非束縛核の物理

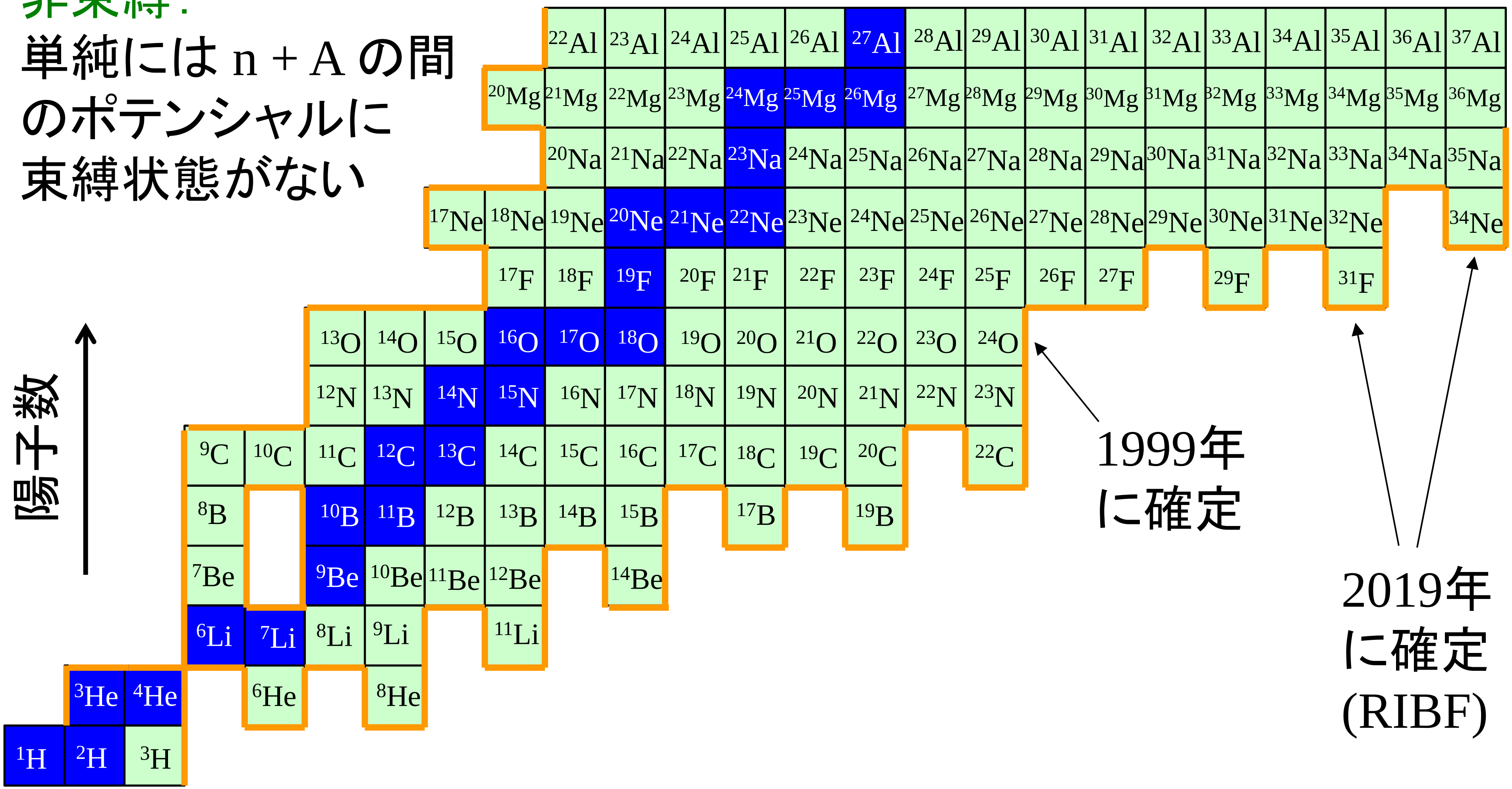
非束縛:

単純には n + A の間のポテンシャルに束縛状態がない

非束縛核の物理

中性子ドリップライン

非束縛:
単純には n + A の間
のポテンシャルに
束縛状態がない



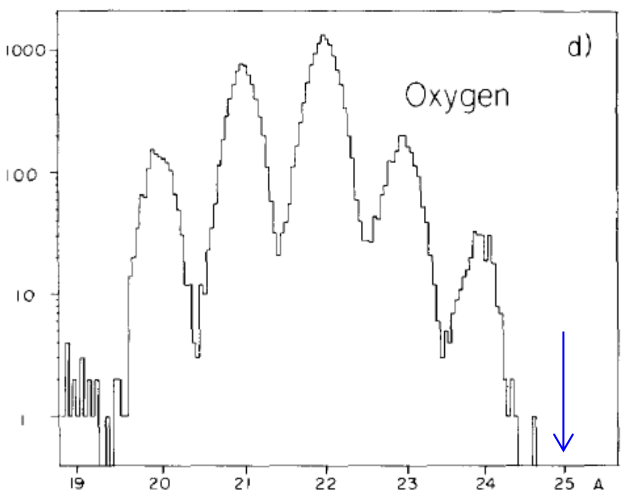
中性子数

Na は ^{39}Na まで発見（ドリップ線は未確定）。その先もまだ。

酸素同位体のドリップ線

酸素原子核 (Z=8)

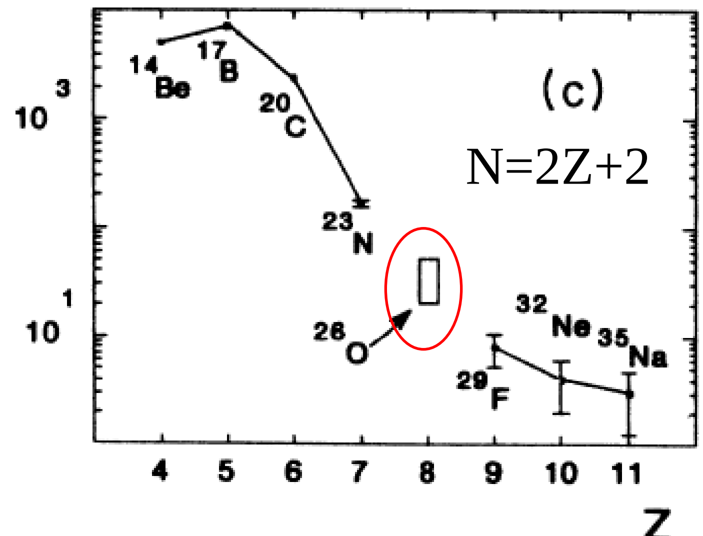
- ✓ 安定同位体 : ^{16}O (99.757%), ^{17}O (0.038%), ^{18}O (0.205%)
- ✓ ^{24}O の発見 : A.G. Artukh et al., PL32B (1970) 43



^{40}Ar の破砕

M. Langevin et al.,
PL150B (‘85) 71

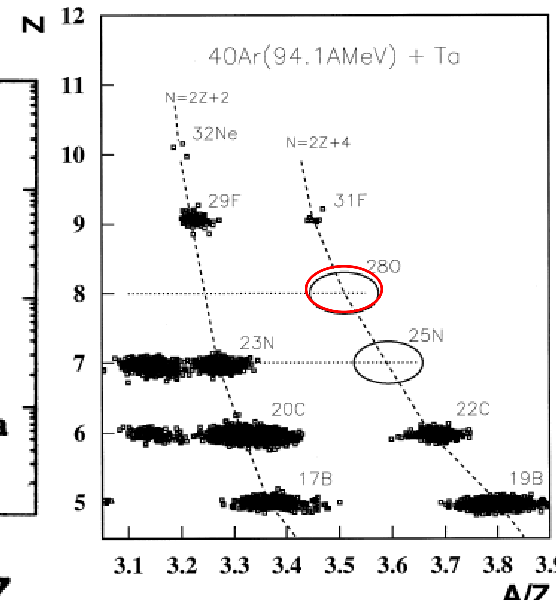
^{25}O は不検出



^{48}Ca の破砕

D. Guillemaud-Mueller et al.,
PRC41 (‘90) 937

^{26}O は不検出



^{40}Ar の破砕

H. Sakurai et al.,
PLB448 (‘99) 180

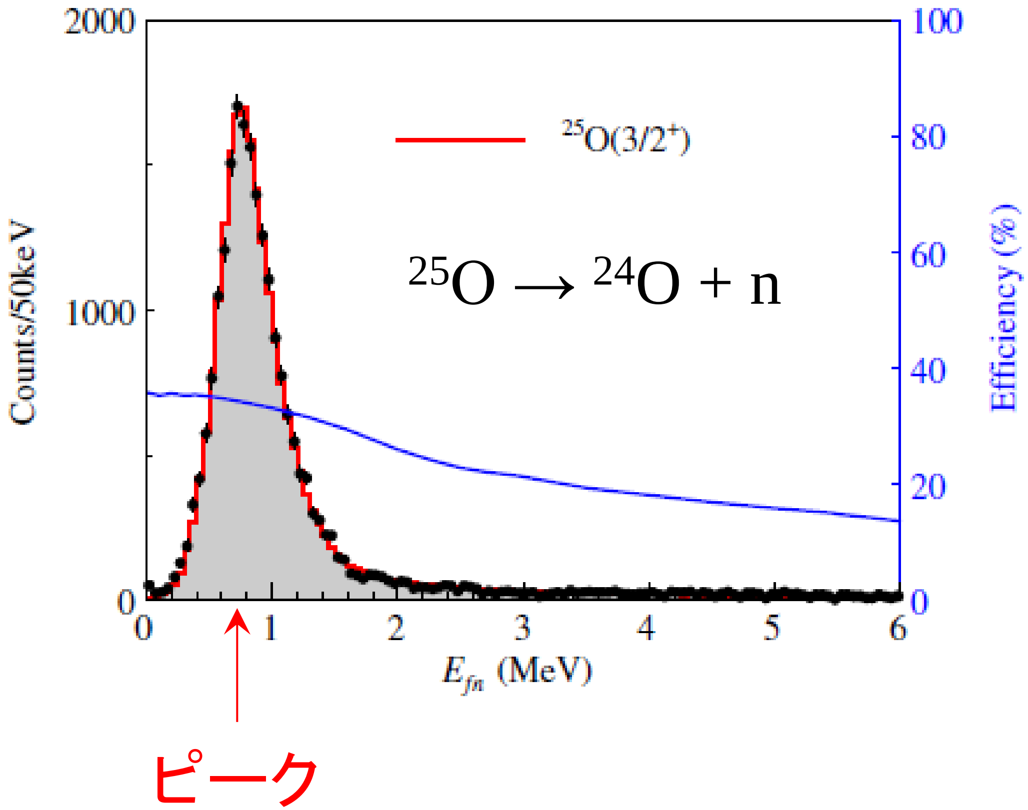
^{28}O は不検出

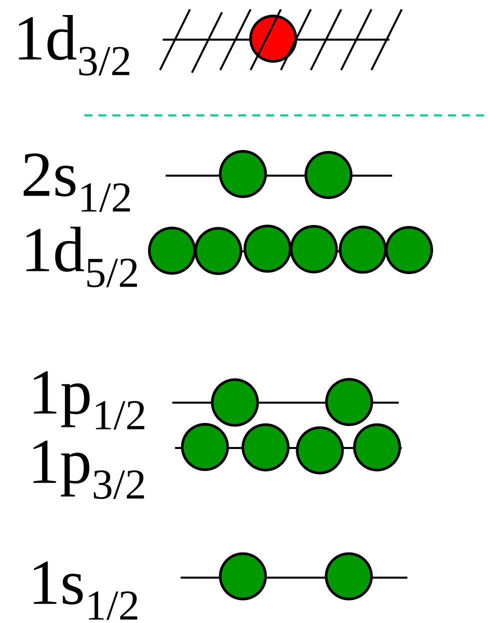
➡ 酸素の中性子ドリップ線は ^{24}O で確定。^{25,26,28}O は非束縛。

非束縛核の物理

^{22}O ^{23}O ^{24}O ^{25}O ^{26}O

$^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて $^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



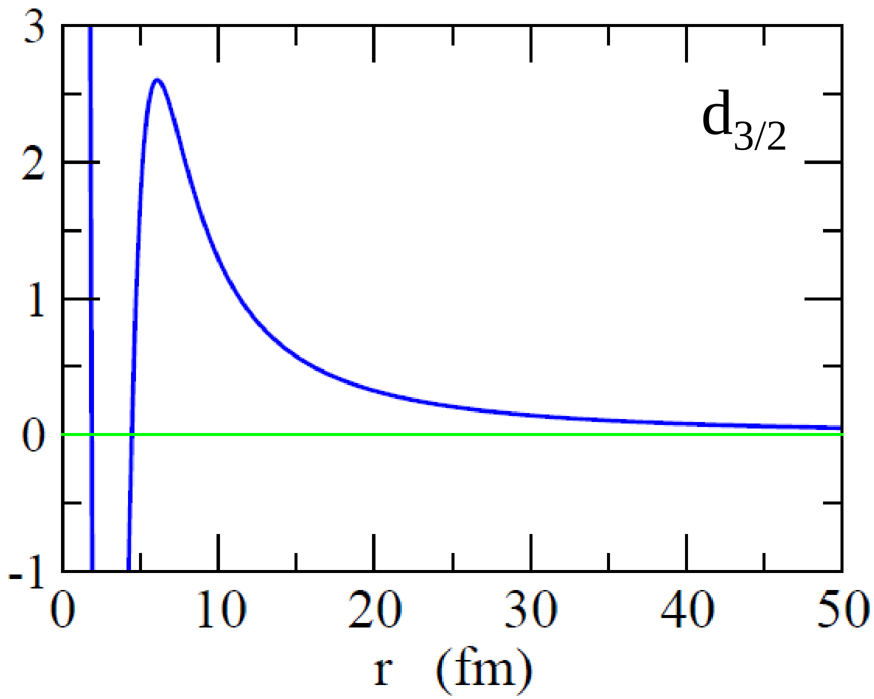


中性子
1粒子状態

Y. Kondo et al., PRL116 ('16) 102503

$1d_{3/2}$ の「準束縛」状態と解釈することができる

準束縛状態とは?



実際のポテンシャル

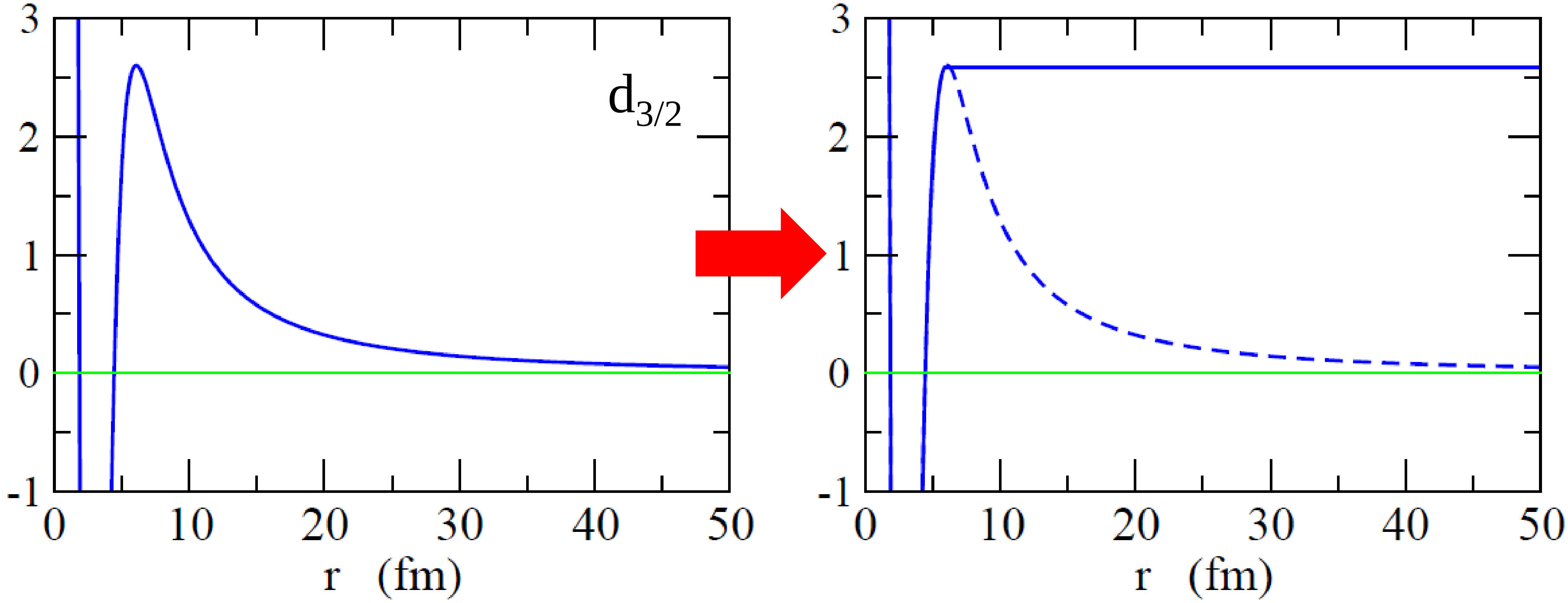
束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

準束縛状態とは?

井戸型ポテンシャルなど

- 束縛状態と連続状態
- 束縛状態の波動関数の特徴
- エネルギー

準束縛状態とは?



実際のポテンシャル

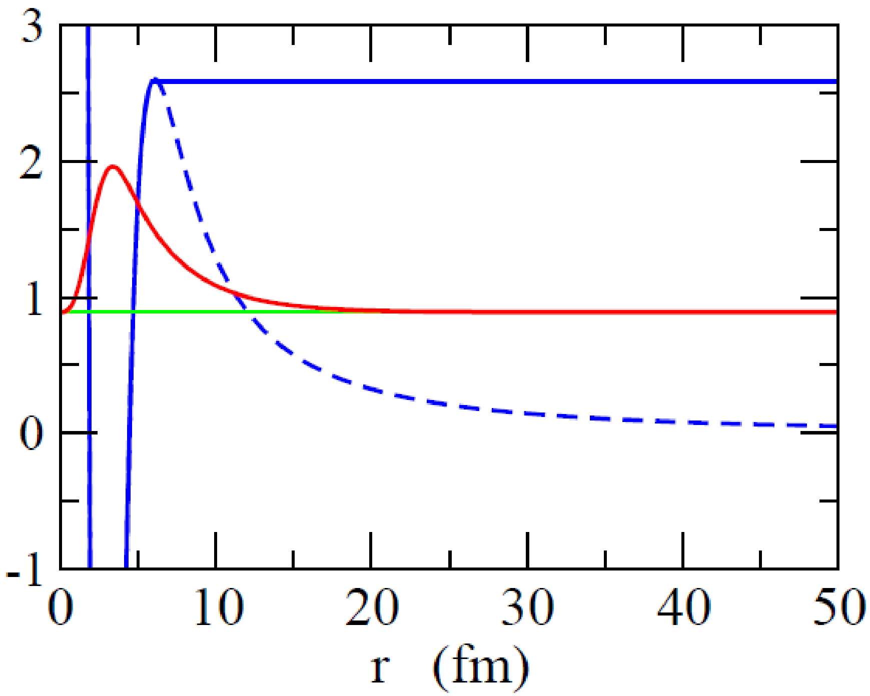
束縛状態は $E < 0$ の領域のみ

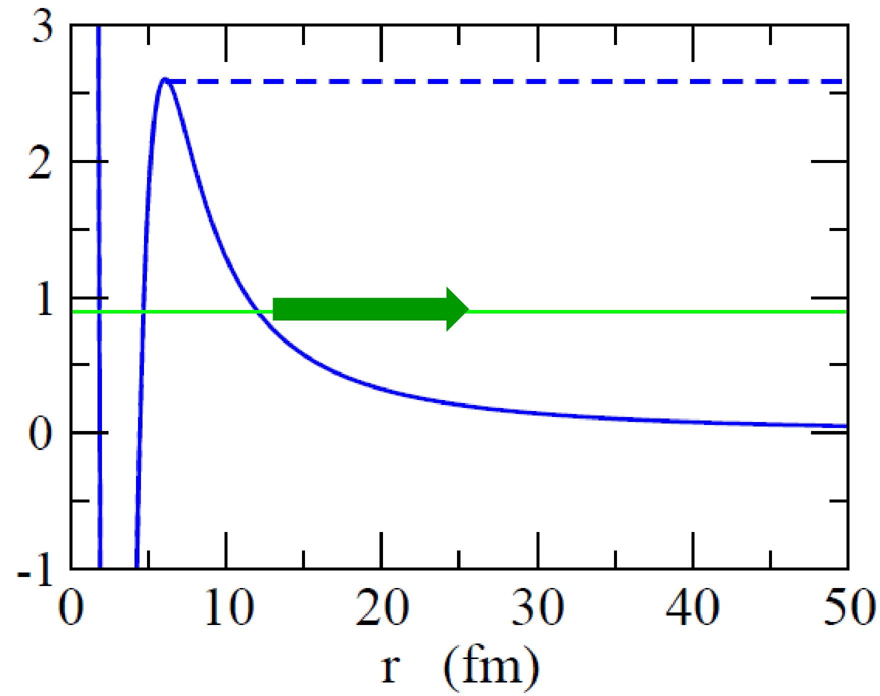
このようにポテンシャルを変更すると

$\longrightarrow$ $E > 0$ でも束縛状態ができる

＝ 準束縛(準安定)状態

準束縛状態とは?



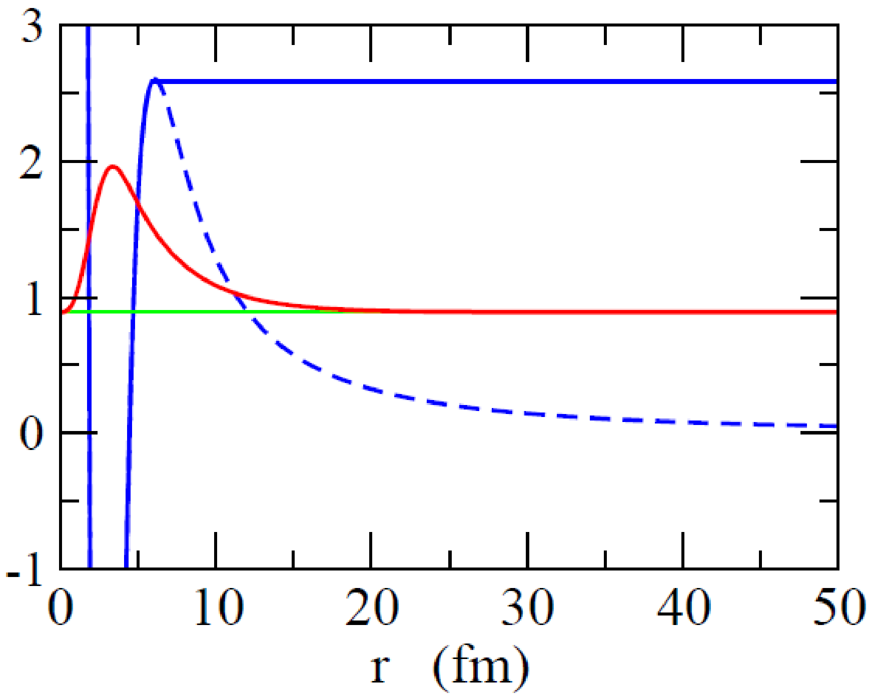


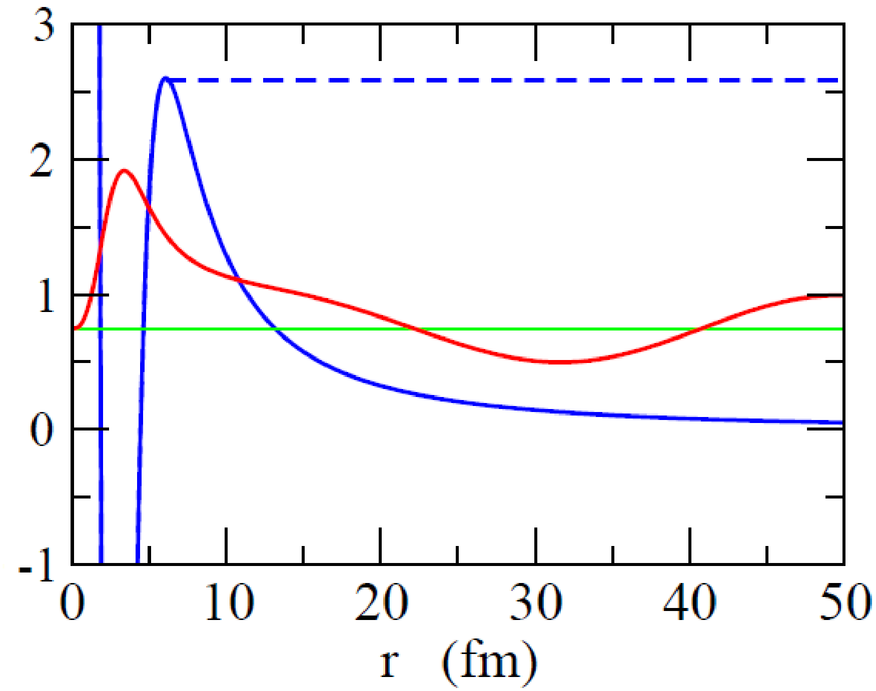
束縛状態 ＝ 無限の寿命

実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛（準安定）状態」

準束縛状態とは?



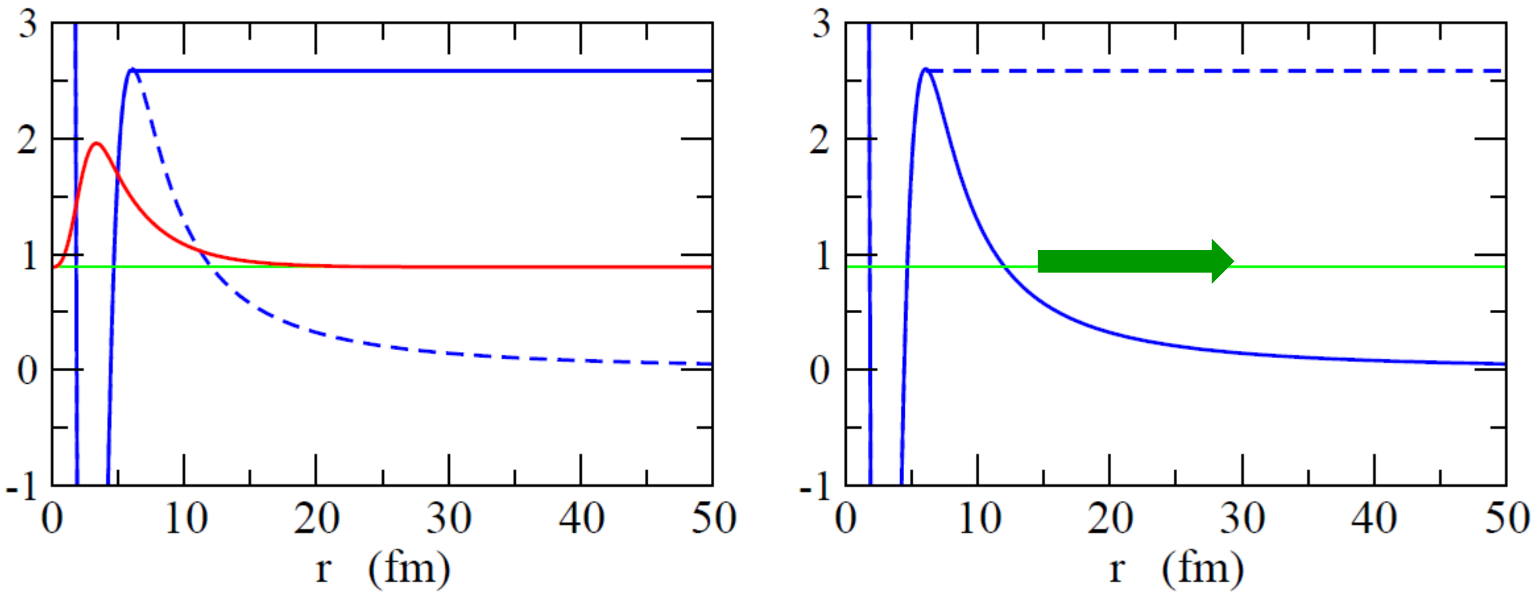


束縛状態 ＝ 無限の寿命

実際には有限の寿命で
障壁をトンネルし崩壊

「準束縛（準安定）状態」

ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が
沁み出し、外向きの波として崩壊

$$u(r) \sim r^{l+1} \qquad (r \to 0)$$
$$\to \mathcal{N} e^{i(kr - l\pi/2)} \qquad (r \to \infty)$$

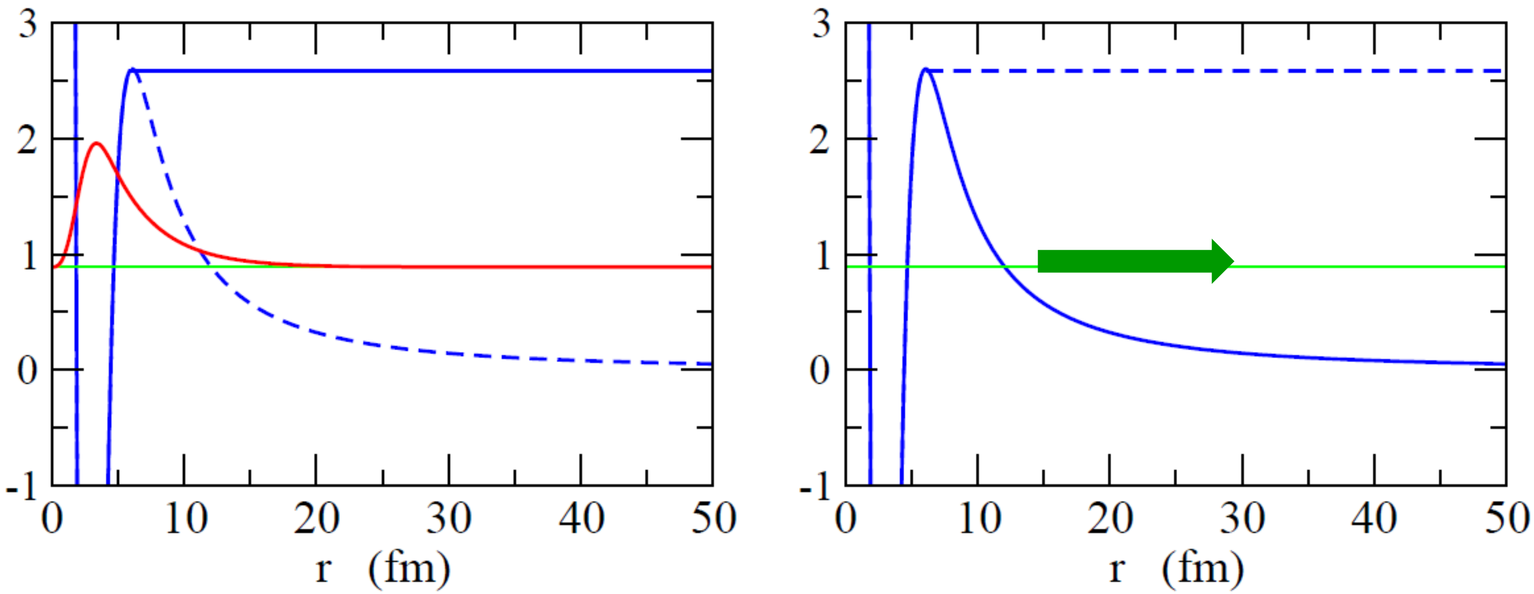
⇨ エネルギーを複素数にしなければならない：

共鳴幅

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

共鳴エネルギー

ガモフ状態



トンネル効果で波動関数が
沁み出し、外向きの波として崩壊

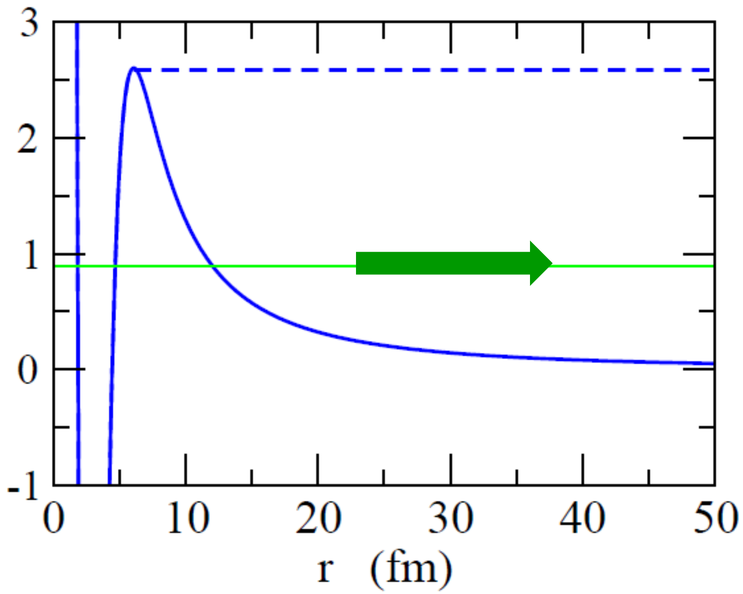
$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{sur}}(t) &\equiv |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= |\langle\psi(0)|e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2 \\ &= |\langle\psi(0)|e^{-i(E_R-i\Gamma/2)t/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2 \\ &= e^{-\Gamma t/\hbar} \end{aligned}$$

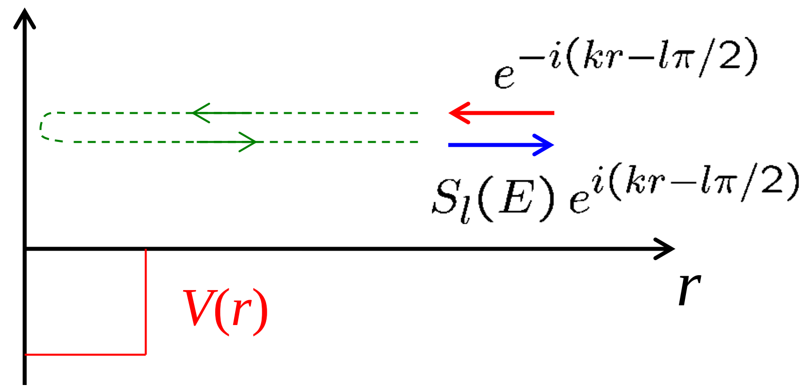
$\longrightarrow$ $\boxed{\hbar/\Gamma \text{ が準安定状態の寿命}}$

ガモフ状態と散乱状態の関係

ガモフ状態



散乱状態



外向波境界条件

$$u_l(r) \to \mathcal{N}\, e^{i(kr-l\pi/2)}$$

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

散乱の境界条件

$$u_l(r) \;\to\; \mathcal{N}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\, e^{i(kr-l\pi/2)}\right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

共鳴状態と弾性散乱（共鳴散乱）

自由粒子の運動：

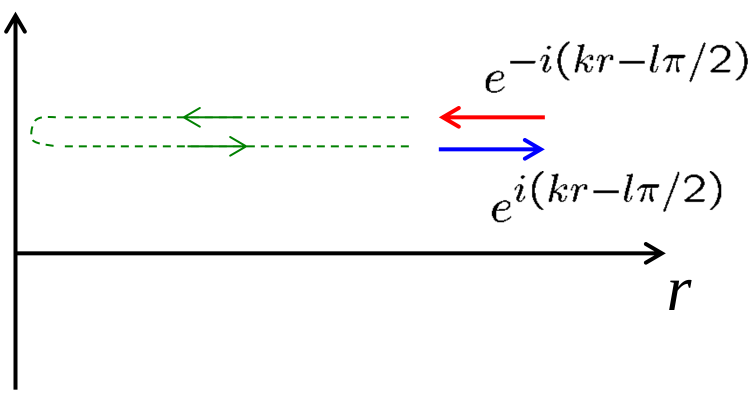
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

✓解：

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い：

$$\boxed{\begin{aligned} j_l(kr) \;&\to\; \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ &=\; \frac{-1}{2ikr}\Big(e^{-i(kr-l\pi/2)} \\ &\qquad\qquad -e^{i(kr-l\pi/2)}\Big) \end{aligned}}$$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

自由粒子の運動:

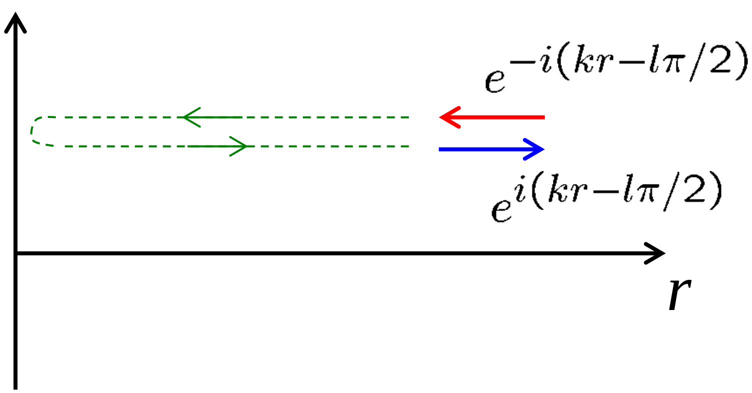
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\to \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ &= \frac{-1}{2ikr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right) \end{aligned}$$



ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

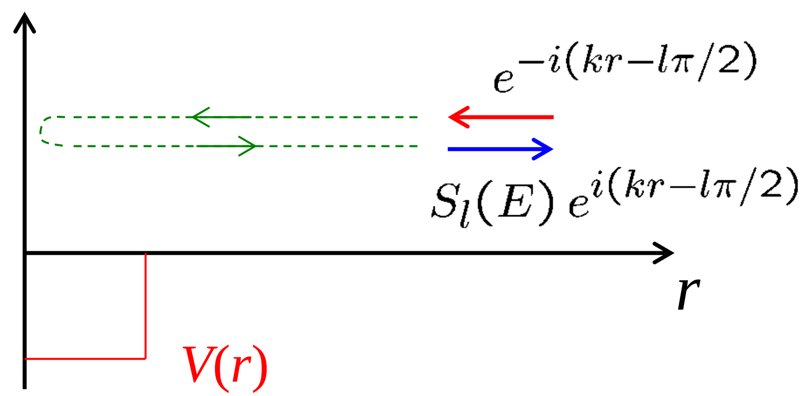
✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$R_l(r) \to \frac{-1}{2ikr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right)$$

* 吸収がなければ $|S_l(E)| = 1$



共鳴状態と弾性散乱(共鳴散乱)

自由粒子の運動:

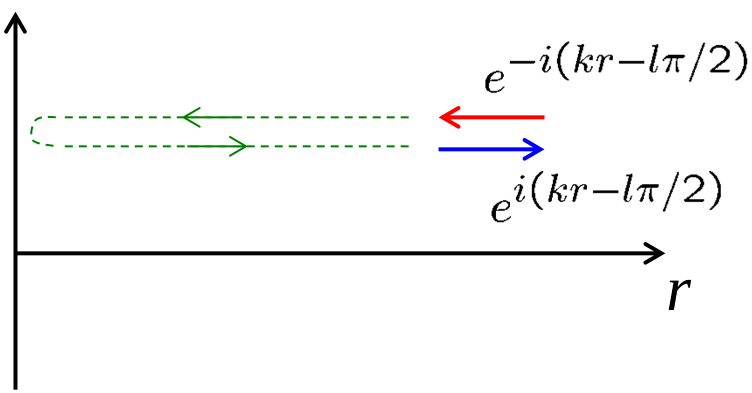
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto j_l(kr)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\to \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ &= \frac{-1}{2ikr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right) \end{aligned}$$



ポテンシャル中の運動:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

✓解:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \propto R_l(r)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})\chi_{m_s}$$

✓遠方での振る舞い:

$$R_l(r) \to \frac{-1}{2ikr}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\, e^{i(kr-l\pi/2)}\right)$$

* 吸収がなければ $|S_l(E)| = 1$

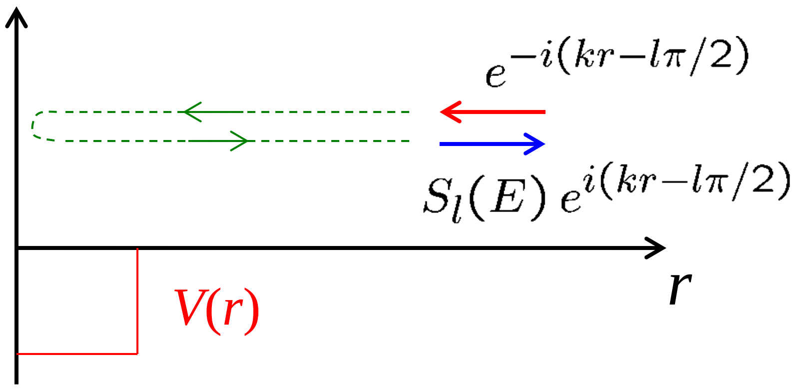
位相のずれ (phase shift)

$$\boxed{S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}}$$

$$R_l(r) \to -\frac{e^{i\delta_l(E)}}{kr}\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(E))$$

ガモフ状態と散乱状態の関係

散乱状態



散乱の境界条件

$$u_l(r) \;\to\; \mathcal{N}\left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l(E)\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right)$$

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}$$

E : real

もし、$S_l(E)$ が発散するような E があれば、

$$u_l(r) \sim \widetilde{\mathcal{N}}\,e^{i(kr-l\pi/2)}$$ （外向波）

ただし、エネルギー E を複素平面へ解析接続しなければならない：

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

⇒ ガモフ状態 $\longleftrightarrow$ S 行列の極（ポール）

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$\boxed{S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E-\epsilon^*}{E-\epsilon}} \longleftarrow |S(E)| = 1$$

$\delta_0(E)$ は E のゆるやかな関数 (background phase shift)

このとき、

$$\begin{aligned} S(E) &= e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E-E_R-i\Gamma/2}{E-E_R+i\Gamma/2} \\ &= e^{2i\delta_0(E)} \left(1 - \frac{i\Gamma}{E-E_R+i\Gamma/2}\right) \end{aligned}$$

$\delta_0 \sim 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \frac{\pi}{k^2}(2l+1)|S_l - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)\left|\frac{-i\Gamma}{E-E_R+i\Gamma/2}\right|^2 \\ &= \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_R)^2+\Gamma^2/4} \end{aligned}$$

Breit-Wigner の式

Breit-Wigner の公式

S-行列が $\epsilon = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$ で極を持つとすると、

$$\boxed{S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{E-\epsilon^*}{E-\epsilon}} \quad \longleftarrow \quad |S(E)| = 1$$

phase shift はどうなっているのか？

$E - \epsilon^* = c\, e^{i\delta_r(E)}$ とすると、

$$S(E) = e^{2i\delta_0(E)} \cdot \frac{c\, e^{i\delta_r(E)}}{c\, e^{-i\delta_r(E)}} = e^{2i\delta_0(E)} e^{2i\delta_r(E)}$$

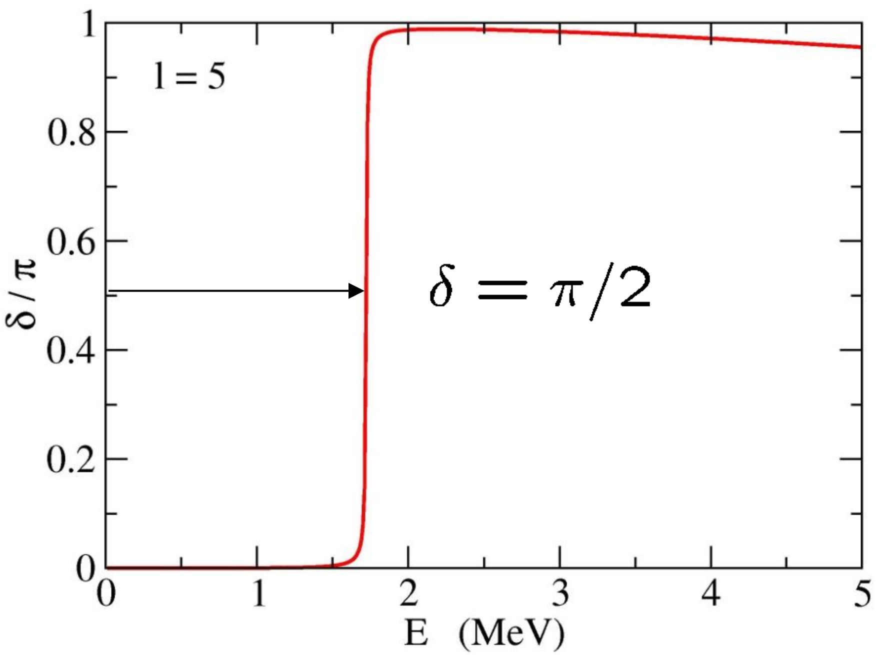
$$E - \epsilon^* = E - E_R - i\Gamma/2 = c\, e^{i\delta_r} = c(\cos\delta_r + i\sin\delta_r)$$

$$\longrightarrow \quad \tan\delta_r = \frac{\sin\delta_r}{\cos\delta_r} = \frac{-\Gamma/2}{E - E_R}$$

$$\boxed{\delta(E) = \delta_r(E) + \delta_0(E) = \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{2(E_R - E)}\right) + \delta_0(E)}$$

Breit-Wigner の公式

幅が狭ければ、位相のずれが π/2 を切る時に共鳴



Breit-Wigner formula:

$$\boxed{\delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta(E_R) \sim \pi/2$$

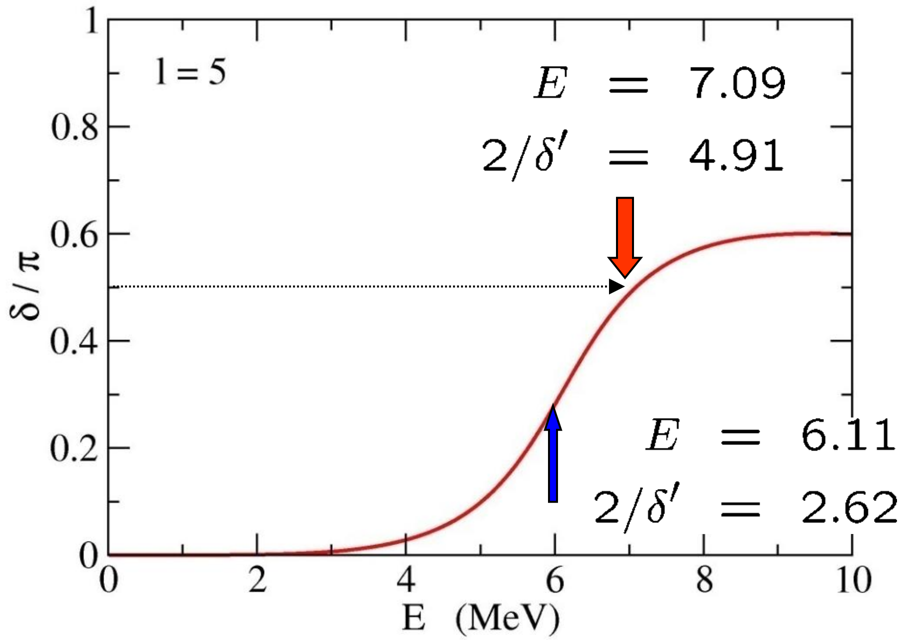
$$\Gamma = \frac{2}{\delta'(E_R)}$$

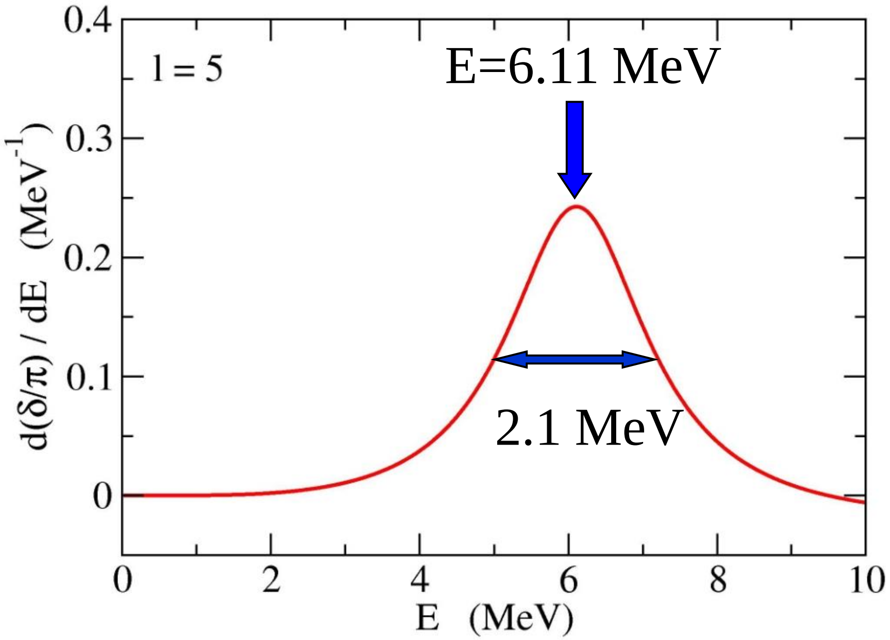
V_0 = -50 MeV
R_0 = 1.27 * $200^{1/3}$ fm
a = 0.67 fm
$\mu = 200\, m_N / 201$

(note) ただし、幅が広いと π/2 とは限らない

$$\delta(E)=\tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R-E)}+\delta_0(E)$$

background phase shift

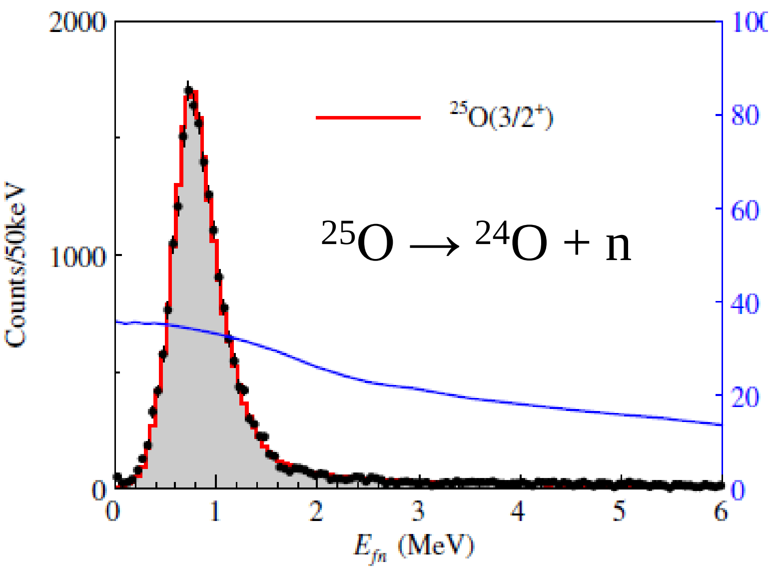


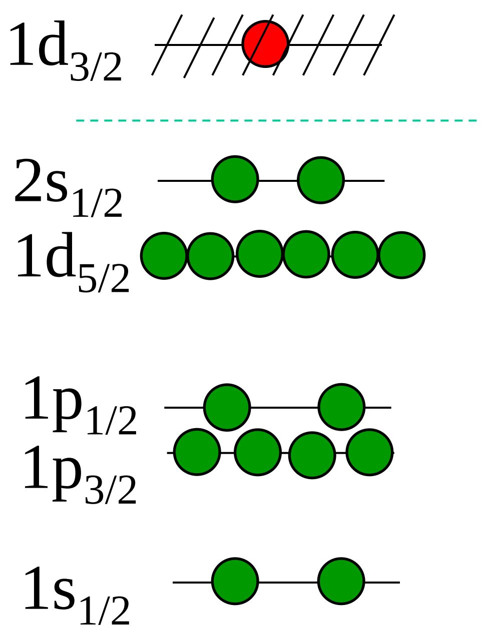


Gamow state: $E = 6.01$ MeV

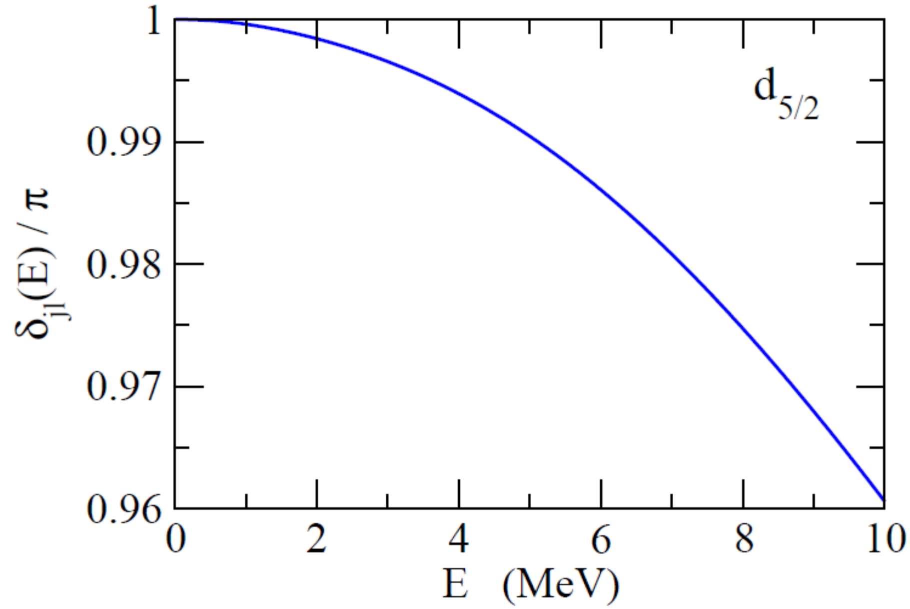
$\Gamma = 2.22$ MeV

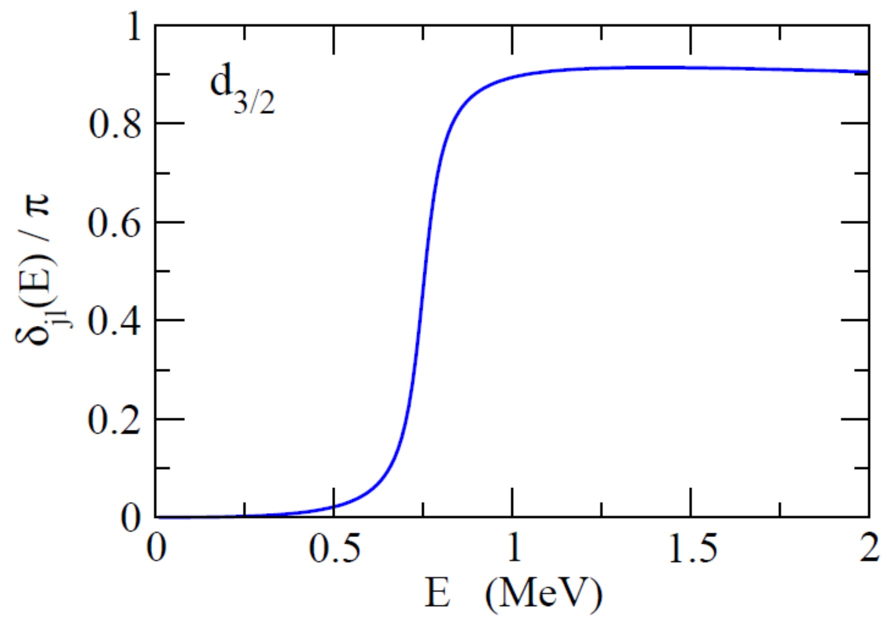
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?





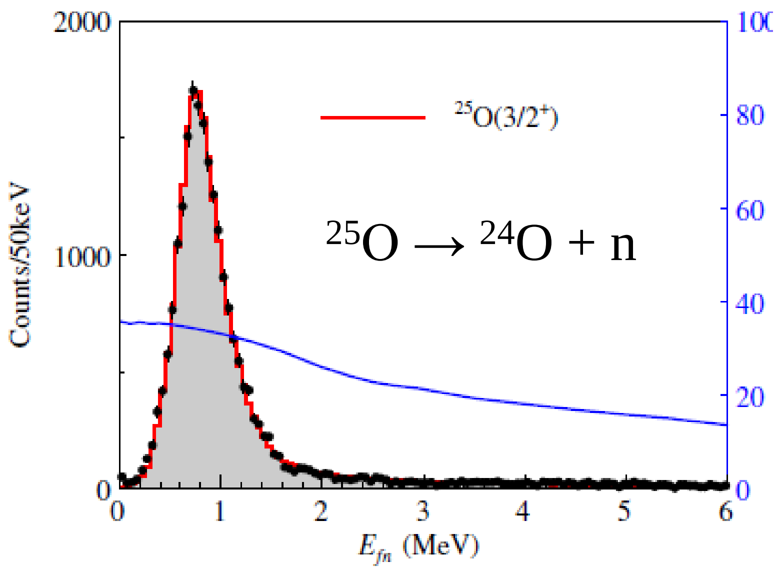
WS ポテンシャルによる n-^{24}O 散乱

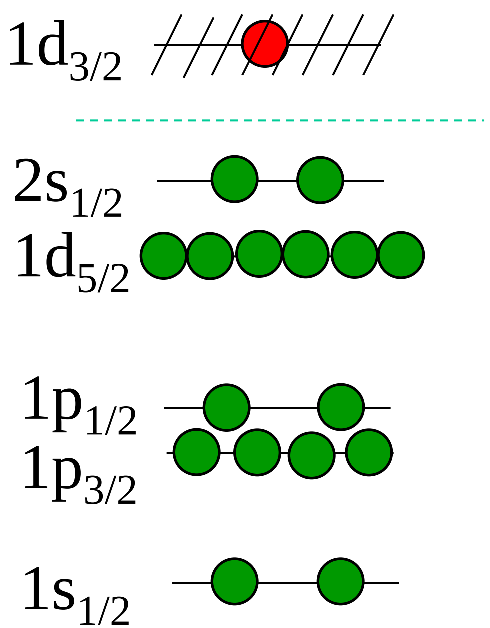


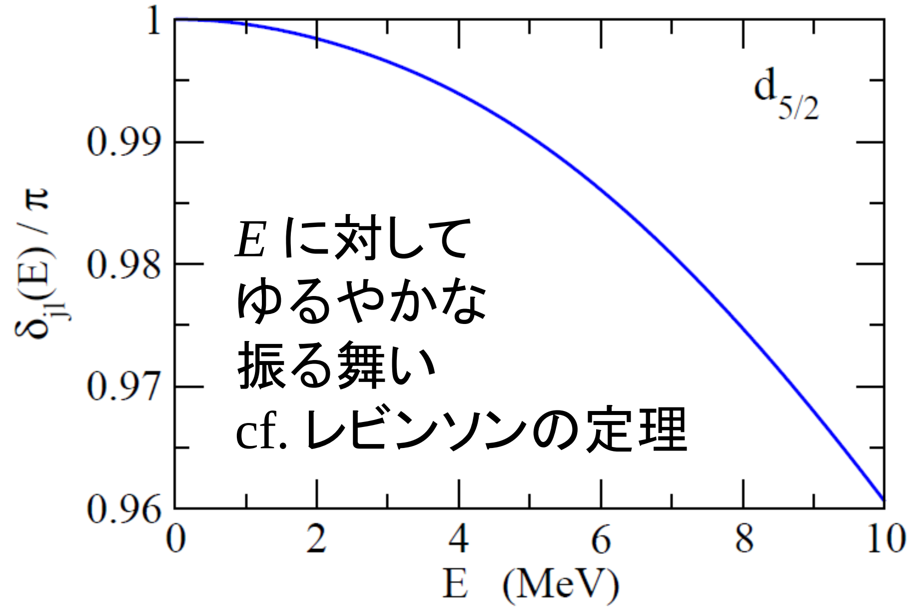


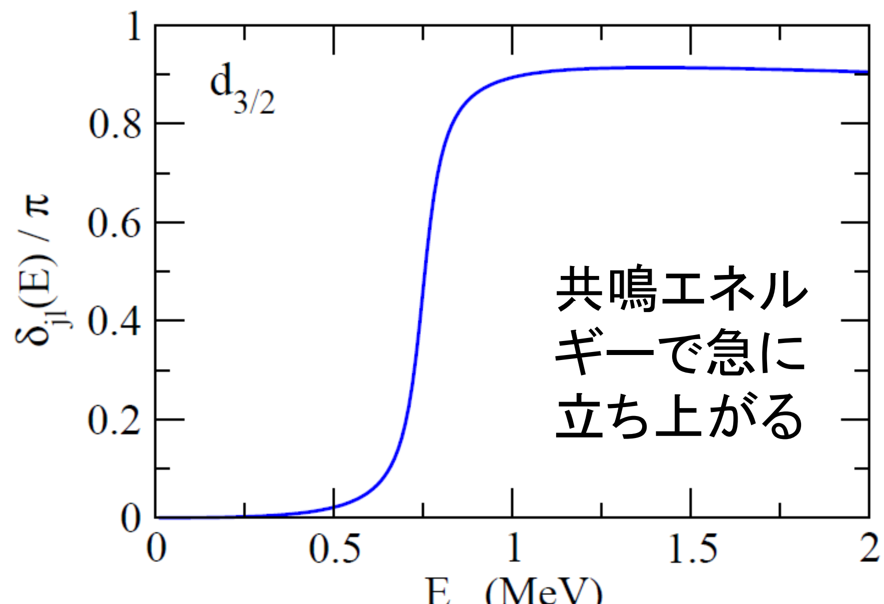
共鳴があると位相のずれはどう振る舞う?

WS ポテンシャルによる n-^{24}O 散乱

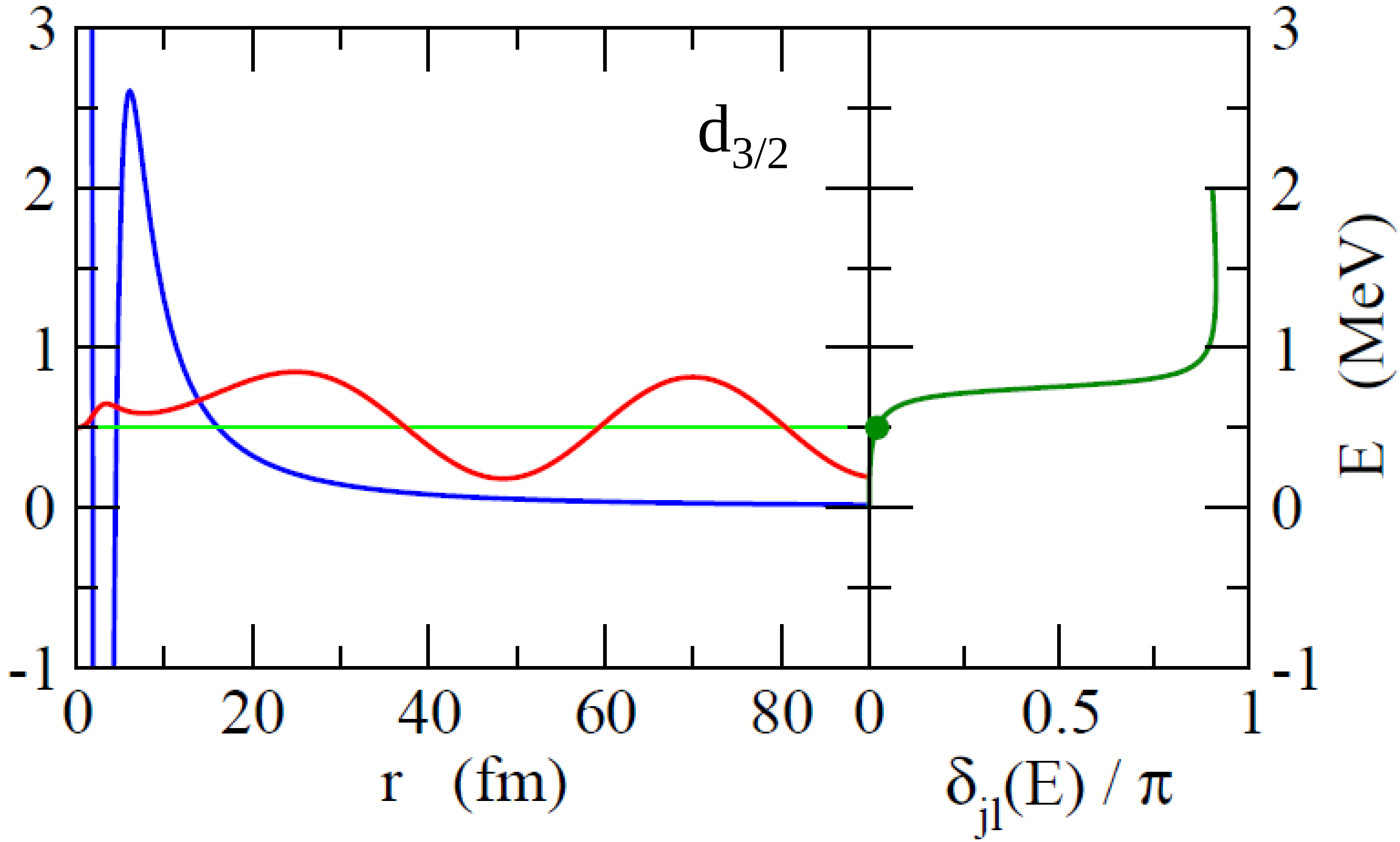






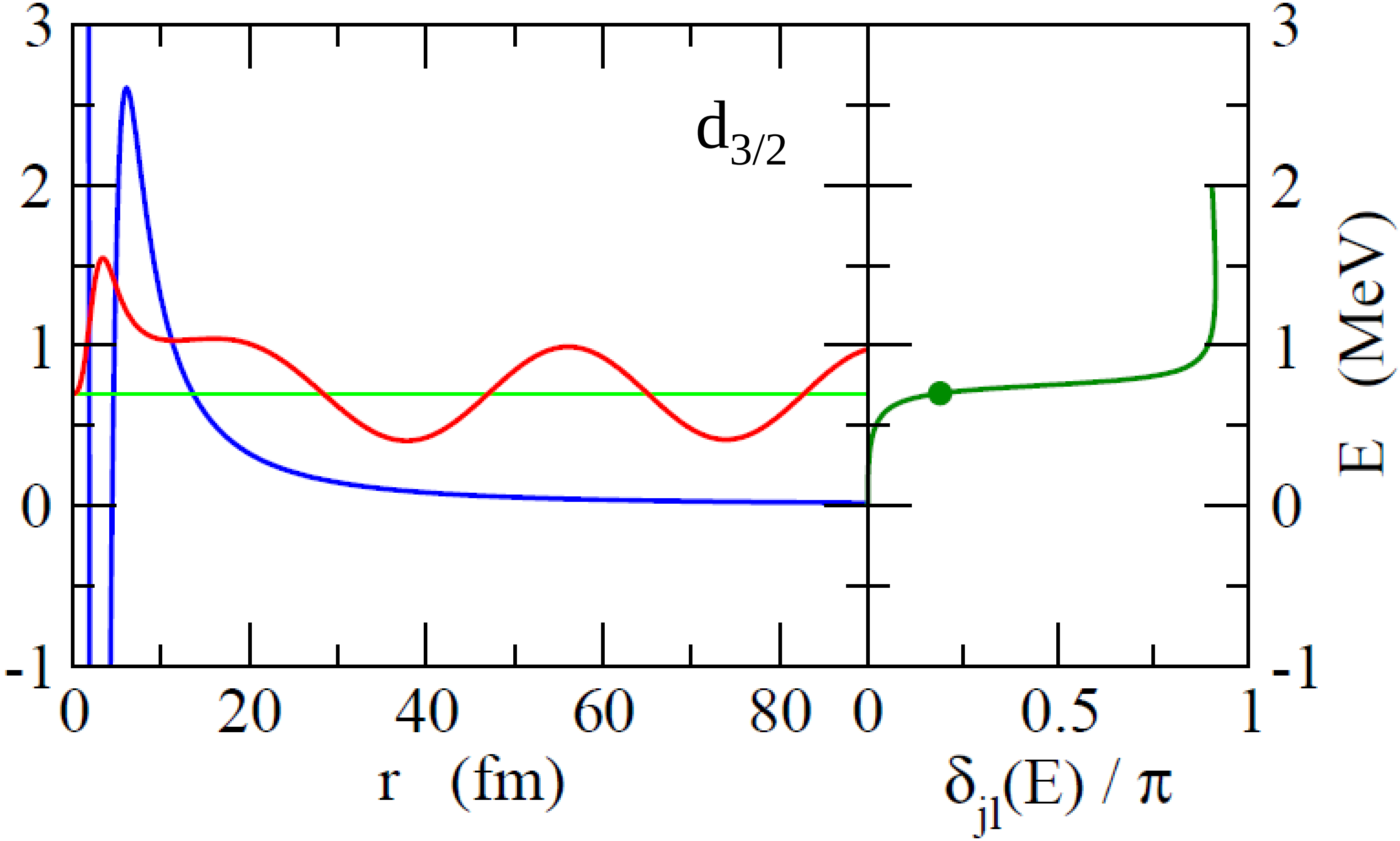


それでは波動関数は?



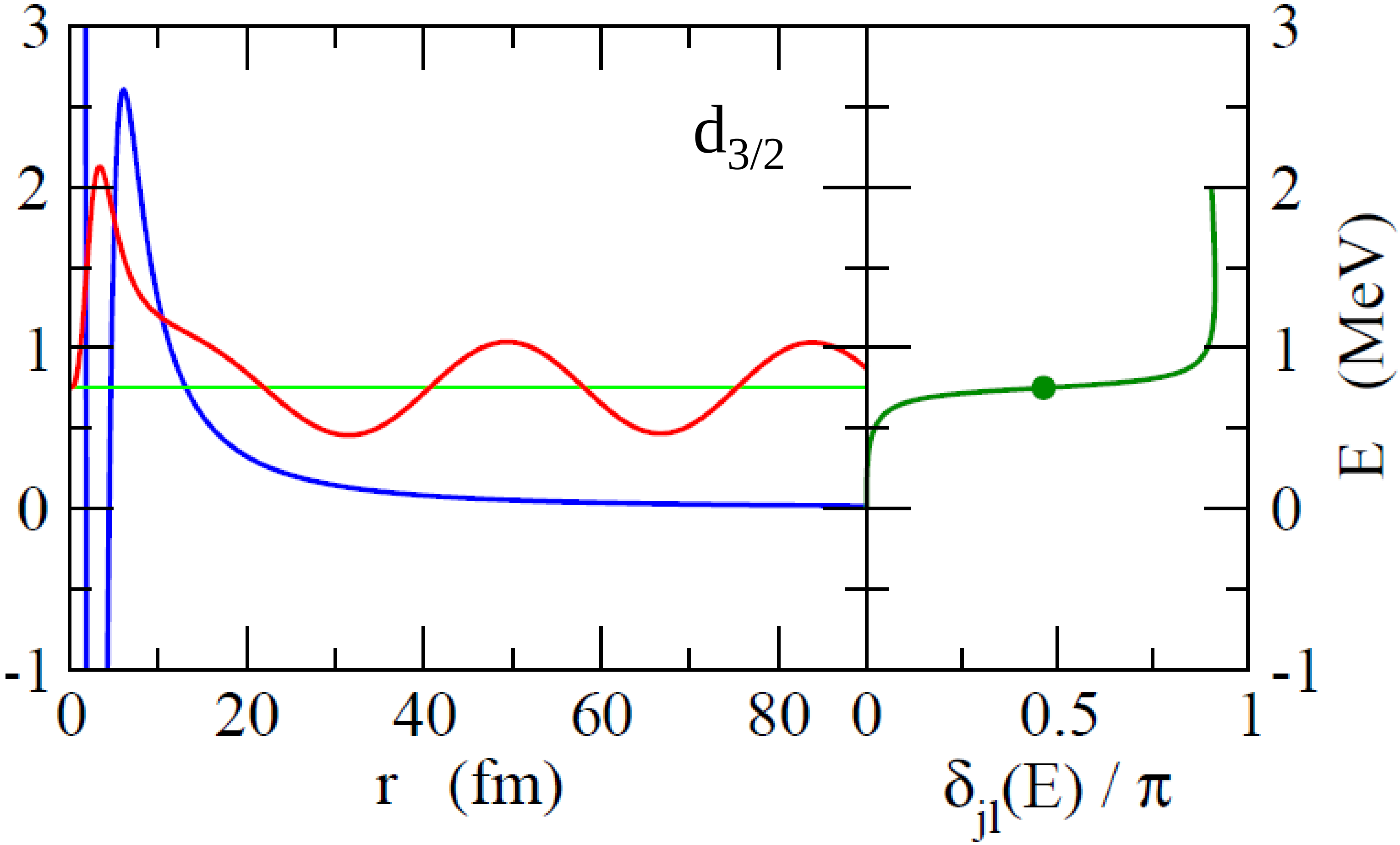
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E-E')$$

それでは波動関数は?



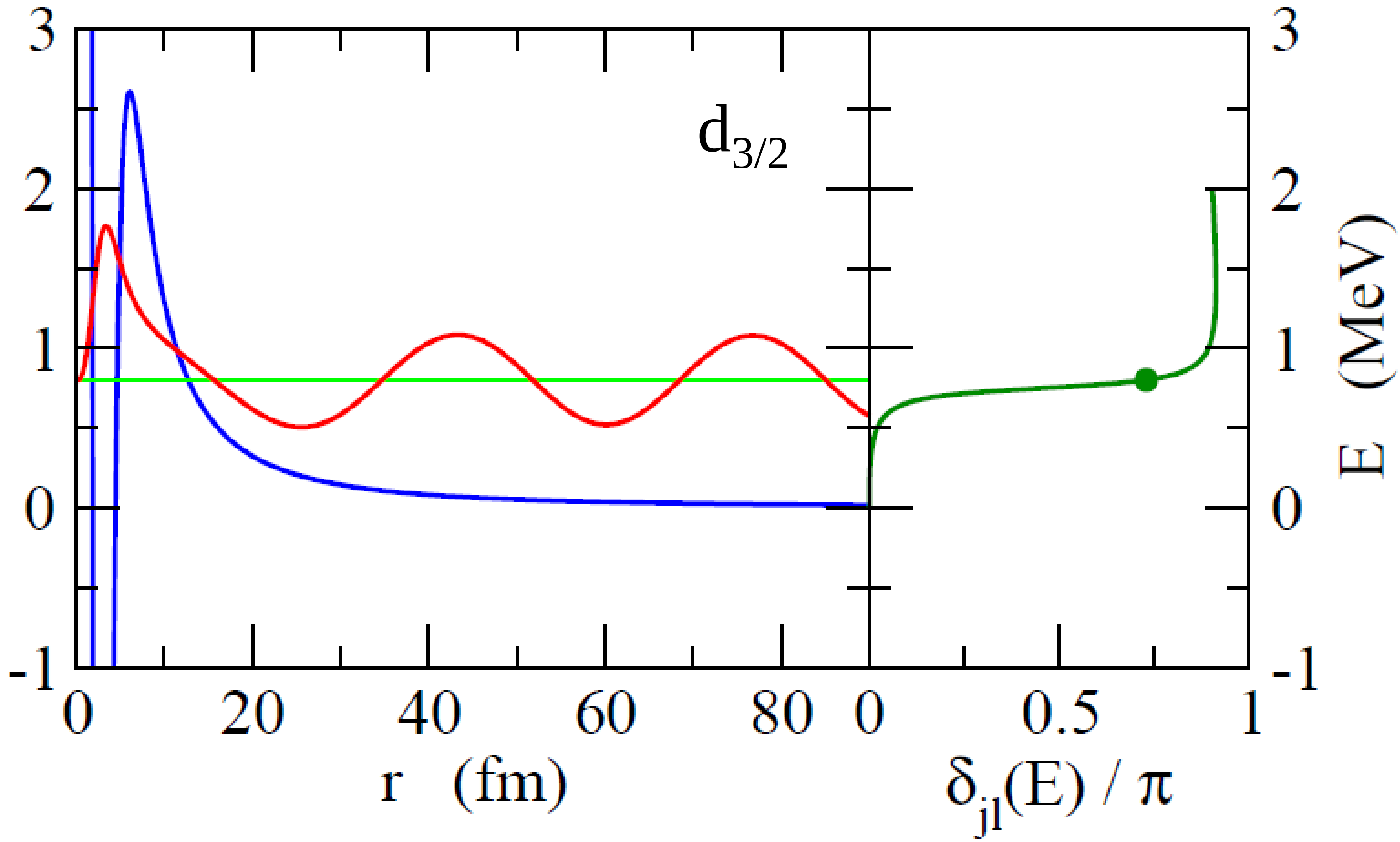
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r} \psi_E(\boldsymbol{r}) \psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



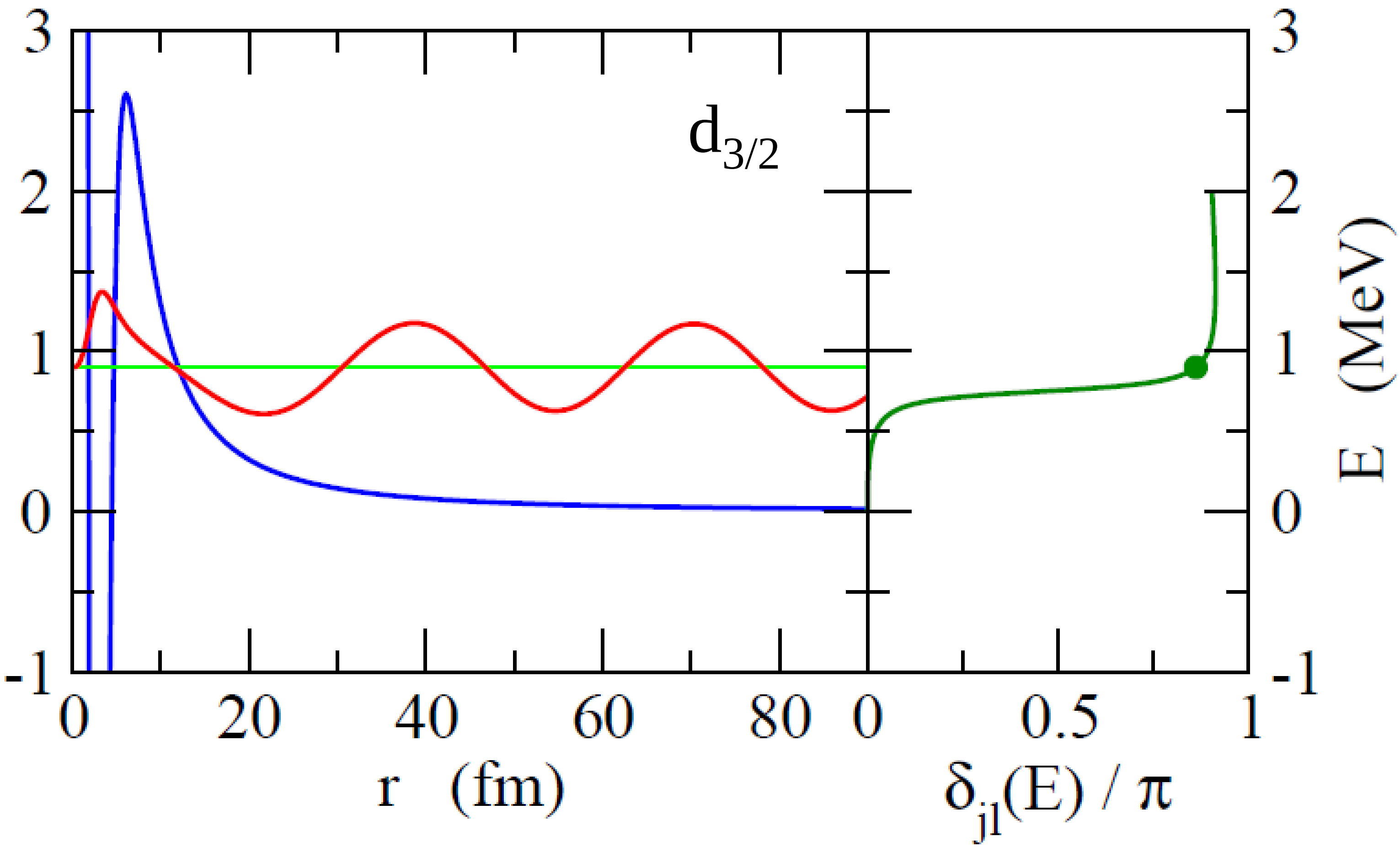
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\, \psi_E(\boldsymbol{r}) \psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?



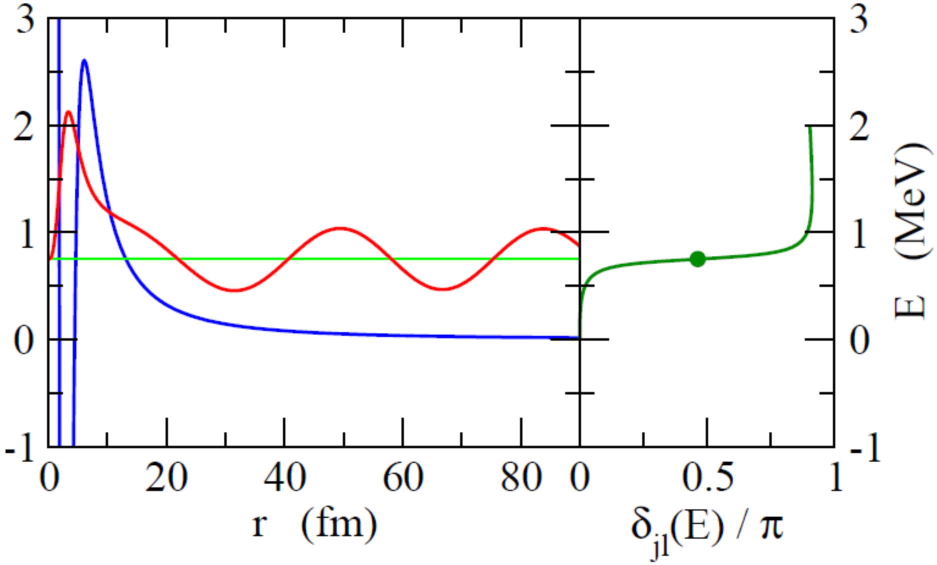
$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E - E')$$

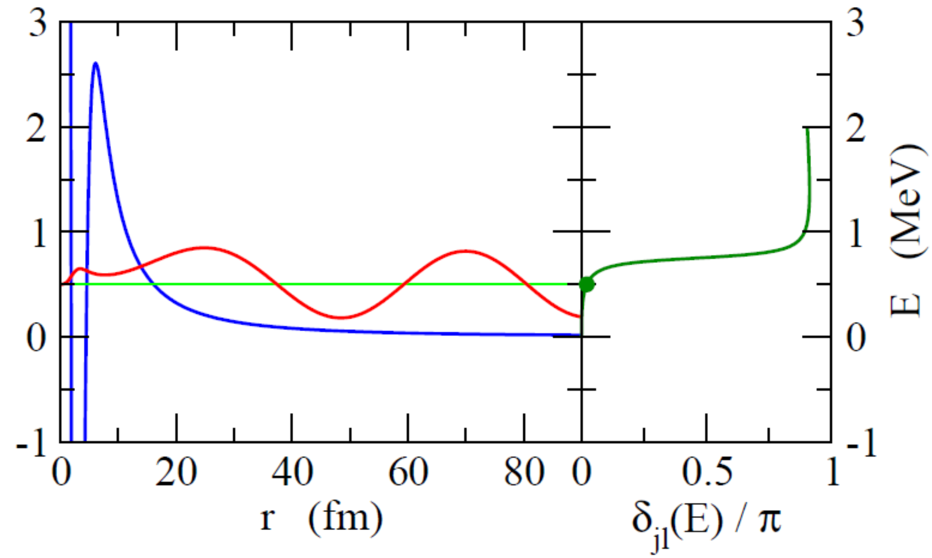
それでは波動関数は?



$$rR_{jl}(r) \to \sqrt{\frac{2m}{\pi k\hbar^2}}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{jl}(E)\right); \qquad \int d\boldsymbol{r}\,\psi_E(\boldsymbol{r})\psi^*_{E'}(\boldsymbol{r}) = \delta(E - E')$$

それでは波動関数は?

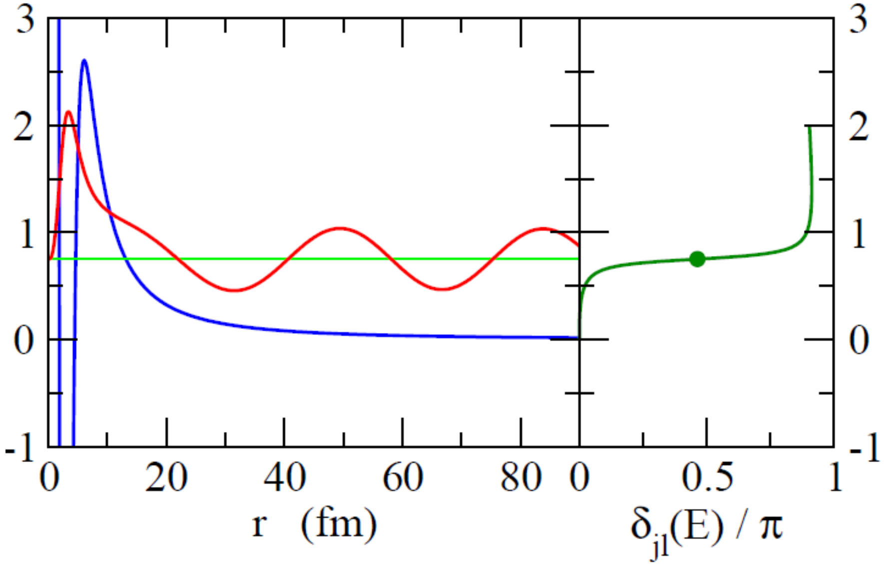




on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

off-resonance:
障壁の内側では振幅が
小さい

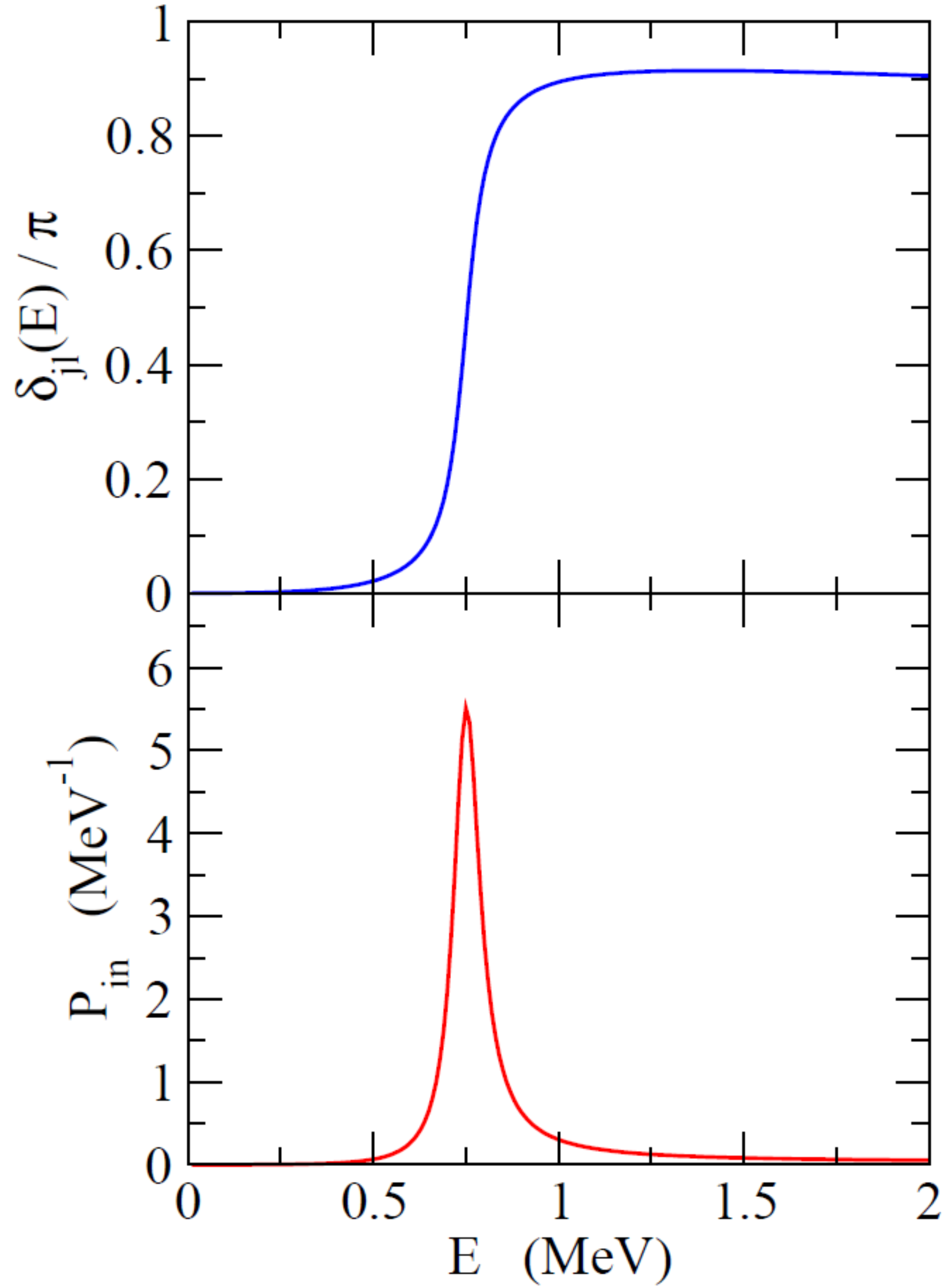
それでは波動関数は?



on-resonance:
波動関数は障壁の内側で
大きな振幅

障壁内部の存在確率

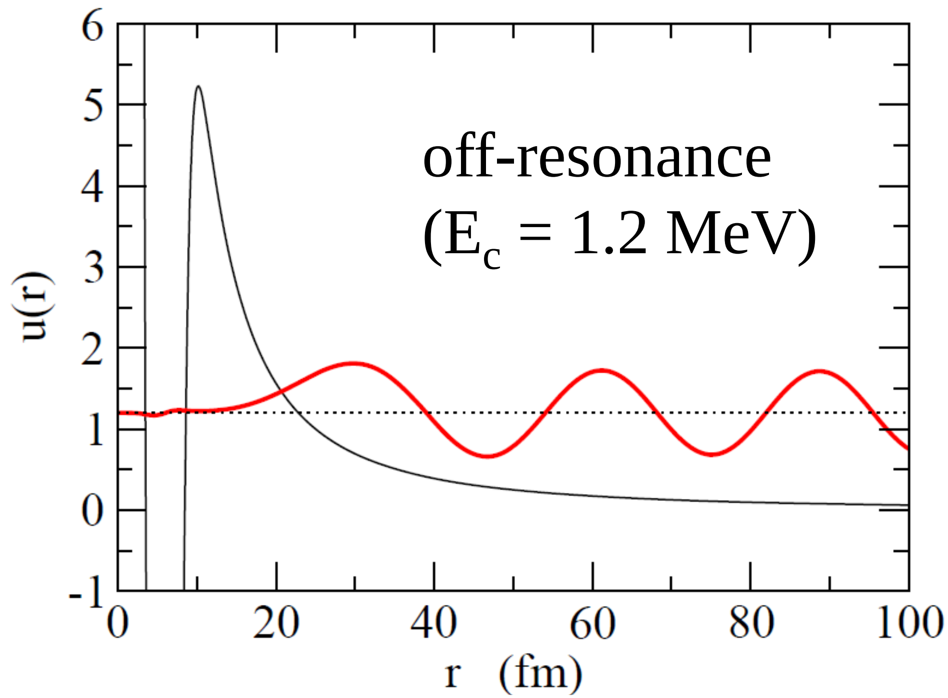
$$P_{\rm in} \equiv \int_0^{r_b} r^2 dr\,|R_{jl}(r)|^2$$

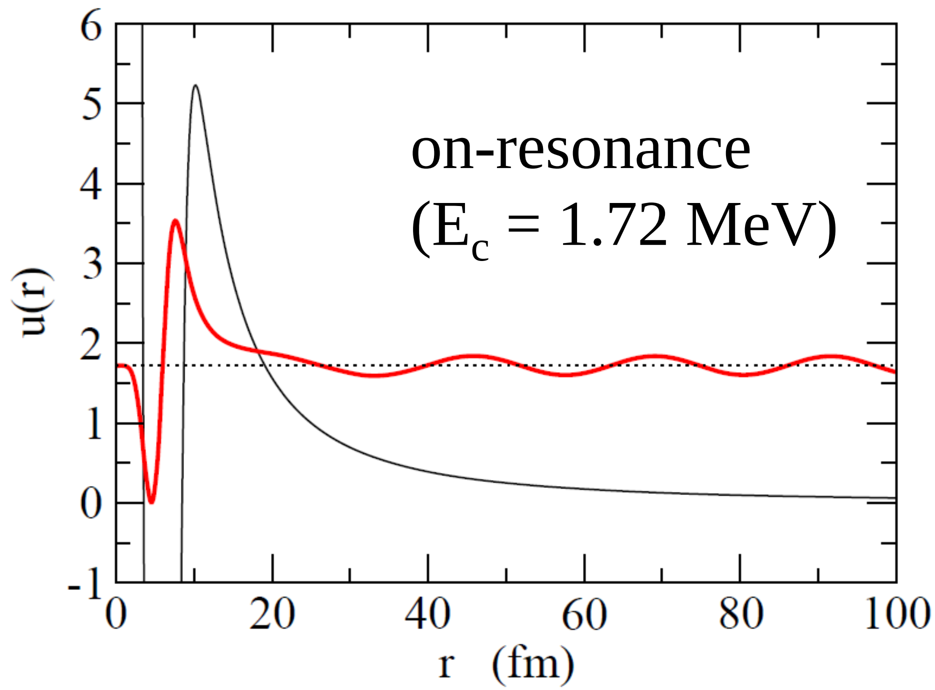


➢off-resonance では
- 波動関数は障壁の外側で大きな振幅
- トンネル効果による障壁内部にしみ込む

➢on-resonance では
- 波動関数は障壁内部で束縛状態のように振る舞う
- 障壁にトラップされた波動関数がトンネル効果により障壁の外側にしみ出る

ガモフ状態と同じ振る舞い

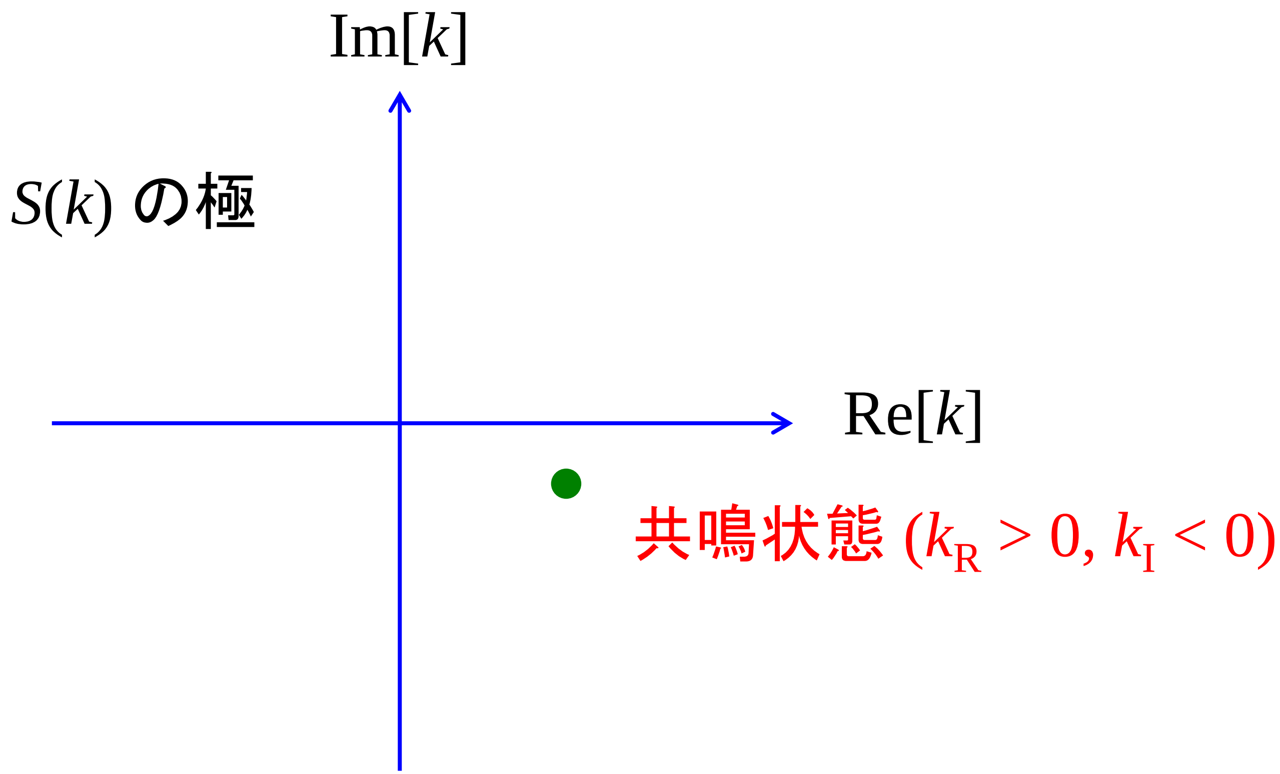




散乱問題：正の実数エネルギー（これが物理的な観測量）

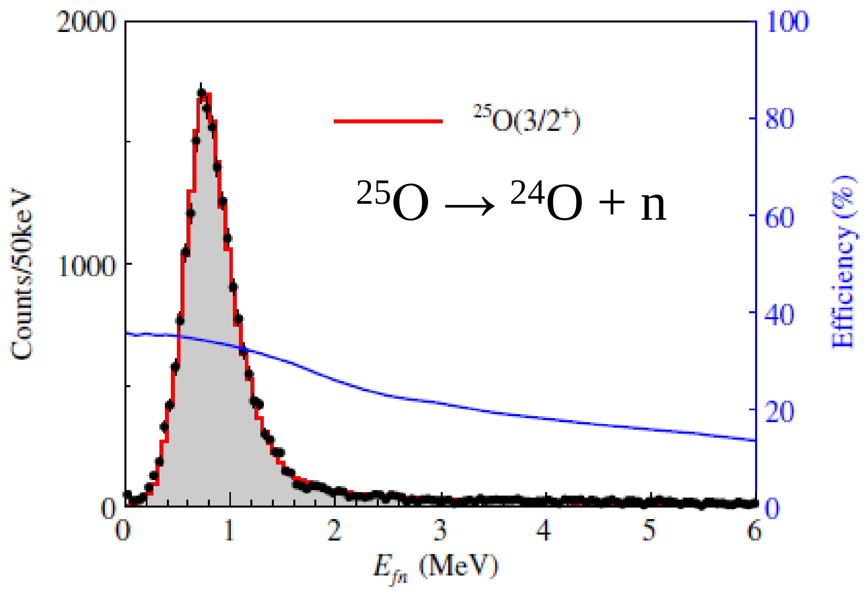
影響

複素エネルギー（または複素運動量）平面で実軸の近くの S 行列の極



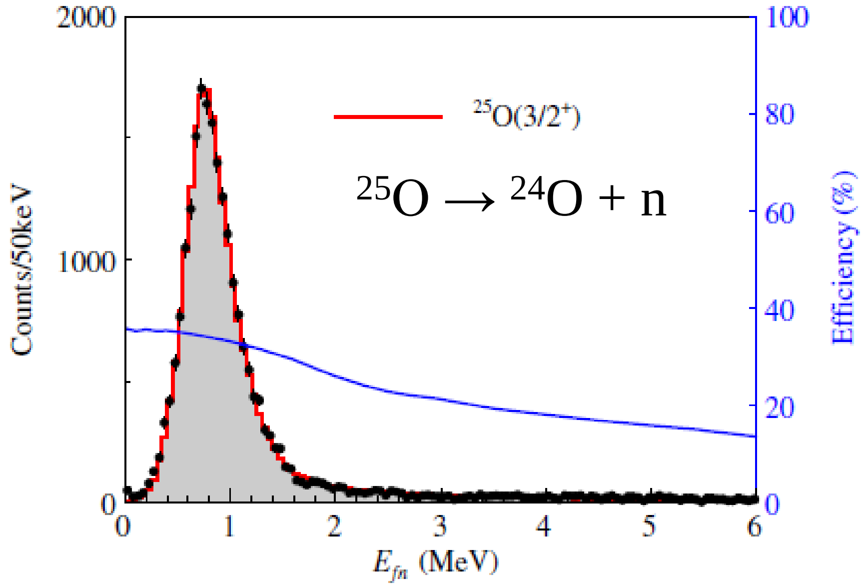
不変質量スペクトルの解析

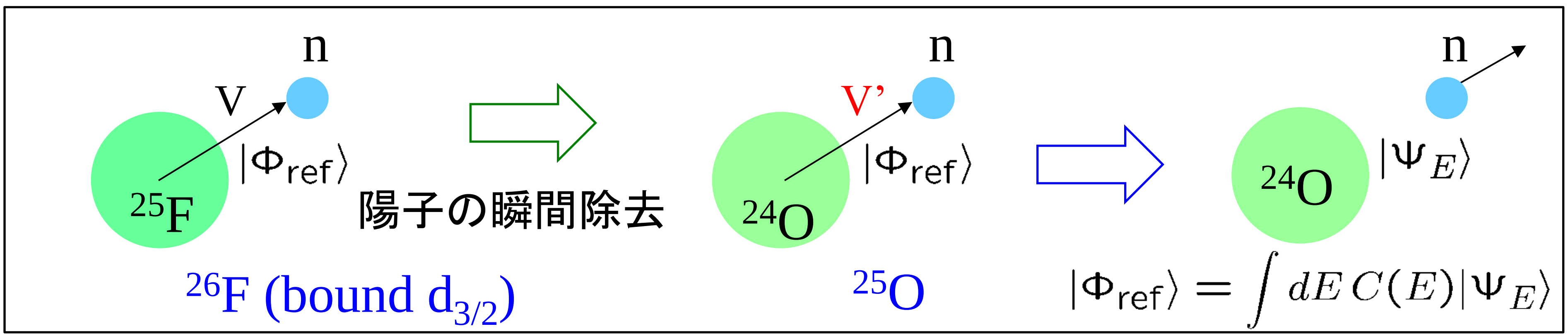
$^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて $^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊



不変質量スペクトルの解析

${}^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて ${}^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊

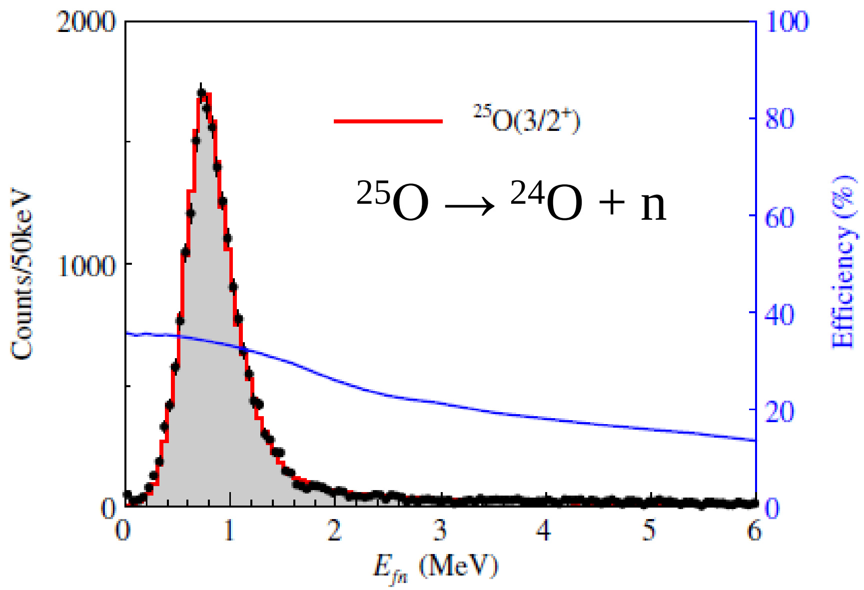


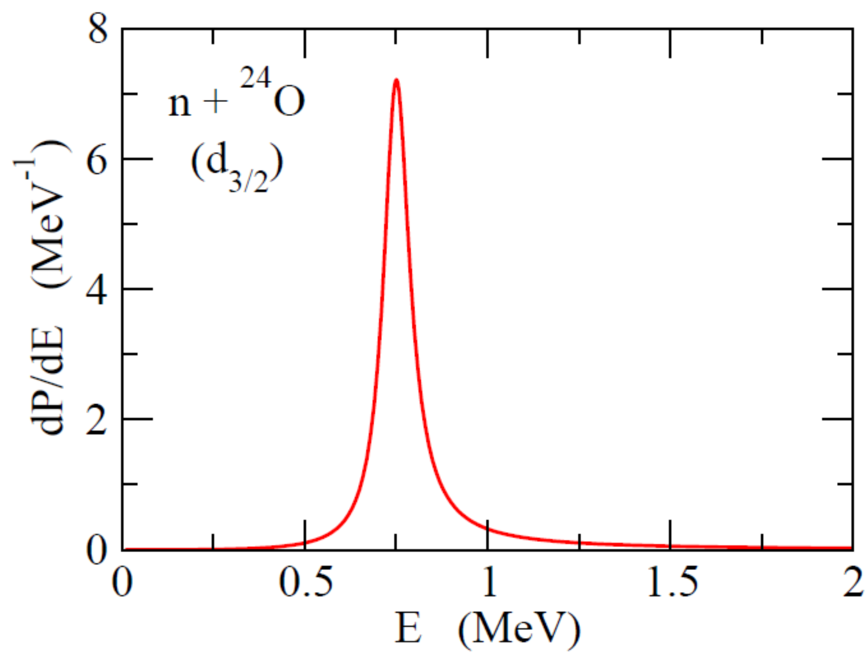


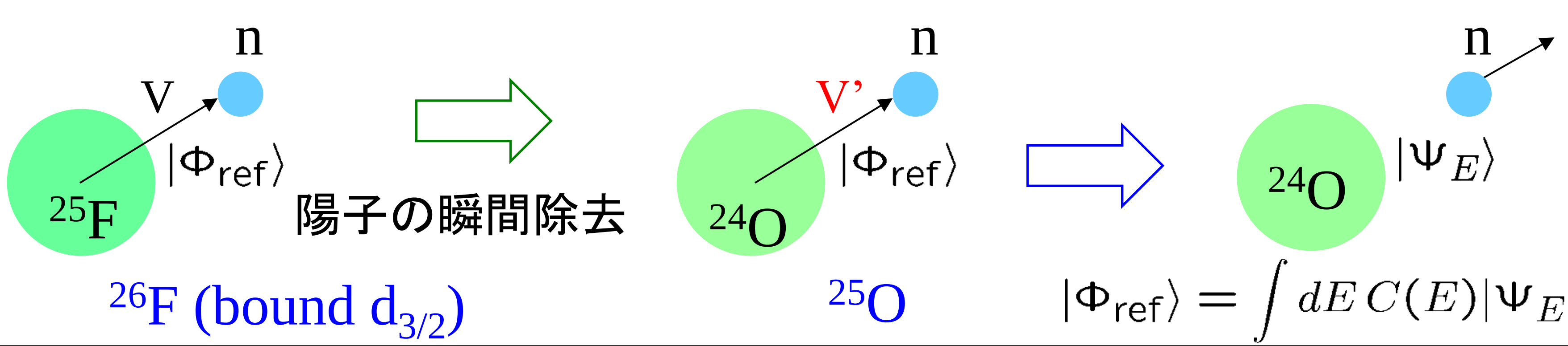
不変質量スペクトルの解析

${}^{26}_{9}F_{17}$から1つ陽子を抜いて ${}^{25}_{8}O_{17}$ を生成 → 1中性子を放出して崩壊

$$\frac{dP}{dE} = |\langle \Phi_{\rm ref} | \Psi_E \rangle|^2$$







$$|\Phi_{\rm ref}\rangle = \int dE\, C(E) |\Psi_E\rangle$$

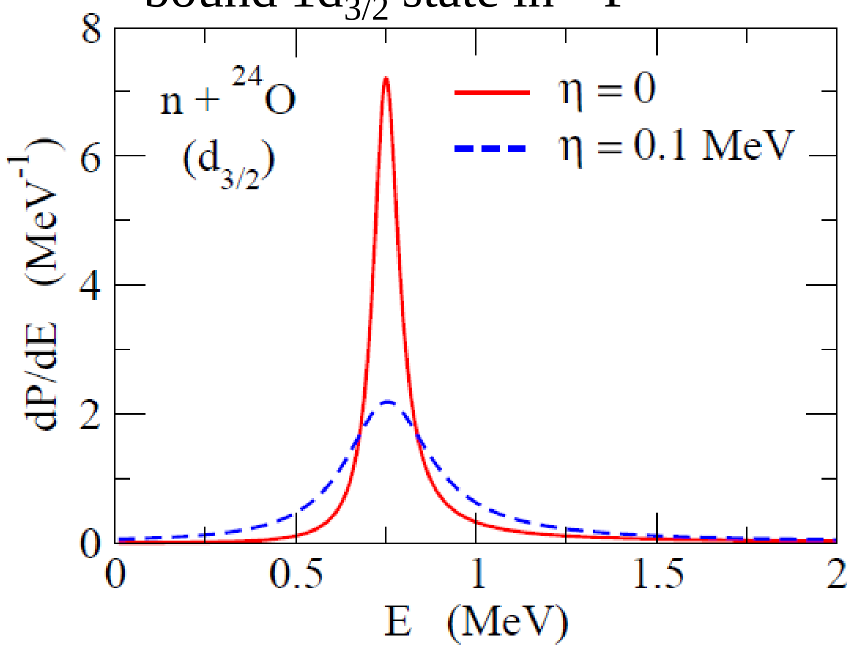
不変質量スペクトルの解析

$$\frac{dP}{dE} = |\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_E\rangle|^2 = \int dE'\,|\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_{E'}\rangle|^2\delta(E-E')$$

$$\to \frac{1}{\pi}Im\int dE'\,|\langle\Phi_{\rm ref}|\Psi_{E'}\rangle|^2\underbrace{\frac{1}{E'-E-i\eta}}$$

$= 1 / (H - E - i\eta) = G(E)$

Reference state:
bound $1d_{3/2}$ state in ^{26}F



$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{x-i\eta} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

$$\to \frac{dP}{dE} = \frac{1}{\pi}Im\,|\langle\Phi_{\rm ref}|G(E)|\Phi_{\rm ref}\rangle|$$

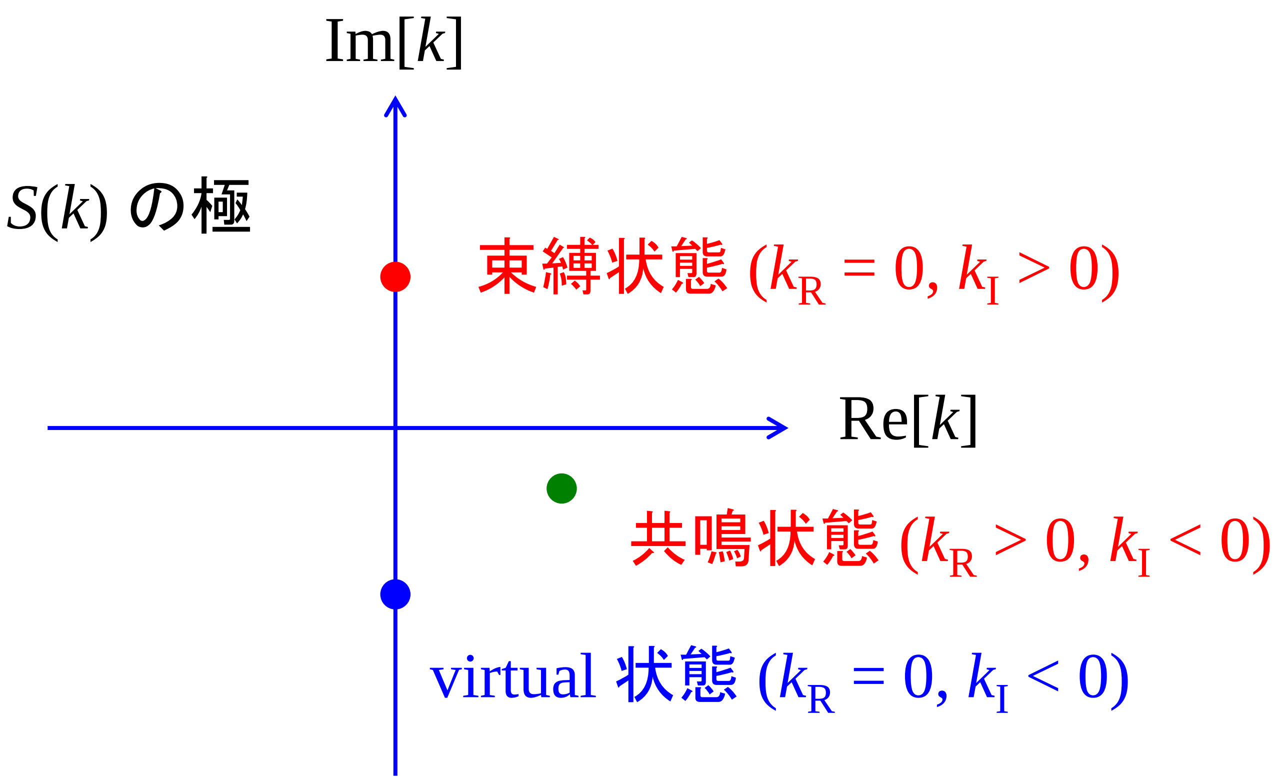
有限の η でも計算できる
（数値計算上便利）

virtual state について

散乱問題：正の実数エネルギー（これが物理的な観測量）

⇧ 影響

複素エネルギー（または複素運動量）平面で実軸の近くの S 行列の極



virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える（従って s-wave のみ）

effective range expansion:

$$\boxed{k \cot \delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 + \cdots}$$

virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える（従って s-wave のみ）

effective range expansion:
$$\boxed{k\cot\delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \cdots}$$

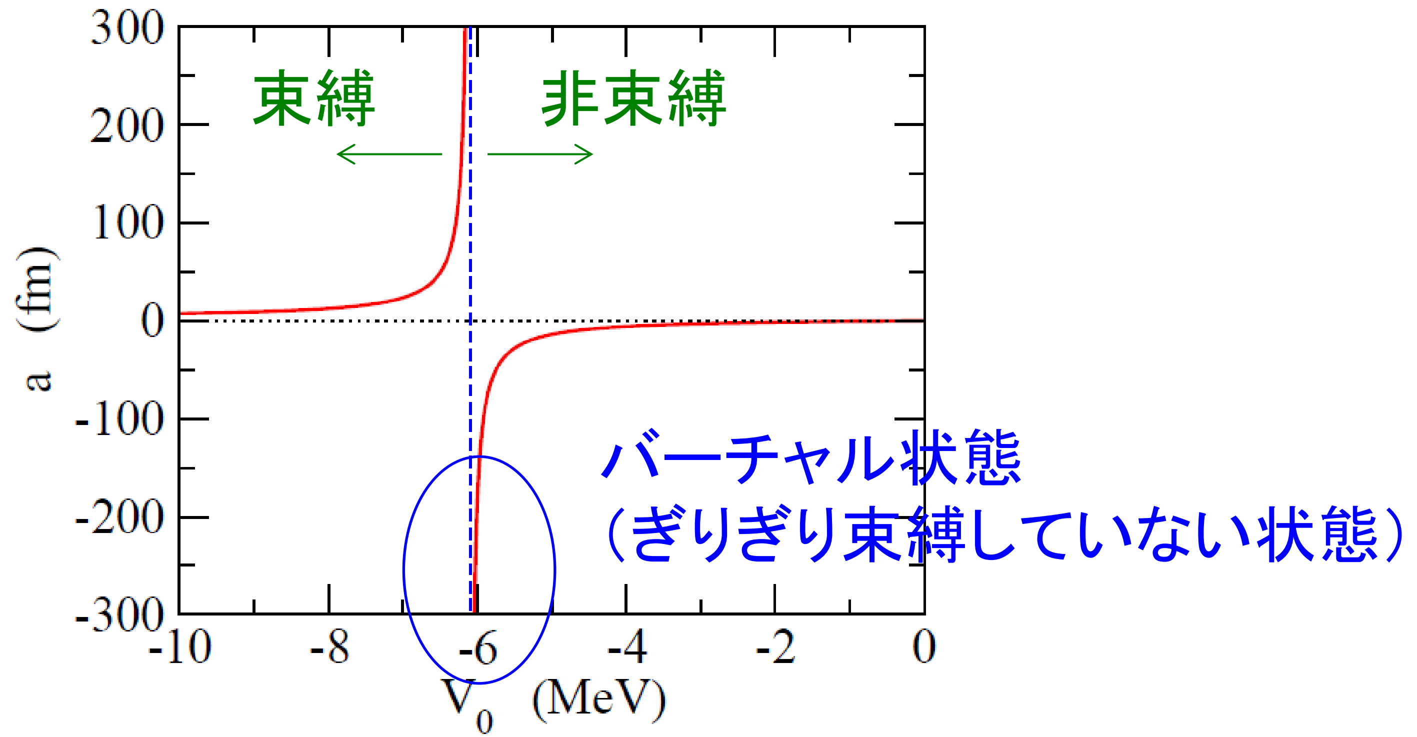
このとき、
$$\boxed{\begin{aligned} S(k) &= \frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}} = \frac{\cos\delta + i\sin\delta}{\cos\delta - i\sin\delta} \\ &= \frac{\cot\delta + i}{\cot\delta - i} \\ &\sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik} \end{aligned}}$$

極は $k = i\dfrac{1}{a}$

$a < 0$ なら virtual 状態、$a > 0$ なら（浅い）束縛状態

virtual state について

散乱長は $E = 0$ の束縛状態を作るときに正で発散



Woods-Saxon ポテンシャルで
ポテンシャルの深さを変える

(R = 2.736 fm, a_0 = 0.67 fm)

(復習)散乱長の物理的意味

半径 R の井戸型ポテンシャル:

$$a = R\left(1 - \frac{\tan\kappa R}{\kappa R}\right)$$

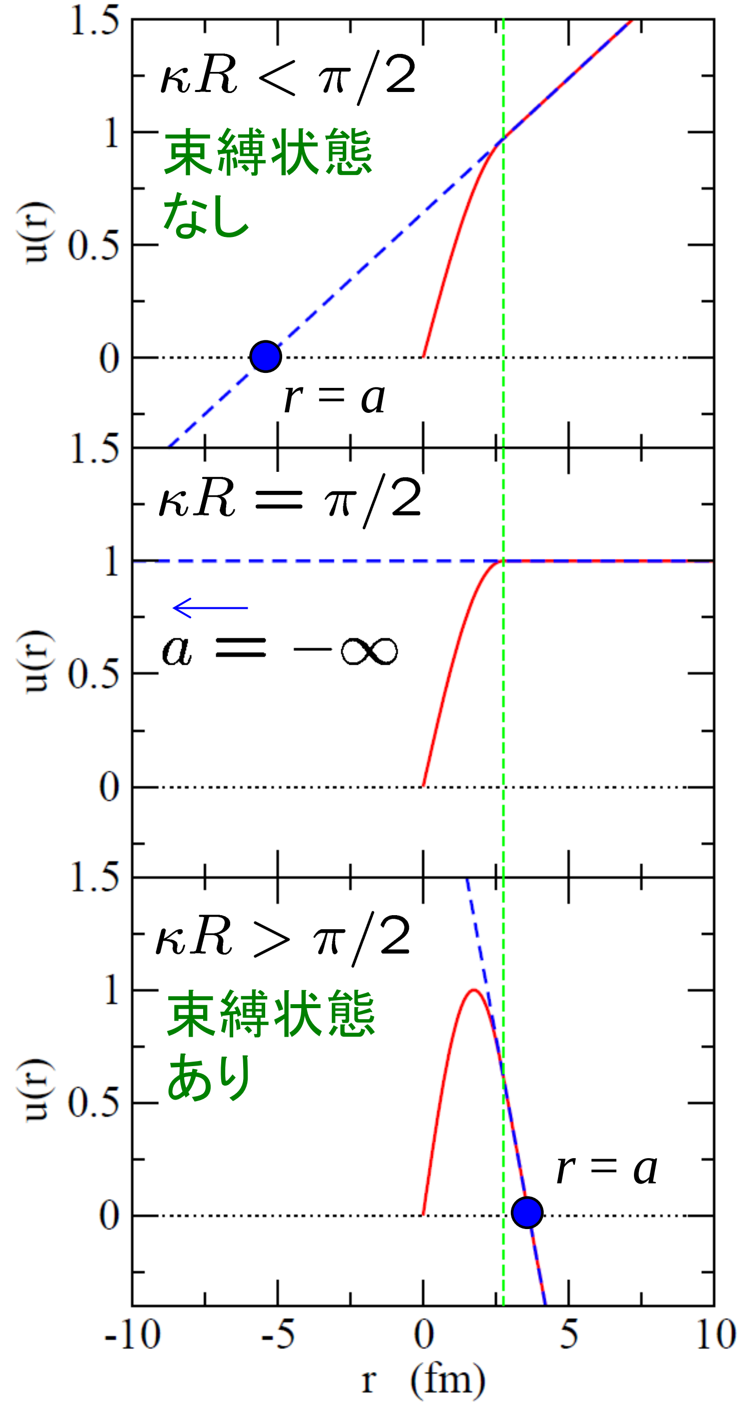
$$\kappa = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

$$u(r) = A\sin(\kappa r) \quad (r < R)$$

$$f(r) \equiv u(R) + u'(R)(r - R)$$

は $r = a$ で $f(a)=0$。

すなわち、散乱長は $r = R$ で波動関数を一次近似したときに、その直線が x 軸を切る点。



virtual state について

極低エネルギーでの散乱を考える（従って s-wave のみ）

effective range expansion:

$$\boxed{k \cot\delta(k) \sim -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k^2 + \cdots}$$

このとき、

$$\boxed{S(k) \sim \frac{-1/a + ik}{-1/a - ik}}$$

極は $k = i\,\dfrac{1}{a}$

極が実軸に近い $\longrightarrow$ $|a|$ が大

このとき、弾性散乱の全断面積:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta = \frac{4\pi}{(k\cot\delta)^2 + k^2} \sim 4\pi a^2$$

: large

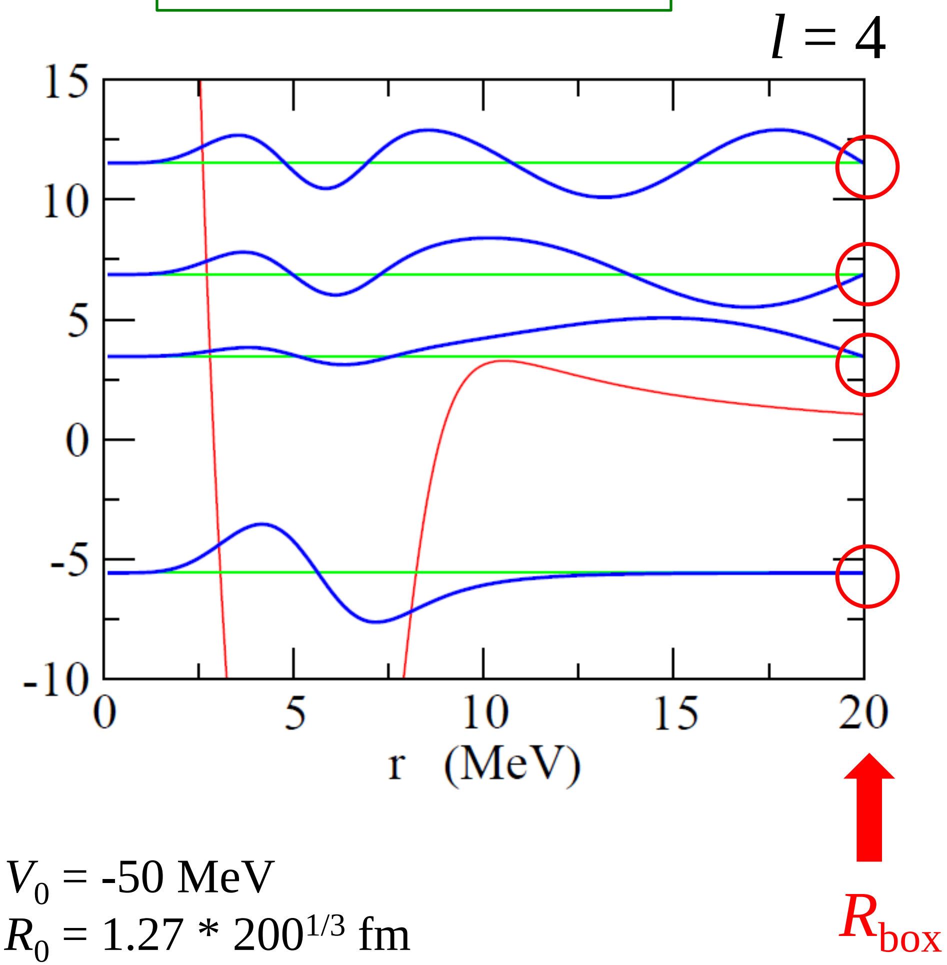
共鳴状態に対する他の計算法

- ✓stabilization method
- ✓complex scaling method
- ✓ACCC法

[stabilization method](#)

box 境界条件＝散乱状態の離散化

$$\boxed{u_{jl}(R_{\mathrm{box}}) = 0}$$



V_0 = -50 MeV

R_0 = 1.27 * $200^{1/3}$ fm

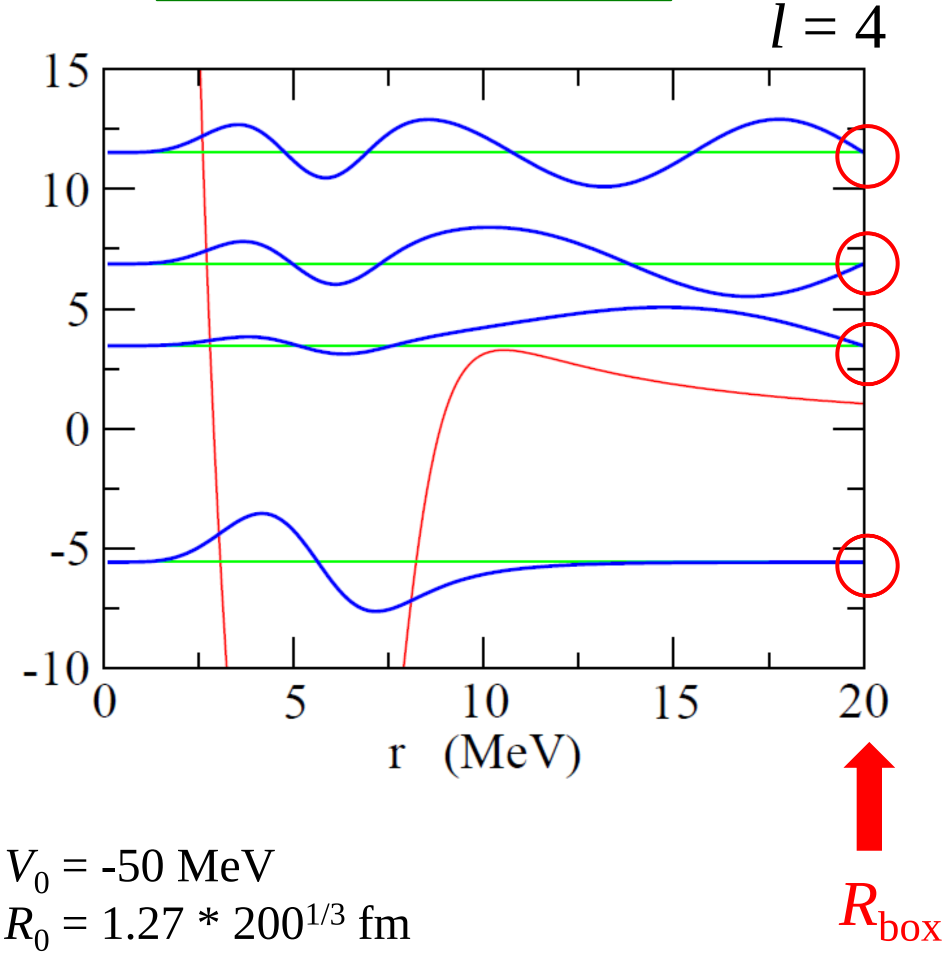
a = 0.67 fm

μ = 200 m_N / 201

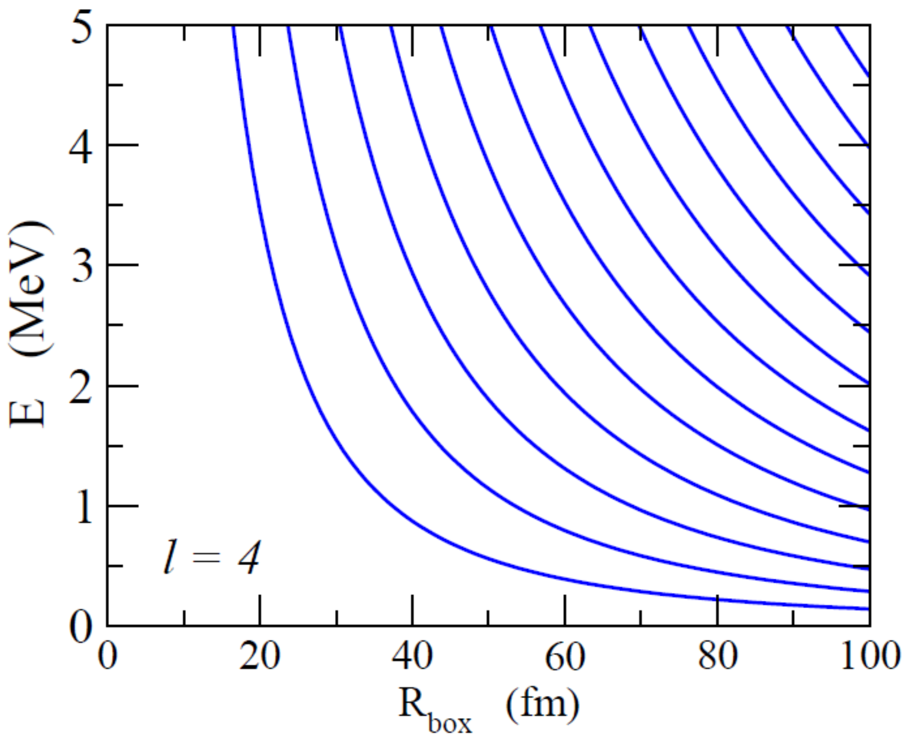
stabilization method

box 境界条件＝散乱状態の離散化

$$\boxed{u_{jl}(R_{\mathrm{box}}) = 0}$$



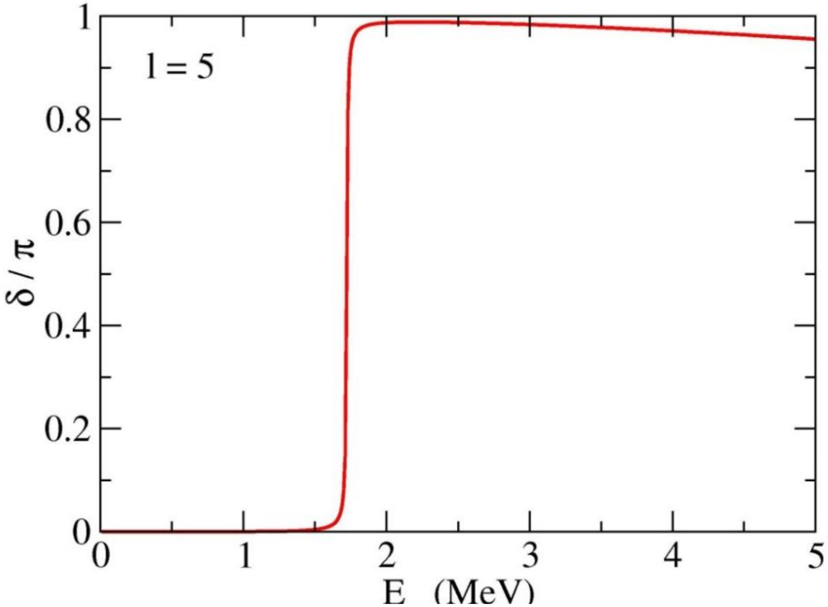
R_{box}を変えるとどうなるか?

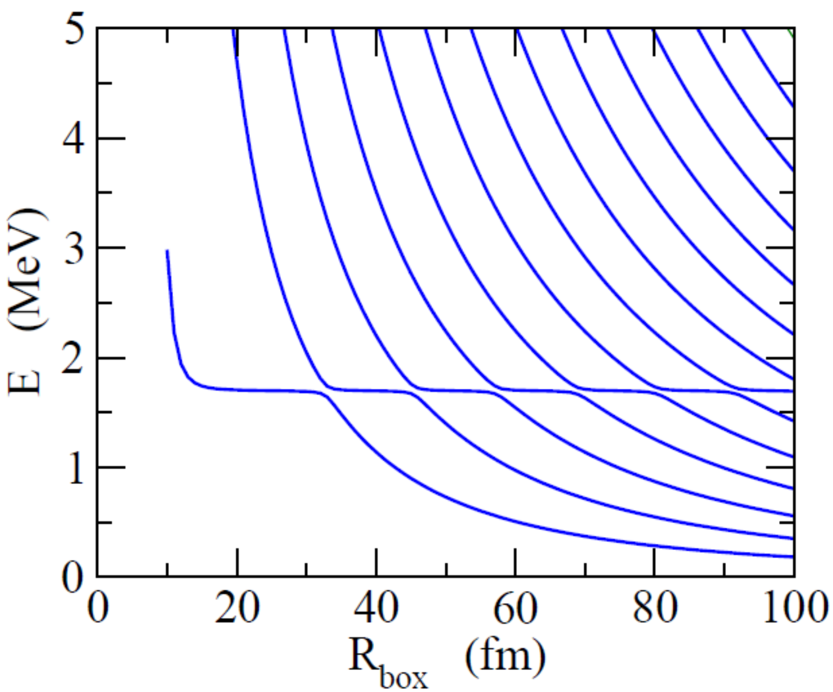


V_0 = -50 MeV
$R_0 = 1.27 * 200^{1/3}$ fm
a = 0.67 fm
$\mu = 200\, m_N / 201$

✓ R_{box} の関数として単調に減少
✓ R_{box} が大きい方が dk が小

共鳴がある場合



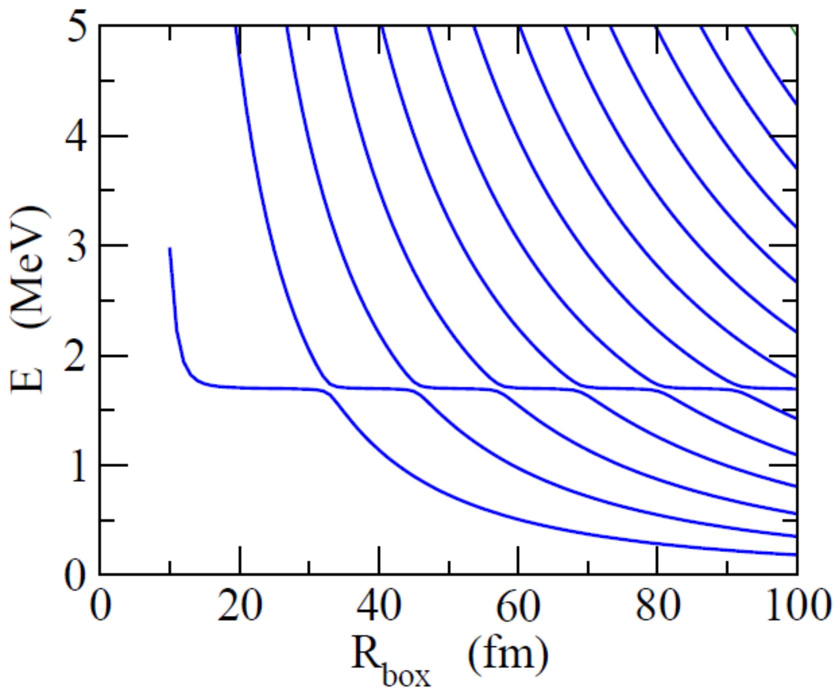


共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

"stabilization method"
A.U. Hazi and H.S. Taylor,
PRA 1 ('70) 1109

L^2基底で共鳴エネルギーと共鳴幅を計算する

共鳴がある場合



共鳴のエネルギーで離散化されたエネルギーが安定化

"stabilization method"
A.U. Hazi and H.S. Taylor, PRA 1 ('70) 1109

L^2基底で共鳴エネルギーと共鳴幅を計算する

$$\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R} = -\frac{2E_R}{R + \frac{2}{\Gamma}\frac{k_R\hbar^2}{m}}$$

← Breit-Wigner

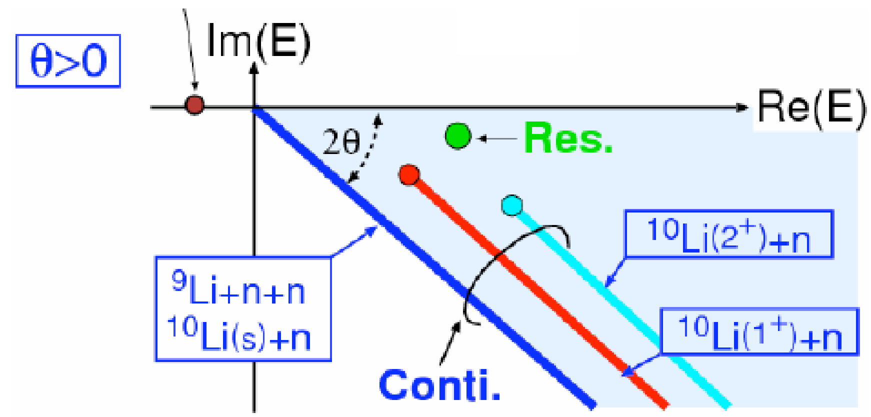
$$\Longrightarrow \Gamma = \frac{2k_R\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{-R - 2E_R\left[\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)_{E=E_R}\right]^{-1}}$$

C.H. Maier, L.S. Cederbaum, and W. Domcke, J. of Phys. B13 ('80) L119
L. Zhang et al., PRC77 ('08) 014312

✓複素座標スケーリング法（北大グループ）

$$r \to re^{i\theta}, p \to pe^{-i\theta}$$

として $H(q)$を対角化。



$$\psi(r) \sim e^{i(k_R - ik_I)r} \to \infty \ (r \to \infty)$$

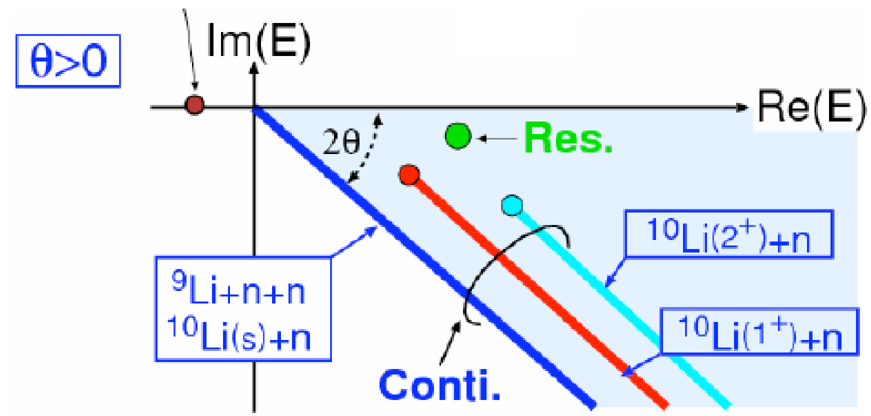
スライド：明孝之氏

$$\Longrightarrow \quad \psi(r) \sim e^{i(k_R - ik_I)(r\cos\theta + ir\sin\theta)} \to 0 \ (r \to \infty)$$

✓複素座標スケーリング法（北大グループ）

$$r \to re^{i\theta}, p \to pe^{-i\theta}$$

として $H(q)$を対角化。

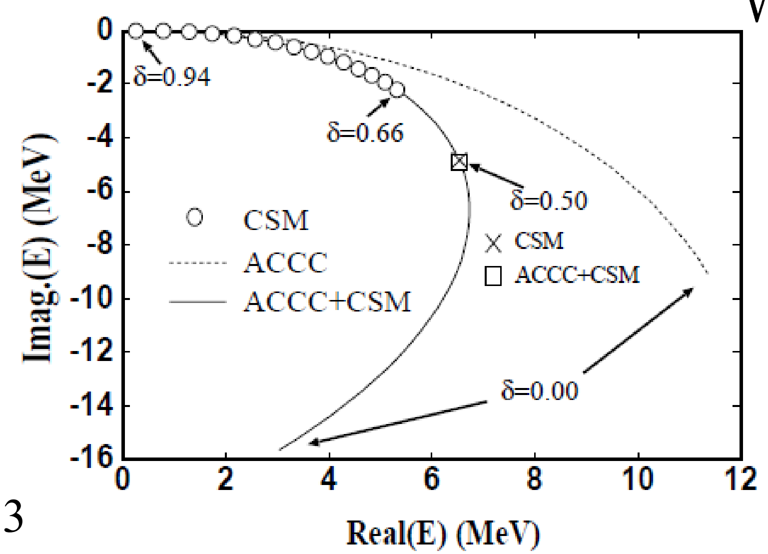


スライド：明孝之氏

✓ACCC (Analytic Continuation in the Coupling Constant)法

$$H \to H + \delta \cdot V$$

として δ ~ 1 で求めた束縛レベルのエネルギーを $x = \sqrt{\delta - \delta_0}$ の関数として δ=0 に外挿
(δ_0 はゼロ束縛となる δ)



S. Aoyama, PRC68('03)034313