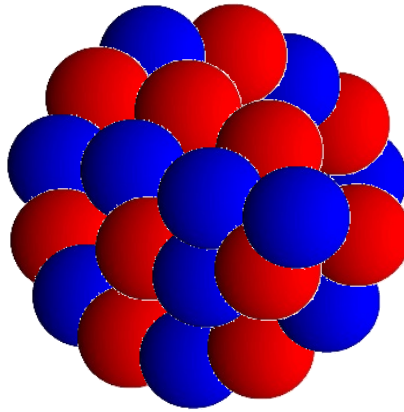


はじめに：核子多体問題について



原子核 = 陽子と中性子の多体系

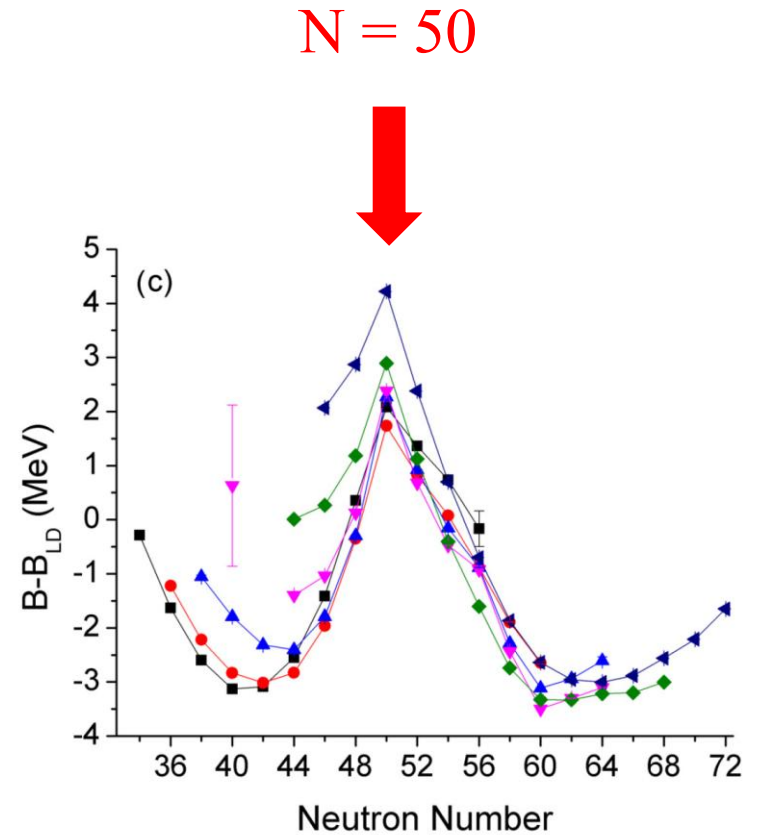
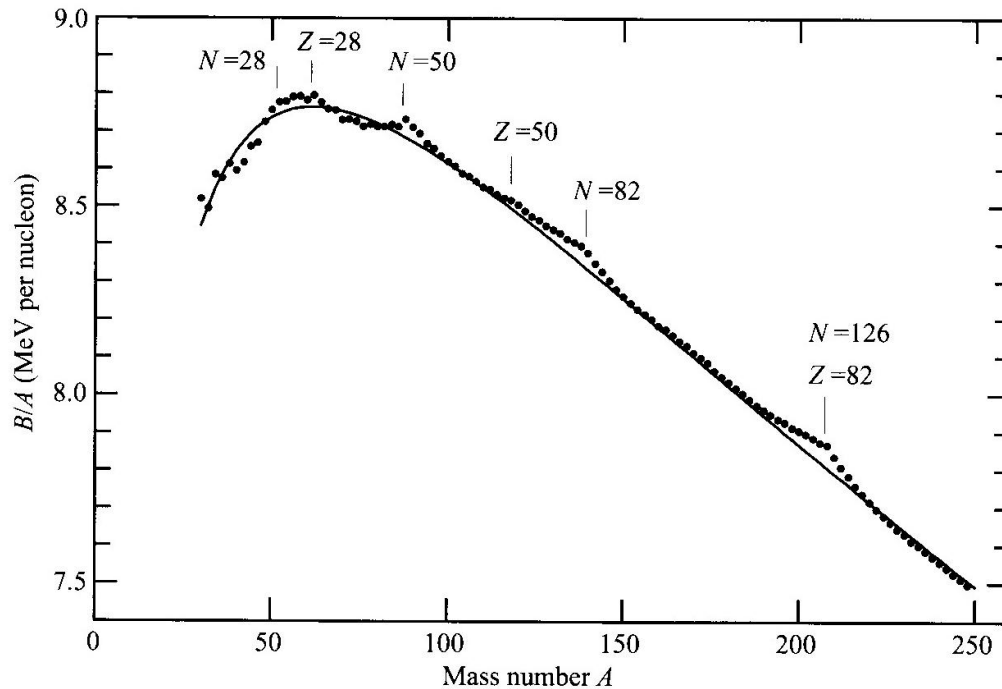
多体のハミルトニアン

$$H = \sum_i T_i + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij}}_{\text{2体力}} + \underbrace{\sum_{i < j < k} v_{ijk}}_{\text{3体力}}$$

このハミルトニアンを核子間のパウリ原理を考慮して
どのように(近似的に)解くのか？

核子1つあたりの束縛エネルギー

$$B = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - Mc^2$$



I. Bentley et al., PRC93 ('16) 044337

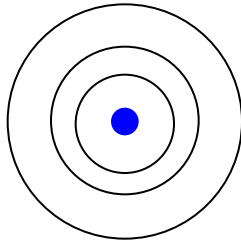
✓ 所々に平均からのずれ

✓ $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ (魔法数) に対して束縛エネルギー大

→ 「殻構造」

(note) 原子の魔法数 (貴ガス・希ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



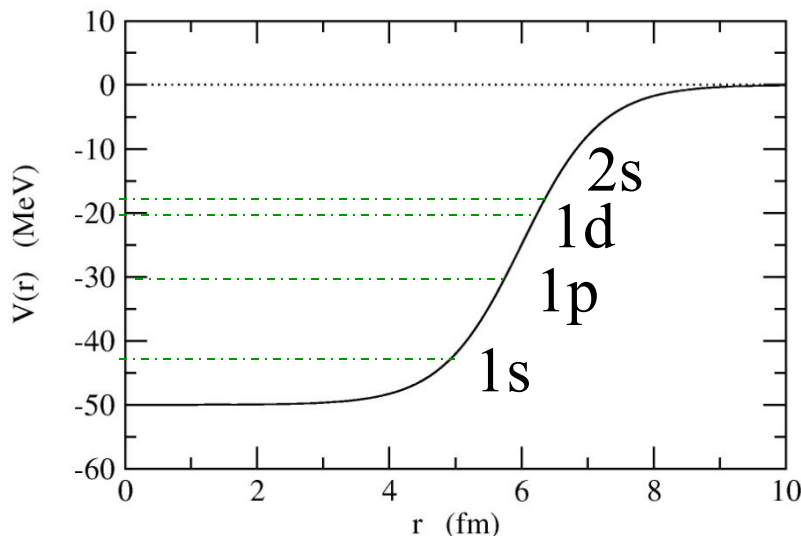
殻構造

原子核の周りを回る電子の軌道が埋まると安定になる

原子核物理における似た試み: ポテンシャル中の独立粒子運動

Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -V_0/[1 + \exp((r - R_0)/a)]$$

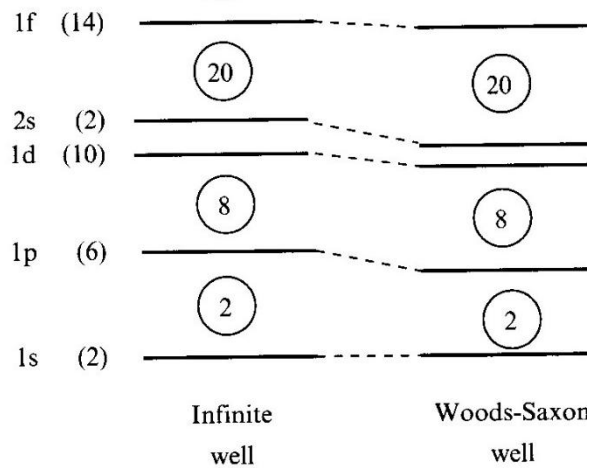


$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(r) = 0$$

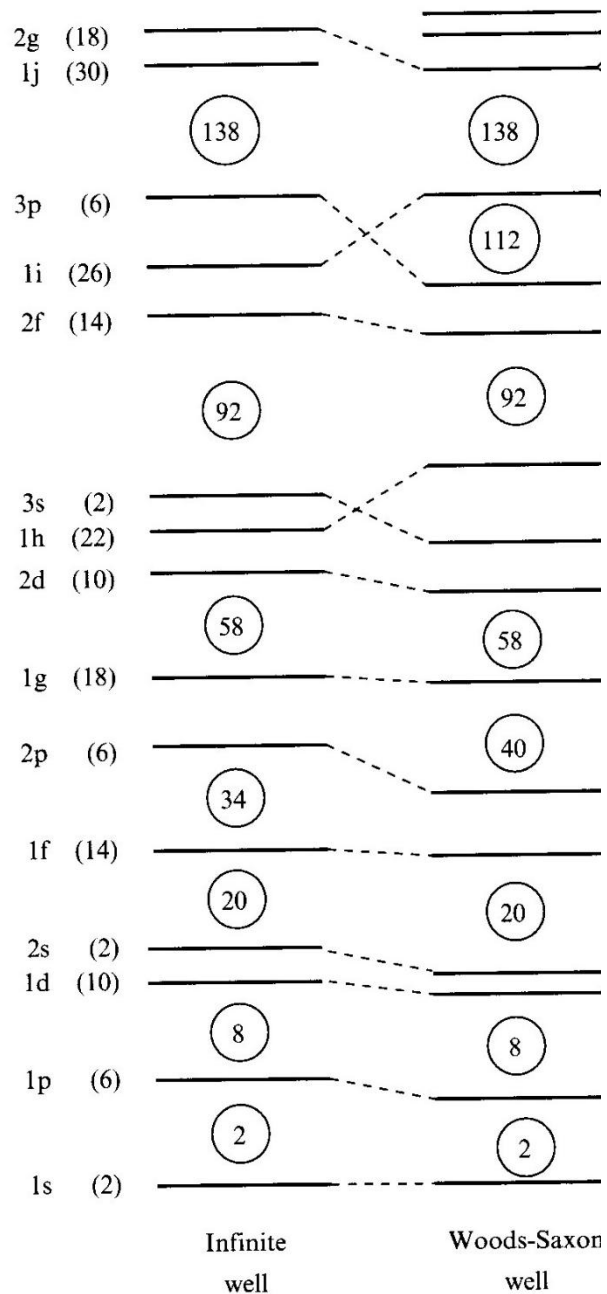
$$\psi(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r}) \cdot \chi_{m_s}$$

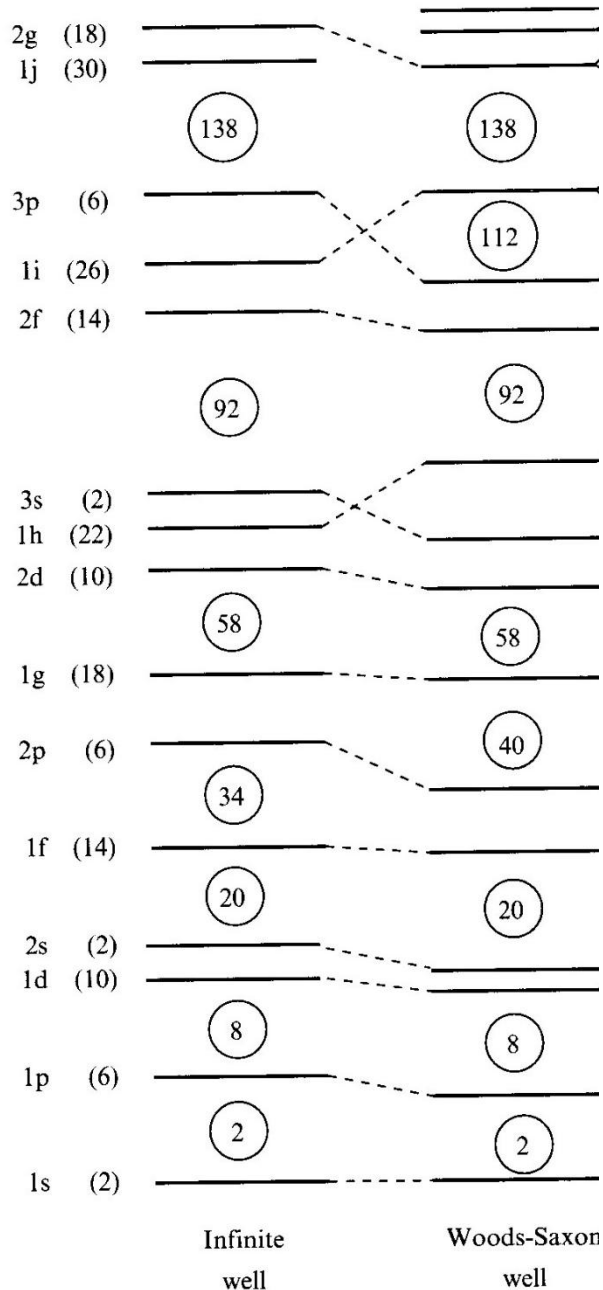
縮退度に応じて下のレベルから核子を順々につめていく

Nuclear magic numbers:
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

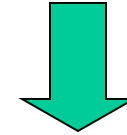


Nuclear magic numbers:
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

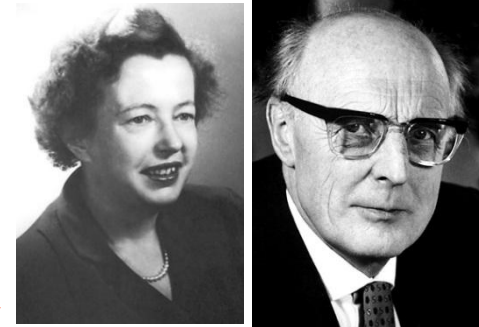




Woods-Saxon itself does not provide all of the correct magic numbers (2,8,20,28, 50,82,126).



Mayer and Jensen (1949):
Strong spin-orbit interaction



$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$V_{ls}(r) \sim -\lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (\lambda > 0)$$

jj 結合殻模型

軌道運動とスピンは独立の自由度

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \implies \psi_{l m m_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

スピン・軌道力

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$(\text{note}) \quad \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \implies \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = (j^2 - l^2 - s^2)/2$$

l と s を結合して j を組む。

$$\rightarrow j = l \pm 1/2$$

jj 結合殻模型

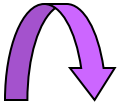
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \implies \psi_{lm m_s}(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \chi_{m_s}$$

スピン・軌道力

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$(\text{note}) \quad \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \implies \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = (j^2 - l^2 - s^2)/2$$

$\mathbf{l}$ と $\mathbf{s}$ を結合して $\mathbf{j}$ を組む。


$$\begin{aligned} \psi_{jlm}(\mathbf{r}) &= \frac{u_{jl}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{m_l, m_s} \langle l \ m_l \ 1/2 \ m_s | j \ m \rangle Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s} \end{aligned}$$

$$j^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = j(j+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$j_z |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = m |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = l(l+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$s^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = 3/4 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

jj 結合殻模型

l と s を結合して j を組む。

$$\psi_{jlm}(\mathbf{r}) = \frac{u_{jl}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}})$$

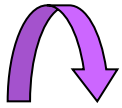
$$j^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = j(j+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$j_z |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = m |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = l(l+1) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$s^2 |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{3}{4} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$(\text{note}) \quad j = l + s \quad \Longrightarrow \quad l \cdot s = (j^2 - l^2 - s^2)/2$$



$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

符号が逆！

jj 結合殻模型

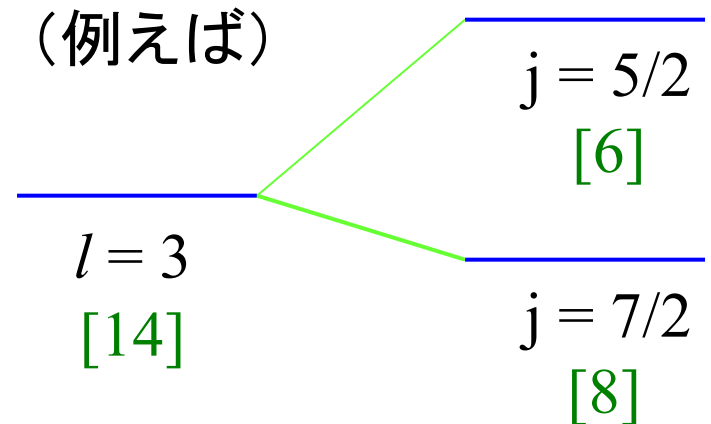
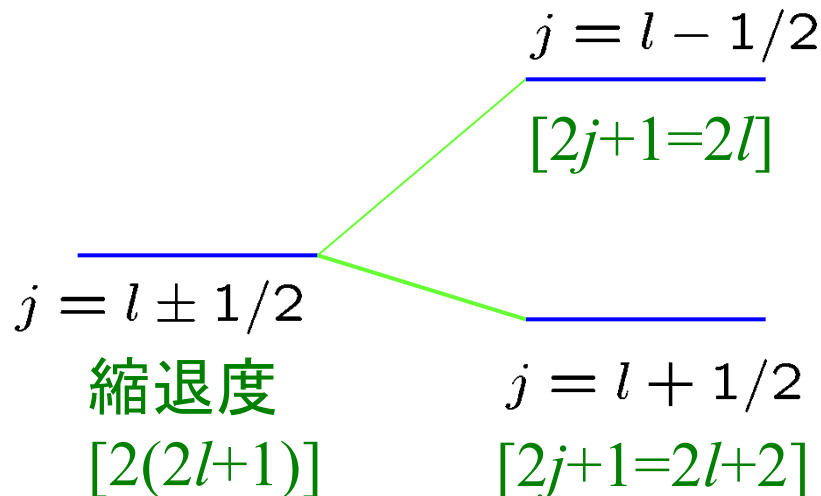
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

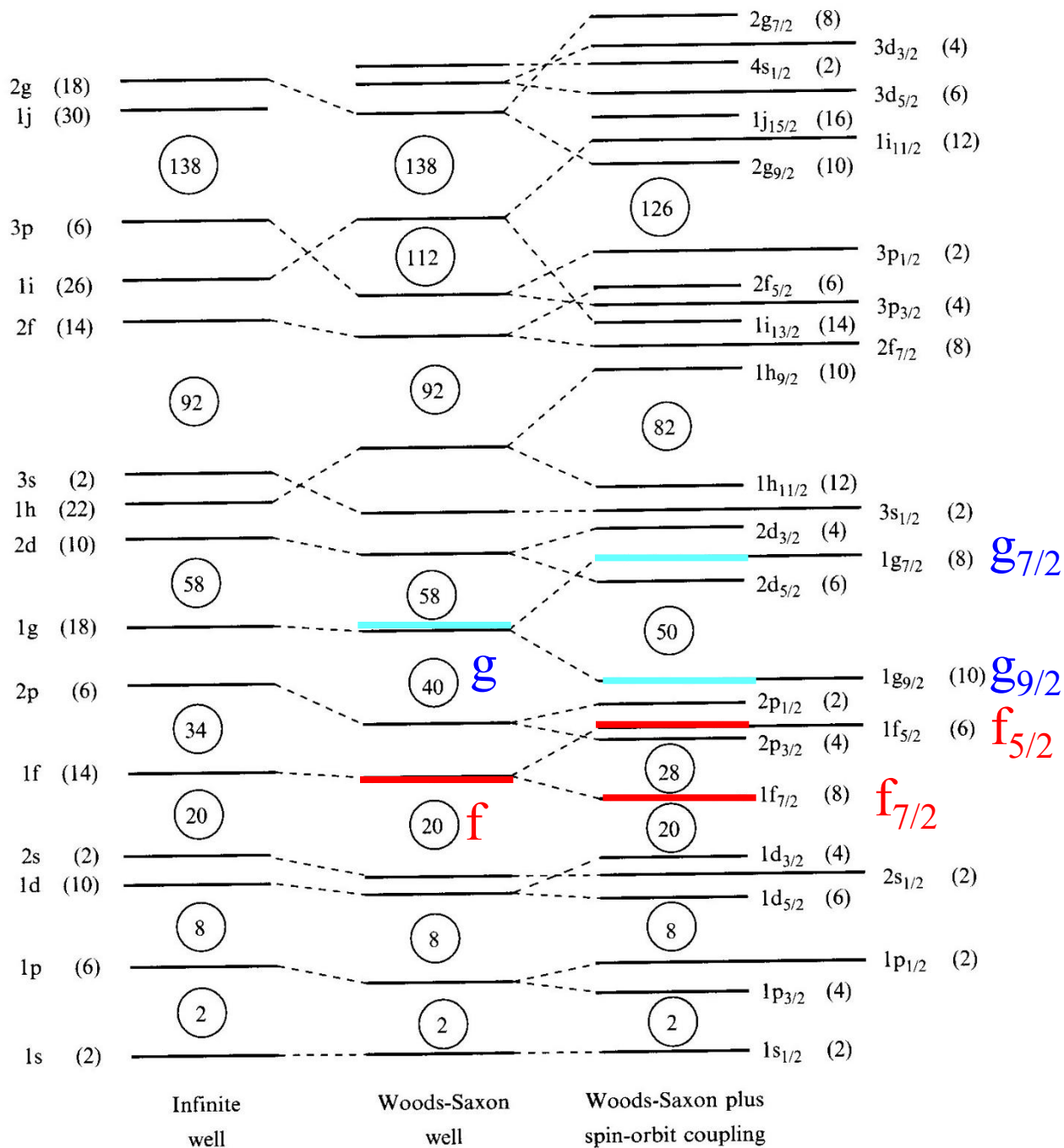
$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$

符号が逆！

$j = l \pm 1/2$ で準位が分離





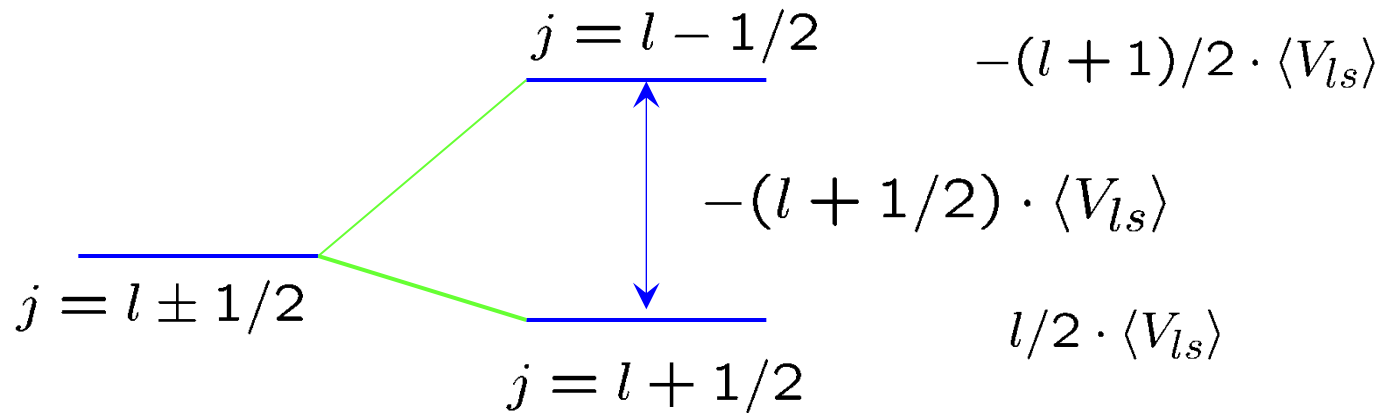
g [18] → **g**_{7/2} [8]
g [18] → **g**_{9/2} [10]

f [14] → **f**_{5/2} [6]
f [14] → **f**_{7/2} [8]

jj 結合殻模型

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = \frac{l}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l + 1/2)$$

$$l \cdot s |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle = -\frac{l+1}{2} |\mathcal{Y}_{jlm}\rangle \quad (j = l - 1/2)$$



$j = l \pm 1/2$ で準位が分離: l が大きくなればなるほど
分離は大

* ただし、スピン平均はゼロ:

$$+\frac{l}{2} (2(l + 1/2) + 1) - \frac{l+1}{2} (2(l - 1/2) + 1) = 0$$

レポート問題3: KULMSから提出、提出×切 7/28(火) 23:59

3次元球対称調和振動子ポテンシャル

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

のエネルギー固有値は

$$E_{nl} = \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega$$

で与えられる。ここで l は軌道角運動量である。また、 n は0または正の整数である。

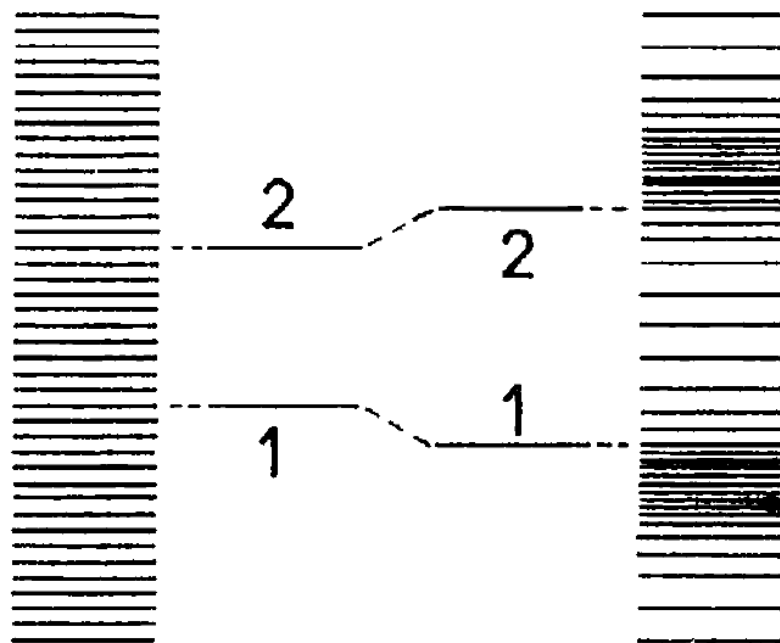
このハミルトニアンにスピン軌道ポテンシャルを次のように加えることにより、魔法数 28 が現れることを説明せよ。

$$H = H_0 + \xi \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \xi \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

また、そのときの ξ の符号を答えよ。

何故、閉殻の原子核は安定になるのか？

準位密度



(a)

均一の場合

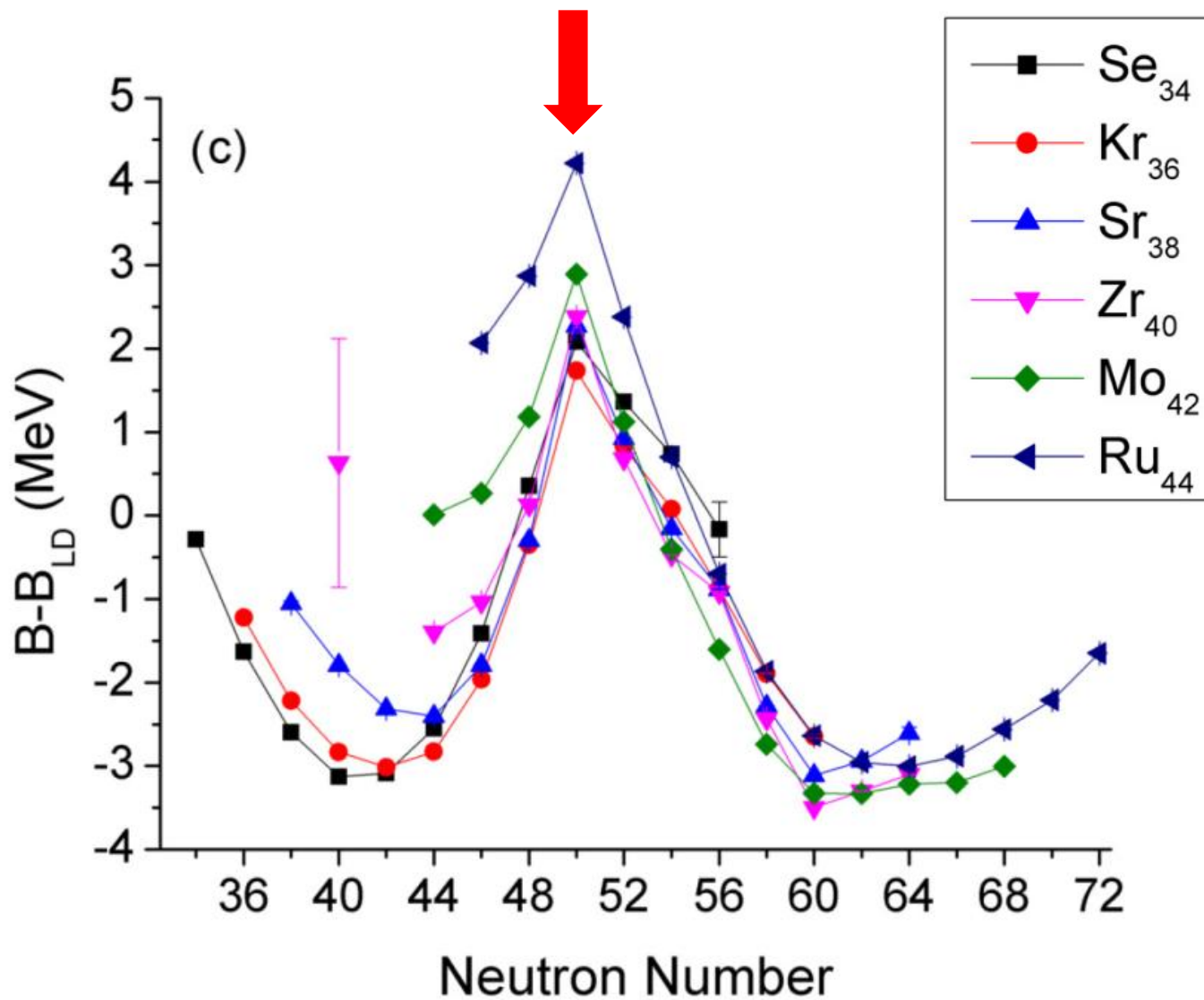
(b)

濃淡がある場合

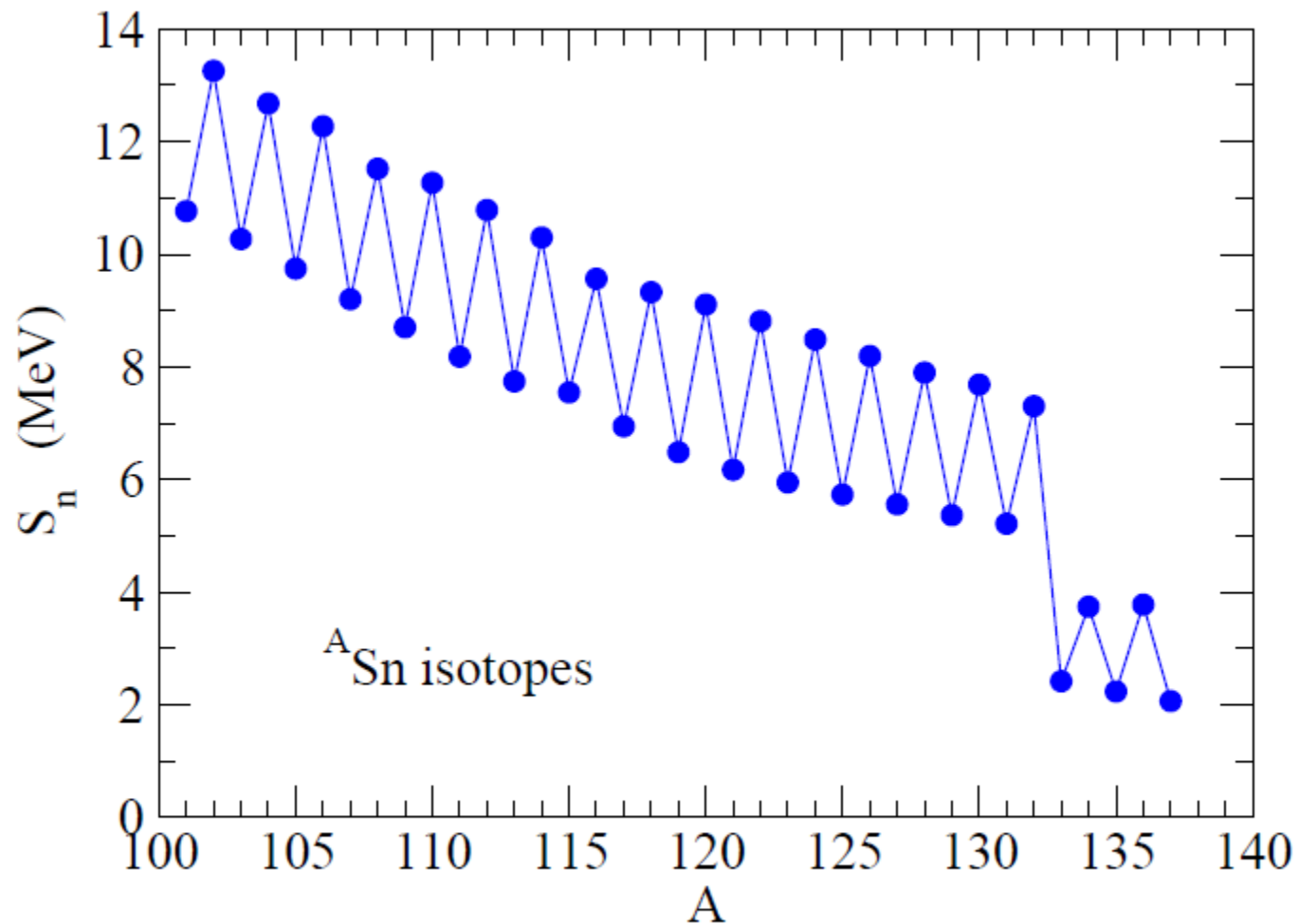
準位密度に濃淡があれば、下から数えて濃淡の終わりまで準位がつまると(図の1の場合)、均一の場合に比べてエネルギーが小さい

殻構造の帰結いろいろ

$N = 50$

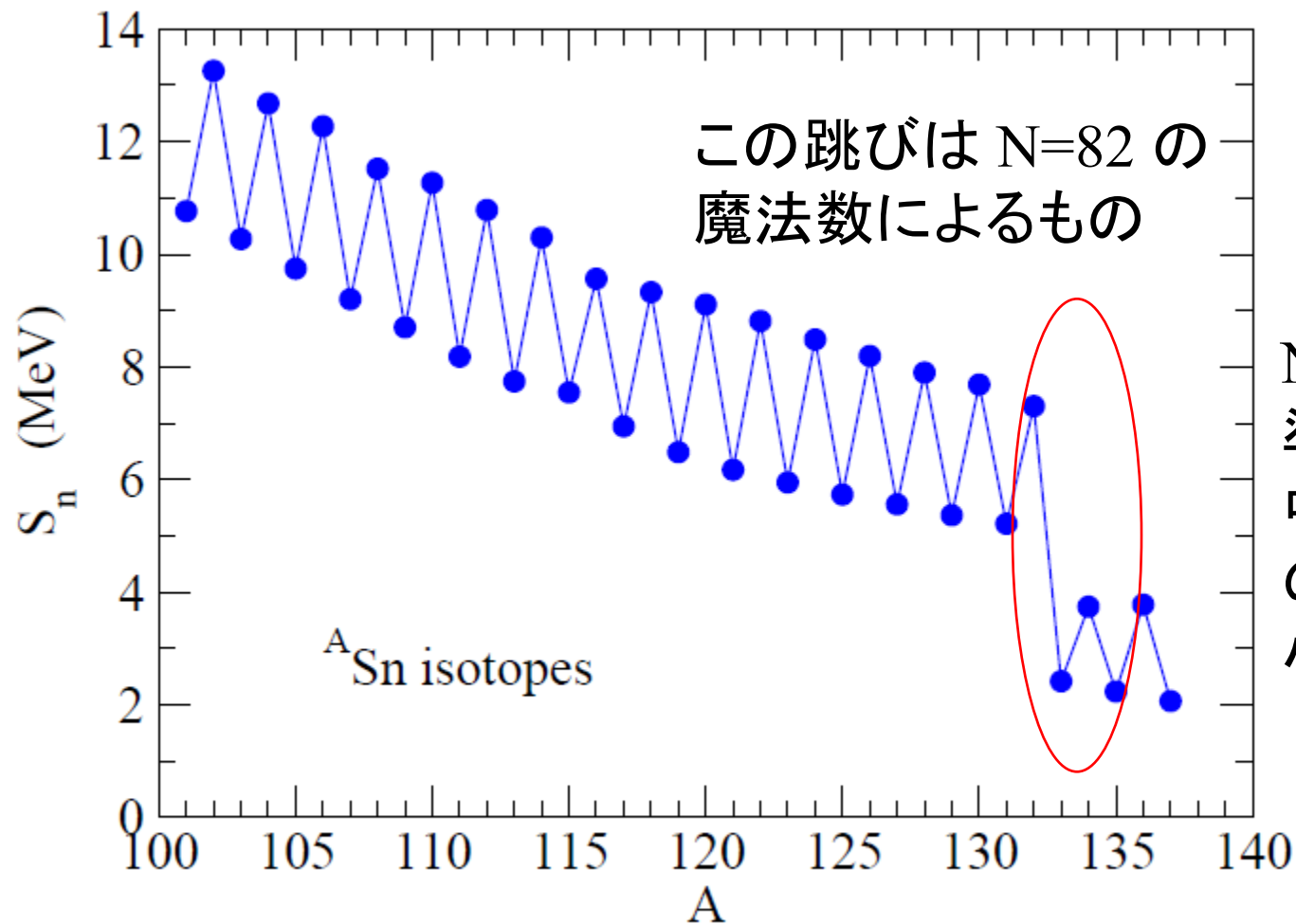


殻構造の帰結いろいろ



1n separation energy: $S_n(A, Z) = B(A, Z) - B(A-1, Z)$

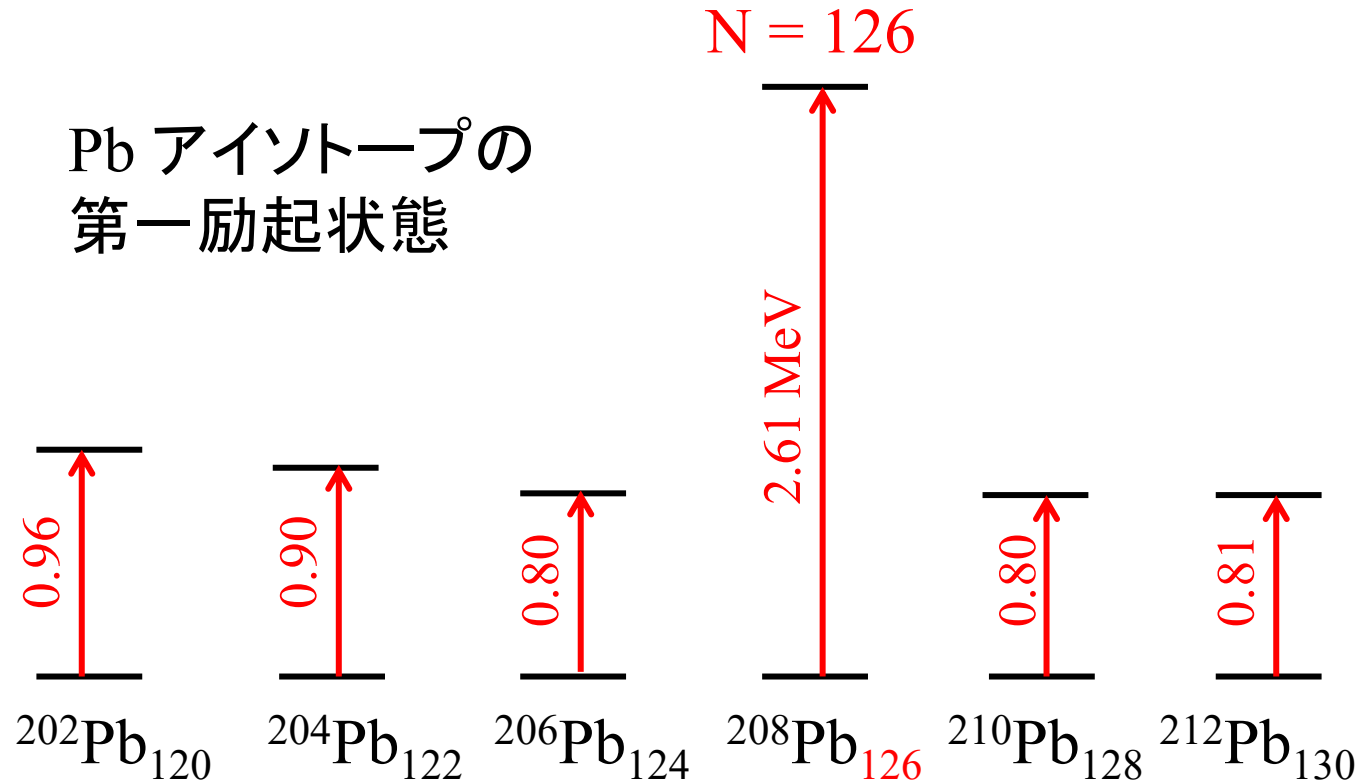
殻構造の帰結いろいろ



1n separation energy: $S_n(A, Z) = B(A, Z) - B(A-1, Z)$

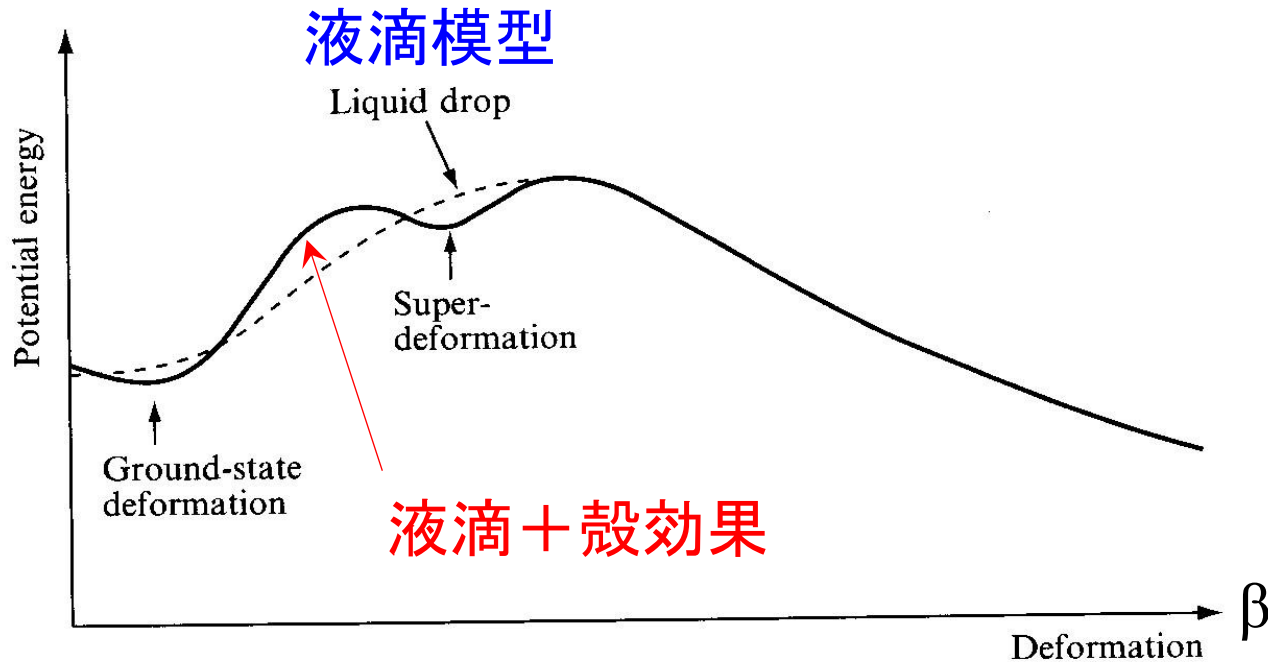
殻構造の帰結いろいろ

他の証拠：第一励起状態の励起エネルギー



殻構造の帰結いろいろ

原子核の変形



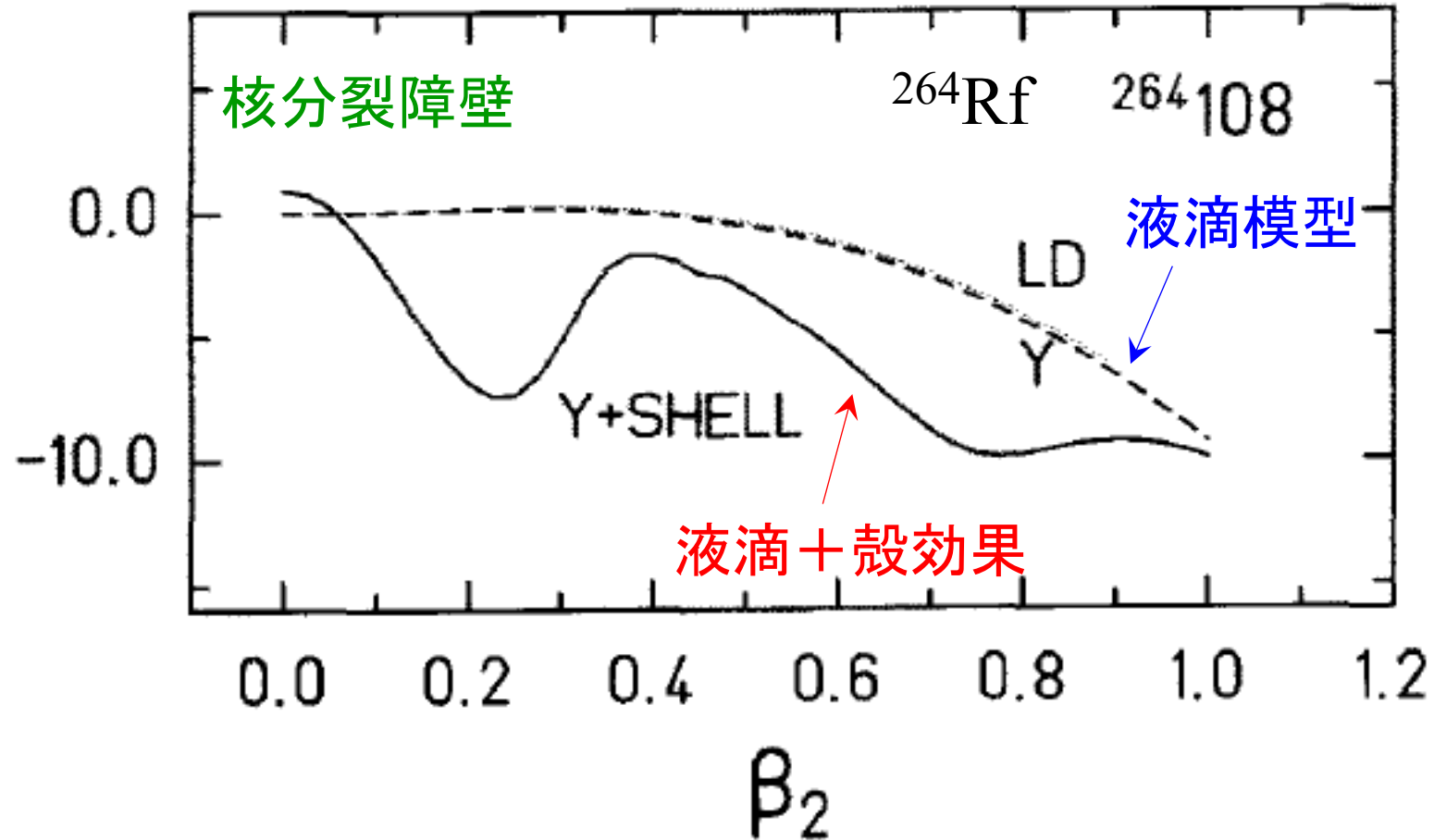
液滴模型 → 必ず球形

殻効果 → 変形状態が基底状態になる場合あり

* 後でもう少し詳しく解説します。

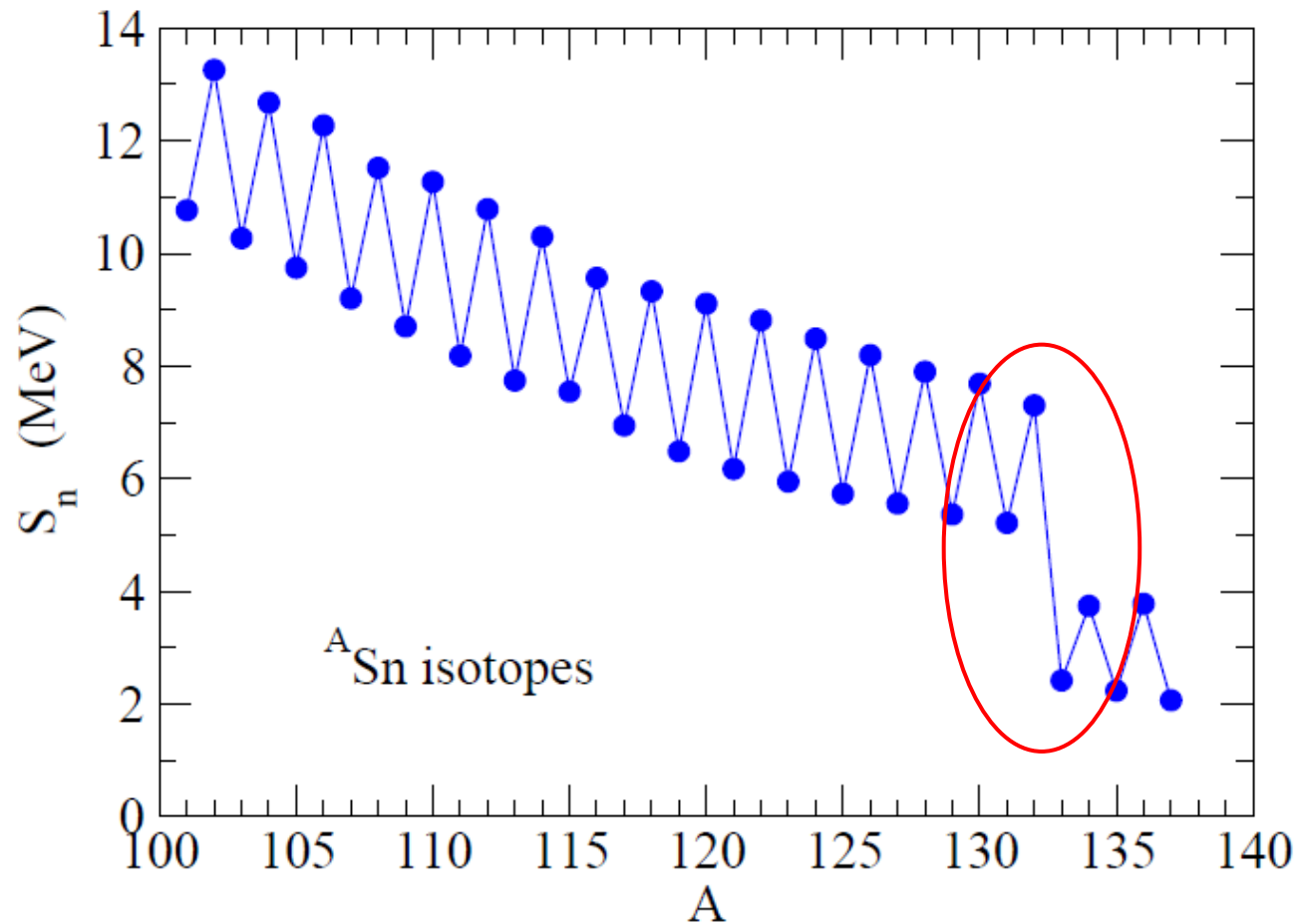
殻構造の帰結いろいろ

超重核の安定性



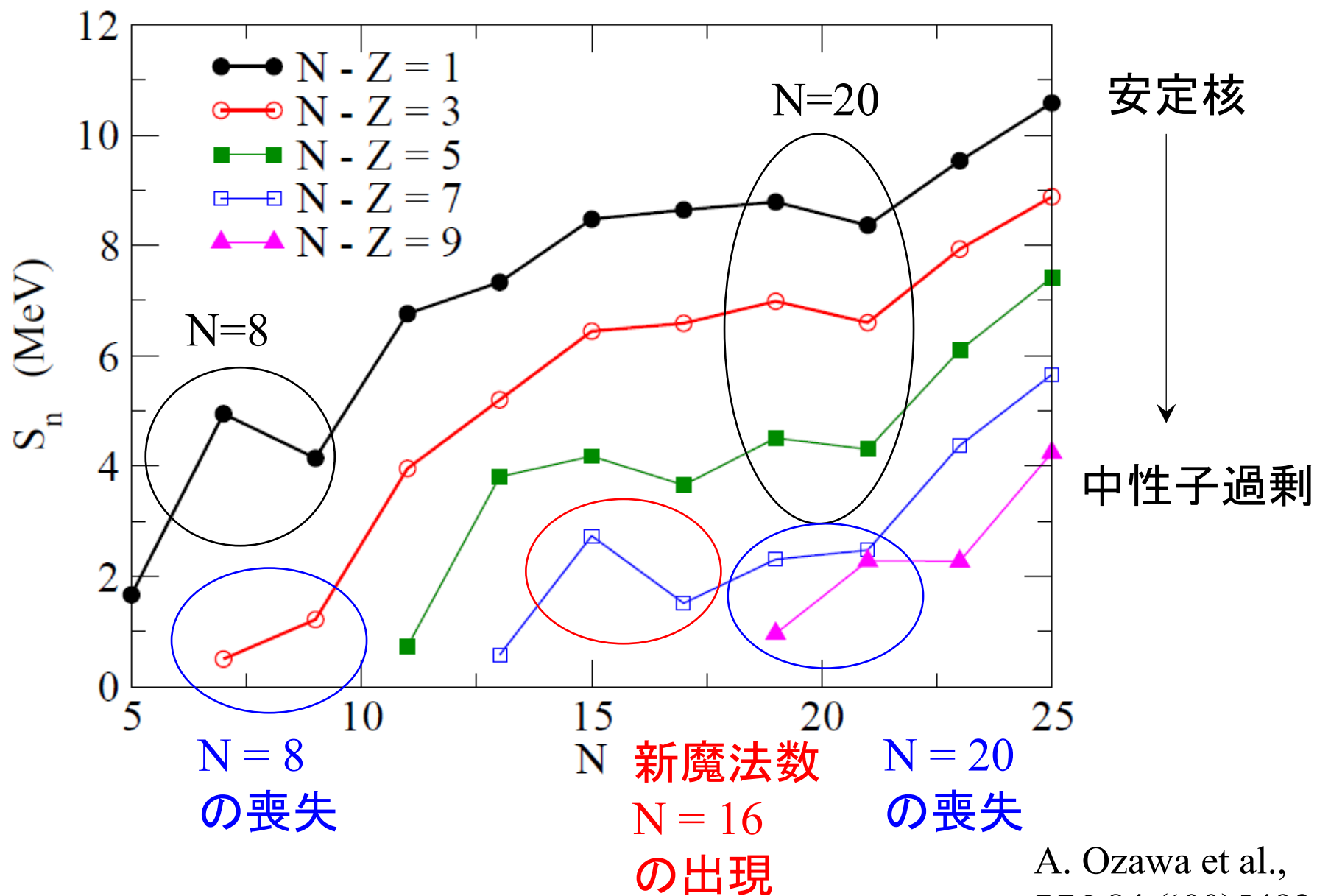
殻効果により核分裂障壁が高くなり原子核が安定化する

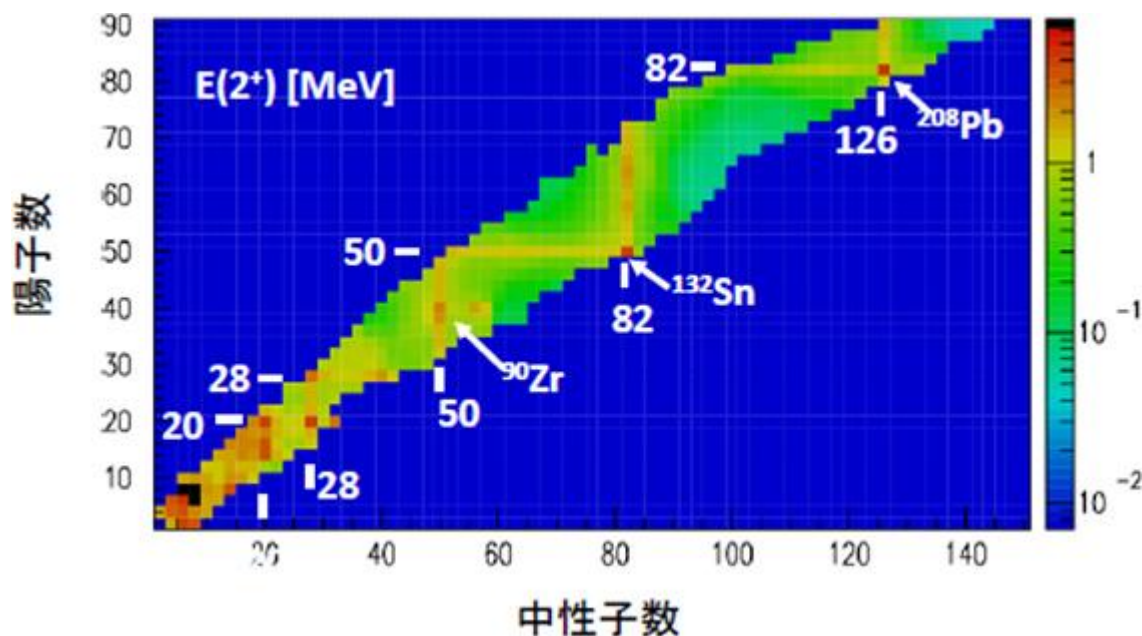
最近の話題: 変化する魔法数



魔法数のところで1中性子分離エネルギーが大きく減少

変化する魔法数





RIBF での実験の成果

魔法数 $N=20, 28$ の喪失
新魔法数 $N=34$ の出現
なども。

魔法数の変化はテンソル力
によるものと言われている



Nature, vol. 502 (2013)
新魔法数 $N=34$ の発見

テンソル力

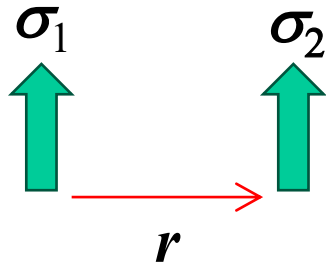
$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_2 \quad \text{を用いると}$$

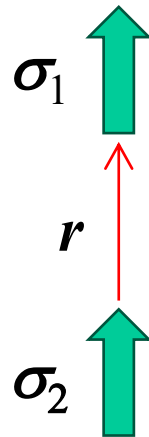
$$S_{12} = \frac{2}{\hbar^2} \left[\frac{3(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{r})^2}{r^2} - (\boldsymbol{S})^2 \right] \quad \text{と書き直すことができる。}$$

→ $S=0$ ではゼロになる

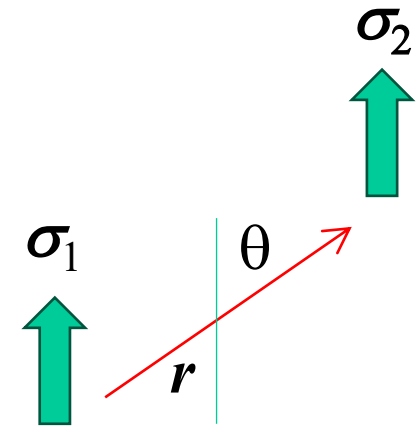
古典的には:



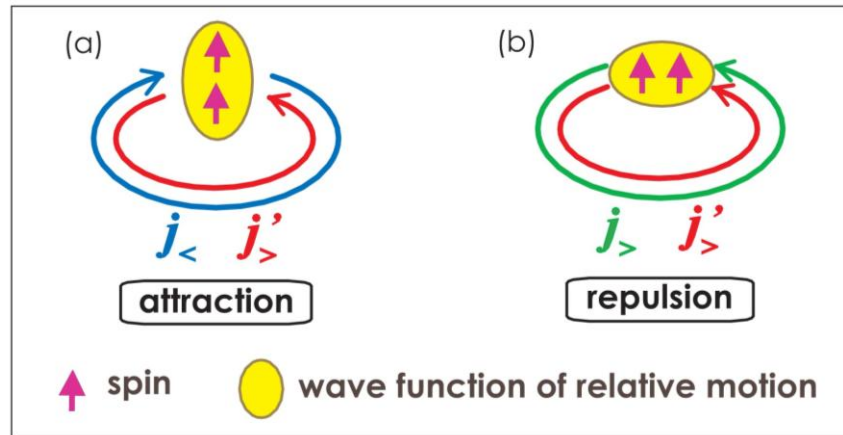
$$S_{12} = -1$$



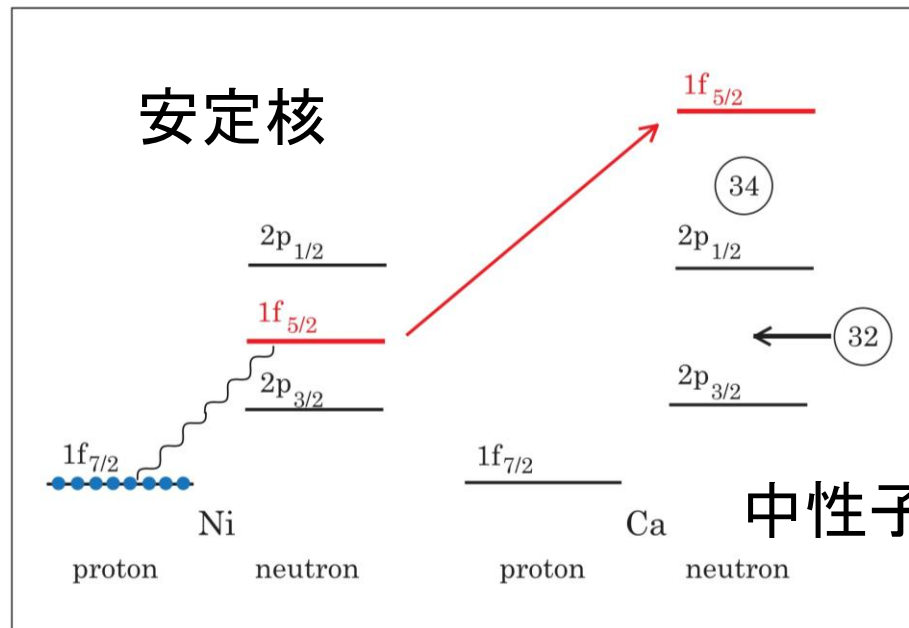
$$S_{12} = 2$$



$$S_{12} = 3\cos^2\theta - 1 \sim Y_{20}(\theta)$$



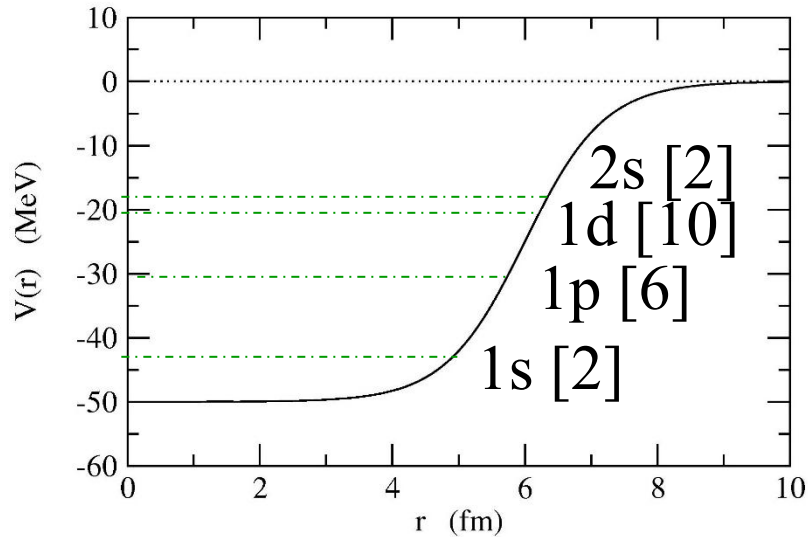
T. Otsuka et al., PRL95, 232502 (2005)



T. Otsuka et al., RMP92, 015002 (2020)

原子核の殻模型

Shell Model: independent particle motion in a potential well



+ spin-orbit interaction

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

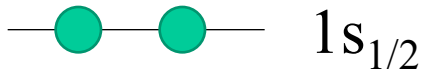
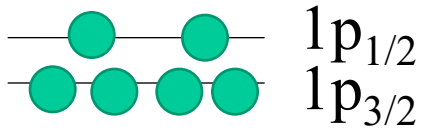
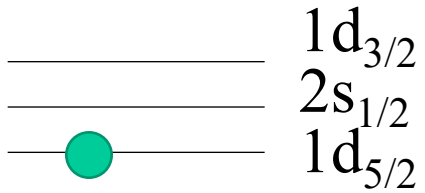
$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{m_l, m_s} \langle l \ m_l \ 1/2 \ m_s | j \ m \rangle Y_{lm_l}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{m_s}$$

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$

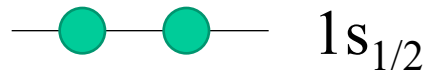
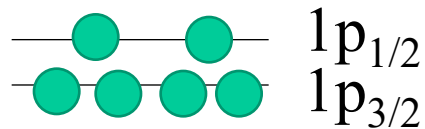
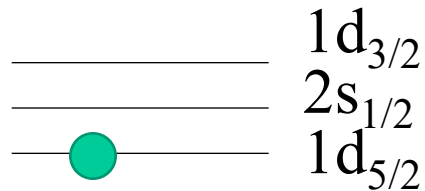
shell model

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$

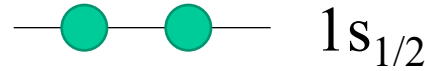
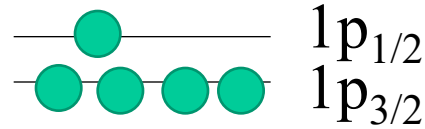
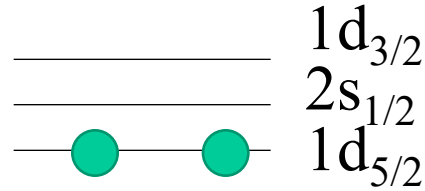


shell model

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$



configuration 1



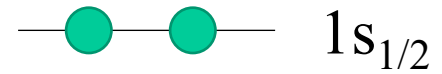
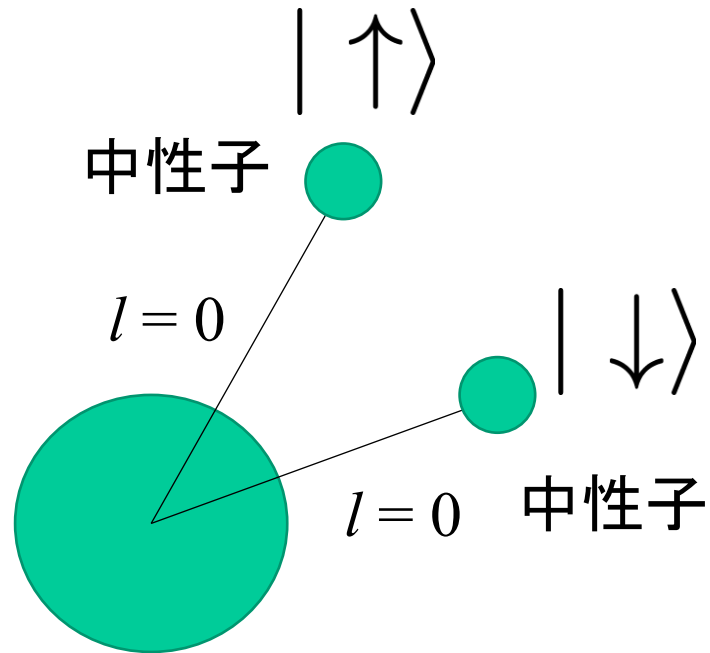
configuration 2

..... several
others

angular momentum (spin) and parity for each configuration?

—————> let us first investigate a single-j case

the first example: $j = s_{1/2}$



この系の全スピンは何か？