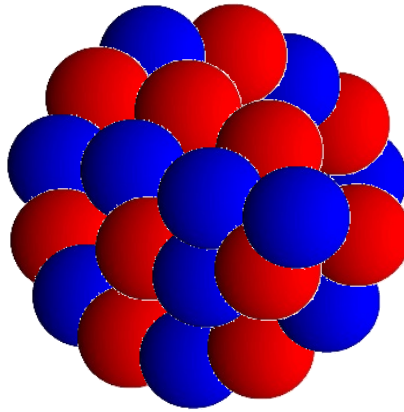


はじめに：核子多体問題について

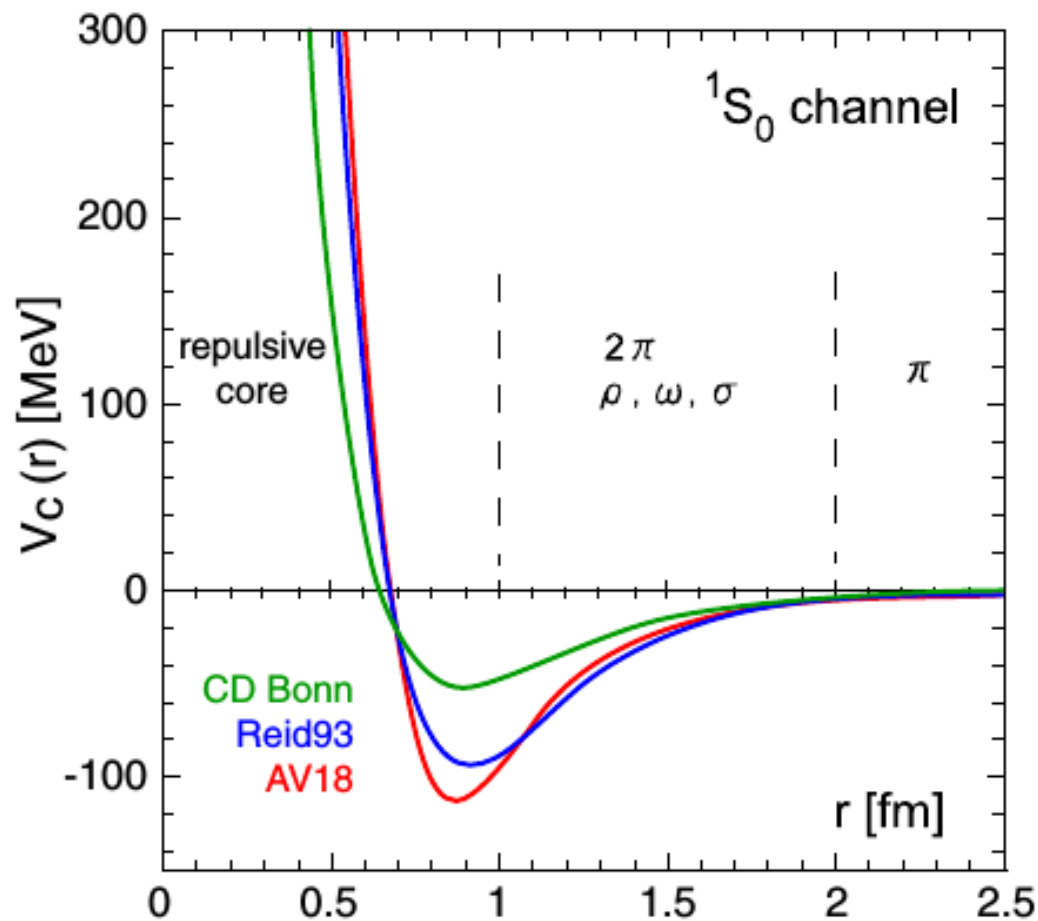


原子核 = 陽子と中性子の多体系

多体のハミルトニアン

$$H = \sum_i T_i + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij}}_{\text{2体力}} + \underbrace{\sum_{i < j < k} v_{ijk}}_{\text{3体力}}$$

このハミルトニアンを核子間のパウリ原理を考慮して
どのように(近似的に)解くのか？



N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda,
PRL99, 022001 (2007)

強いスピン・アイソスピン依存性:

$$V_C(r) = V_0(r) + V_\sigma(r)\sigma_1 \cdot \sigma_2 + V_\tau(r)\tau_1 \cdot \tau_2 \\ + V_{\sigma\tau}(r)(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(\tau_1 \cdot \tau_2)$$

+テンソル力、スピン軌道力、など

One-pion exchange potential (OPEP)

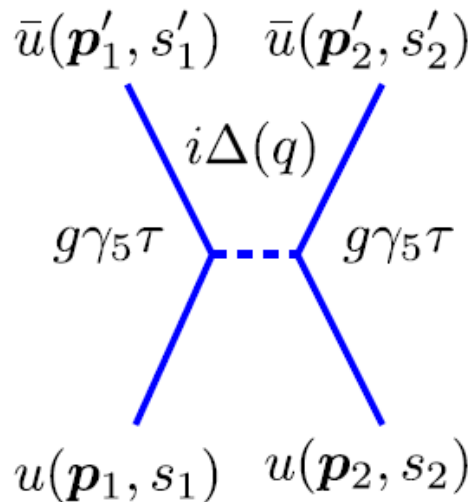
パイ中間子: アイソベクトル (π^0, π^+, π^-)、擬スカラー (負パリティ)

$$\rightarrow \mathcal{L}_{\pi NN} = -g \underbrace{\bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 N}_{\text{核子場}} \cdot \underbrace{\partial_\mu \pi}_{\text{パイオン場}}$$

これを基にポテンシャルを求めると、

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} (\tau_1 \cdot \tau_2) (\sigma_1 \cdot \nabla) (\sigma_2 \cdot \nabla) \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$\mu = m_\pi c / \hbar$$



*詳細は、

A. Obertelli and H. Sagawa,

“Modern Nuclear Physics” (Springer)

などを参照のこと

(左の振幅を q の関数として書いて
おいてフーリエ変換する)

One-pion exchange potential (OPEP)

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= -\frac{g^2}{4\pi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\nabla})\frac{e^{-\mu r}}{r} \\ &= \frac{g^2}{4\pi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \left[((\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + S_{12}Y_T(\mu r)) \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{3} \frac{1}{r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\delta(\mathbf{r}) \right] \end{aligned}$$

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$Y_T(\mu r) = \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right)$$

テンソル力

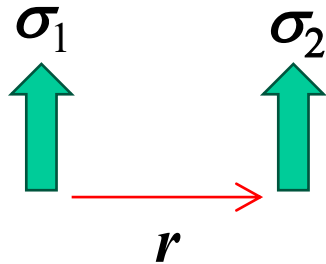
$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_2 \quad \text{を用いると}$$

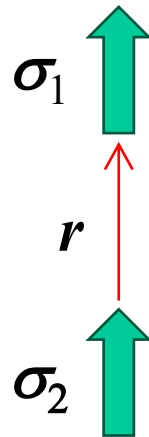
$$S_{12} = \frac{2}{\hbar^2} \left[\frac{3(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{r})^2}{r^2} - (\boldsymbol{S})^2 \right] \quad \text{と書き直すことができる。}$$

→ $S=0$ ではゼロになる

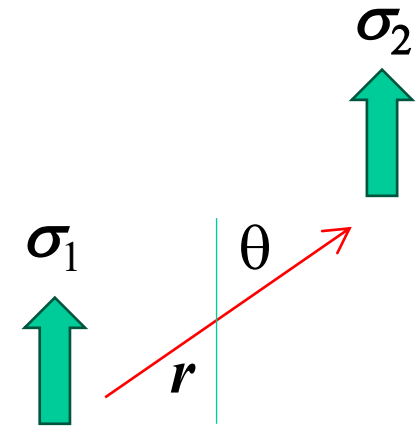
古典的には:



$$S_{12} = -1$$

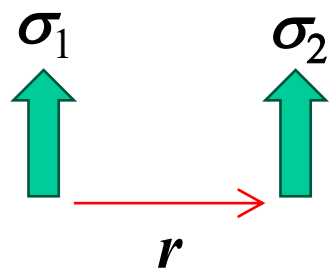


$$S_{12} = 2$$

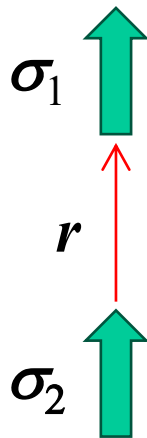


$$S_{12} = 3\cos^2\theta - 1 \sim Y_{20}(\theta)$$

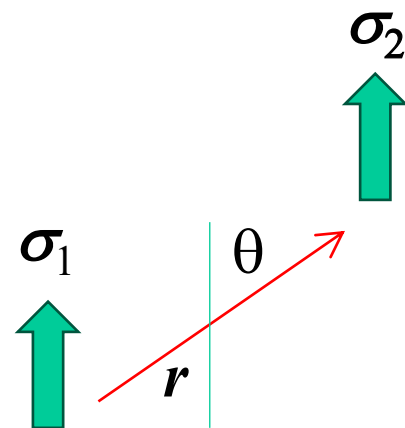
古典的には:



$$S_{12} = -1$$



$$S_{12} = 2$$



$$S_{12} = 3\cos^2\theta - 1 \sim Y_{20}(\theta)$$

量子的には:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \\ &= 3[[\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}]^{(2)}[\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2]^{(2)}]^{(00)} \end{aligned}$$

$$[\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}]^{(2M)} = \sum_{m,m'} \langle 1m1m'|2M \rangle \hat{\mathbf{r}}_m \hat{\mathbf{r}}_{m'} \quad \text{など}$$

テンソルについて

座標系の回転に対し、

$$T_{\lambda\mu} \rightarrow \sum_{\mu'} T_{\lambda\mu'} D_{\mu'\mu}^{\lambda}(\Omega)$$

と変換するもの(球面調和関数 $Y_{\lambda\mu}$ と同じ変換)。

ベクトル (a_x, a_y, a_z) はランク1($\lambda=1$)のテンソル:

$$\begin{aligned} a_{\pm 1} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x \pm i a_y) \\ a_0 &= a_z \end{aligned}$$

cf.

$$\begin{aligned} rY_{1\pm 1} &\propto \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (x \pm i y) \\ rY_{10} &\propto z \end{aligned}$$

テンソルの合成

$$V_{LM} = [T_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2}]^{(LM)} = \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 | LM \rangle T_{\lambda_1 \mu_1} U_{\lambda_2 \mu_2}$$

$$T_{\lambda_1 \mu_1} U_{\lambda_2 \mu_2} = \sum_{L, M} \langle \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 | LM \rangle V_{LM}$$

テンソルのスカラー積

$$T_{\lambda} \cdot U_{\lambda} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} T_{\lambda \mu} U_{\lambda, -\mu}$$

$$\begin{array}{lcl} a_{\pm 1} & = & \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x \pm i a_y) \\ a_0 & = & a_z \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} -a_1 b_{-1} - a_{-1} b_1 + a_0 b_0 \\ = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{array}$$

(note)

$$\begin{aligned} [T_{\lambda} \times U_{\lambda}]^{(00)} &= \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle \lambda \mu_1 \lambda \mu_2 | 00 \rangle T_{\lambda \mu_1} U_{\lambda \mu_2} = \sum_{\mu} \frac{(-1)^{\lambda - \mu}}{\sqrt{2\lambda + 1}} T_{\lambda \mu} U_{\lambda, -\mu} \\ &= \frac{(-1)^{\lambda}}{\sqrt{2\lambda + 1}} T_{\lambda} \cdot U_{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \\
&= 3[[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]^{(2)}[\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2]^{(2)}]^{(00)}
\end{aligned}$$

$$[\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}]^{(2M)} = \sum_{m,m'} \langle 1m1m'|2M \rangle \hat{\boldsymbol{r}}_m \hat{\boldsymbol{r}}_{m'} \quad \text{など}$$

テンソル力

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

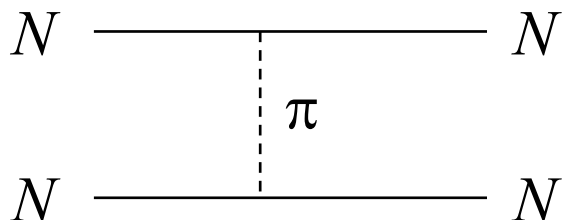
→ $S=0$ ではゼロになる

- ・重陽子 ($S=1$) が束縛し、nn ($S=0$) が束縛しない理由
- ・重陽子のD波成分(四重極モーメント)の説明(4%程度のD波成分)

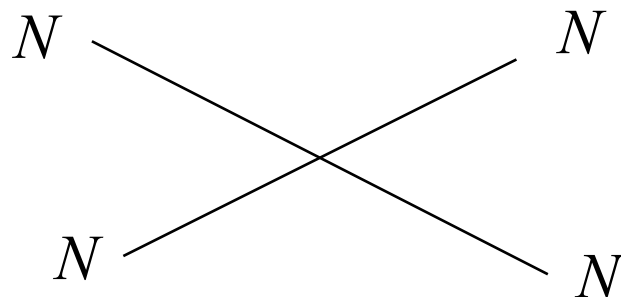


現代的な核力:カイラル有効場の理論 (Chiral EFT)

QCDのカイラル対称性を尊重して相互作用を構築する



長距離部分は π 交換



短距離部分は接触型
(パラメータは実験で決定)
low-energy constant

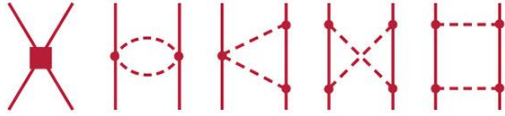
これが出発点→ Q/Λ_{QCD} の展開として高次項を求める

QCDスケール($\sim \text{GeV}$)

三体力も高次項として自動的に現れる

:同じ枠組みで2体力と3体力をコンシステントに構築できる

現代的な核力:カイラル有効場の理論 (Chiral EFT)

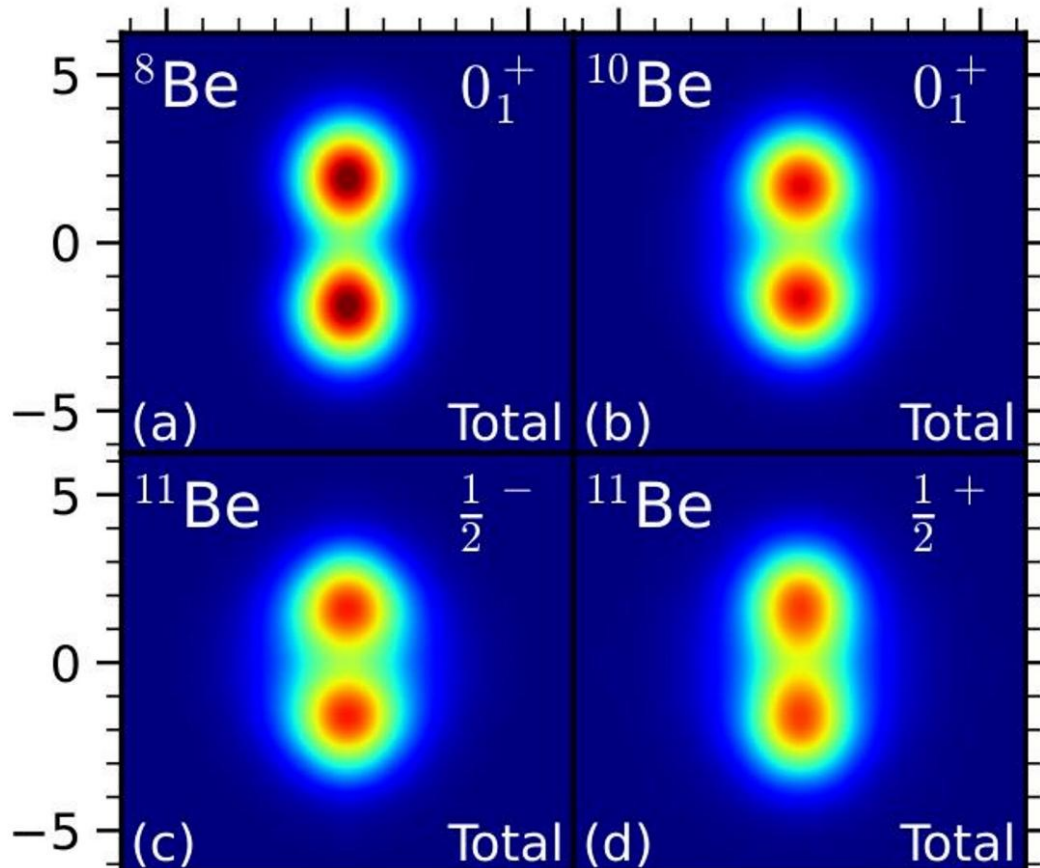
	Two-nucleon force	Three-nucleon force	Four-nucleon force
LO (Q^0)			
NLO (Q^2)			
N ² LO (Q^3)			
N ³ LO (Q^4)			
N ⁴ LO (Q^5)			

E. Epelbaum et al., Rev. Mod. Phys. 81, 1773 (2008).

E. Epelbaum et al., Front. Phys. 8, 98 (2020).

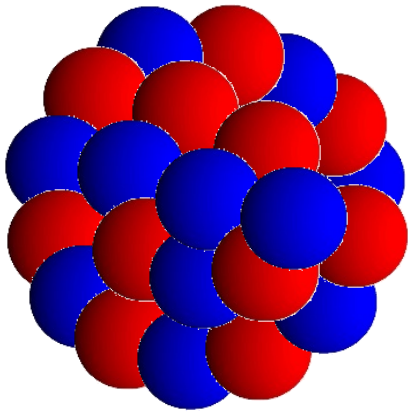
現代的な核力:カイラル有効場の理論 (Chiral EFT)

Chiral EFT 相互作用を用いた最近の第一原理多体計算の例
(N3LOまで考慮してNuclear Lattice EFT法で多体波動関数を求める)



Be アイソトープ
のクラスター構造

はじめに：原子核の基本的な性質

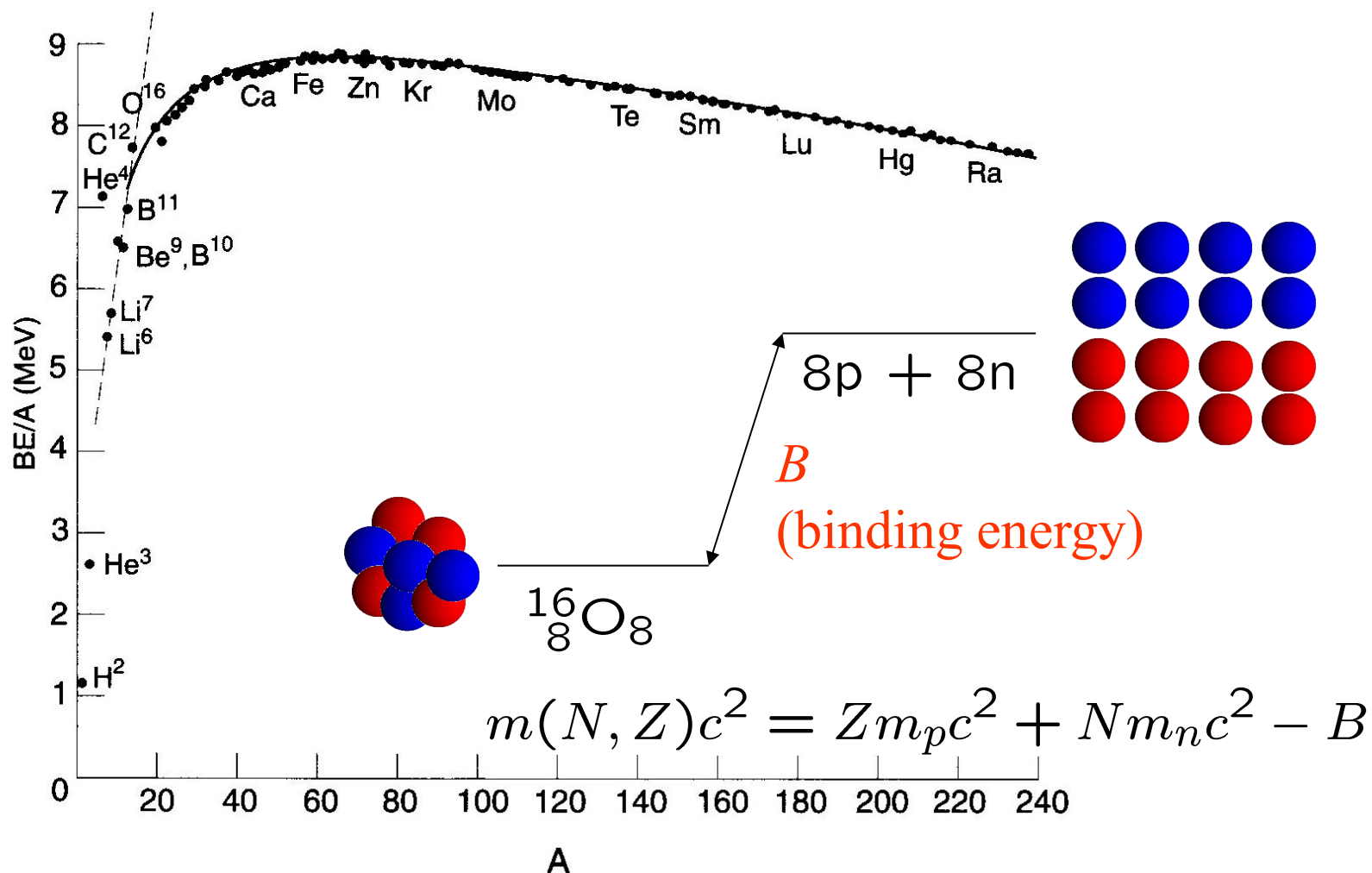


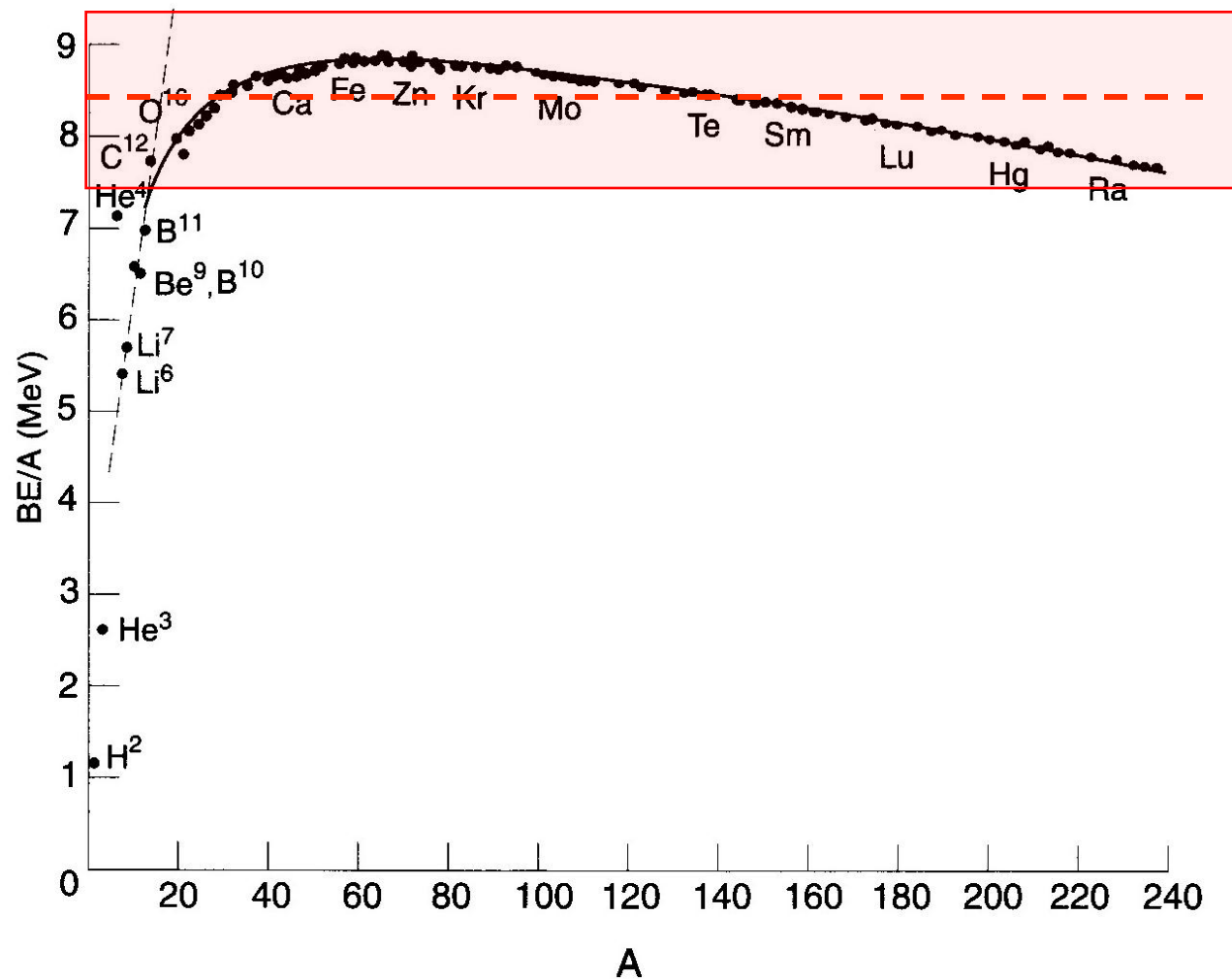
$$H = \sum_i T_i + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij}}_{\text{2体力}} + \underbrace{\sum_{i < j < k} v_{ijk}}_{\text{3体力}}$$

原子核 = 陽子と中性子の多体系

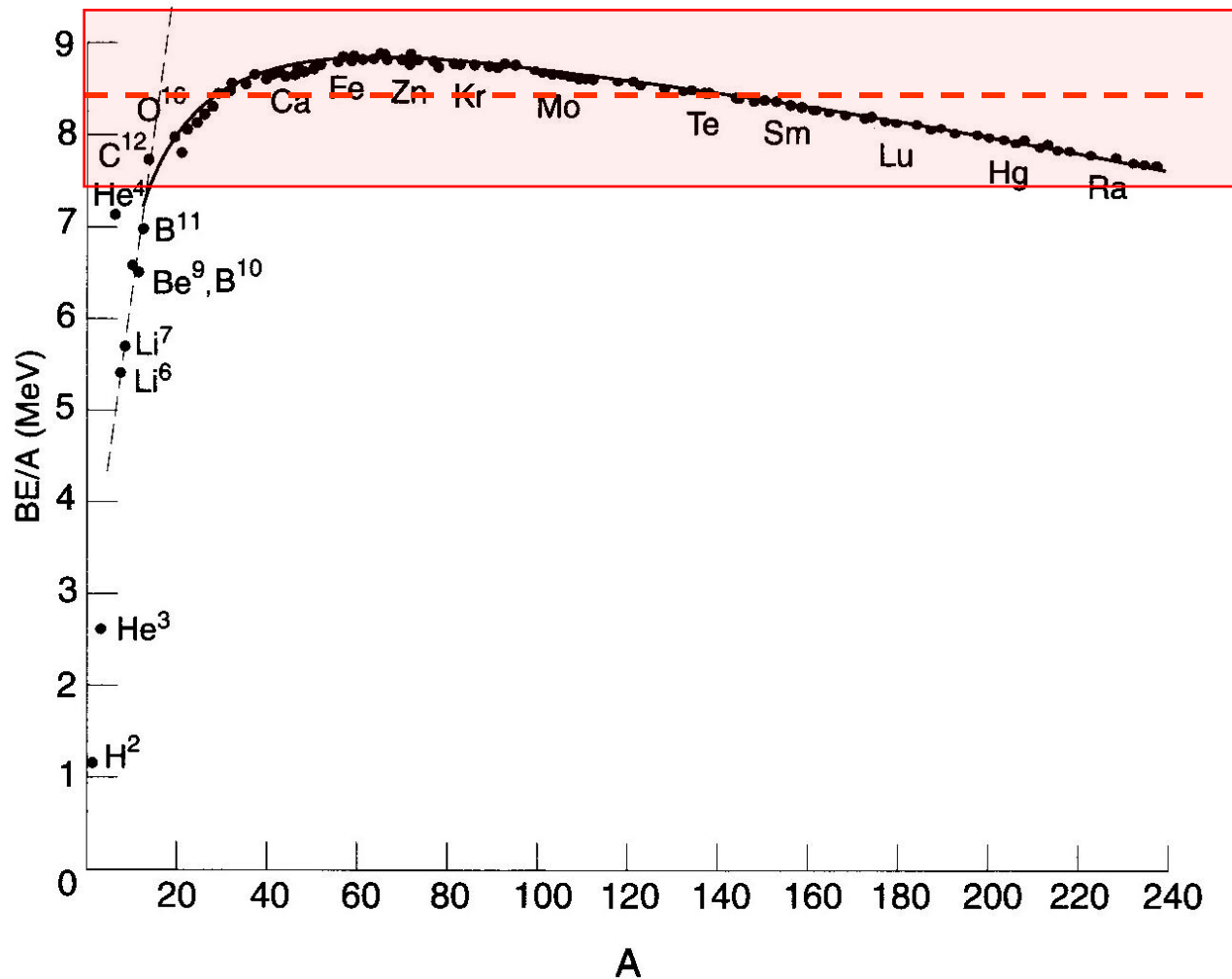
- 基底状態のエネルギー(原子核の質量)？
- 多体系の大きさ(半径)？
- 基底状態の形(変形？)
- 励起スペクトル？
- 原子核と原子核を衝突させると何が起きる？

原子核の質量





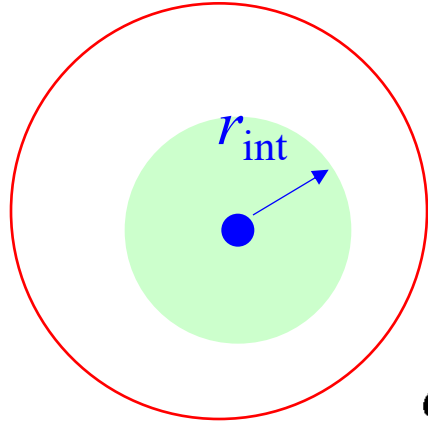
1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12)$
 (ほぼ一定)



1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$ 短距離力(核子間相互作用)
(ほぼ一定)

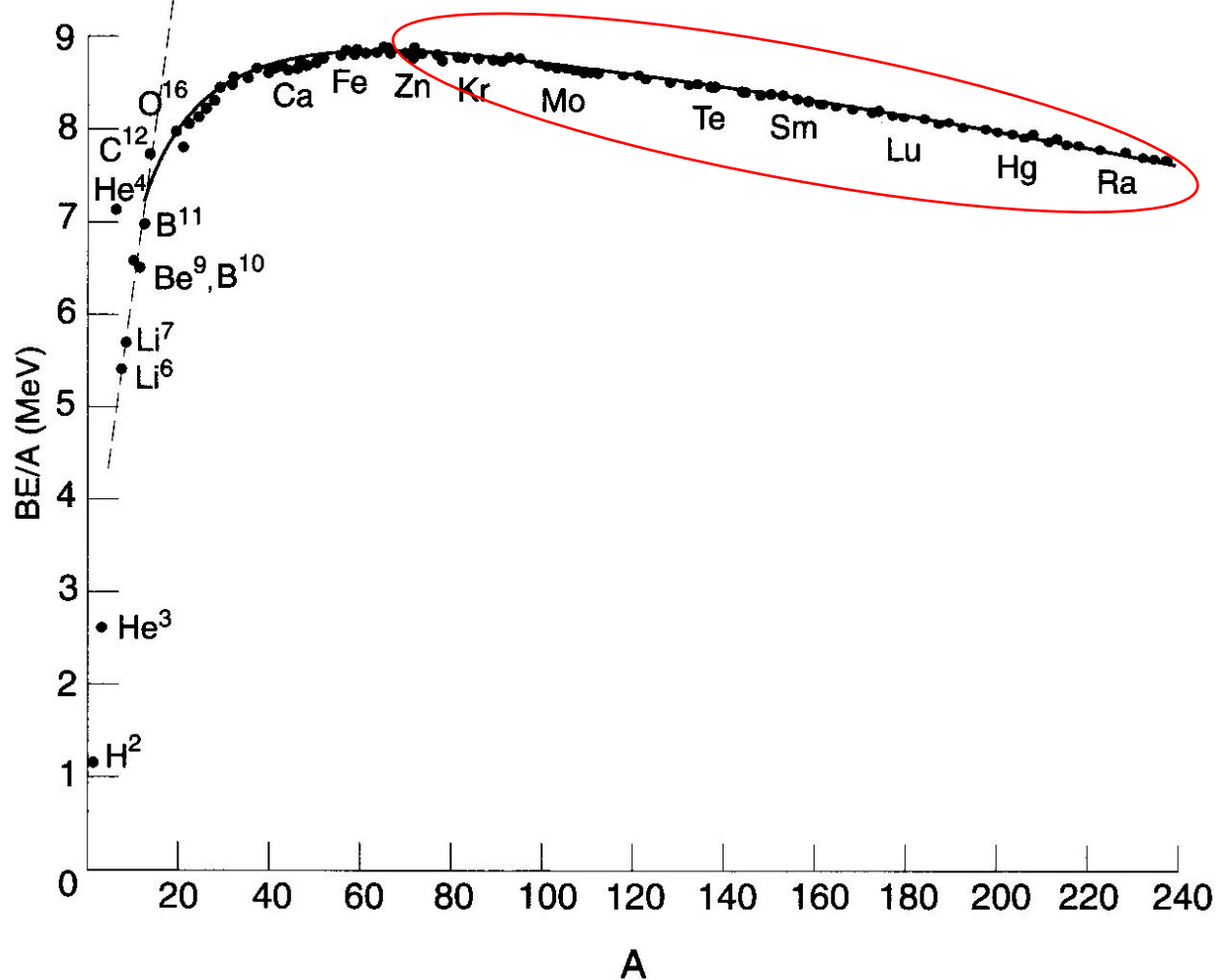
もし、それぞれの核子が近くの α 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$



$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

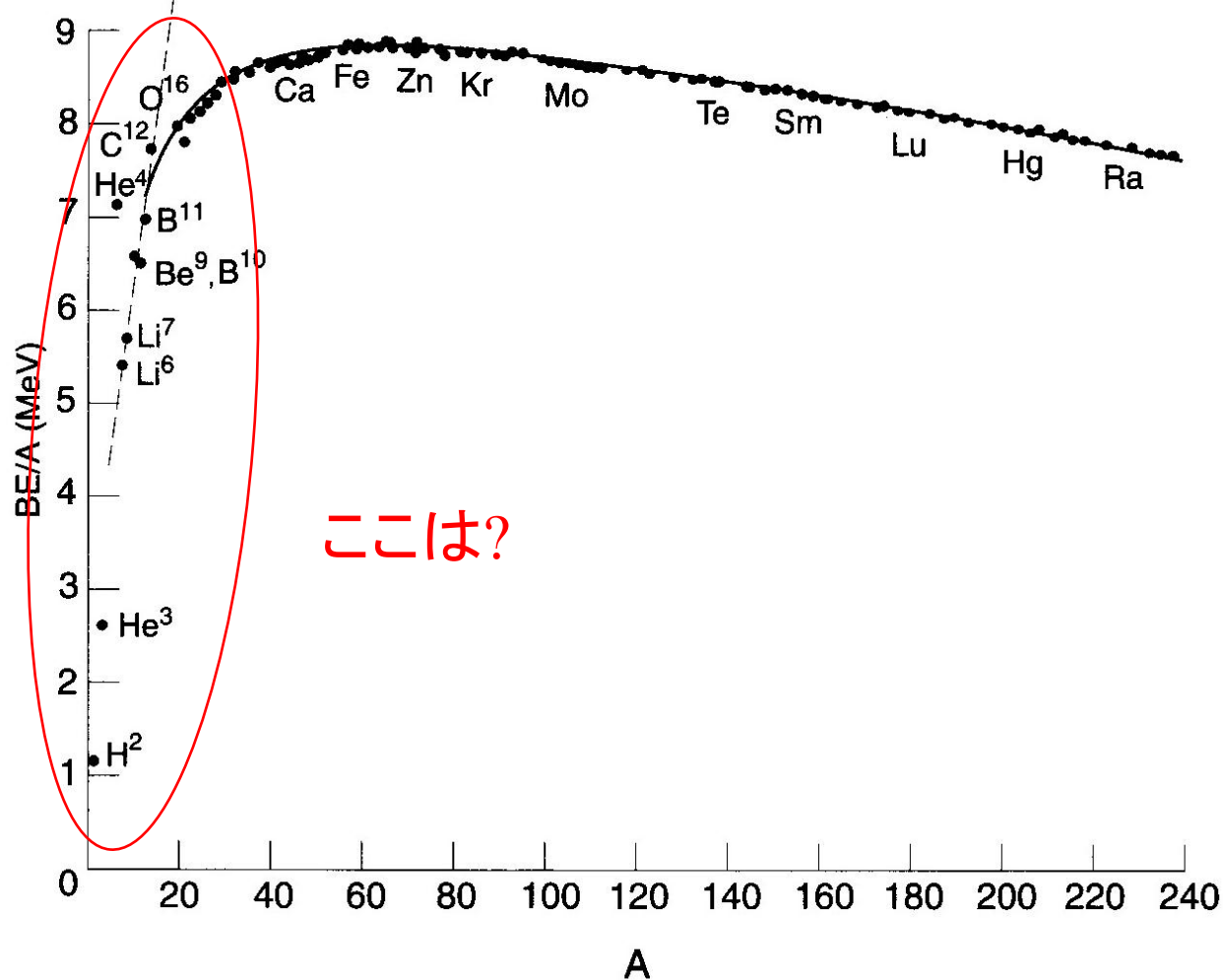




1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$ 短距離力(核子間相互作用)

2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

← B/A が A に比例して減少
(長距離力(クーロン力)がはたらいっている証拠)



1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$ 短距離力 (核子間相互作用)
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響
 - $\longleftarrow B/A$ が A に比例して減少
(長距離力 (クーロン力) がはたらいっている証拠)

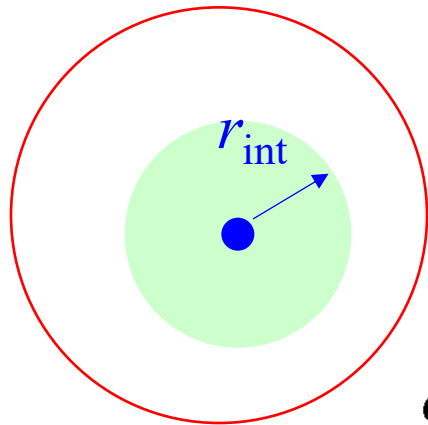
もし、それぞれの核子が近くの α 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

もし、それぞれの核子が近くの α 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

小さな原子核だと

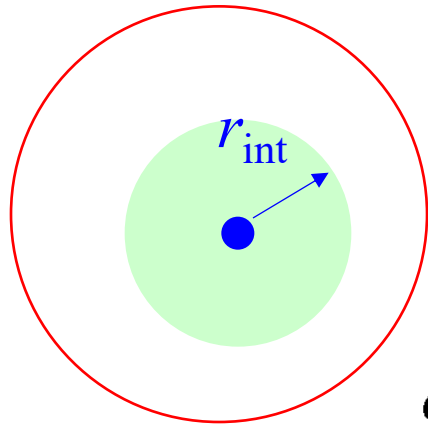


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$



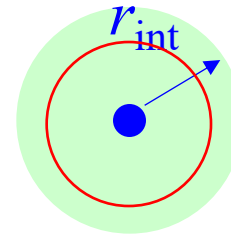
もし、それぞれの核子が近くの α 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$



$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

小さな原子核だと

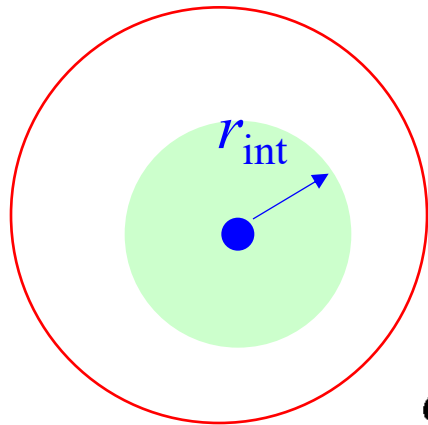


$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$



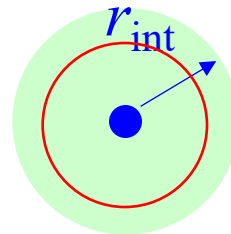
もし、それぞれの核子が近くの α 個の粒子とだけ相互作用するとしたら:

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

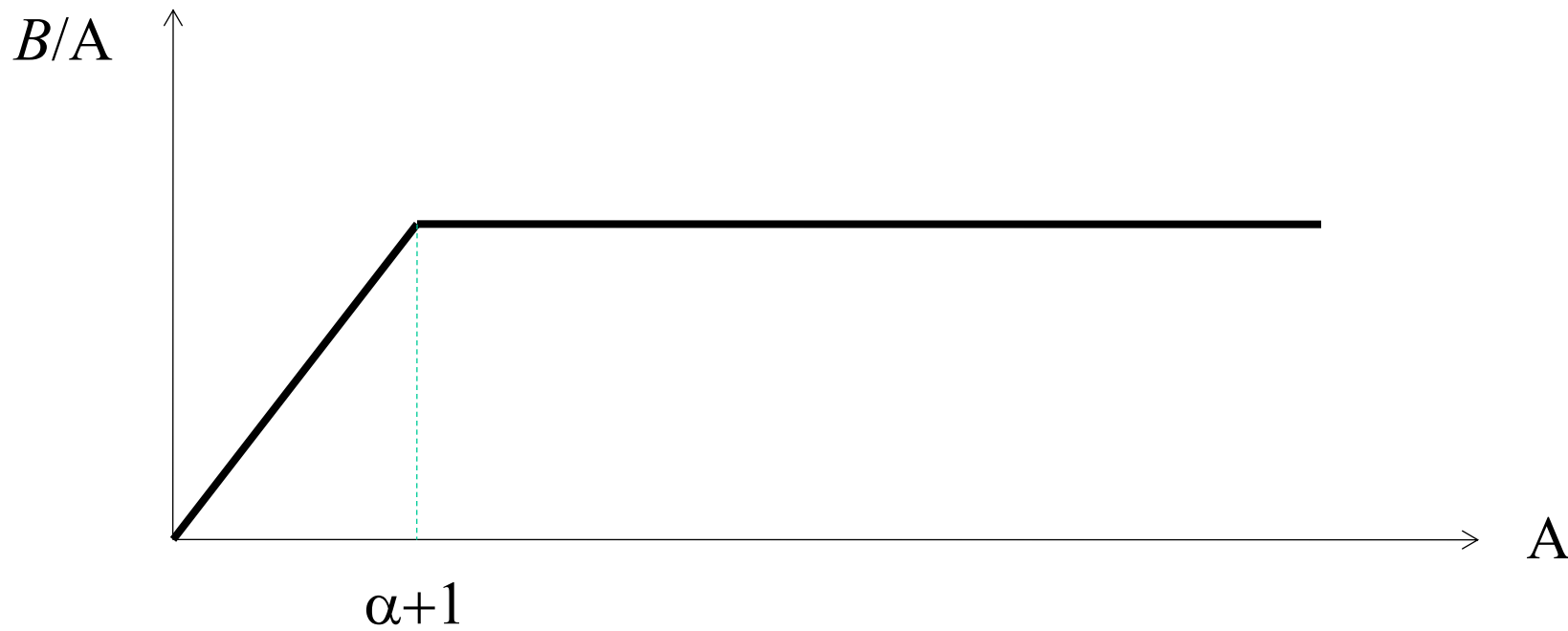


$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

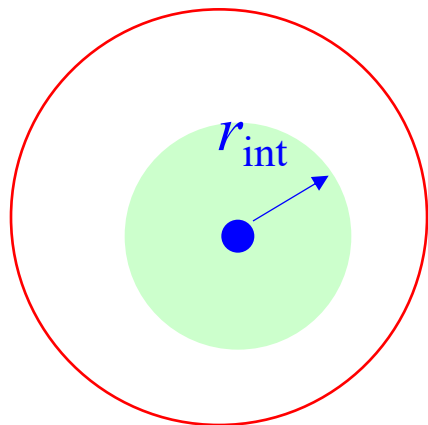
小さな原子核だと



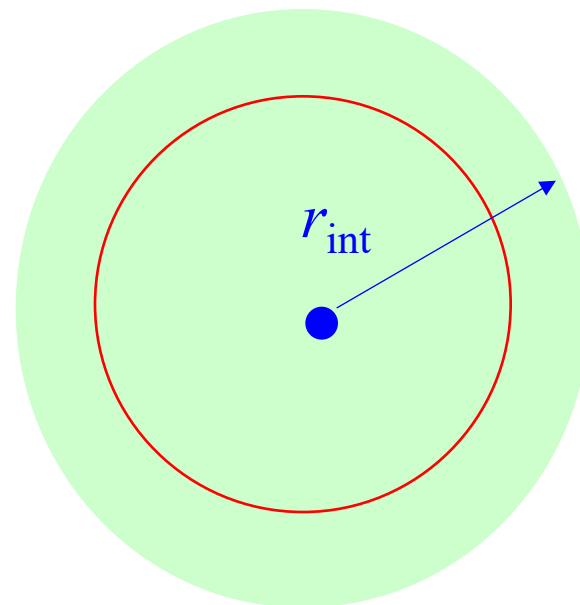
$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$



核力



クーロン力



B/A



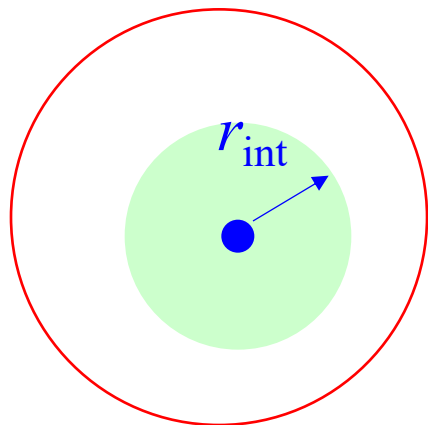
$\rightarrow B/A \propto A - 1$



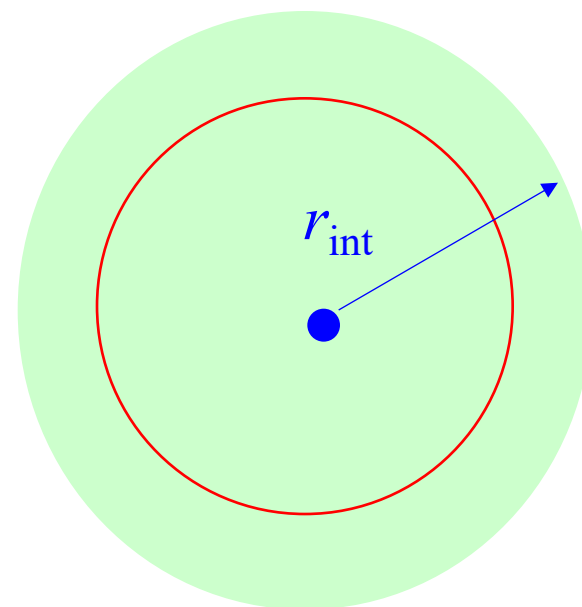
$\alpha+1$

A

核力

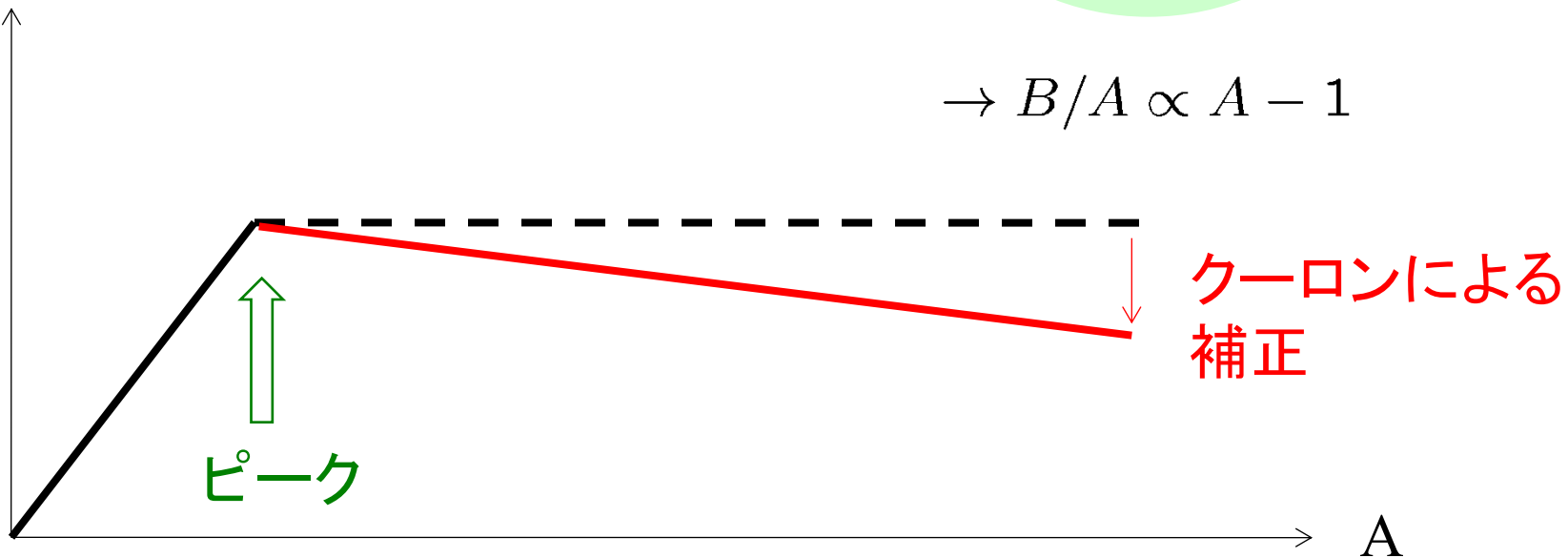


クーロン力

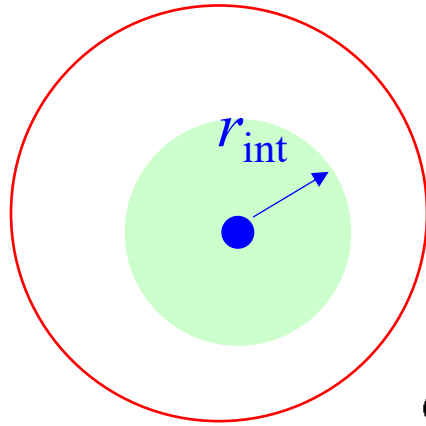


B/A

$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$

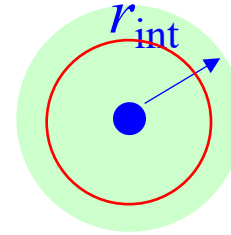


核力のレンジの見積もり

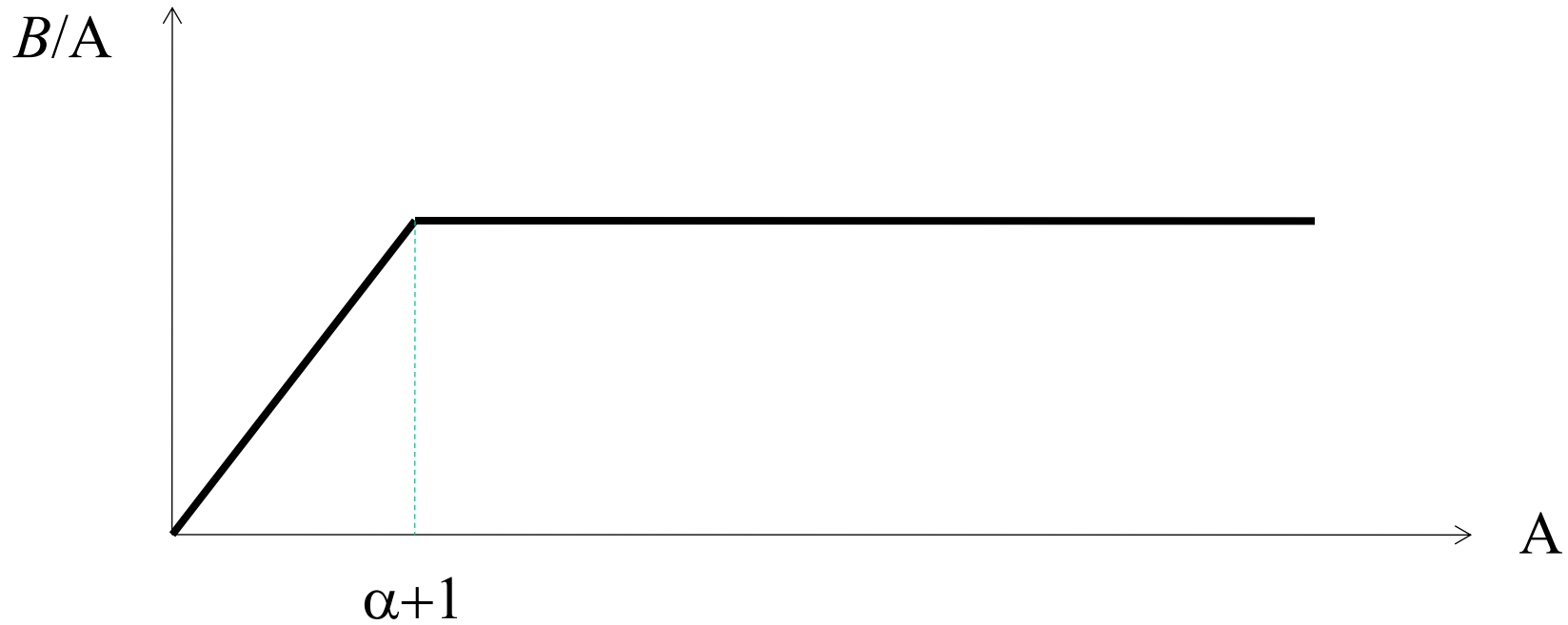


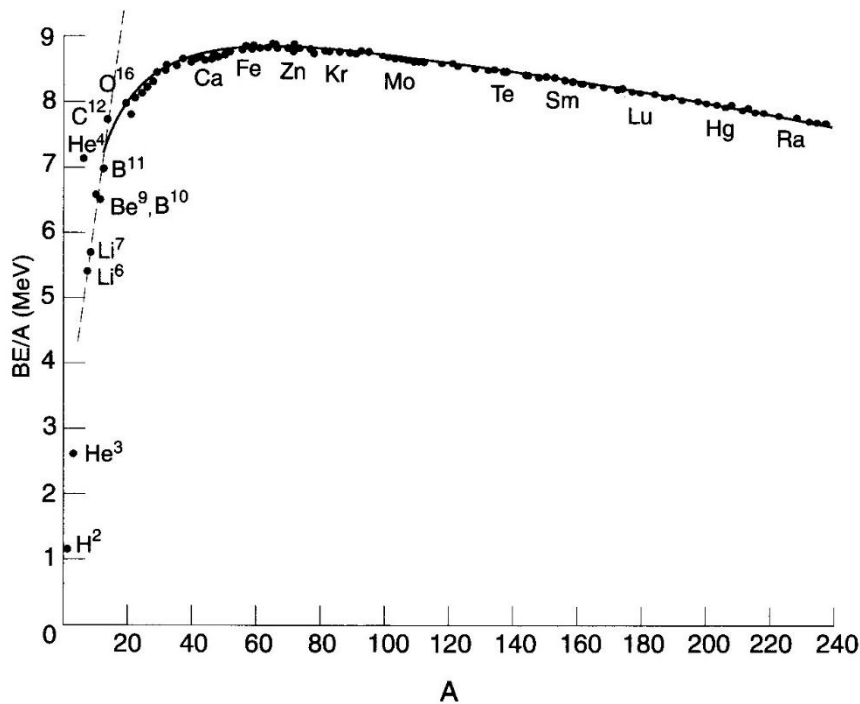
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} r_{\text{int}}^3 \cdot \rho$$

小さな原子核だと



$$\rightarrow B/A \propto A - 1$$





この図から α の値を読み取ると、
 $\alpha \sim 10$ くらい。

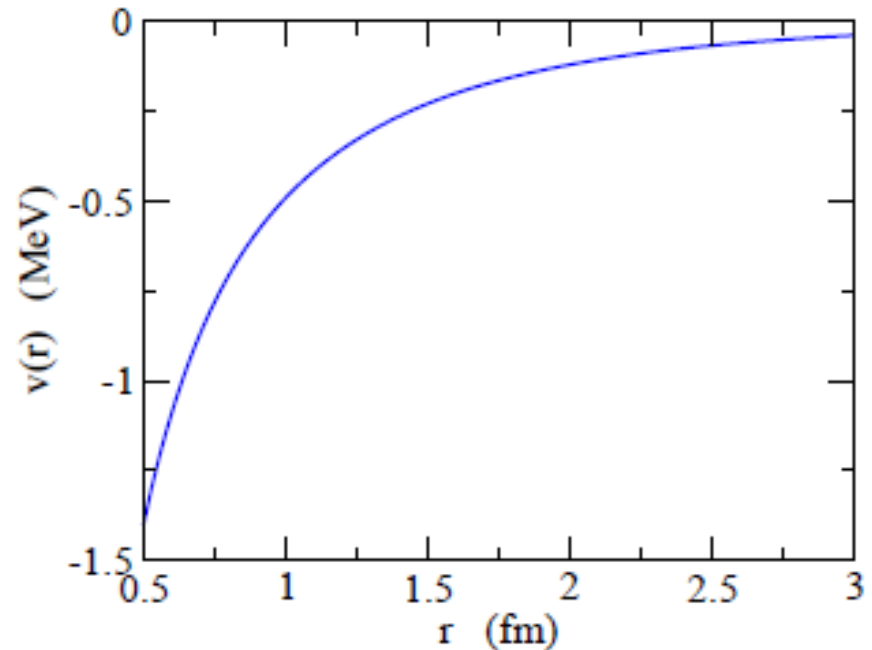


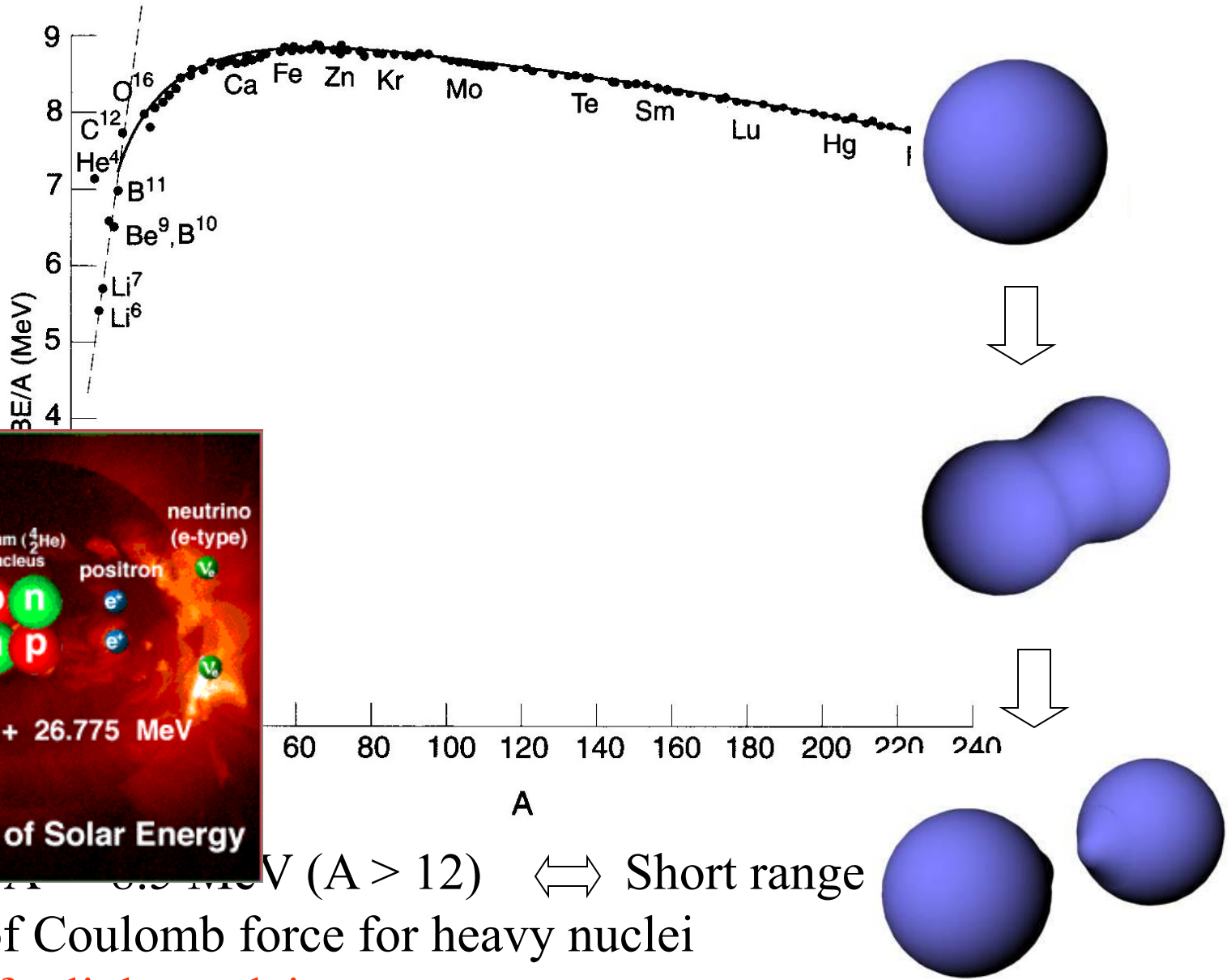
核力の到達距離は、
 $1.1 \times 10^{1/3} = 2.37 \text{ fm}$ 程度。

湯川相互作用:

$$v(r) = -g \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_{\pi} c} = 1.41 \text{ fm}$$





1. $B(A,Z)/A \approx 8.8 \text{ MeV}$ ($A > 12$) $\Leftrightarrow$ Short range
2. Effect of Coulomb force for heavy nuclei
3. Fusion for light nuclei
4. Fission for heavy nuclei

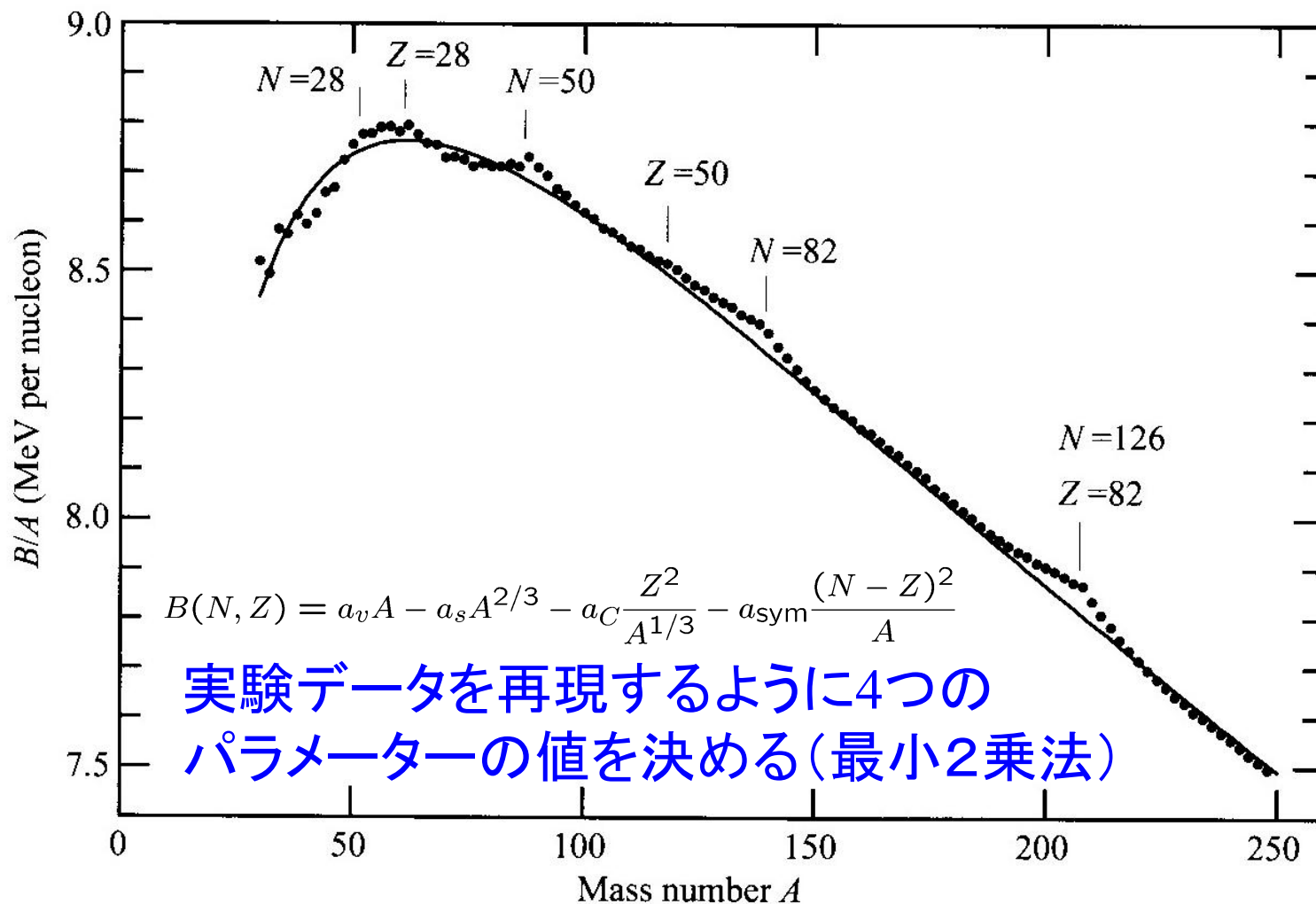
Semi-empirical mass formula

(Bethe-Weizacker formula: Liquid-drop model)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

- Volume energy: $a_v A$
- Surface energy: $-a_s A^{2/3}$
- Coulomb energy: $-a_C Z^2 / A^{1/3}$
- Symmetry energy: $-a_{\text{sym}} (N - Z)^2 / A$

どのくらい実験を再現するか？

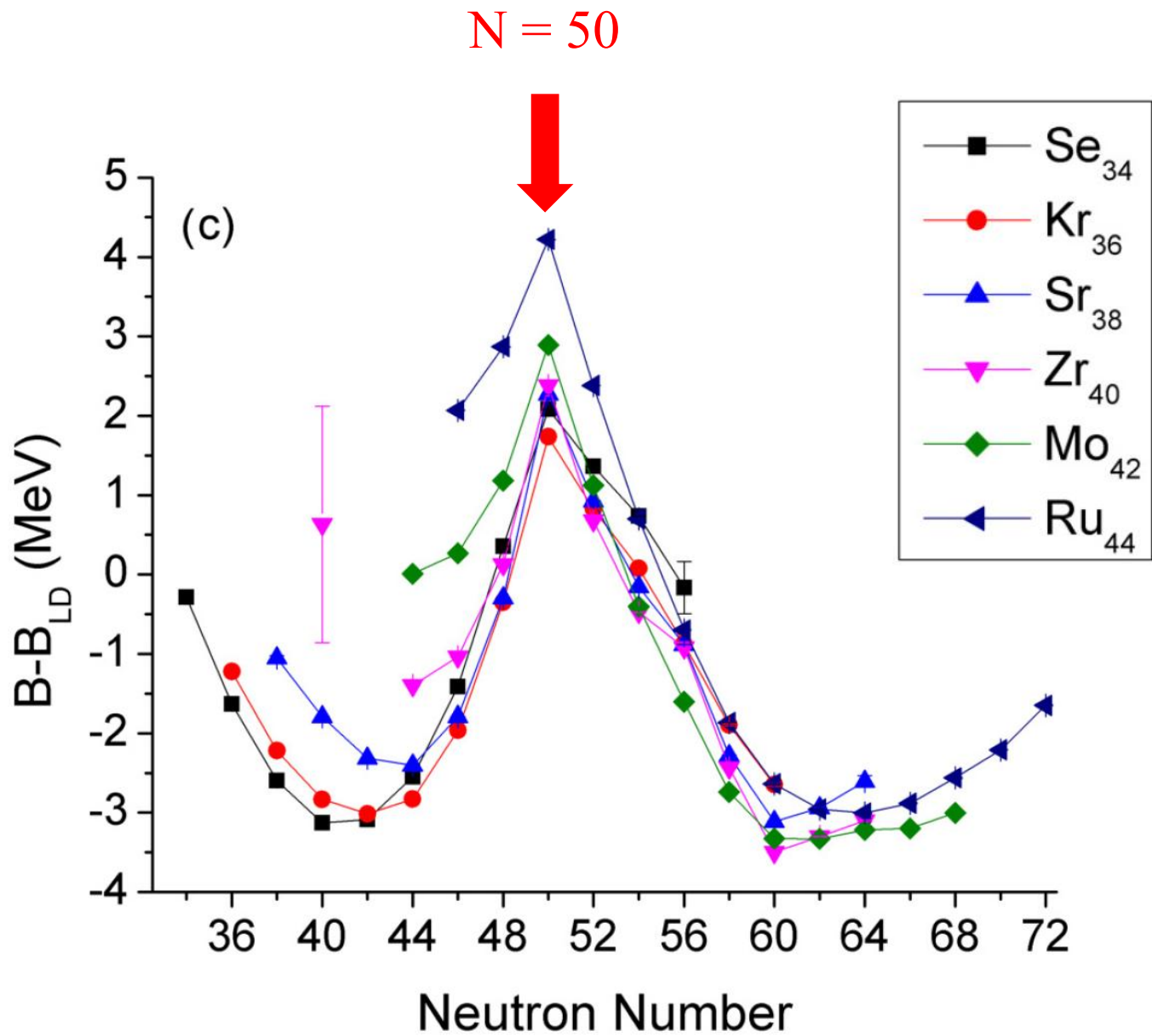


実験データを再現するように4つの
パラメーターの値を決める(最小2乗法)

✓ 大体OK、だけど所々にずれ

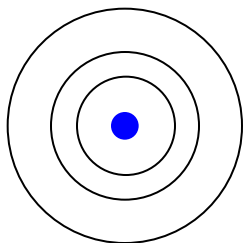
✓ $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ (魔法数)に対して束縛エネルギー大

→ 「殻構造」



(note) 原子の魔法数 (貴ガス・希ガス)

He ($Z=2$), Ne ($Z=10$), Ar ($Z=18$), Kr ($Z=36$), Xe ($Z=54$), Rn ($Z=86$)



殻構造

原子核の周りを
回る電子の軌道が
埋まると安定に
なる

元素の周期表																	
1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8	1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	0		
1 H																	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	L	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	A															
		L	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
		A	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

典型金属元素

半金属元素

非金属元素

遷移金属元素

希ガス

生命誕生のための幸運な偶然

原子の魔法数

電子の数が 2, 10, 18, 36, 54, 86

元素の周期表

二重閉殻核

Legend:

- 典型金属元素 (Typical metal elements)
- 半金属元素 (Metalloid elements)
- 非金属元素 (Non-metal elements)
- 遷移金属元素 (Transition metal elements)
- 希ガス (Noble gases)

不活性ガス: He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn

原子核の魔法数

陽子または中性子の数が
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 の時安定

→ 例えば $^{16}_8\text{O}_8$ (二重閉殻核)

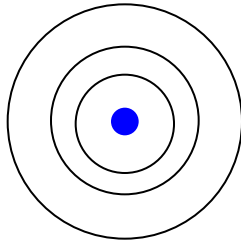
→ 酸素元素は元素合成の過程で数多く生成された

→ しかし、酸素は化学的には「活性」

→ 化学反応により様々な複雑な物質をつくり生命に至った

(note) 原子の魔法数 (貴ガス・希ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



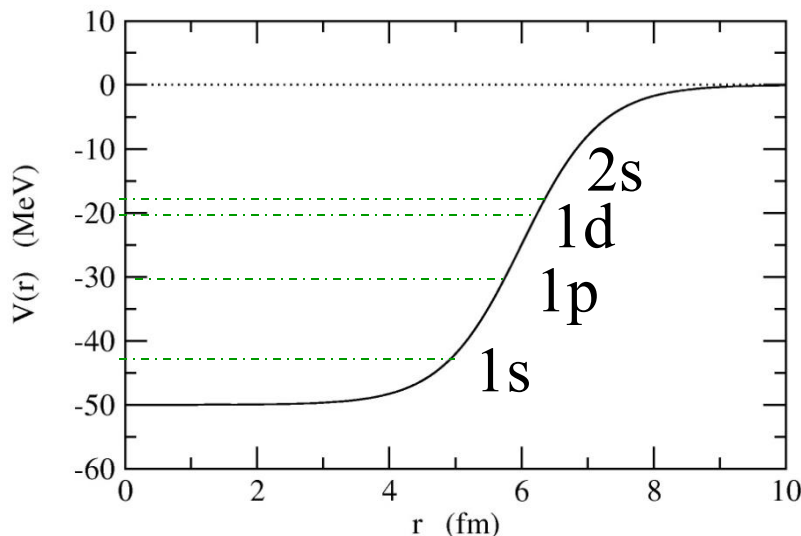
殻構造

原子核の周りを回る電子の軌道が埋まると安定になる

原子核物理における似た試み: ポテンシャル中の独立粒子運動

Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -V_0/[1 + \exp((r - R_0)/a)]$$

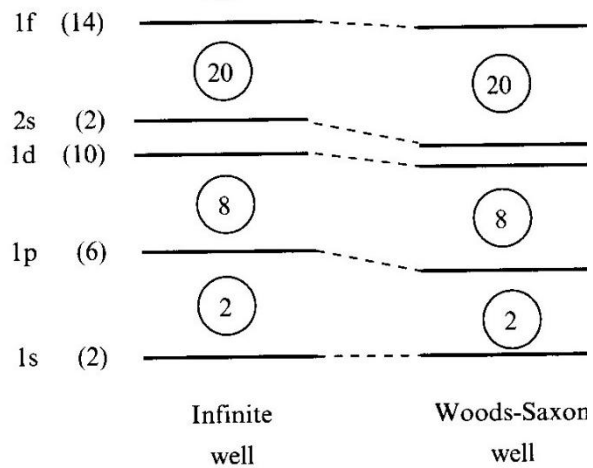


$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(r) = 0$$

$$\psi(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r}) \cdot \chi_{m_s}$$

縮退度に応じて下のレベルから核子を順々につめていく

Nuclear magic numbers:
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126



彦坂忠義

世界に先駆けて原子核の殻模型を提唱
原子力に関する先駆的な研究（原子炉の彦坂模型の提案）

写真提供：彦坂王直氏

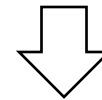
あまりにも研究の時期が「早すぎた」ため
偉大な業績が歴史に埋もれてしまった悲運の科学者 *Hidesaburo Taniyoshi*

- 1902 愛知県瀬戸郡（現豊橋市）に生まれる **1902-1989**
- 1920 旧制第二高等学校（仙台）入学
- 1926 東北帝国大学理学部物理学科卒業
東北帝国大学助手
- 1934 原子核の殻模型の提唱
- 1939 旧制山口高等学校教授
- 1941 大阪大学秦池正士研究室に内地留学
- 1943 旧制第二高等学校教授
- 1944 原子炉の彦坂模型の提案
- 1945 旅順工科大学教授
- 1949 岩手大学教授
- 1951 新潟大学理学部教授
- 1968 東北学院大学教授（～1977）
- 1989 逝去

彦坂忠義(1902 – 1989)

1934 年

殻模型の考えに基づき
計算を行う



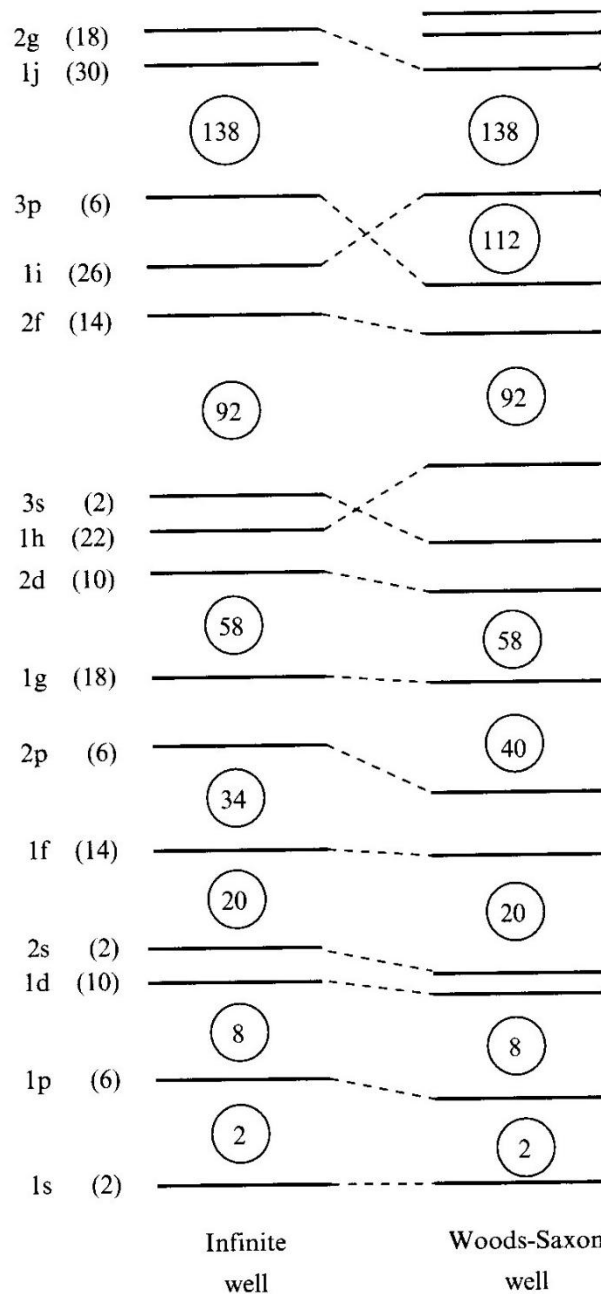
中性子の分離エネルギー、
原子核の安定領域、
磁気モーメント

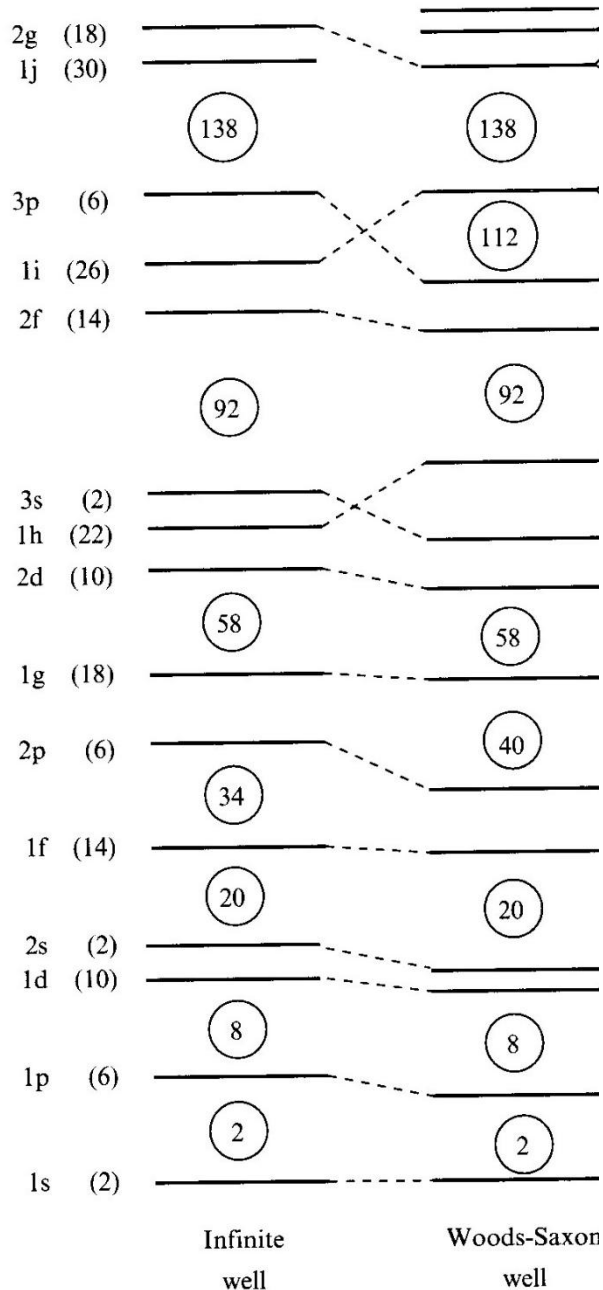
など当時測定されていた
実験データをきれいに説明

（ただし、当時、殻模型の
考えは受け入れられなか
った。）

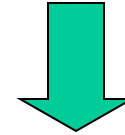
Phys. Rev. に論文を reject をされる。
独語に書き直し、東北大紀要に発
表。

Nuclear magic numbers:
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

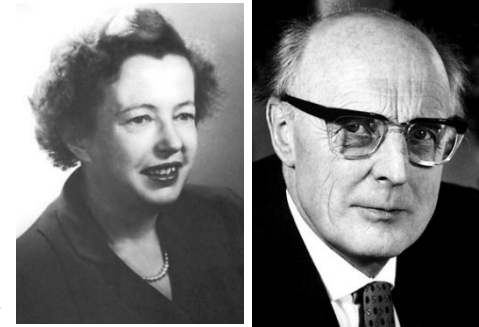




Woods-Saxon itself does not provide the correct magic numbers (2,8,20,28, 50,82,126).



Mayer and Jensen (1949):
Strong spin-orbit interaction



$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$V_{ls}(r) \sim -\lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (\lambda > 0)$$

