \rightarrow \infty$$



$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos \theta) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta)$$

### Coupled-channels:

$$\begin{pmatrix} 0 & f(r) & 0 \\ f(r) & \frac{2\sqrt{5}}{7}f(r) & \frac{6}{7}f(r) \\ 0 & \frac{6}{7}f(r) & \frac{20\sqrt{5}}{77}f(r) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{diagonalize}} \begin{pmatrix} \lambda_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(r) \end{pmatrix}$$

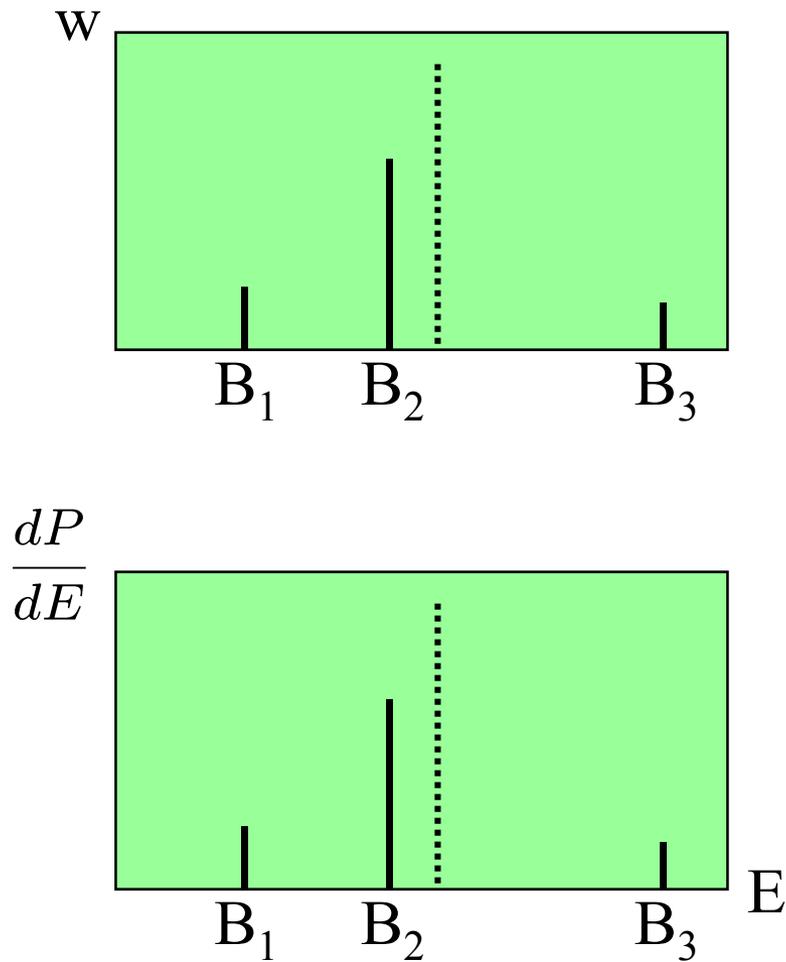
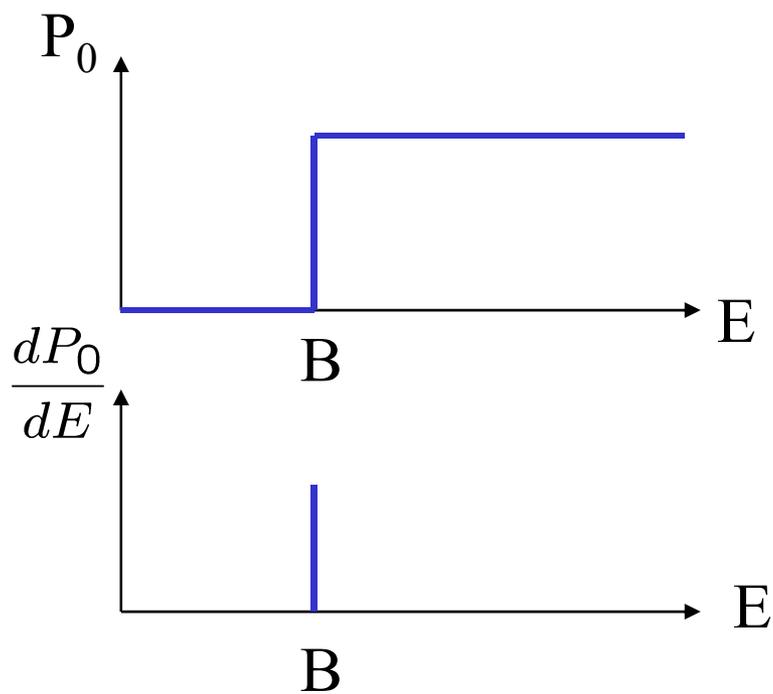
$$\Rightarrow P(E) = \sum_i w_i P(E; V_0(r) + \lambda_i(r))$$

Slow intrinsic motion

 Barrier Distribution

# 障壁分布

$$P(E) = \sum_i w_i P(E; V_0(r) + \lambda_i(r))$$

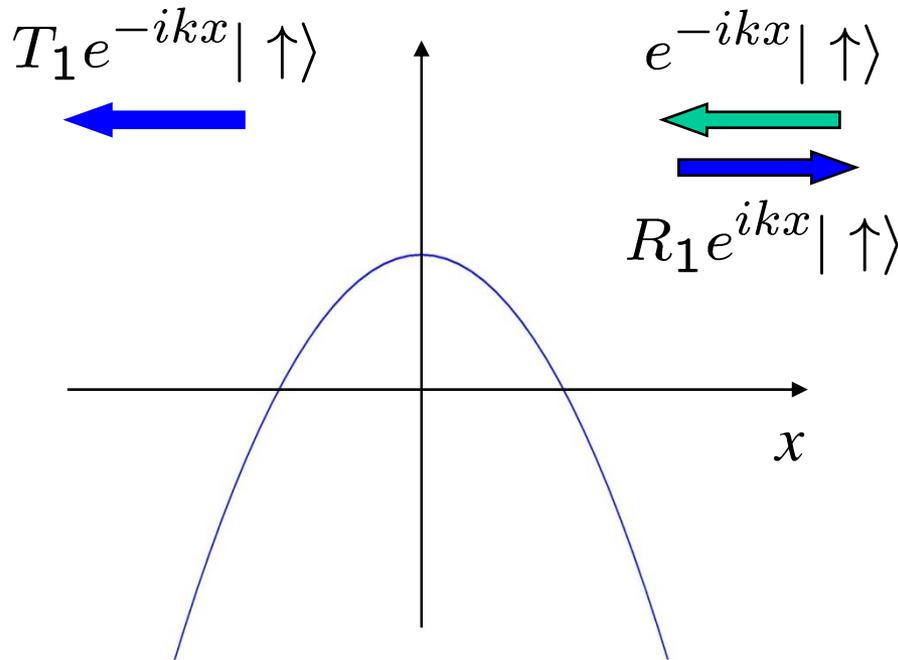


# 障壁分布: スピン・ハミルトニアンを用いて概念を理解する

ハミルトニアン(例1): 
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_s(x)$$

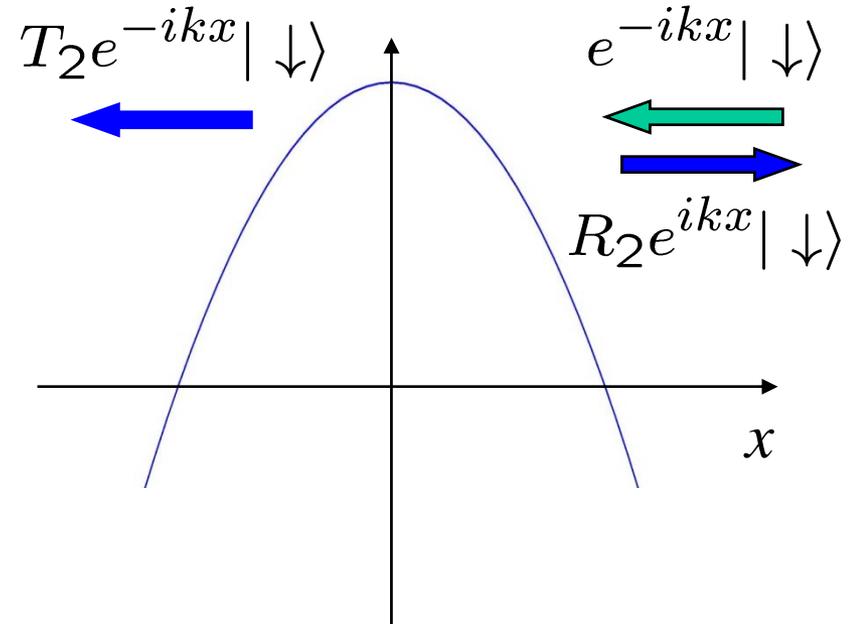
$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin-up の場合



$$V_1(x) = V_0(x) + V_s(x)$$

Spin-down の場合



$$V_2(x) = V_0(x) - V_s(x)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_1(x)$$


**波動関数(一般形):**  $\Psi(x) = \psi_1(x) |\uparrow\rangle + \psi_2(x) |\downarrow\rangle$   
 $= \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$

$x \rightarrow \pm\infty$  での漸近形:

$$\Psi(x) \rightarrow \begin{pmatrix} C_1(e^{-ikx} + R_1 e^{ikx}) \\ C_2(e^{-ikx} + R_2 e^{ikx}) \end{pmatrix} \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} C_1 T_1 e^{-ikx} \\ C_2 T_2 e^{-ikx} \end{pmatrix} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$   
 ( $C_1$ と $C_2$ の値は粒子のスピン状態により定まる)

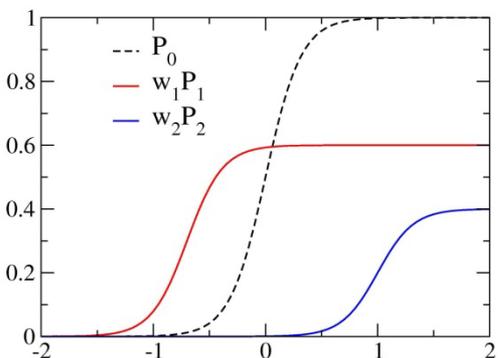

**トンネル確率 =**  $\frac{(x = -\infty \text{ でのフラックス})}{(x = \infty \text{ での入射内向きフラックス})}$

$$P(E) = \frac{|C_1 T_1|^2 + |C_2 T_2|^2}{|C_1|^2 + |C_2|^2}$$

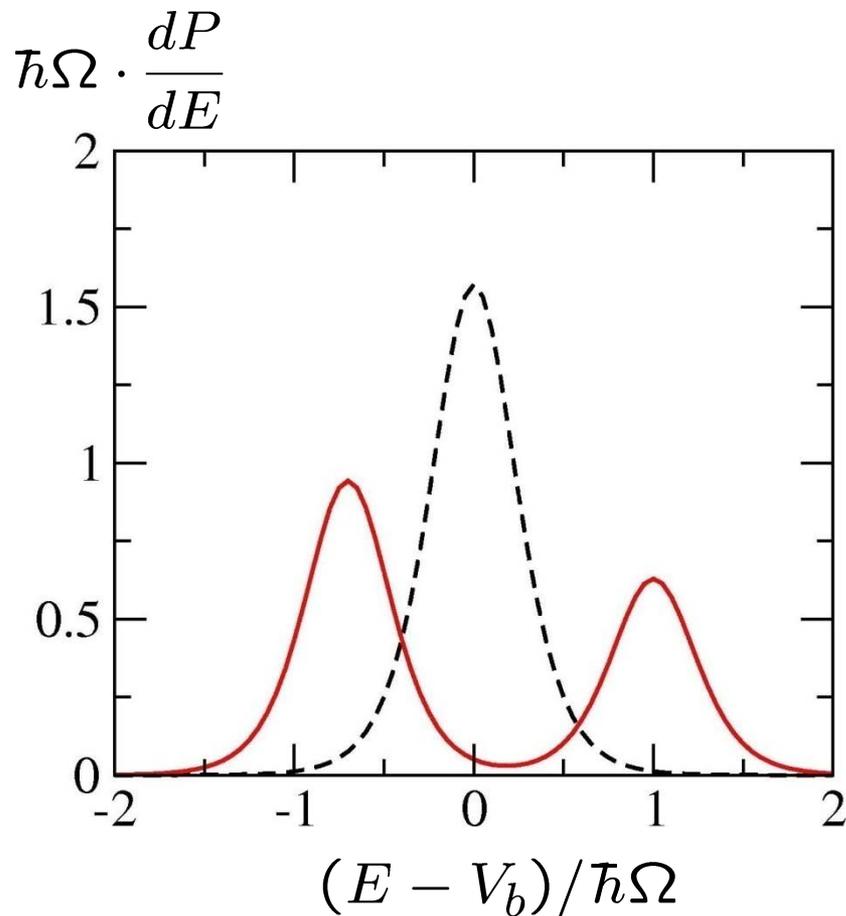
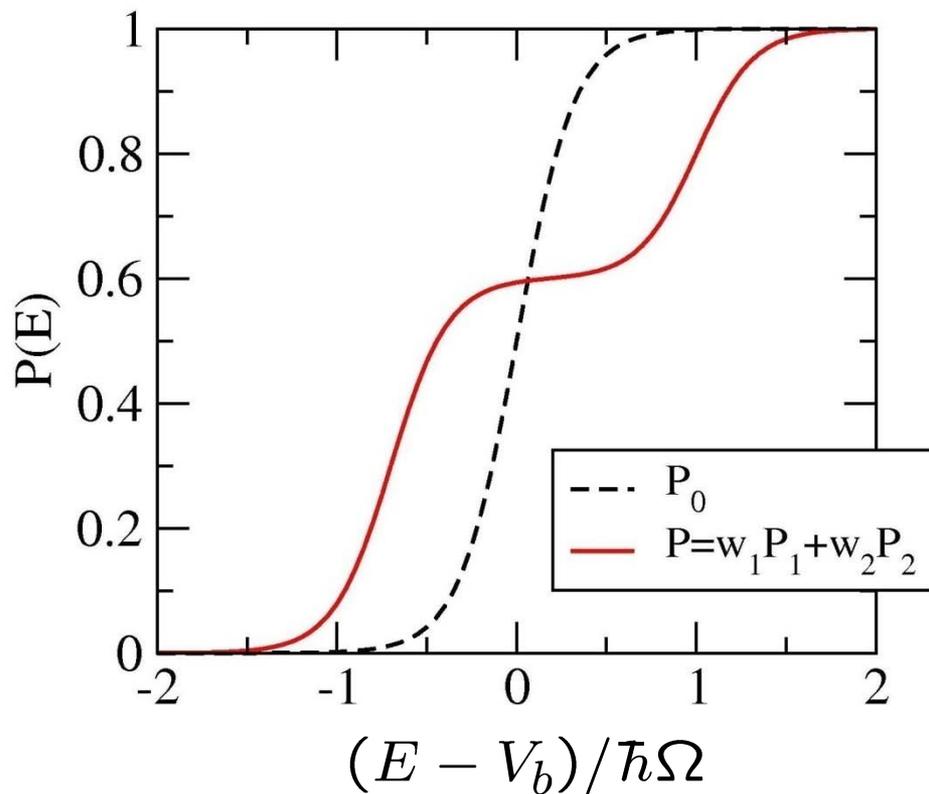
$$= |C_1|^2 P_1(E) + |C_2|^2 P_2(E) \equiv w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E)$$

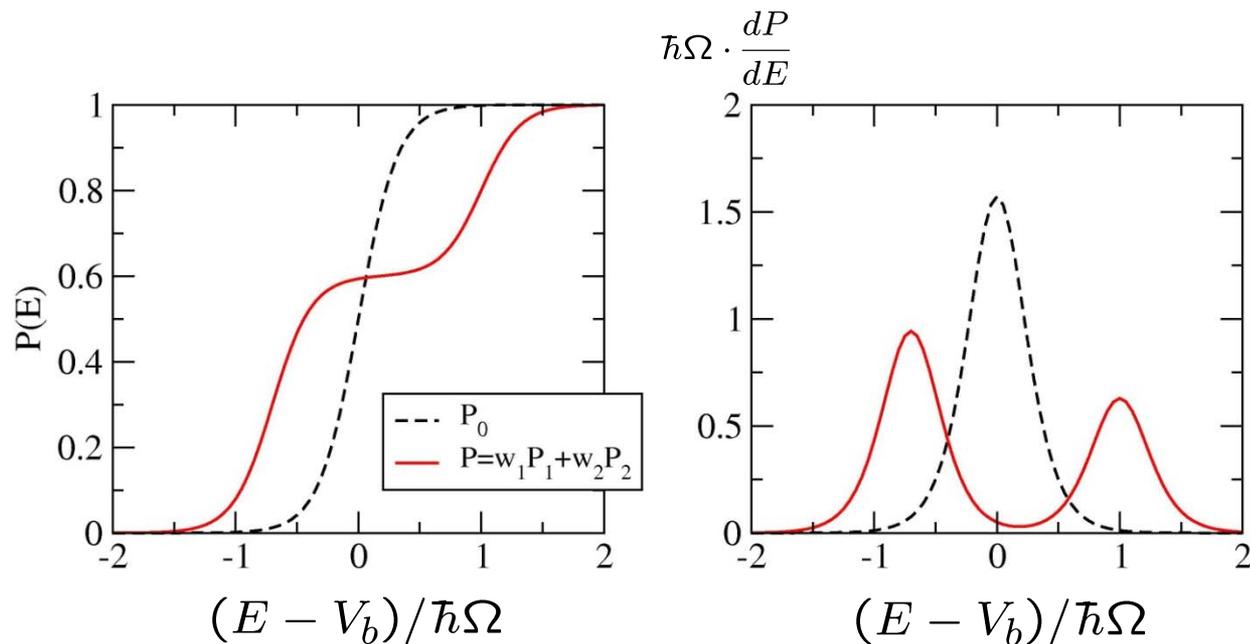
$$P(E) = w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E)$$

→ トンネル確率は2つの障壁のトンネル確率の加重平均になる



$$\begin{cases} V_1(x) = V_0(x) + V_s(x) & \leftarrow \text{ } | \uparrow \rangle \\ V_2(x) = V_0(x) - V_s(x) & \leftarrow \text{ } | \downarrow \rangle \end{cases}$$





- トンネル確率は  $E < V_b$  で増大、 $E > V_b$  で減少
- $dP/dE$  は一山が二山に分かれる → 「障壁が分布する」
- $dP/dE$  のピークの位置は各障壁の高さに対応
- ピークの値は重み因子に比例する

$$P(E) = w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E)$$

$$\frac{dP}{dE} = w_1 \frac{dP_1}{dE} + w_2 \frac{dP_2}{dE}$$

## ハミルトニアン(例2): 非対角結合項がある場合

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_x \cdot F(x) \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{t} + V_0(x)]\psi_1(x) + F(x)\psi_2(x) = E\psi_1(x)$$

$$[\hat{t} + V_0(x)]\psi_2(x) + F(x)\psi_1(x) = E\psi_2(x)$$

$$\phi_{\pm}(x) = [\psi_1(x) \pm \psi_2(x)]/\sqrt{2}$$



$$[\hat{t} + V_0(x) \pm F(x)]\phi_{\pm}(x) = E\phi_{\pm}(x)$$

反応の初期にスピン・アップの状態にあったとすると

$$P(E) = \frac{1}{2} [P(E; V_0 + F) + P(E; V_0 - F)]$$

## ハミルトニアン(例3): より一般の場合

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) - \epsilon \sigma_z + \hat{\sigma}_x \cdot F(x) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \begin{pmatrix} -\epsilon & F(x) \\ F(x) & \epsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  $U(x) \begin{pmatrix} -\epsilon & F(x) \\ F(x) & \epsilon \end{pmatrix} U^\dagger(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}$

*x dependent*



$$P(E) = \sum_i w_i(E) P(E; V_0(x) + \lambda_i(x))$$

*E dependent*

K.H., N. Takigawa, A.B. Balantekin, PRC56('97)2104  $w_i(E) \sim \text{constant}$

(note) 断熱極限:  $\epsilon \rightarrow \infty \longrightarrow w_i(E) = \delta_{i,0}$

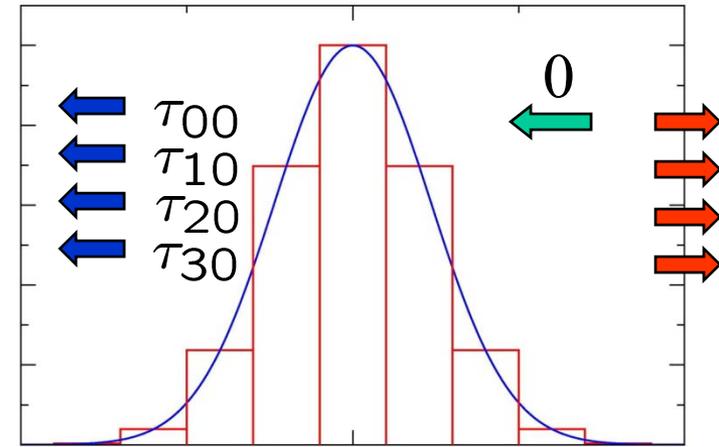
# (参考) 結合チャンネル方程式を WKB 近似で解く

1次元ポテンシャルの透過確率に対する WKB 公式:

$$P_{WKB}(E) = \exp \left[ -2 \int_{x_0}^{x_1} dx' \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x') - E)} \right]$$

→ 結合チャンネル問題への  
一般化

K.H., A.B. Balantekin, Phys. Rev. A70 ('04) 032106

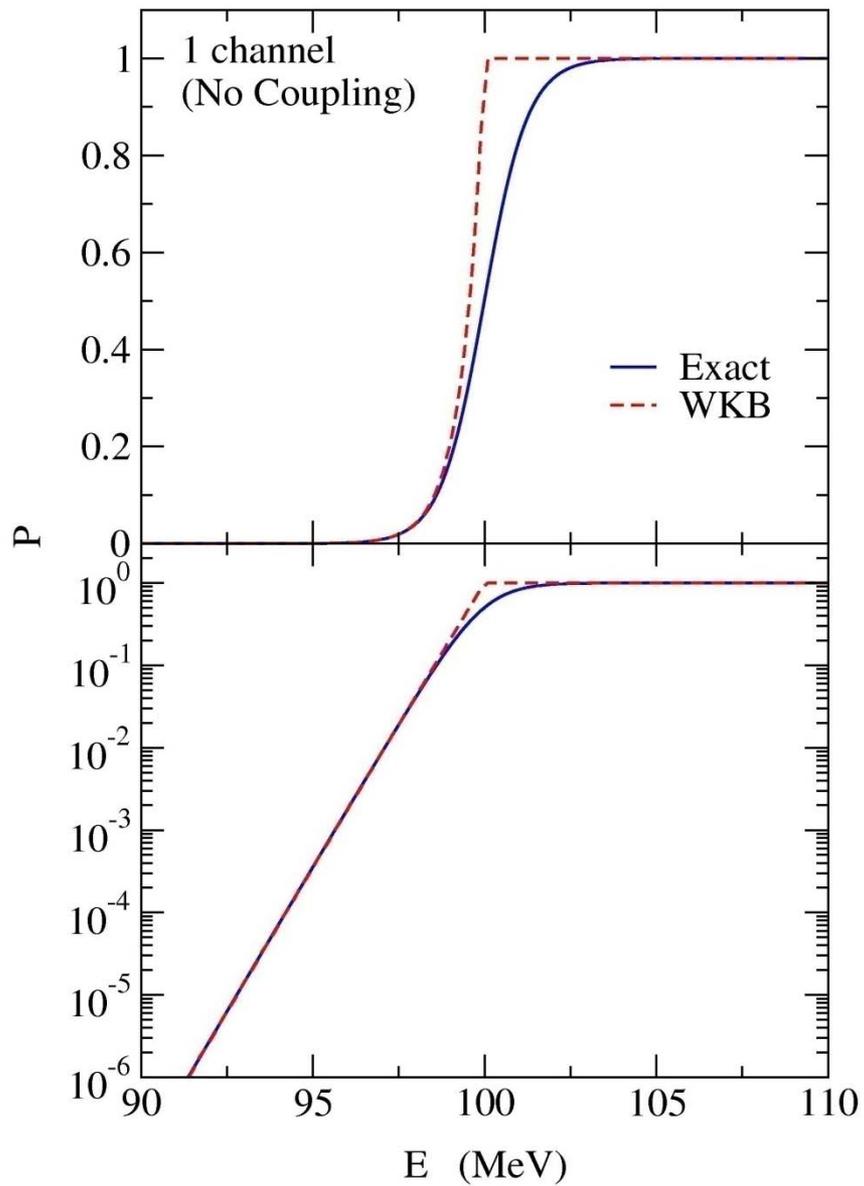


$$\tau = \left( \prod_i e^{i\mathbf{q}(x_i)\Delta x} \right)$$

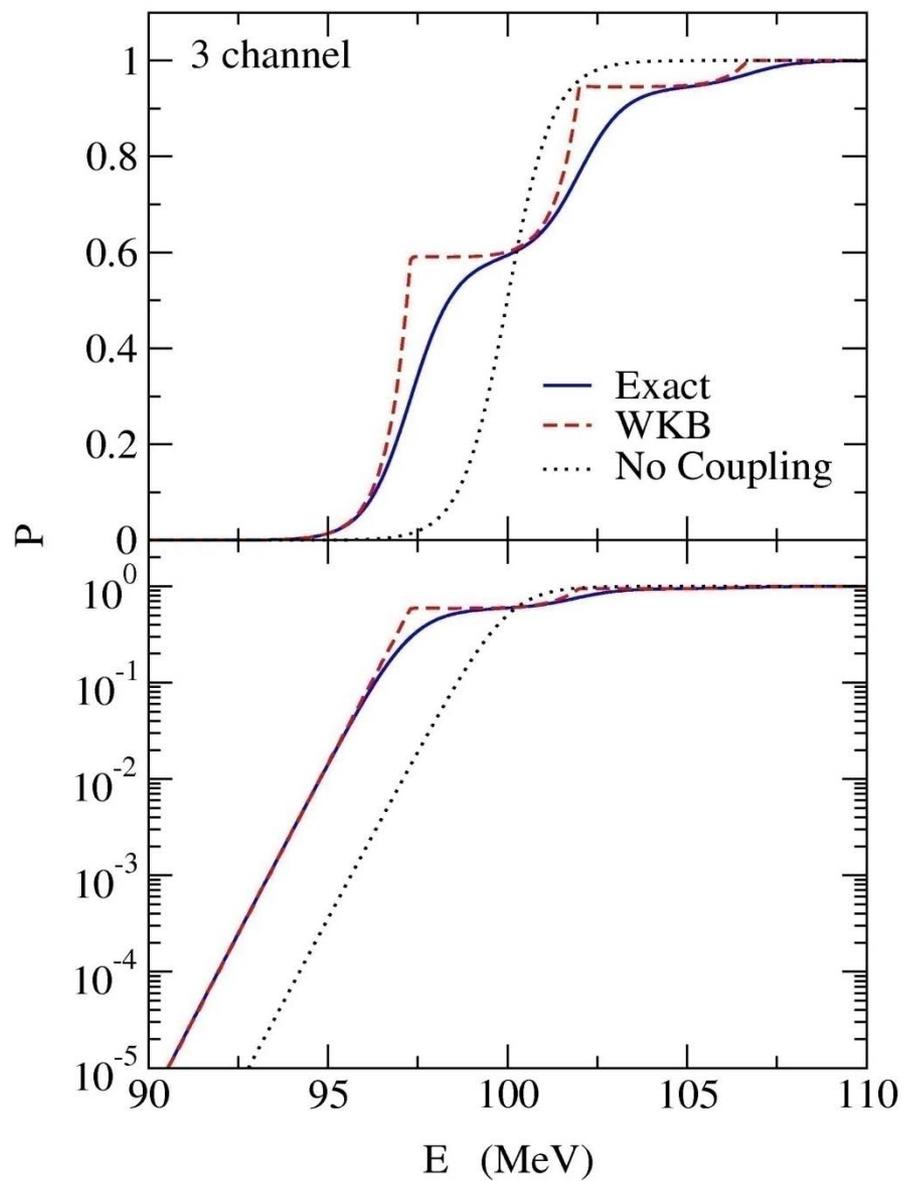
$$\mathbf{q}(x) = [2m(E - \mathbf{W}(x))/\hbar^2]^{1/2}, \quad W_{nm}(x) = V_{nm}(x) + \epsilon_n \delta_{n,m}$$

$$P_{WKB}(E) = \sum_n |\tau_{n0}|^2 = \sum_n \left| \left( \prod_i e^{i\mathbf{q}(x_i)\Delta x} \right)_{n0} \right|^2$$

# 1 channel



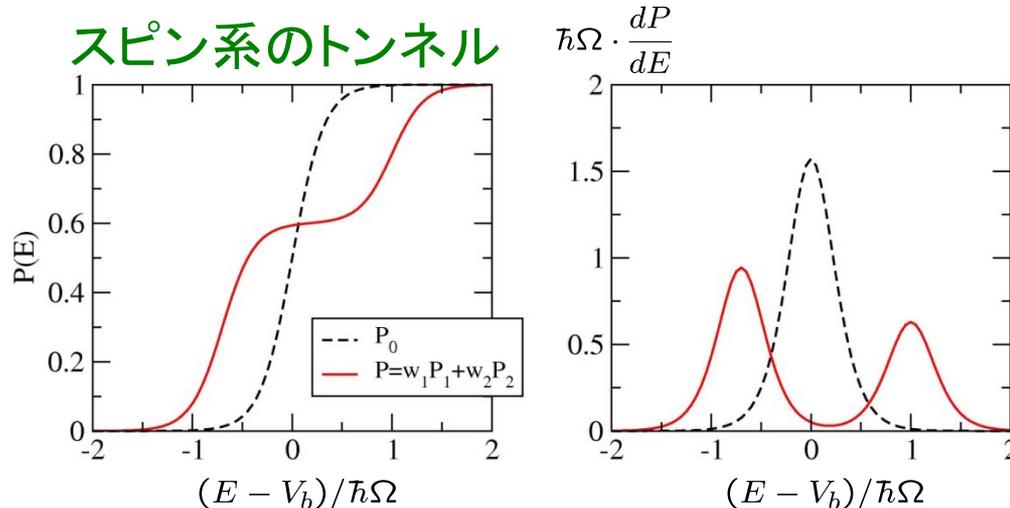
# 3 channel



# Sub-barrier Fusion と障壁分布法

- 低エネルギー核融合反応はトンネル効果で起きる
- 結合チャンネルの効果は多数の障壁の分布として理解できる
- 核融合反応断面積は多数の障壁の平均

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{fus}}(E) &= \int_0^1 d(\cos \theta) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta) \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) \left[ \int_0^1 d(\cos \theta) P_l(E; \theta) \right]\end{aligned}$$



障壁の分布の様子は  
透過確率の微分をとると  
はっきりと目に見える



核融合反応断面積を用いて同様のことはできないか？

1つの考慮すべき点: 実験で測られるのは核融合断面積であって透過確率ではない。

$$\longrightarrow P_{l=0}(E) \simeq \frac{1}{\pi R_b^2} \cdot \frac{d(E\sigma_{\text{fus}})}{dE}$$

$$\longrightarrow D_{\text{fus}}(E) \equiv \frac{d^2(E\sigma_{\text{fus}})}{dE^2} \simeq \pi R_b^2 \frac{dP_{l=0}}{dE}$$

(核融合障壁分布)

N. Rowley, G.R. Satchler,  
P.H. Stelson, PLB254('91)25

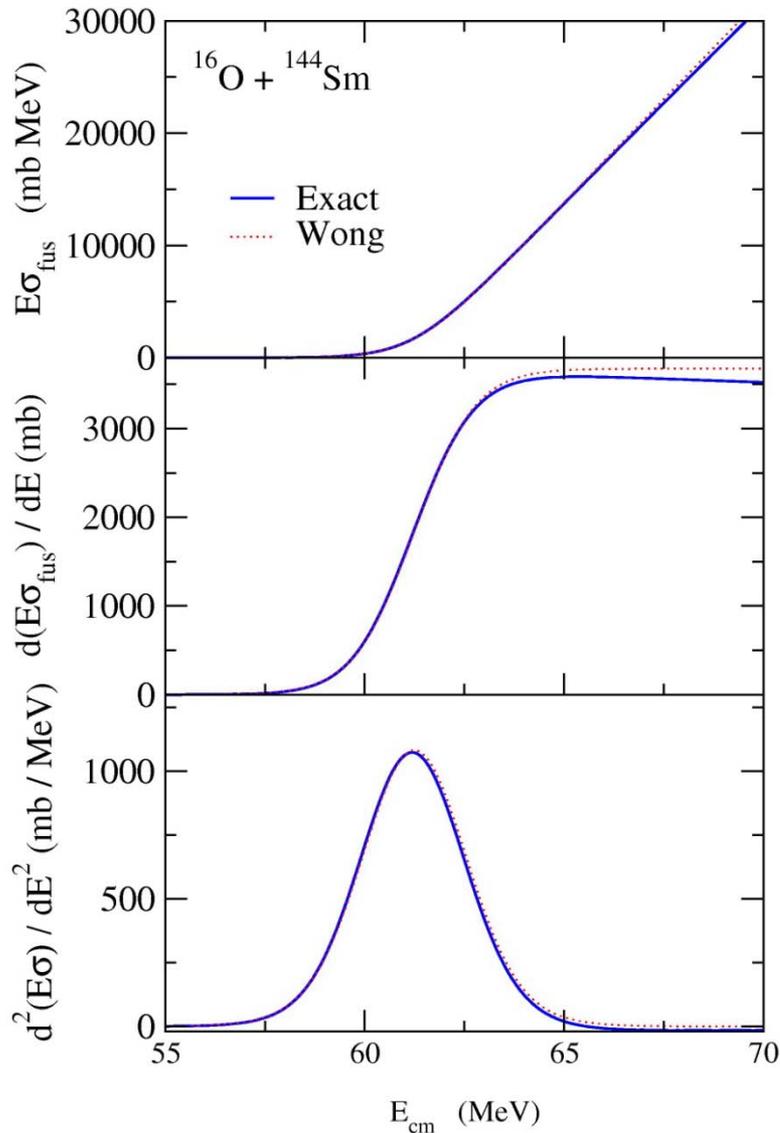
(note) 古典的な核融合反応断面積

$$\sigma_{\text{fus}}^{\text{cl}}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) \theta(E - V_b)$$

$$\curvearrowright \frac{d}{dE} [E\sigma_{\text{fus}}^{\text{cl}}(E)] = \pi R_b^2 \theta(E - V_b) = \pi R_b^2 P_{\text{cl}}(E)$$

$$\frac{d^2}{dE^2} [E\sigma_{\text{fus}}^{\text{cl}}(E)] = \pi R_b^2 \delta(E - V_b)$$

## Fusion Test Function



Classical fusion cross section:

$$\sigma_{\text{fus}}^{\text{cl}}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) \theta(E - V_b)$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} [E \sigma_{\text{fus}}^{\text{cl}}(E)] &= \pi R_b^2 \theta(E - V_b) \\ &= \pi R_b^2 P_{\text{cl}}(E) \\ \frac{d^2}{dE^2} [E \sigma_{\text{fus}}^{\text{cl}}(E)] &= \pi R_b^2 \delta(E - V_b) \end{aligned}$$

Tunneling effect

→ smears the delta function

Fusion test function:

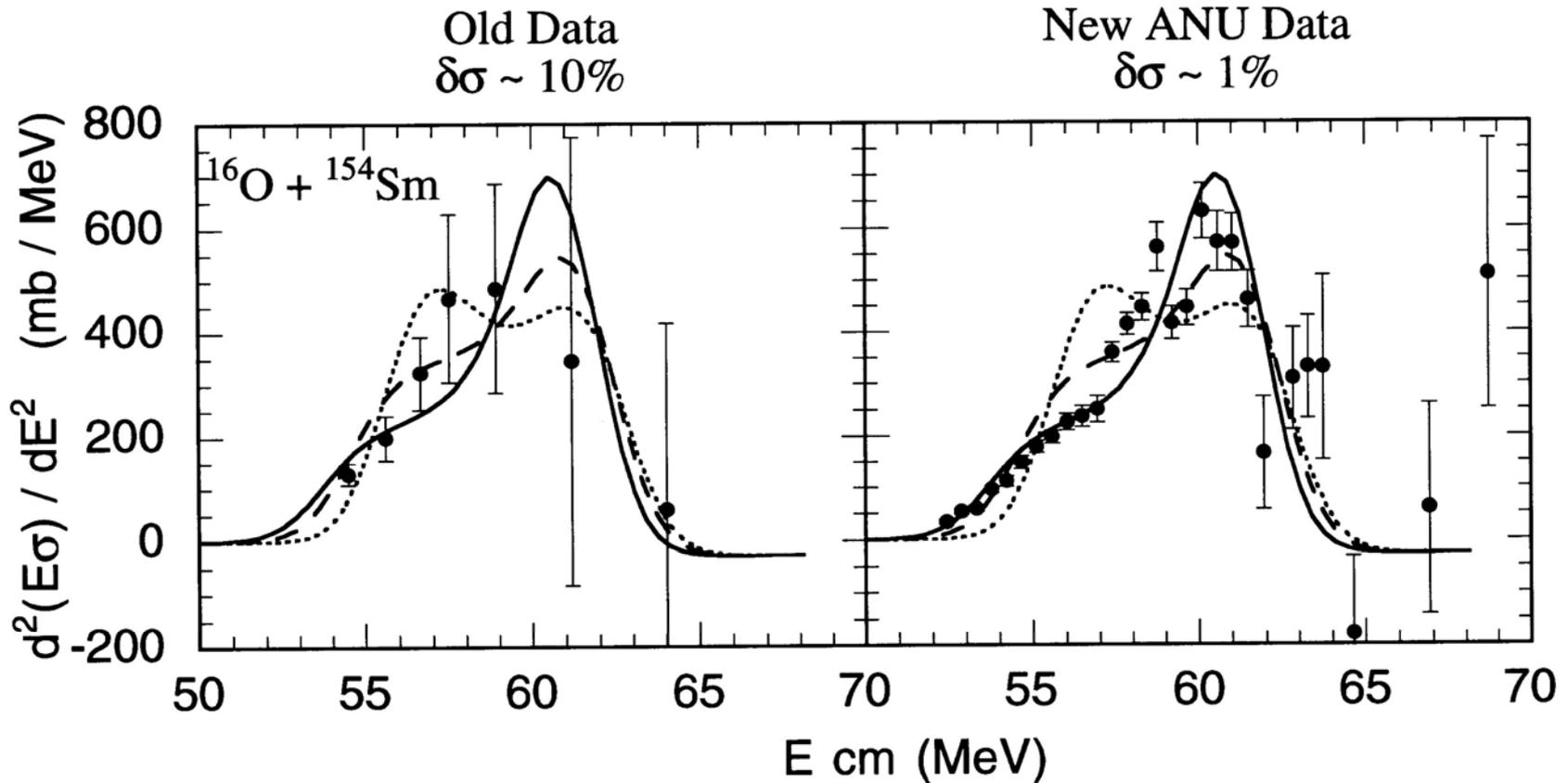
- Symmetric around  $E = V_b$
- Centered on  $E = V_b$
- Its integral over  $E$  is  $\pi R_b^2$
- Has a relatively narrow width  
( $\sim 0.56 \hbar \Omega$ )

# 障壁分布測定

核融合障壁分布  $D_{\text{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma)}{dE^2}$

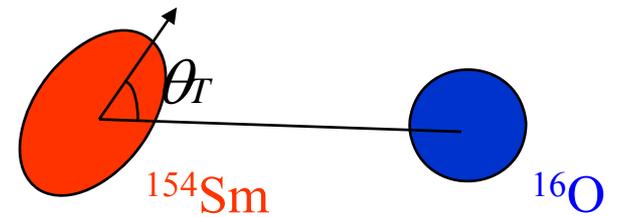
2階微分をとるために非常に高精度の実験データが必要

(90年代初頭)

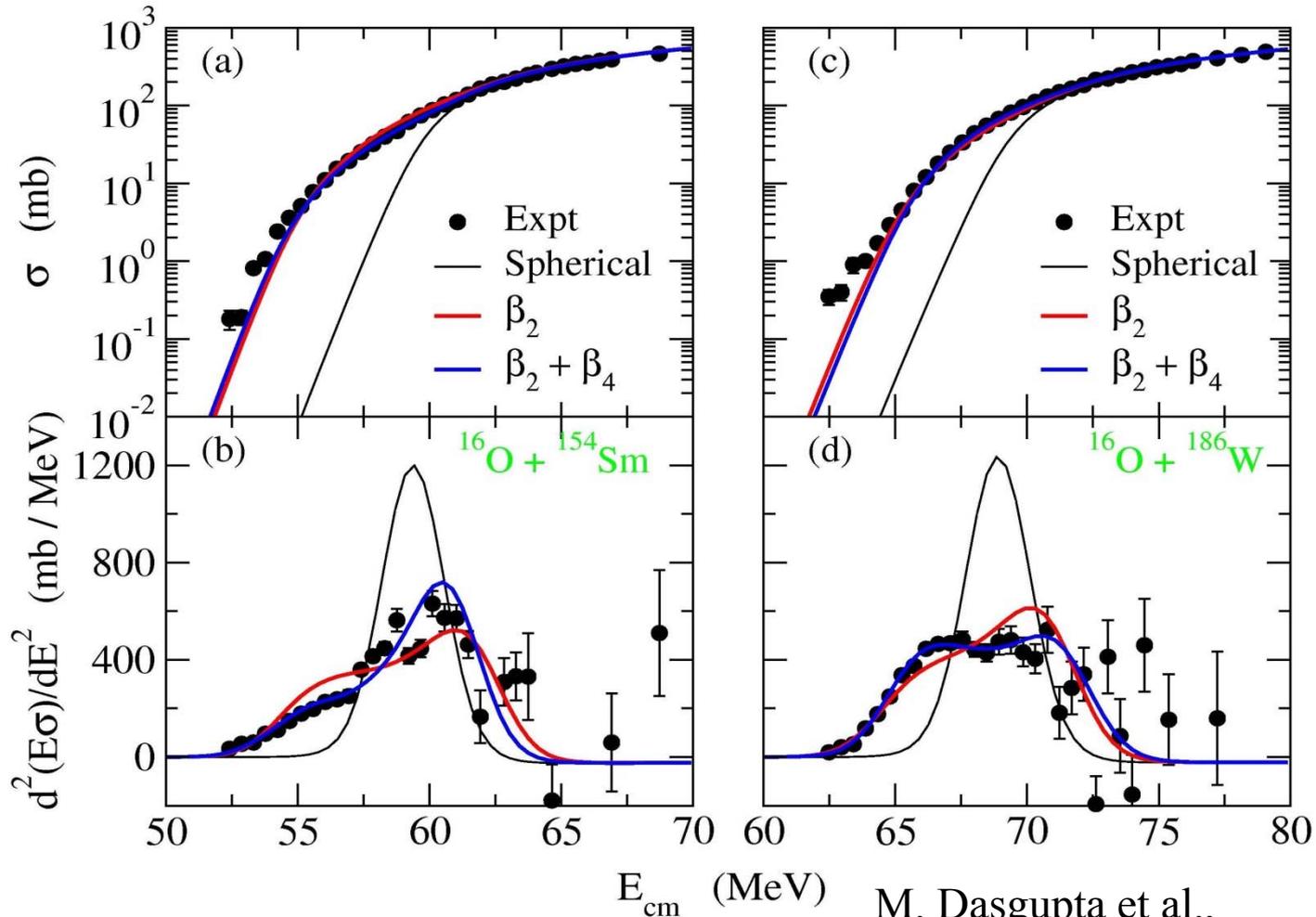


# Experimental Barrier Distribution

Requires high precision data

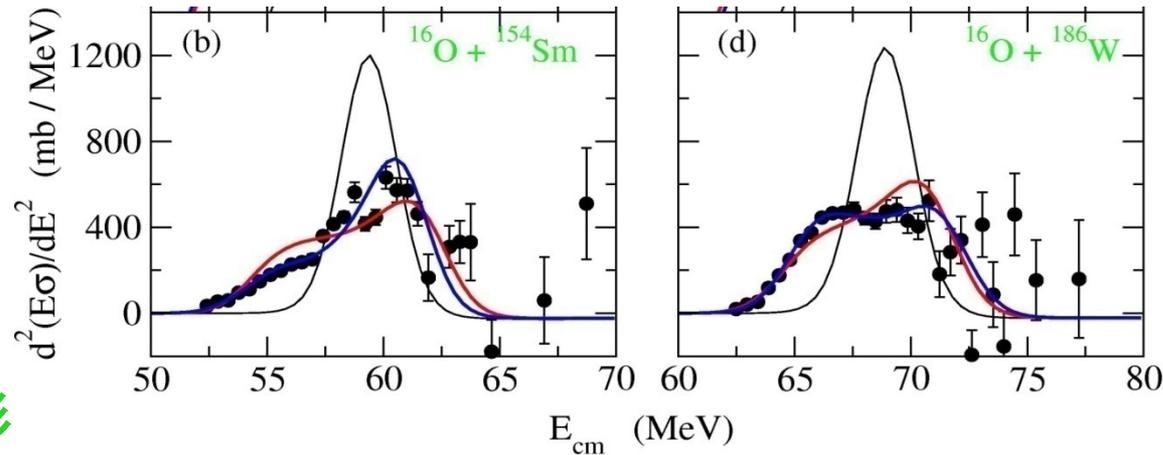


$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos \theta_T) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta_T)$$



M. Dasgupta et al.,  
Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 48('98)401

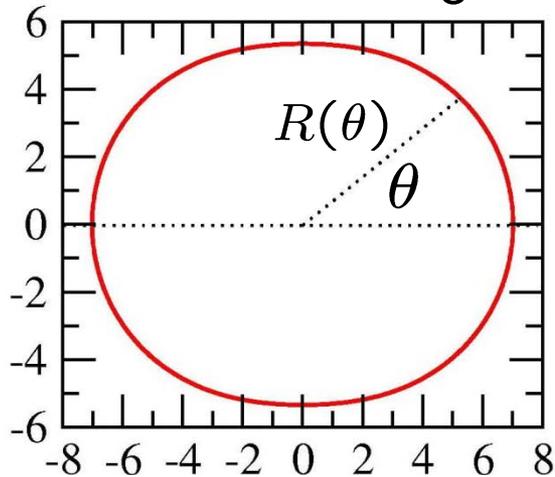
# 障壁分布を通じて原子核の形を見る



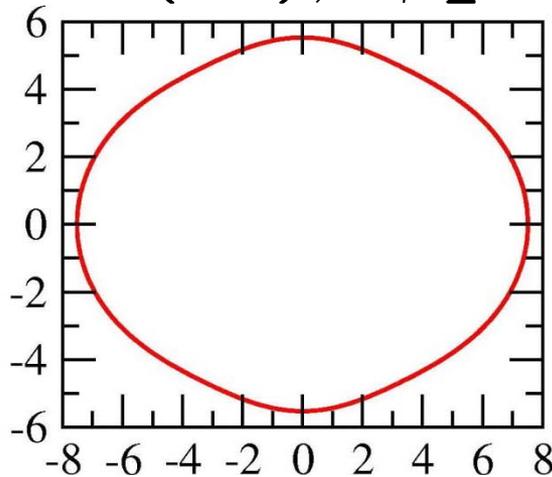
## 原子核の形

$$R(\theta) = R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta) + \dots)$$

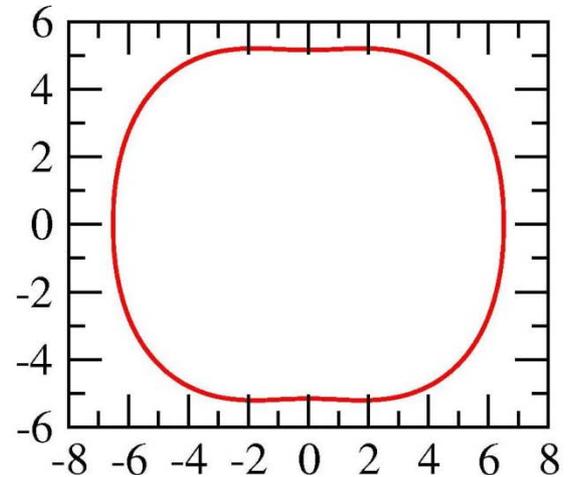
$$R_0 = 5.9 \text{ (fm)}, \quad \beta_2 = 0.3$$



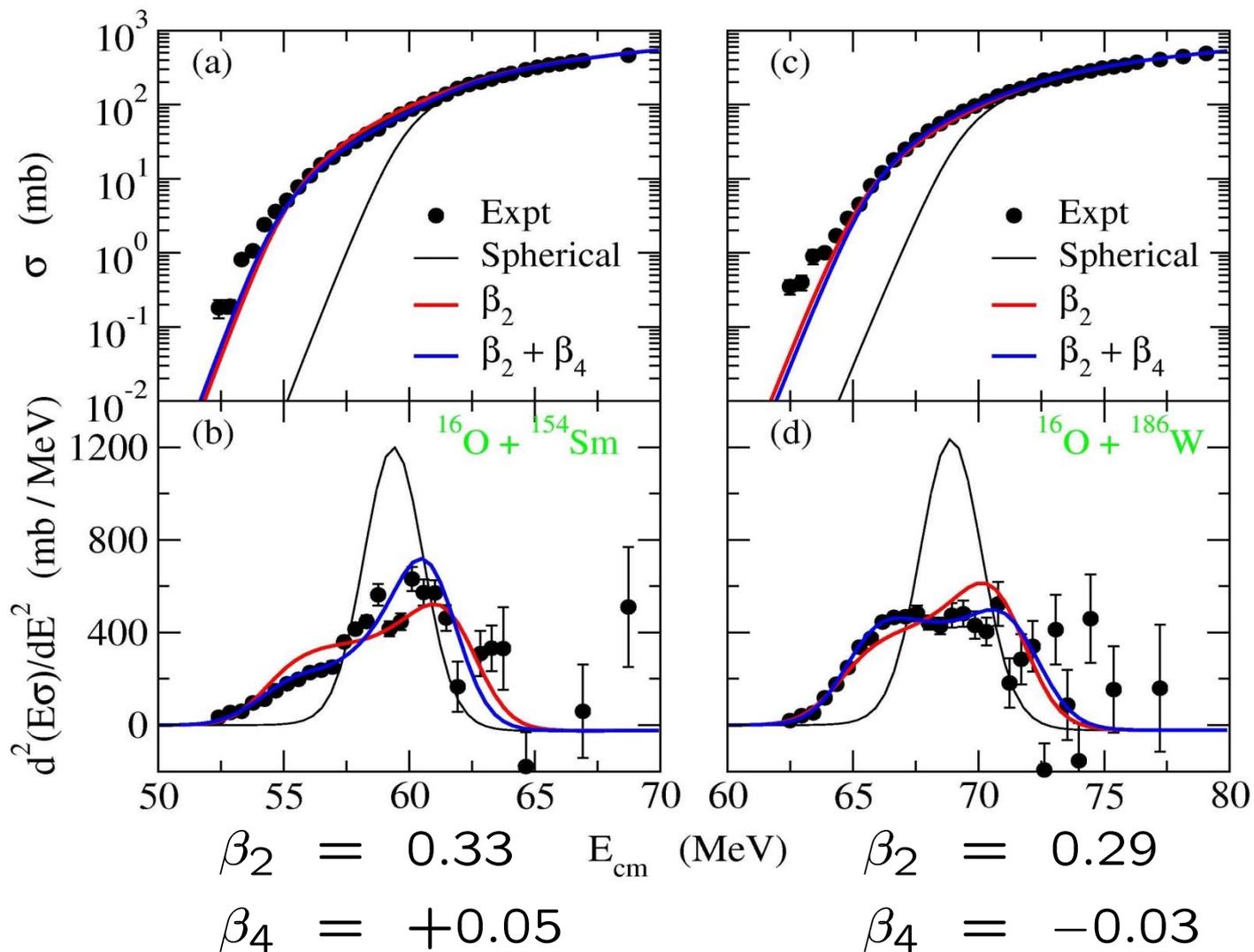
$$\beta_4 = 0$$



$$\beta_4 = 0.1$$



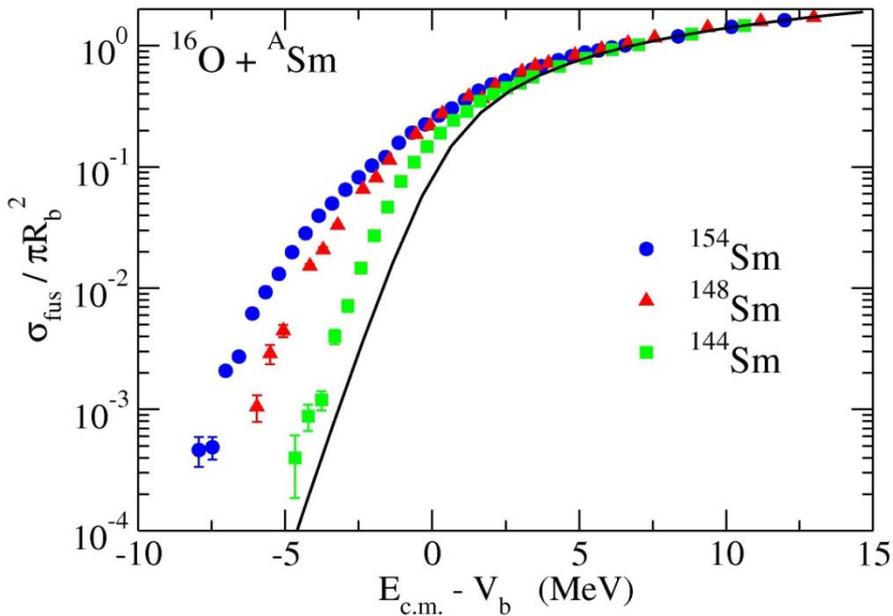
$$\beta_4 = -0.1$$



障壁分布をとることによって、 $\beta_4$ による違いがかなりはっきりと目に見える！

➡ 原子核に対する量子トンネル顕微鏡としての核融合反応

# 障壁分布法の意義



核融合反応断面積



非常に強い指数関数的エネルギー依存性



核構造の詳細による違いが見えづらい



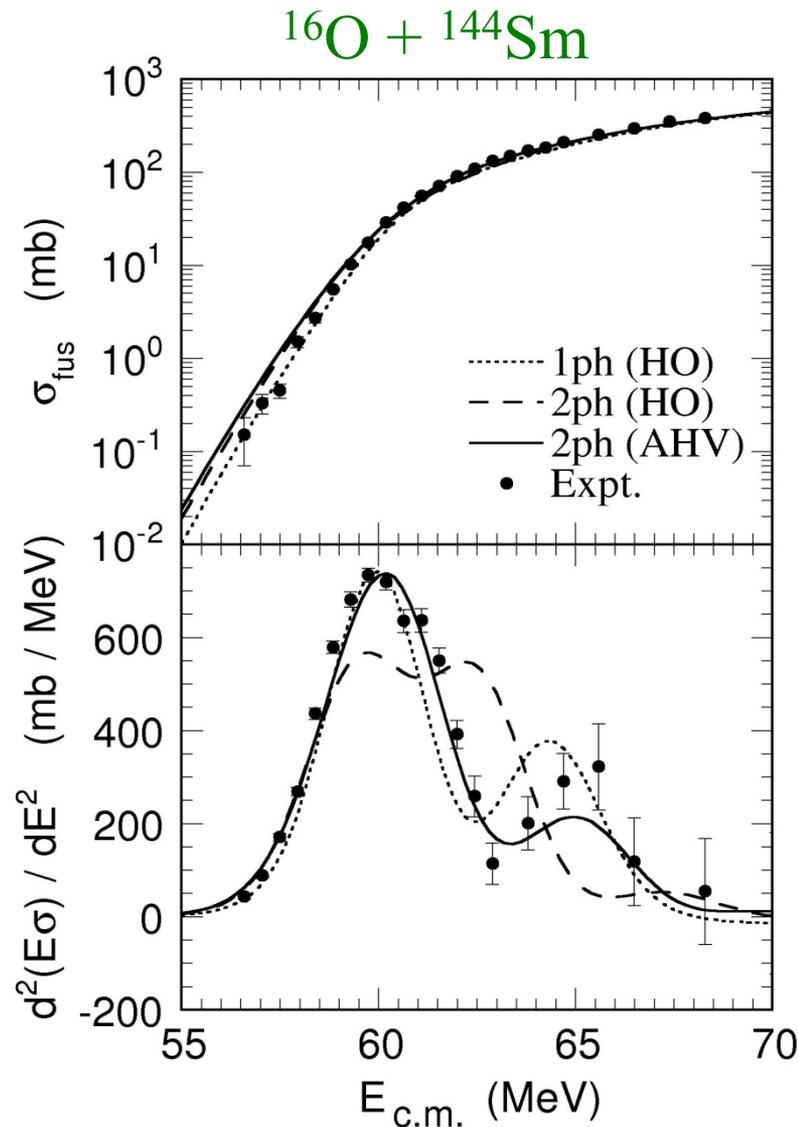
断面積を別の方法でプロットする: 核融合障壁分布

$$D_{\text{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma)}{dE^2}$$

N. Rowley, G.R. Satchler,  
P.H. Stelson, PLB254('91)25

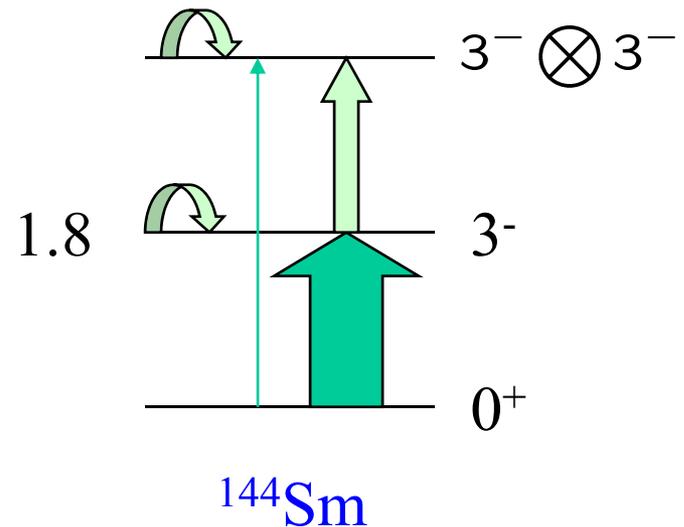
→ 核構造の詳細に敏感な関数

# 球形振動核の例



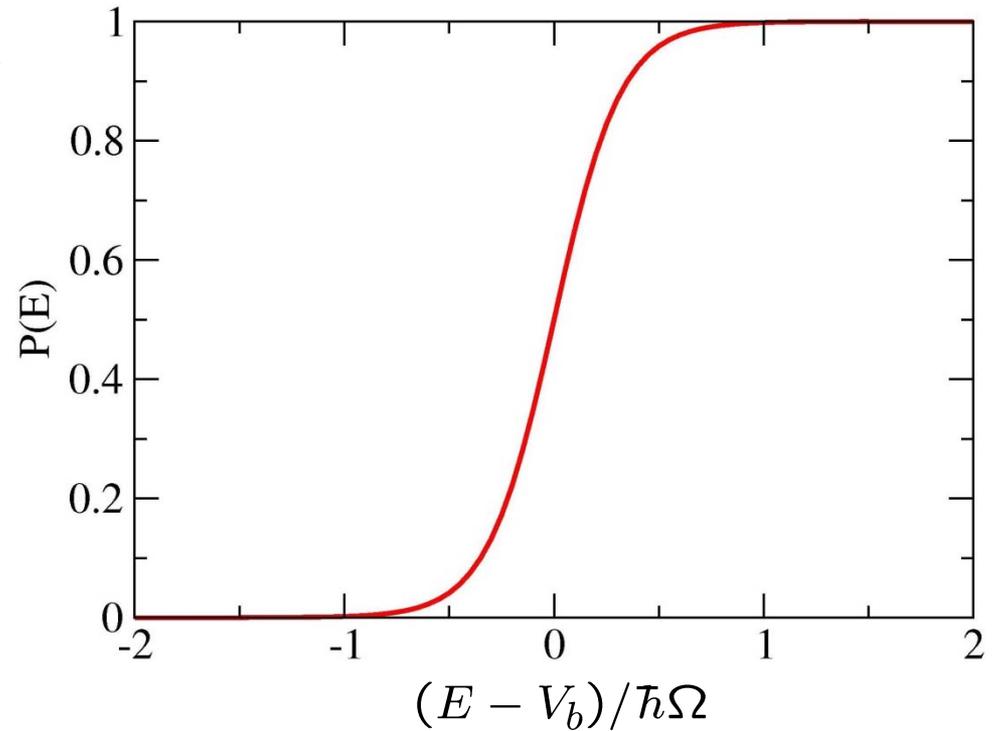
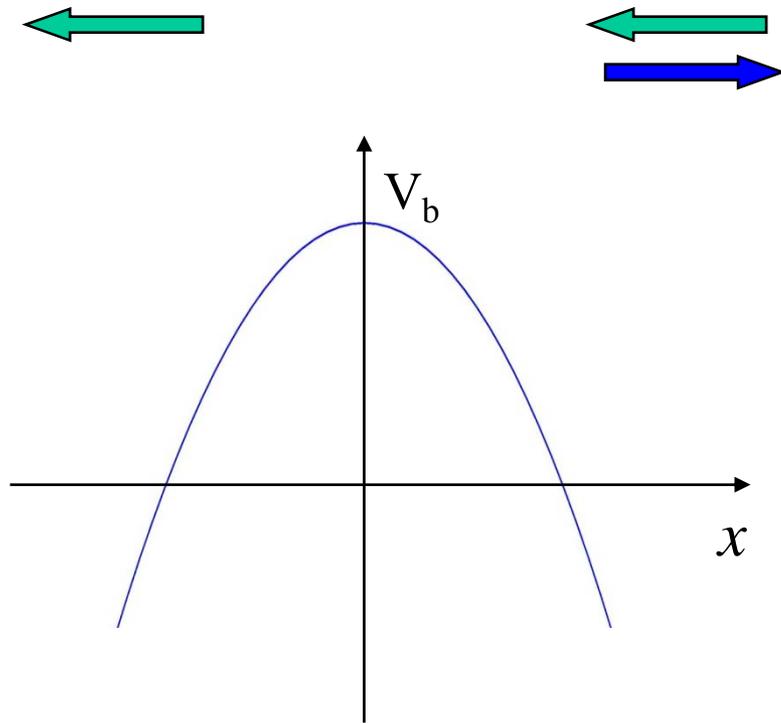
K.Hagino, N. Takigawa, and S. Kuyucak,  
PRL79('97)2943

## Octupole 振動の非調和性



Quadrupole moment:  
 $Q(3^-) = -0.70 \pm 0.02\text{b}$

# 量子反射と重イオン準弾性散乱



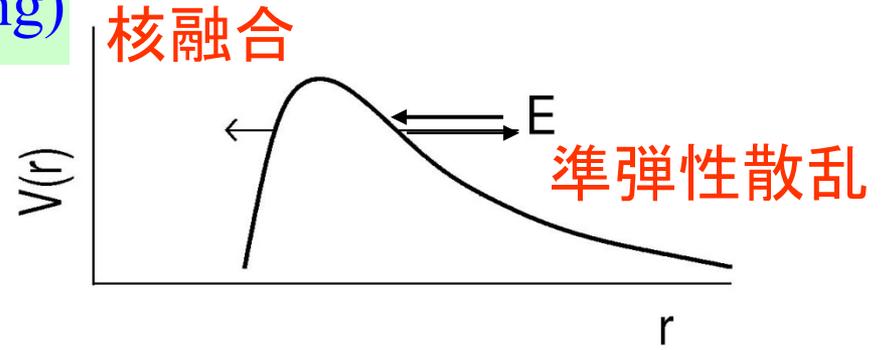
量子力学では  $E > V_b$  でも反射が起こる  $\longrightarrow$  量子反射

$$P(E) + R(E) = 1$$

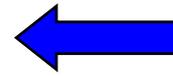
反射確率は透過確率と同じ情報を持ち、反射確率を用いて障壁分布を定義することも可能

# 準弾性散乱 (Quasi-Elastic Scattering)

核融合反応を除く全てのプロセス  
の和 (弾性散乱 + 非弾性散乱 + 核子移  
行反応 + .....



クーロン障壁で跳ね返り検出器に  
入ってきた粒子を全てつかまえる



反射確率に関する



核融合反応と相補的

変形核では.....

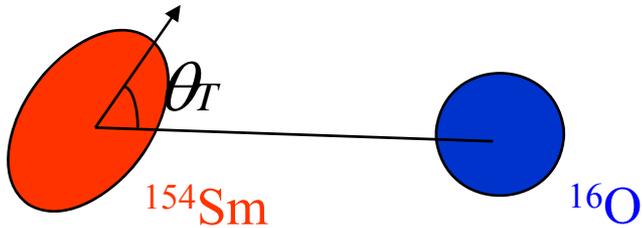


$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos \theta_T) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta_T) \\ \sigma_{\text{qel}}(E, \theta) = \sum_I \sigma(E, \theta) = \int_0^1 d(\cos \theta_T) \sigma_{\text{el}}(E, \theta; \theta_T) \end{array} \right.$$

# 準弾性散乱障壁分布

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos \theta_T) \sigma_{\text{fus}}(E; \theta_T)$$

$$D_{\text{fus}}(E) = \frac{d^2(E \sigma_{\text{fus}})}{dE^2}$$



$$\sigma_{\text{qel}}(E, \theta) = \sum_I \sigma(E, \theta) = \int_0^1 d(\cos \theta_T) \sigma_{\text{el}}(E, \theta; \theta_T)$$

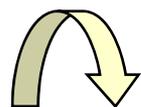
## 準弾性散乱障壁分布:

$$D_{\text{qel}}(E) = -\frac{d}{dE} \left( \frac{\sigma_{\text{qel}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} \right)$$

H. Timmers et al.,  
NPA584('95)190

(note) クーロン力が強い場合の古典的弾性散乱の断面積:

$$\sigma_{\text{el}}^{\text{cl}}(E, \pi) = \sigma_R(E, \pi) \theta(V_b - E)$$


$$\frac{\sigma_{\text{el}}^{\text{cl}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} = \theta(V_b - E) = R(E)$$

## Quasi-elastic Test Function

Classical elastic cross section (in the limit of a strong Coulomb):

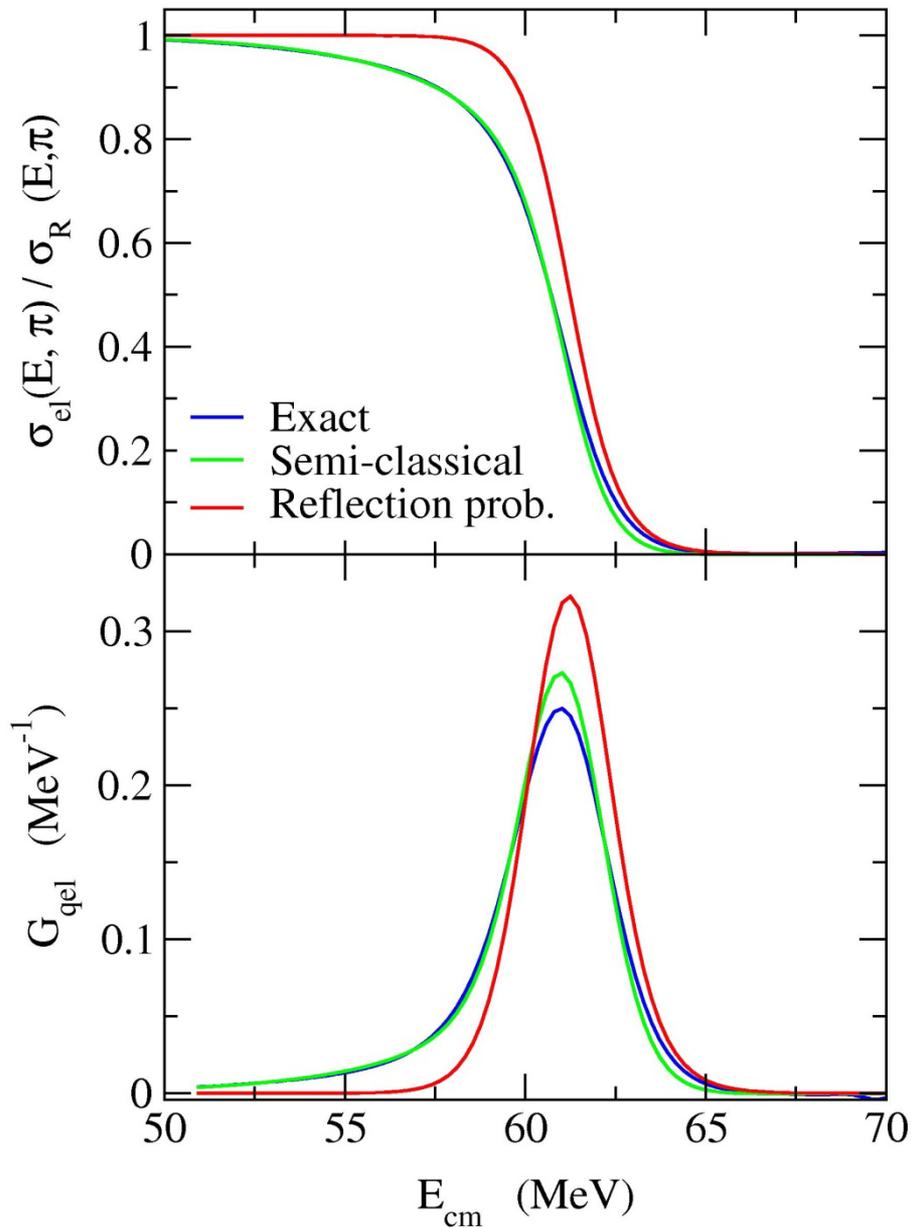
$$\sigma_{\text{el}}^{\text{cl}}(E, \pi) = \sigma_R(E, \pi) \theta(V_b - E)$$



$$\frac{\sigma_{\text{el}}^{\text{cl}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} = \theta(V_b - E) = R(E)$$
$$-\frac{d}{dE} \left( \frac{\sigma_{\text{el}}^{\text{cl}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} \right) = \delta(E - V_b)$$

Nuclear effects  $\longleftarrow$  Semi-classical perturbation theory

$$\frac{\sigma_{\text{el}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} \sim \left( 1 + \frac{V_N(r_c)}{ka} \frac{\sqrt{2a\pi k\eta}}{E} \right) \cdot R(E)$$



### *Quasi-elastic test function*

$$G_{\text{qel}}(E) \equiv -\frac{d}{dE} \left( \frac{\sigma_{\text{el}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} \right)$$

- The peak position slightly deviates from  $V_b$
- Low energy tail
- Integral over  $E$ : unity
- Relatively narrow width



Close analog to fusion b.d.

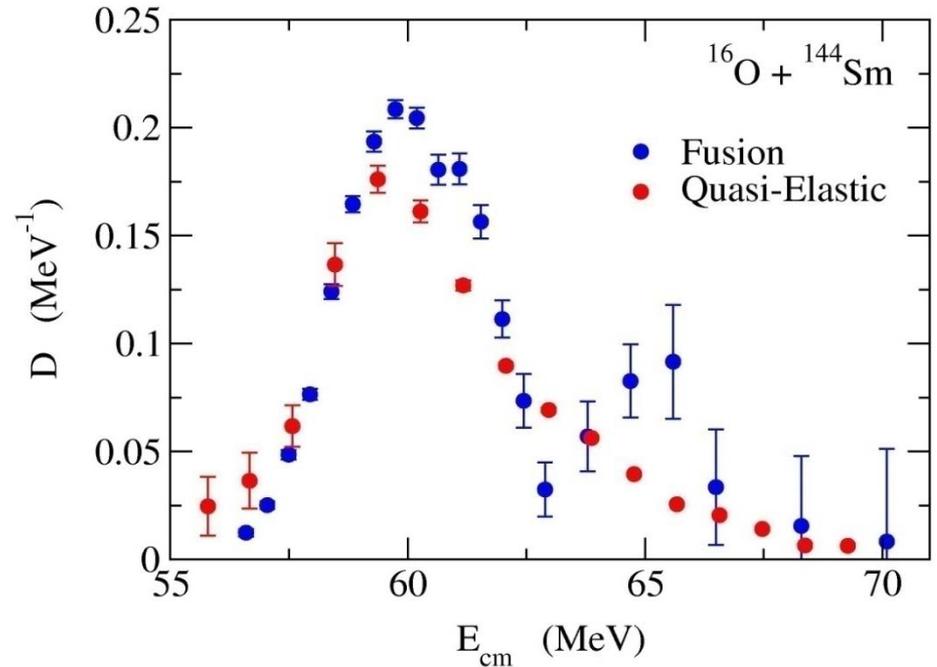
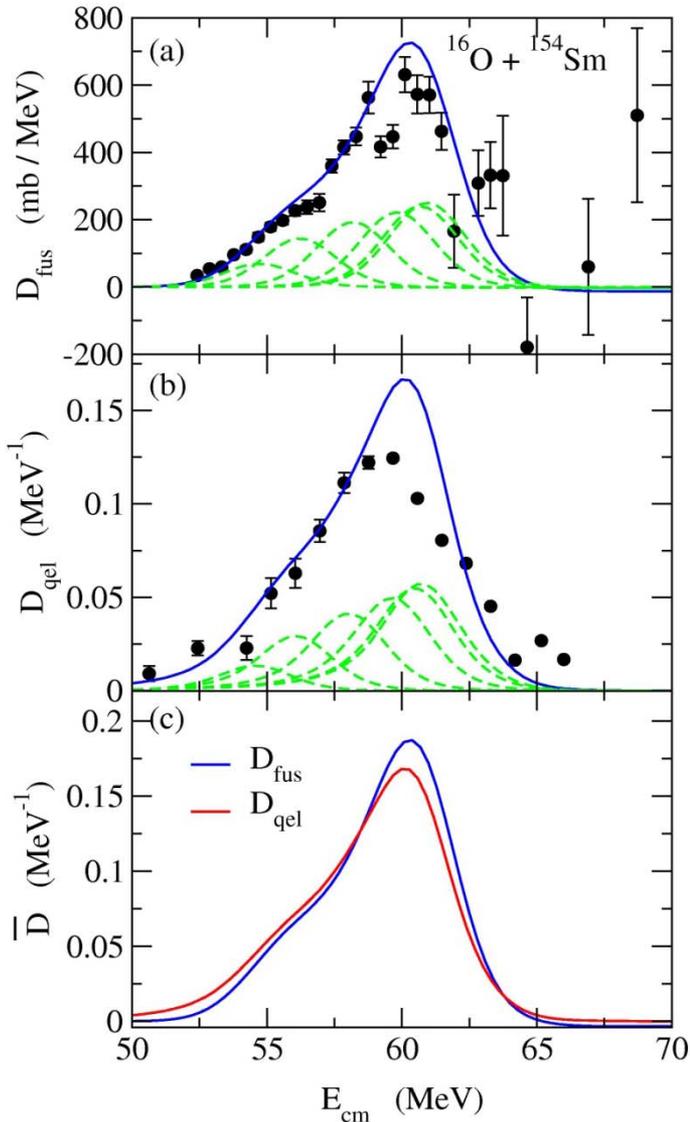
# $D_{\text{fus}}$ と $D_{\text{qel}}$ の比較

核融合障壁分布

$$D_{\text{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\text{fus}})}{dE^2}$$

準弾性障壁分布

$$D_{\text{qel}}(E) = -\frac{d}{dE} \left( \frac{\sigma_{\text{qel}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} \right)$$



H. Timmers et al., NPA584('95)190

大まかな構造は非常に似通っている

# 準弾性散乱障壁分布を測定する利点

$$D_{\text{qel}}(E) = -\frac{d}{dE} \left( \frac{\sigma_{\text{qel}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} \right) \quad D_{\text{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\text{fus}})}{dE^2}$$

- 両者とも核構造に敏感（例えば  $\beta_4$  の符号）
- 実験精度が比較的悪くても大丈夫（1階微分 vs 2階微分）
- 核融合に比べて実験が容易

準弾性散乱: 後方にきた粒子をすべて押さえればよい

核融合: recoil separator などを用いて核融合生成物をビームと分離する必要あり

- 一つのビーム・ラインで様々な実効エネルギーの断面積を測定できる

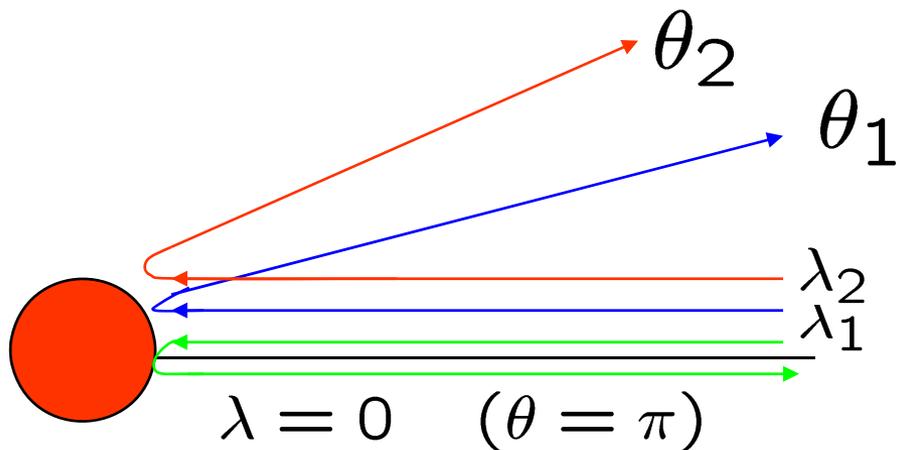
↔ 散乱角度と遠心力ポテンシャルの関係

# Scaling property of $D_{\text{qel}}$

Expt.: impossible to perform

at  $\theta = \pi$

→ Relation among different  $\theta$ ?



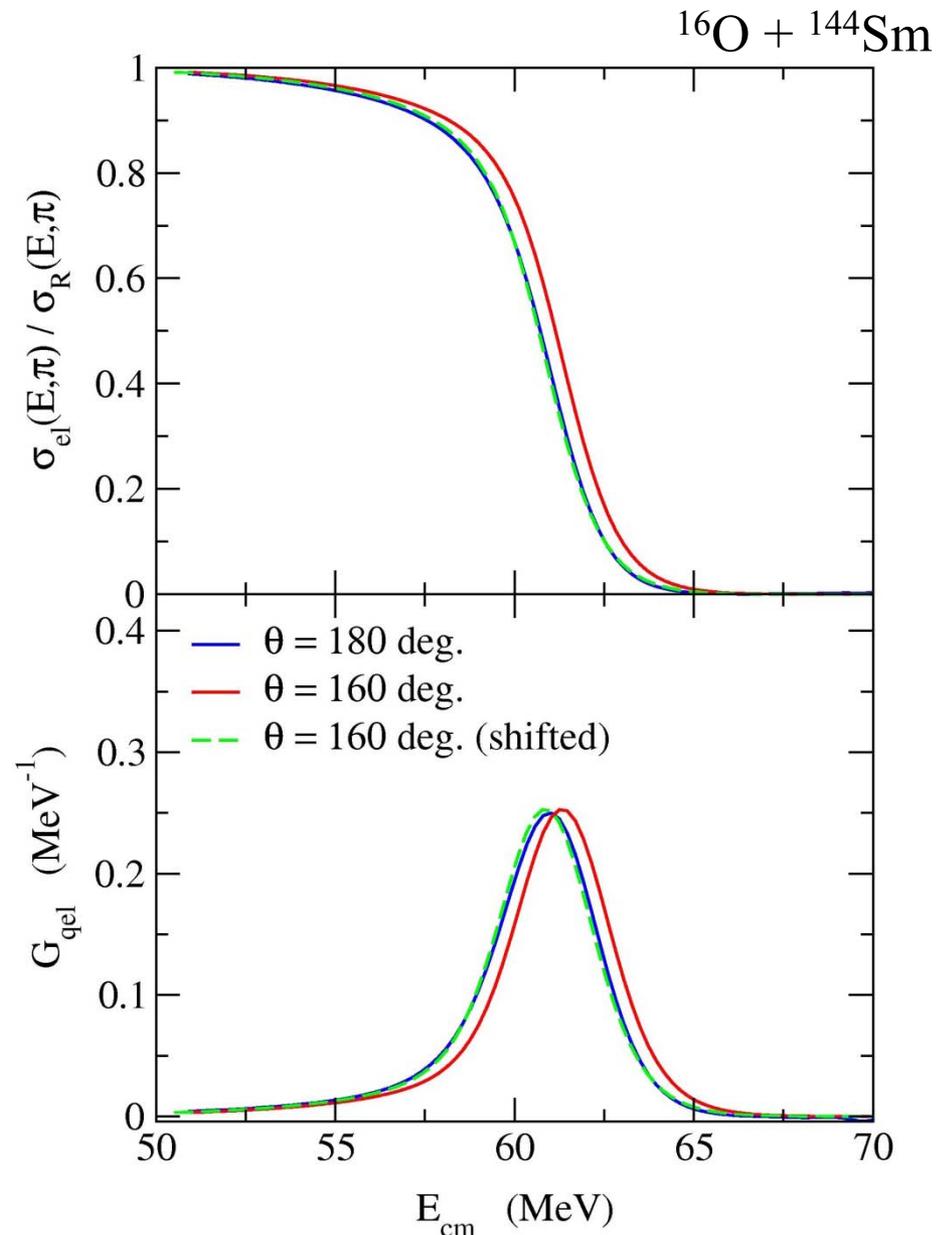
Effective energy:

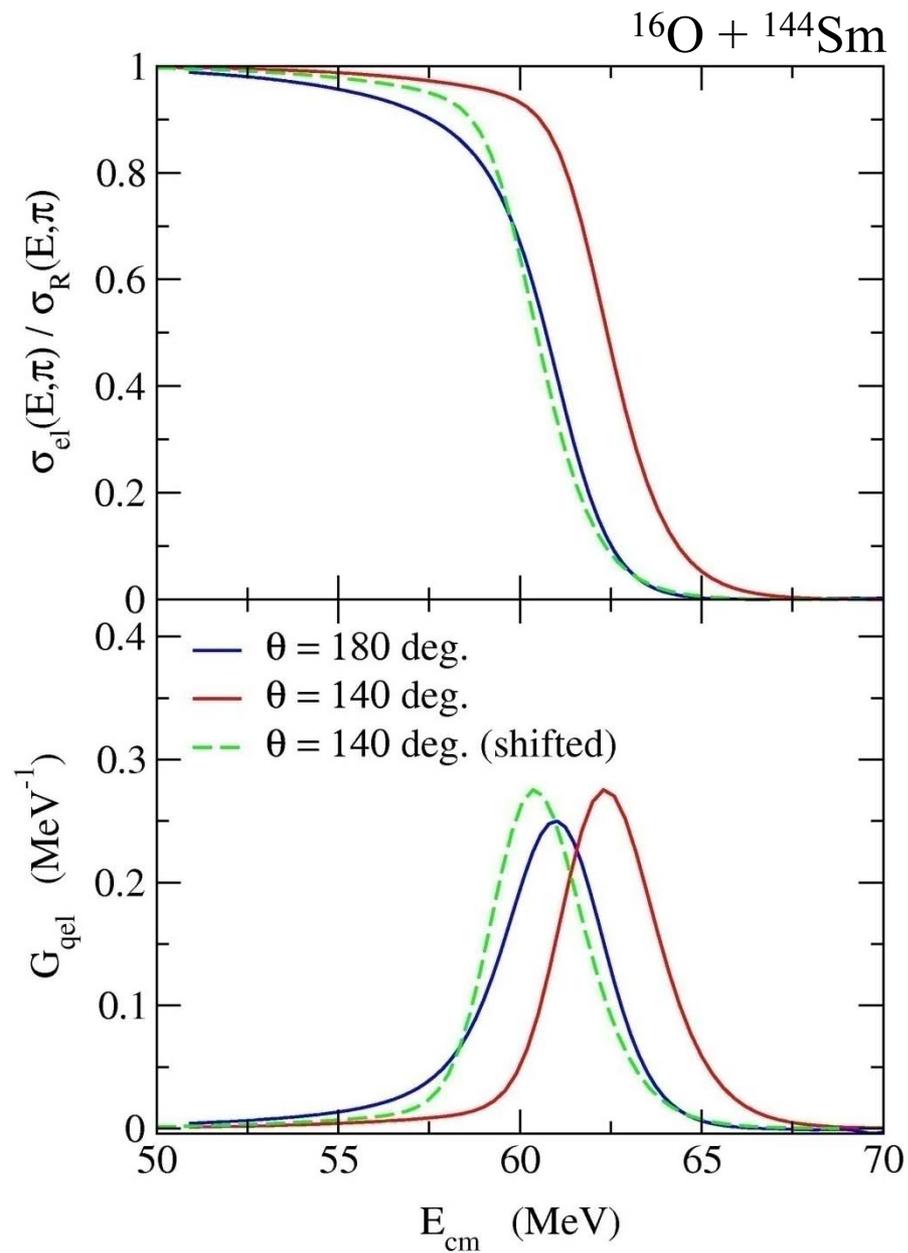
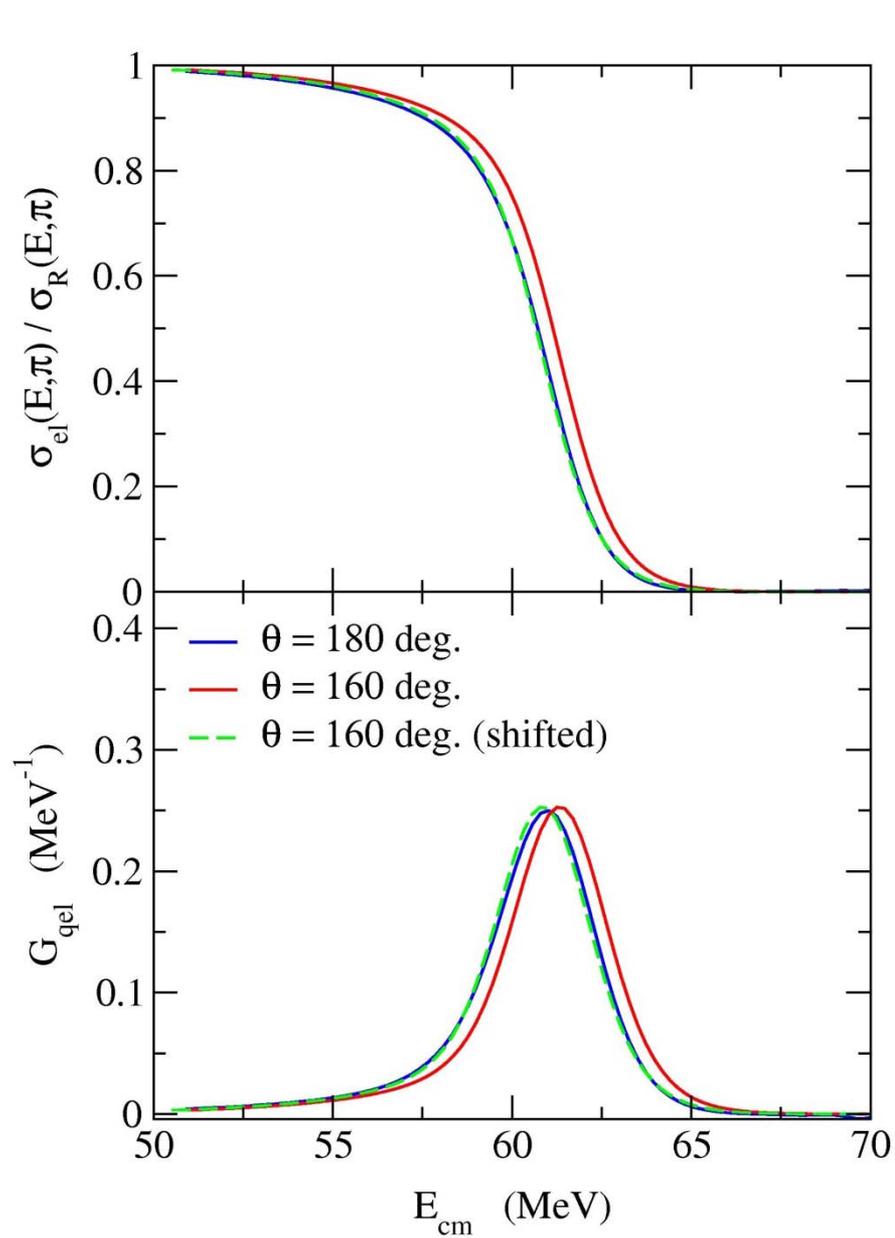
$$E_{\text{eff}} \sim E - \frac{\lambda_c^2 \hbar^2}{2\mu r_c^2}$$

$$= 2E \frac{\sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)}$$

$$D_{\text{qel}}(E, \theta) \sim D_{\text{qel}}(E_{\text{eff}}, \pi)$$

$$\lambda_c = \eta \cot(\theta/2)$$





# 準弾性散乱障壁分布を測定する利点

$$D_{\text{qel}}(E) = -\frac{d}{dE} \left( \frac{\sigma_{\text{qel}}(E, \pi)}{\sigma_R(E, \pi)} \right) \quad D_{\text{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\text{fus}})}{dE^2}$$

- 両者とも核構造に敏感（例えば  $\beta_4$  の符号）
- 実験精度が比較的悪くても大丈夫（1階微分 vs 2階微分）
- 核融合に比べて実験が容易

準弾性散乱：後方に来た粒子をすべて押さえればよい

核融合：recoil separator などを用いて核融合生成物をビームと分離する必要あり

- 一つのビーム・ラインで様々な実効エネルギーの断面積を測定できる

↔ 散乱角度と遠心力ポテンシャルの関係

→ **ビーム強度が強くない不安定核ビームの実験に最適**

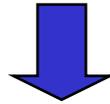
準弾性散乱を用いて不安定原子核の構造研究が可能

# 不安定核ビームを用いた実験

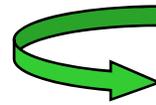
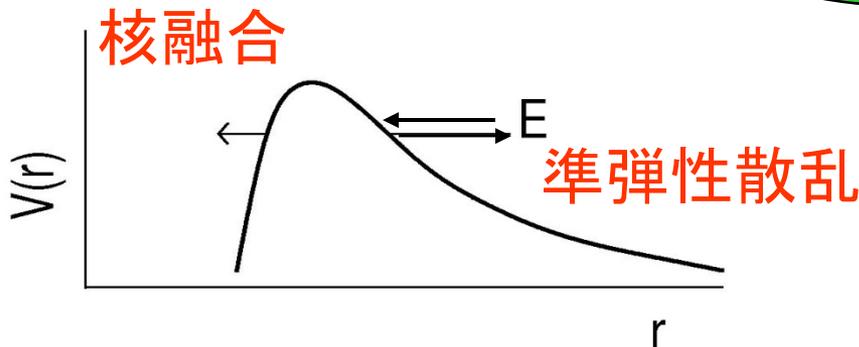
核融合障壁分布: 高精度の核融合反応断面積が必要

不安定核ビーム: ビーム強度は安定核ビームに比べて弱い

→ 高精度のデータは現段階では望み薄

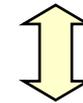


他の手段で障壁分布を引き出すことは可能か？



透過確率の代わりに  
反射確率に注目

$$P + R = 1$$



準弾性散乱障壁分布

# 超重核生成反応におけるクーロン障壁の系統性

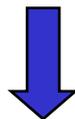
超重核生成反応: 非常に小さい断面積



反応に最適なエネルギーの選択が重要



しかし、クーロン障壁に関する系統性は存在せず

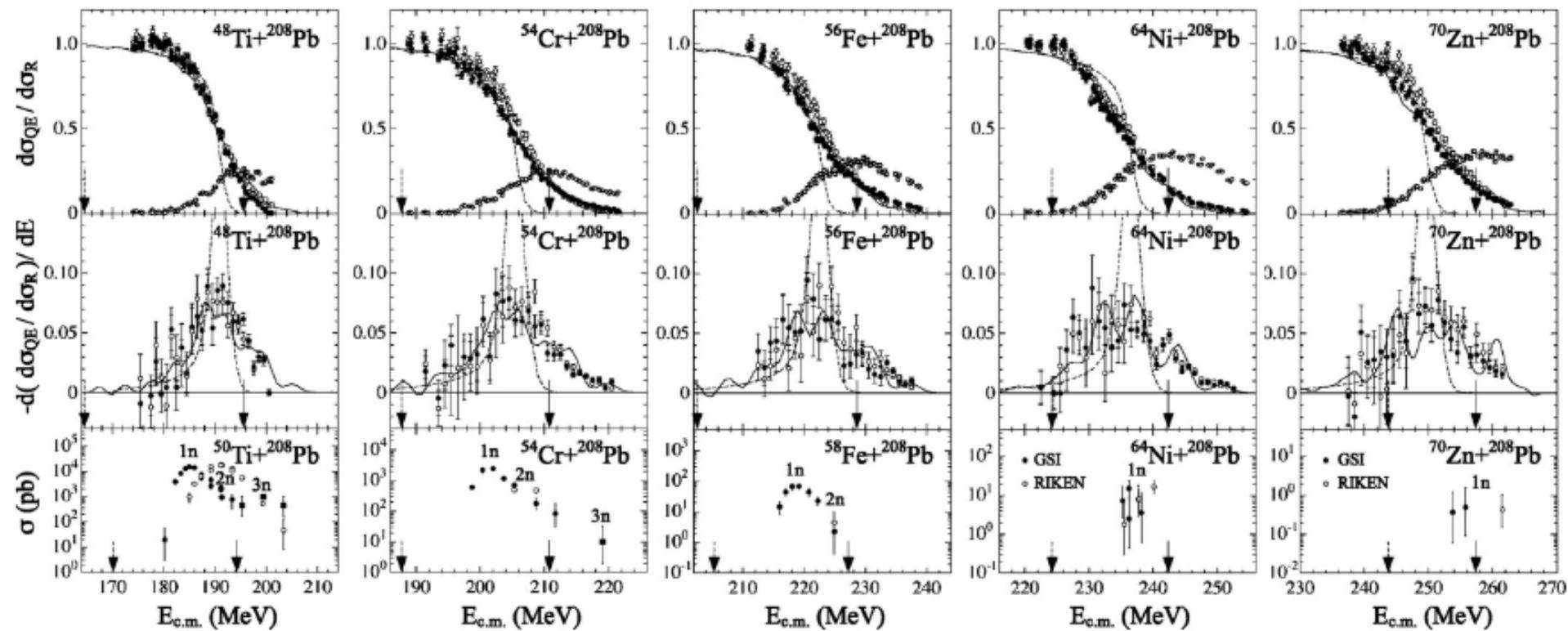


準弾性障壁分布を用いた平均ポテンシャルの高さの測定

JAEA (S.Mitsuoka et al.)

Cold fusion reactions:  $^{50}\text{Ti}, ^{54}\text{Cr}, ^{58}\text{Fe}, ^{64}\text{Ni}, ^{70}\text{Zn} + ^{208}\text{Pb}, ^{209}\text{Bi}$

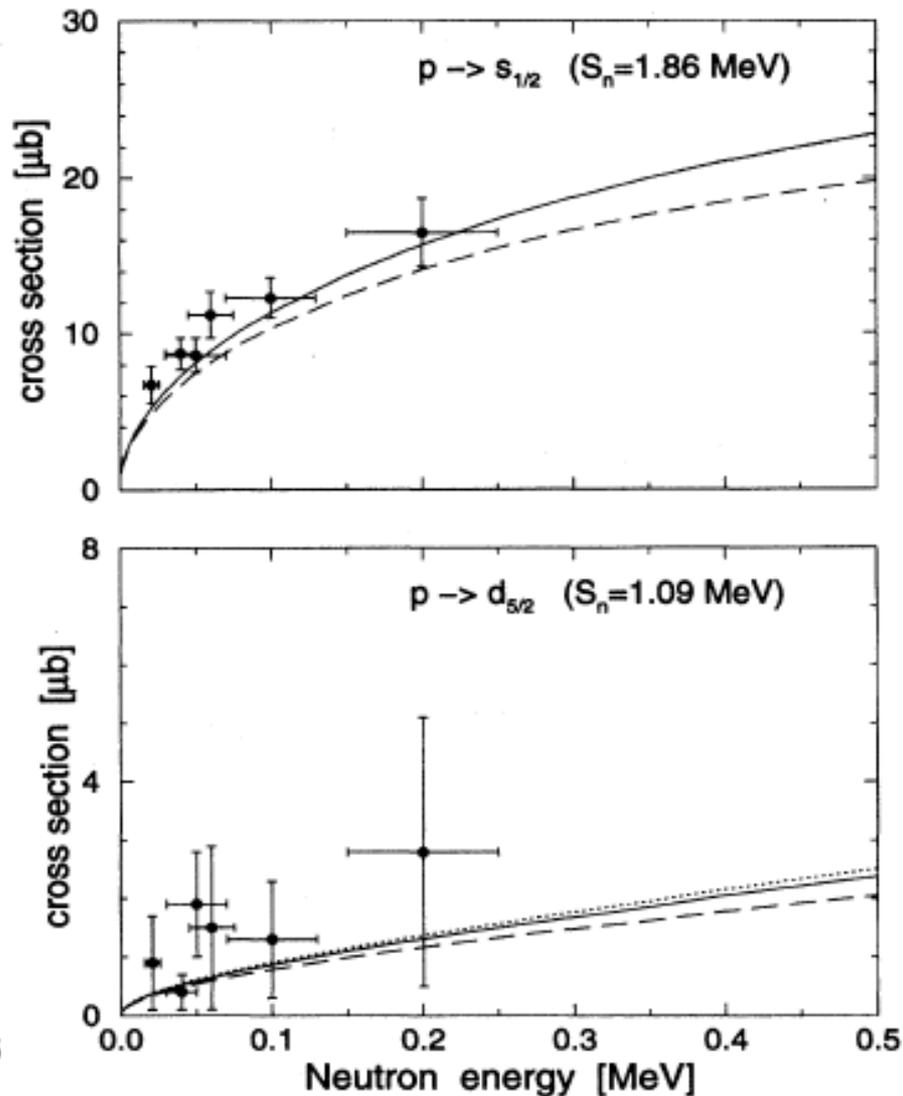
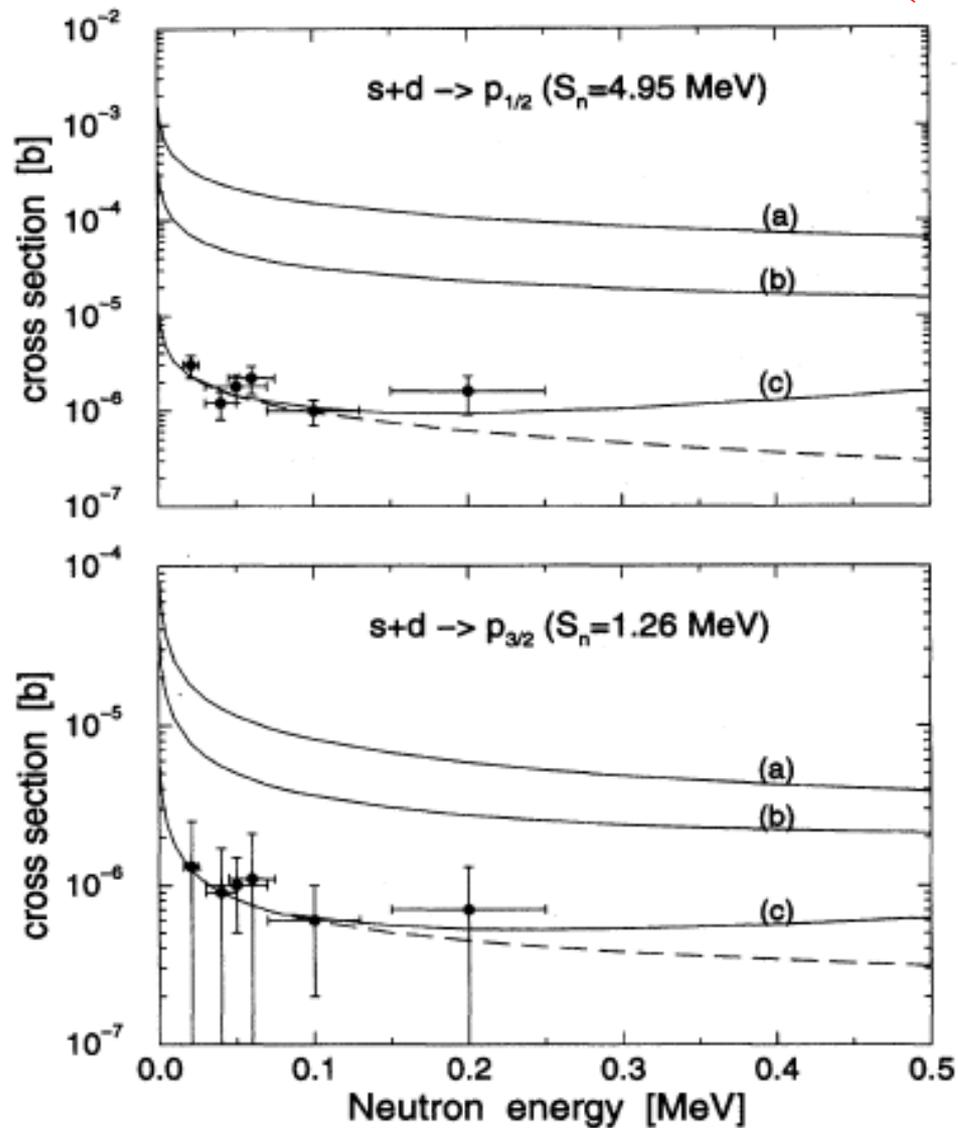
# 系統的な障壁分布の測定



S. Mitsuoka et al., PRL99('07)182701

# その他1: 中性子捕獲反応

定式化はノート参照



## その他2:高エネルギー原子核反応の取扱:アイコナール近似

ノート参照