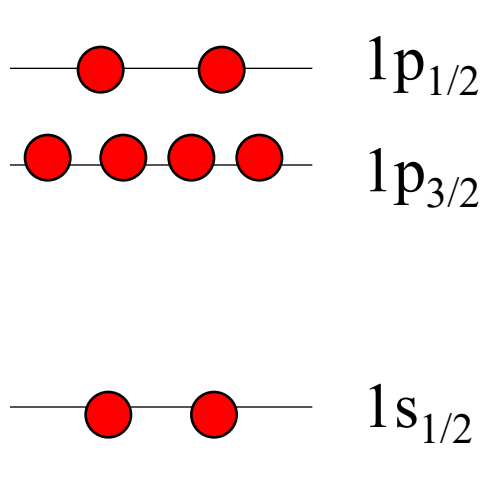
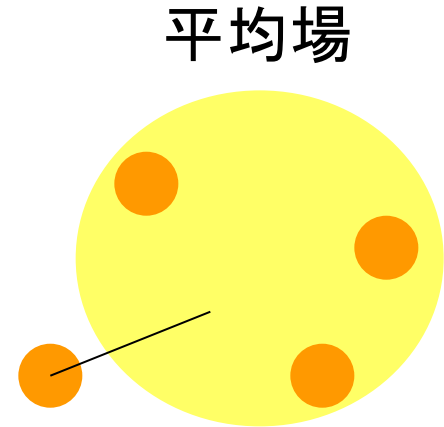
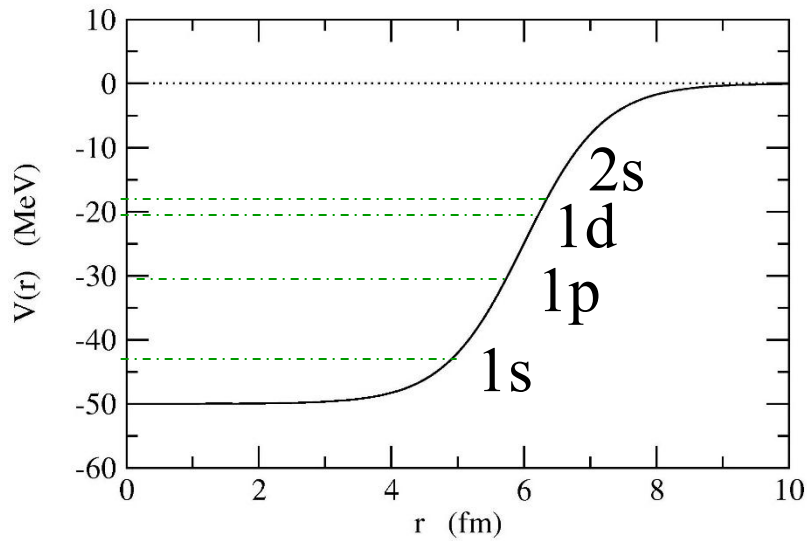


Mean-field (Hartree-Fock) Theory



shell model

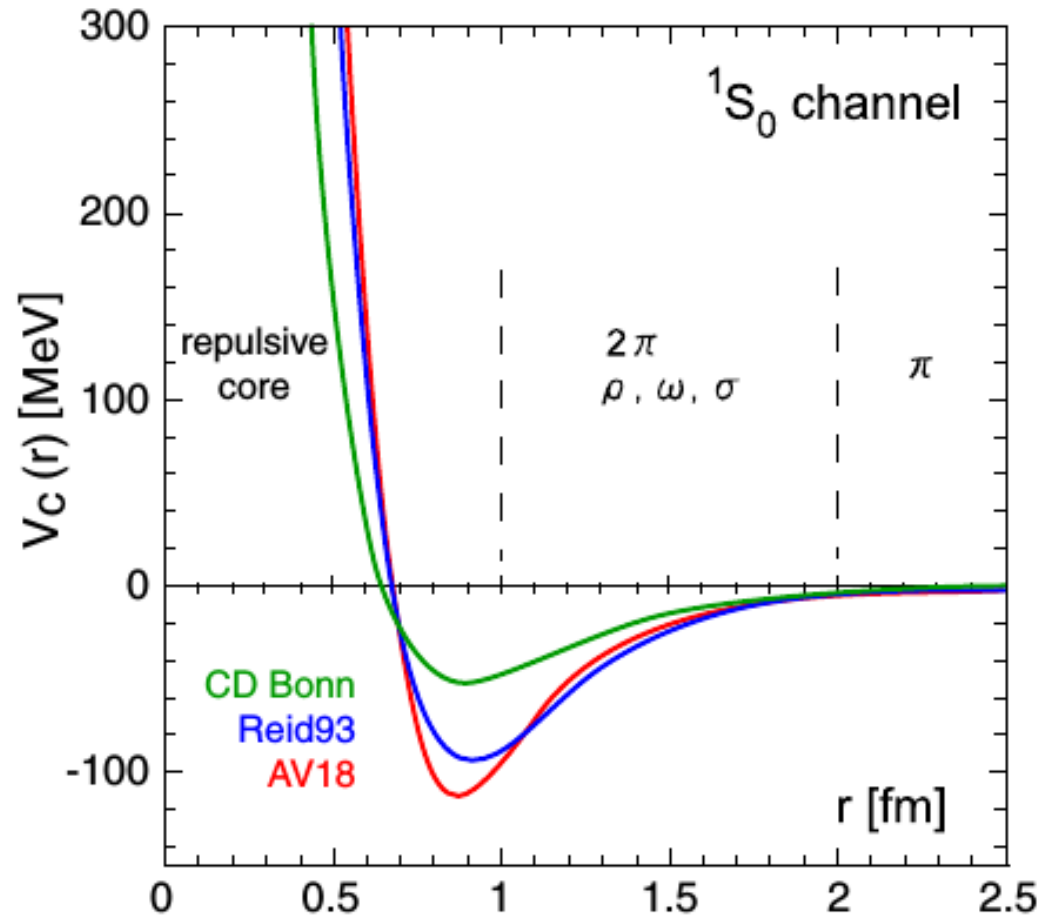
naively speaking,

$$V(\mathbf{r}) \sim \int v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

independent motion

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i |\psi_i(\mathbf{r})|^2$$

Bare nucleon-nucleon interaction



N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda,
PRL99, 022001 (2007)

Bruckner's G-matrix Nucleon-nucleon interaction *in medium*

Nucleon-nucleon interaction with a hard core

→ HF method: does not work

← Matrix elements: diverge

.....but the HF picture seems to work in nuclear systems

cf. magic numbers

Solution: a nucleon-nucleon interaction *in medium* (effective interaction) rather than a bare interaction



Bruckner's G-matrix

◆ Hard core

$$G = v + v \frac{Q_F}{E - H_0} G \quad \Longleftrightarrow \quad G = \frac{v}{1 - v \frac{Q_F}{E - H_0}}$$



Even if v tends to infinity, G may stay finite.

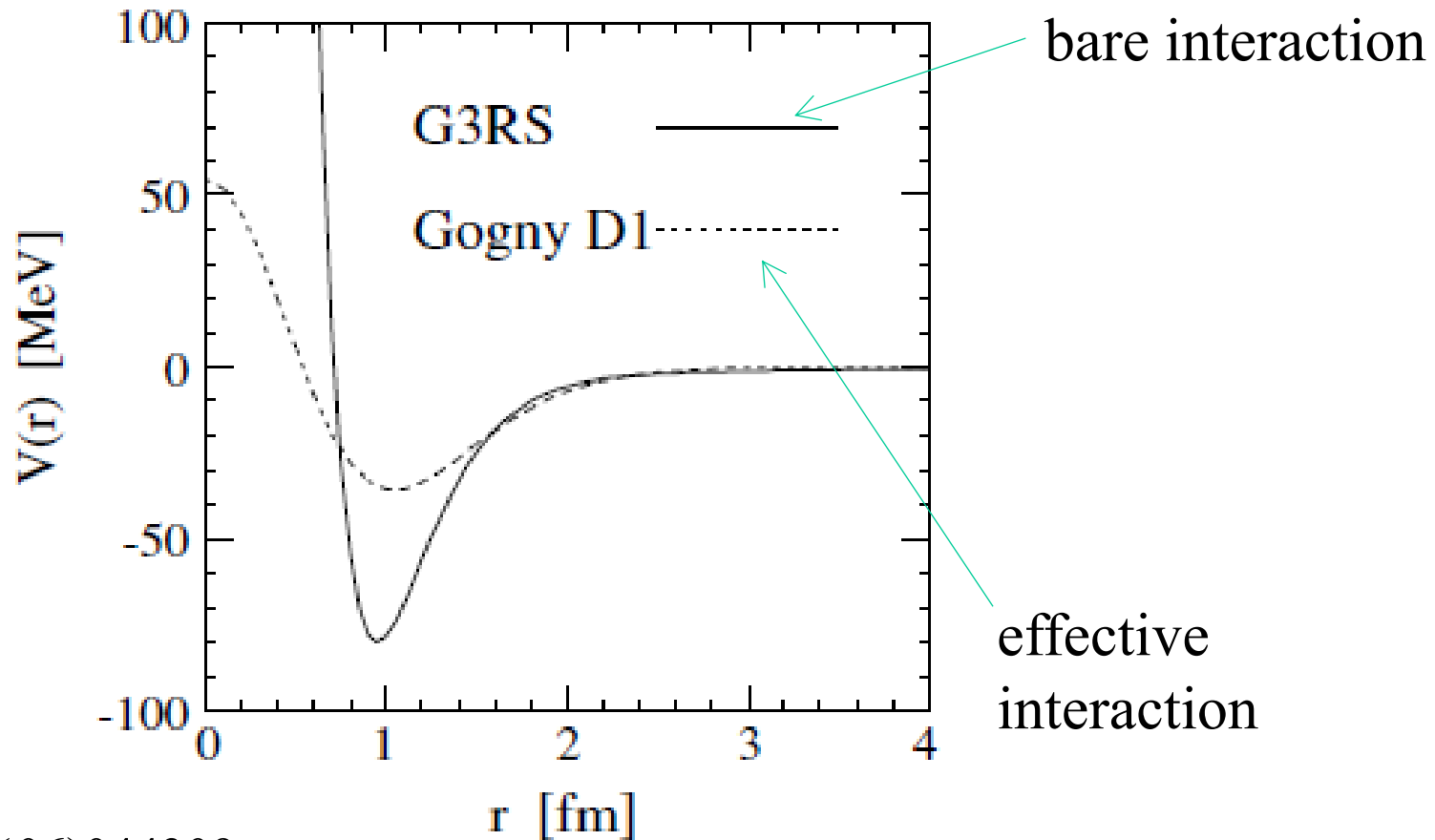


figure from
M. Matsuo,
Phys. Rev. C73('06)044309

Phenomenological effective interactions

G-matrix

- ab initio
- but, cumbersome to compute (especially for finite nuclei)
- qualitatively good, but quantitatively not successful



HF calculations with a phenomenological effective interaction

Philosophy: take the functional form of G , but determine the parameters phenomenologically

- Skyrme interaction (non-rel., zero range)
- Gogny interaction (non-rel., finite range)
- Relativistic mean-field model (relativistic, “meson exchanges”)

Skyrme interaction density dependent zero-range interaction

$$\begin{aligned}v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & t_0(1 + x_0\hat{P}_\sigma)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\& + \frac{1}{2}t_1(1 + x_1\hat{P}_\sigma)(\mathbf{k}^2\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{k}^2) \\& + t_2(1 + x_2\hat{P}_\sigma)\mathbf{k}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{k} \\& + \frac{1}{6}t_3(1 + x_3\hat{P}_\sigma)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho^\alpha((\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2) \\& + iW_0(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{k} \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{k}\end{aligned}$$

if $x_i=0, t_1=t_2=0$:

$$\mathbf{k} = (\nabla_1 - \nabla_2)/2i$$

$$v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underbrace{t_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}_{\text{short-range attraction}} + \underbrace{\frac{1}{6}t_3\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho^\alpha(\mathbf{r})}_{\text{repulsion to avoid collapse}}$$

$$+ \underbrace{iW_0(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{k} \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{k}}_{\text{spin-orbit interaction}}$$

spin-orbit interaction

Skyrme interaction density dependent zero-range interaction

$$\begin{aligned} v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & t_0(1 + x_0 \hat{P}_\sigma) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ & + \frac{1}{2} t_1(1 + x_1 \hat{P}_\sigma) (\mathbf{k}^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{k}^2) \\ & + t_2(1 + x_2 \hat{P}_\sigma) \mathbf{k} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{k} \\ & + \frac{1}{6} t_3(1 + x_3 \hat{P}_\sigma) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho^\alpha((\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2) \\ & + iW_0(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{k} \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{k} = (\nabla_1 - \nabla_2)/2i$$

(note) finite range effect $\longleftrightarrow$ momentum dependence

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} | V | \mathbf{p}' \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}/\hbar} V(\mathbf{r}) \\ &\sim V_0 + V_1(\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2) + V_2 \mathbf{p} \mathbf{p}' + \dots \\ &\rightarrow V_0 \delta(\mathbf{r}) + V_1(\hat{\mathbf{p}}^2 \delta(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}^2) + V_2 \hat{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

Skyrme interaction density dependent zero-range interaction

$$\begin{aligned} v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & t_0(1 + x_0 \hat{P}_\sigma) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ & + \frac{1}{2} t_1(1 + x_1 \hat{P}_\sigma) (\mathbf{k}^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{k}^2) \\ & + t_2(1 + x_2 \hat{P}_\sigma) \mathbf{k} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{k} \\ & + \frac{1}{6} t_3(1 + x_3 \hat{P}_\sigma) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho^\alpha((\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2) \\ & + i W_0 (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{k} \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{k} = (\nabla_1 - \nabla_2)/2i$$

the exchange potential $\rightarrow$ local

$$\begin{aligned} 0 = & \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \int v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\sum_j |\psi_j(\mathbf{r}')|^2 \right) d\mathbf{r}' - \epsilon_i \right] \psi_i(\mathbf{r}) \\ & - \int v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\sum_j \psi_j^*(\mathbf{r}') \psi_i(\mathbf{r}') \right) d\mathbf{r}' \psi_j(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Skyrme interactions: 10 adjustable parameters

$$\begin{aligned}v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= t_0(1 + x_0\hat{P}_\sigma)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\&\quad + \frac{1}{2}t_1(1 + x_1\hat{P}_\sigma)(\mathbf{k}^2\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{k}^2) \\&\quad + t_2(1 + x_2\hat{P}_\sigma)\mathbf{k}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{k} \\&\quad + \frac{1}{6}t_3(1 + x_3\hat{P}_\sigma)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho^\alpha((\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2) \\&\quad + iW_0(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{k} \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{k}\end{aligned}$$

A fitting strategy:

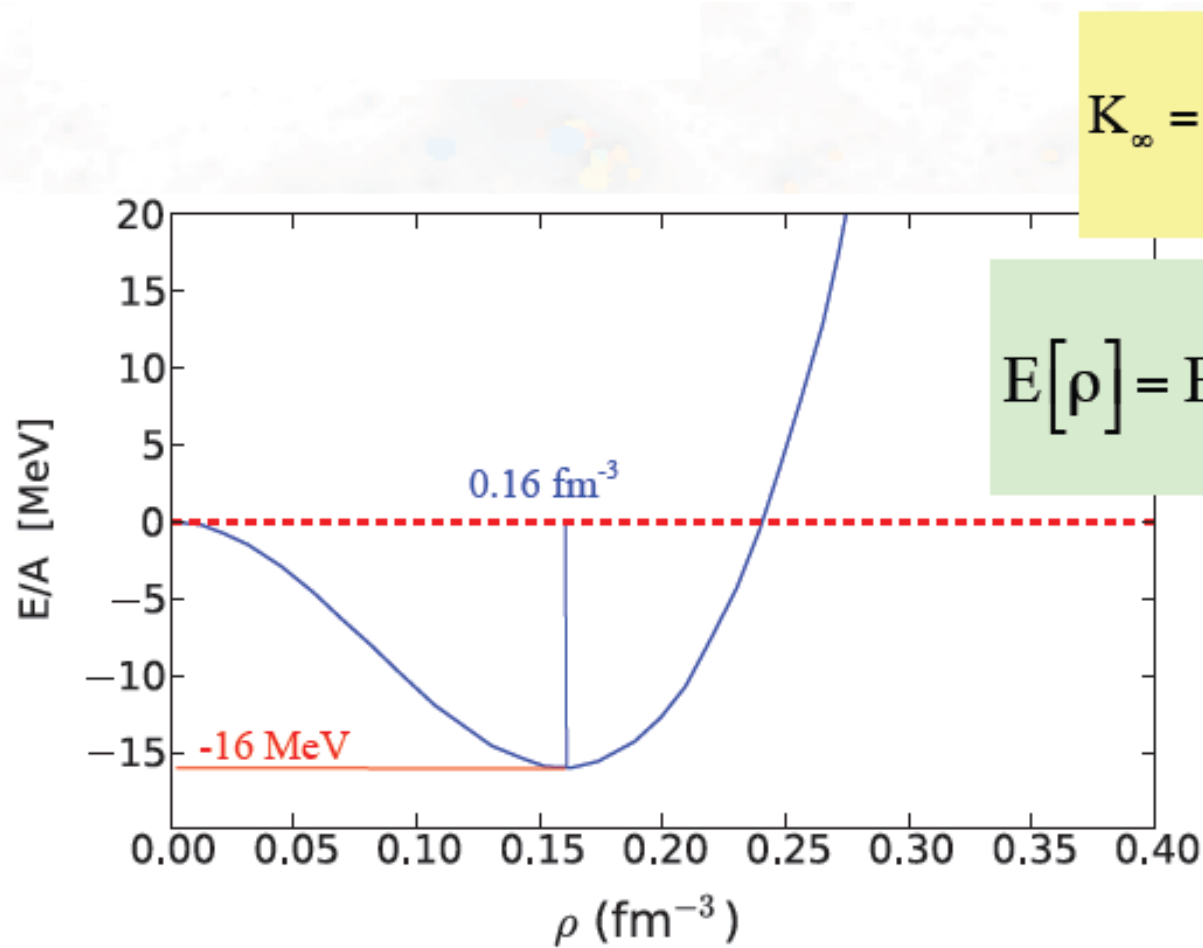
B.E. and r_{rms} : ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca , ^{56}Ni , ^{90}Zr , ^{208}Pb ,.....

Infinite nuclear matter: E/A , ρ_{eq} ,.....

Parameter sets:

SIII, SkM*, SGII, SLy4,.....

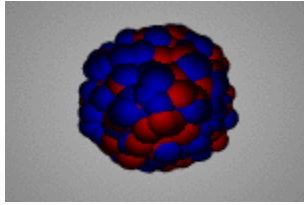
EOS of infinite nuclear matter



$$K_{\infty} = 9\rho^2 \left. \frac{d^2[E(\rho)/\rho]}{d\rho^2} \right|_{\rho_0}$$

$$E[\rho] = E[\rho_0] + \frac{1}{18} K_{\infty} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2$$

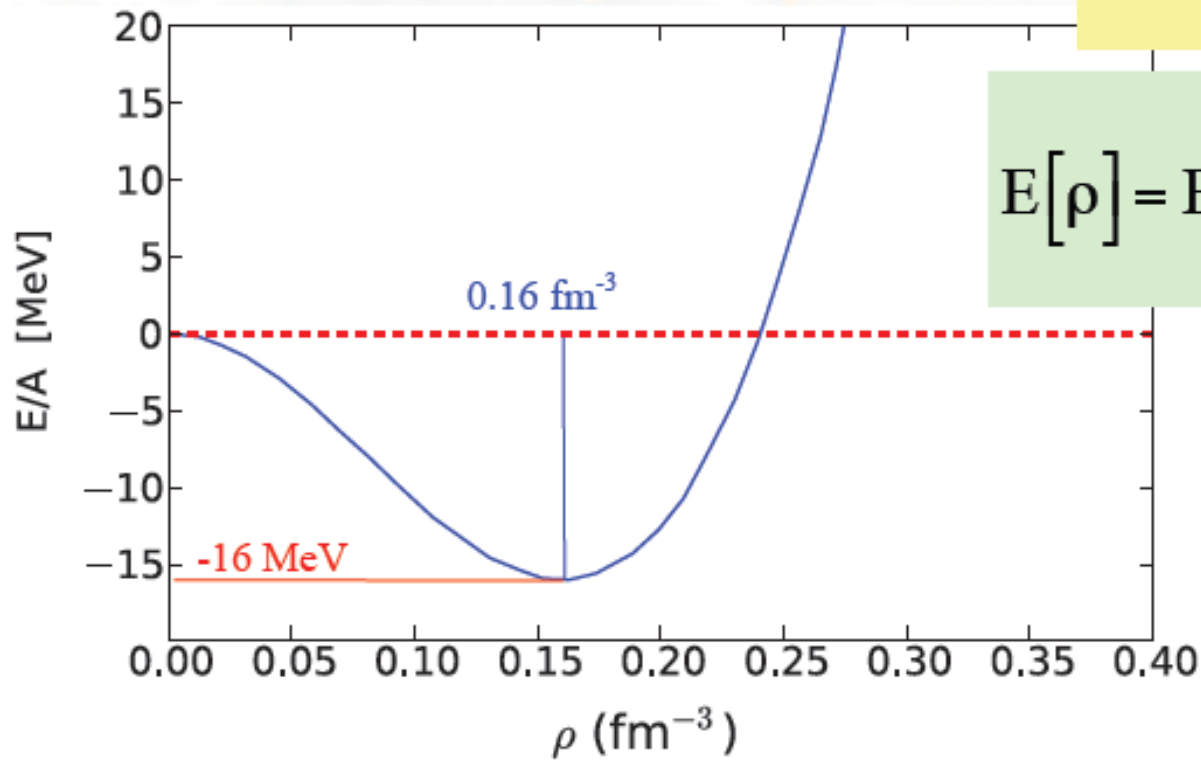
EOS of infinite nuclear matter



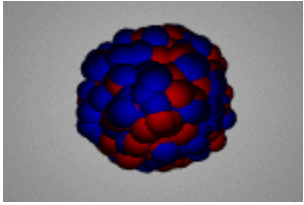
原子核がどのくらい硬いのか

$$K_{\infty} = 9\rho^2 \left. \frac{d^2[E(\rho)/\rho]}{d\rho^2} \right|_{\rho_0}$$

$$E[\rho] = E[\rho_0] + \frac{1}{18} K_{\infty} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2$$



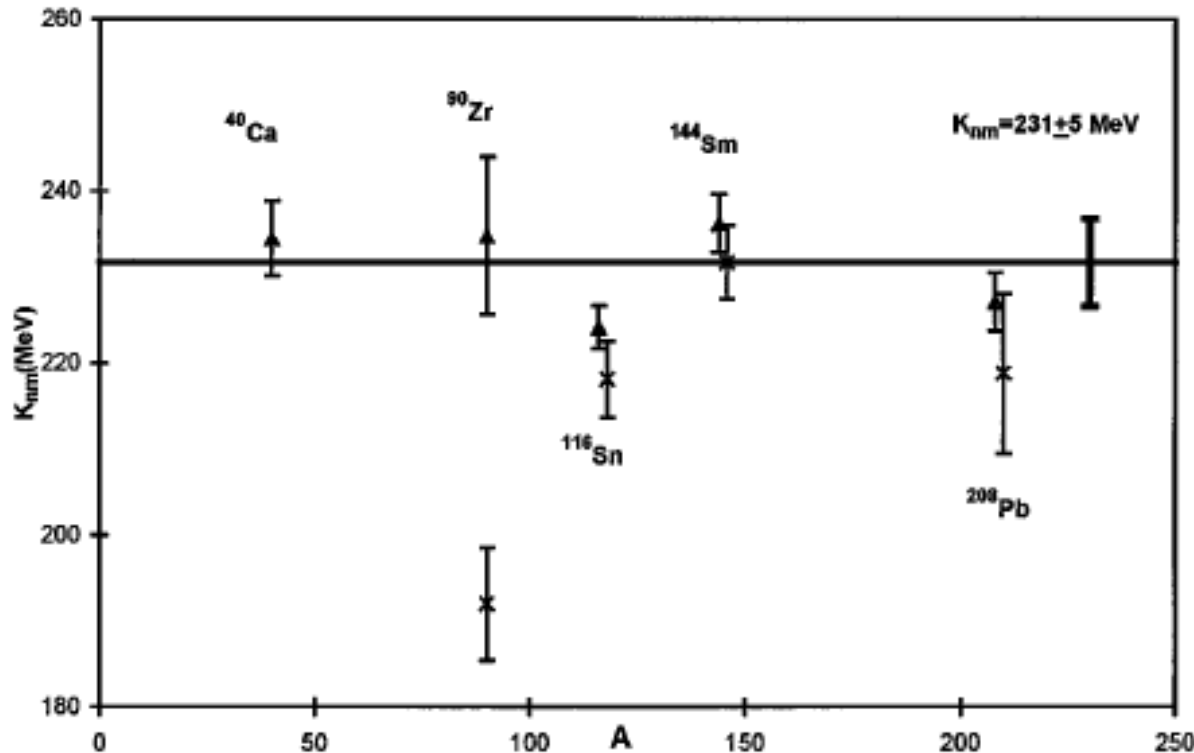
cf. 中性子星の大きさ
や重さ(MR曲線)



Isoscalar giant monopole resonances (breathing mode)

$$E_{\text{ISGMR}} \sim \sqrt{\frac{\hbar^2 K}{m \langle r^2 \rangle}}$$

J.P. Blaizot,
Phys. Rep. 64 ('80) 171



$K \sim 231 \pm 5 \text{ MeV}$

D.H. Youngblood, H.L. Clark, and Y.-W. Lui, PRL82 ('99) 691

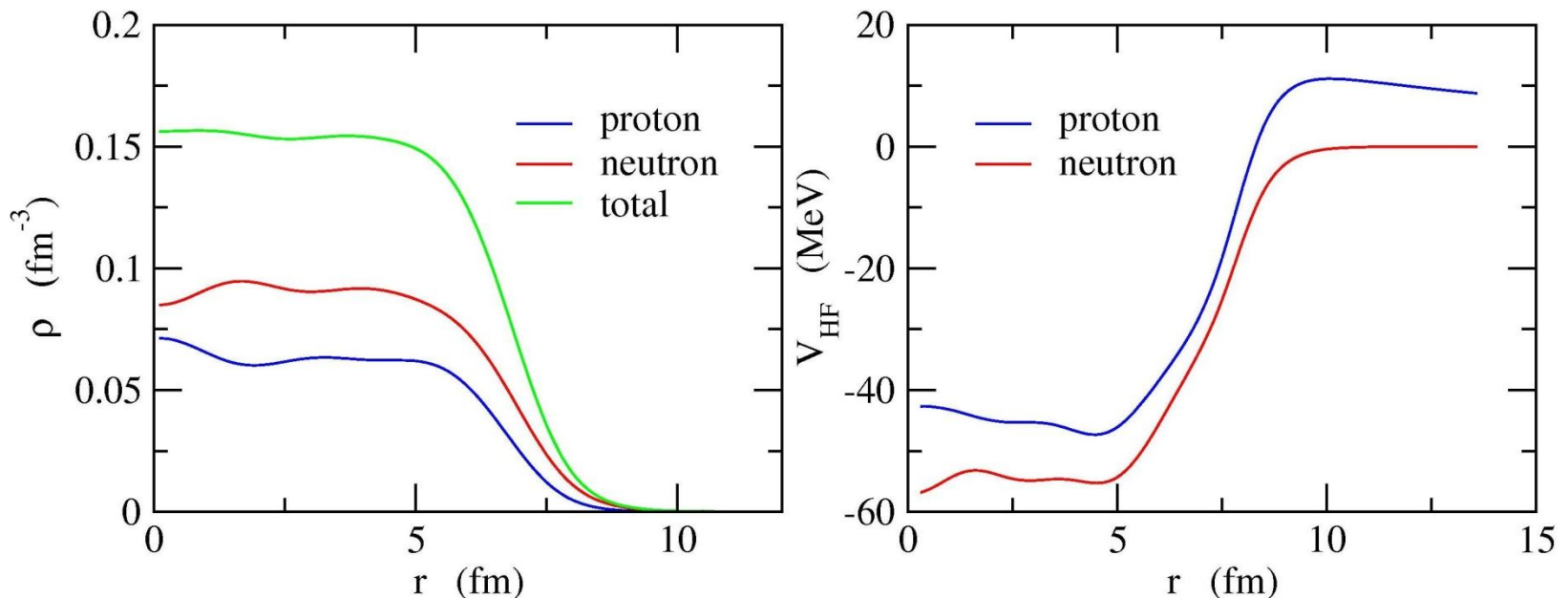
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_i(\mathbf{r}) + \int v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_{\text{HF}}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \psi_i(\mathbf{r}) - \int \rho_{\text{HF}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \epsilon_i \psi_i(\mathbf{r})$$

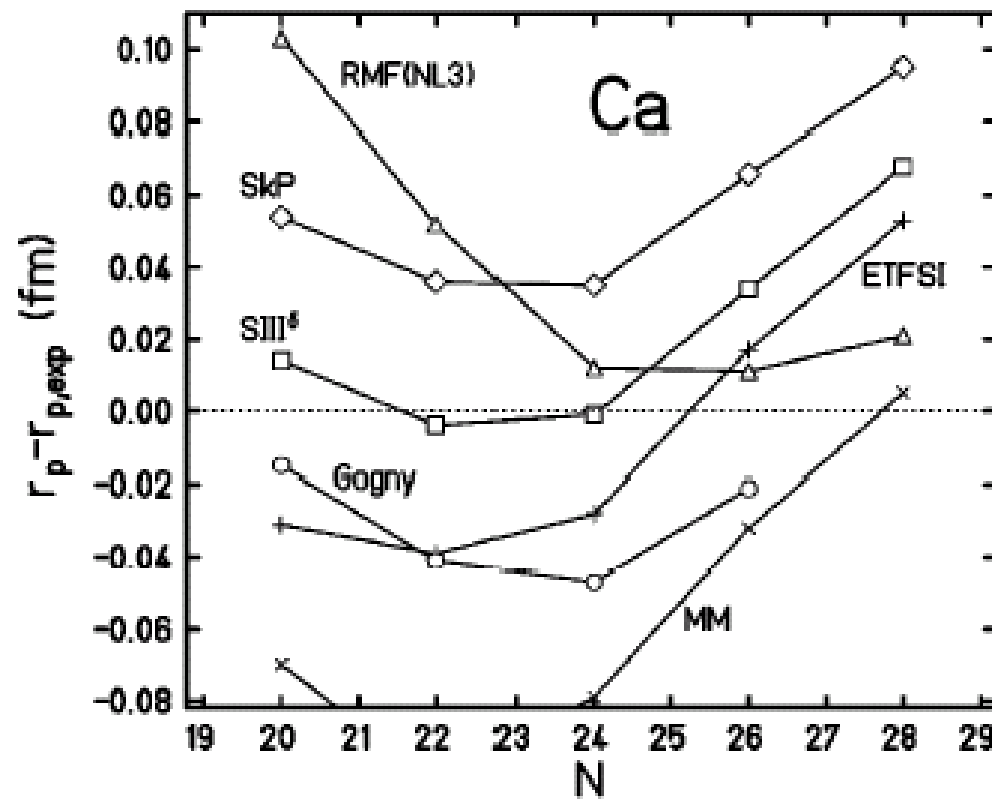
Iteration

V_{HF} : depends on ψ_i $\longleftarrow$ non-linear problem

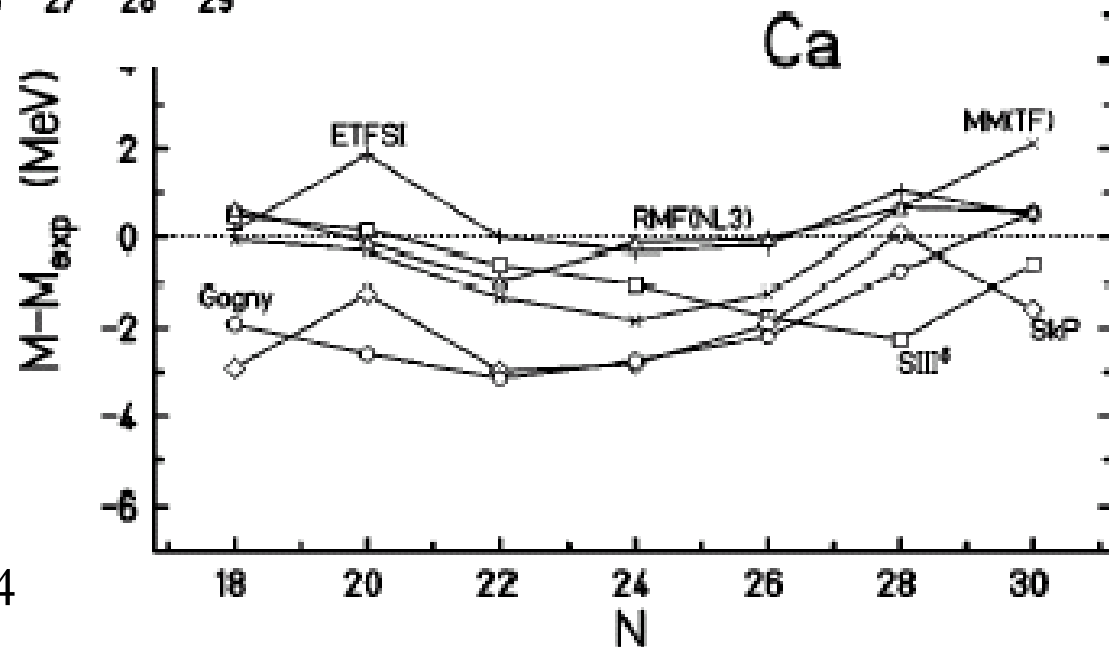
Iteration: $\{\psi_i\} \rightarrow \rho_{\text{HF}} \rightarrow V_{\text{HF}} \rightarrow \{\psi_i\} \rightarrow \dots$

^{208}Pb (Skyrme Hartree-Fock with SKM^{*})



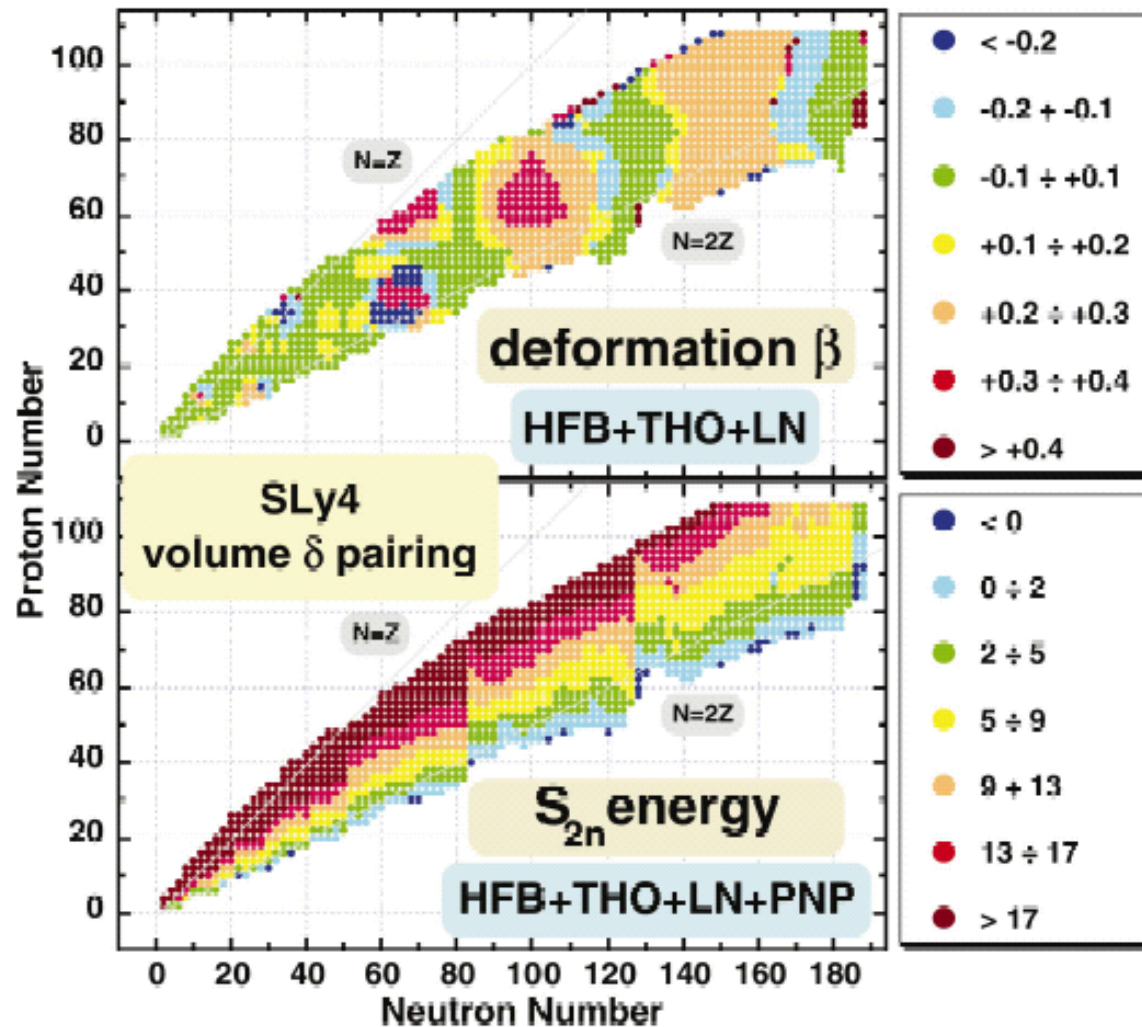


Examples of HF calculations
for masses and radii



Z. Patyk et al.,
PRC59('99)704

deformation and two-neutron separation energy

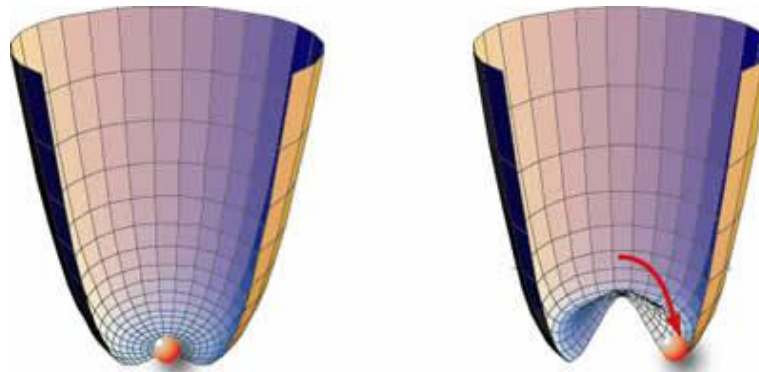


Mean-field approximation and deformation

平均場近似 = 2体場 → 1体場に近似

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \\ &= \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{MF}}(\mathbf{r}_i) \right) + \cancel{\frac{1}{2} \sum_{i,j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)} - \cancel{\sum_i V_{\text{MF}}(\mathbf{r}_i)} \end{aligned}$$

→ Ψ_{MF} : ハミルトニアン H が持っている対称性を持たなくてもいい
“対称性の自発的破れ”



Ψ_{MF} : ハミルトニアン H が持っている対称性を持たなくてもいい

典型的な例

➤ 並進対称性: 原子核の平均場近似(DFT)では常に破れる

$$H = - \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A v(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \rightarrow \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \underline{\underline{V_{\text{MF}}(\mathbf{r}_i)}} \right)$$

Ψ_{MF} : ハミルトニアン H が持っている対称性を持たなくてもいい

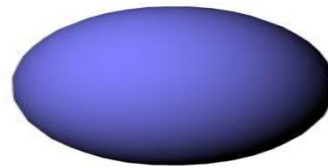
典型的な例

➤ 並進対称性: 原子核の平均場近似(DFT)では常に破れる

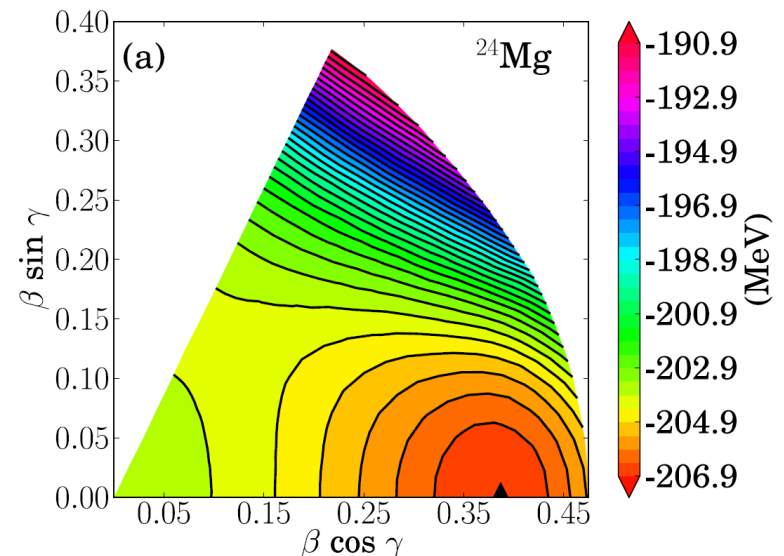
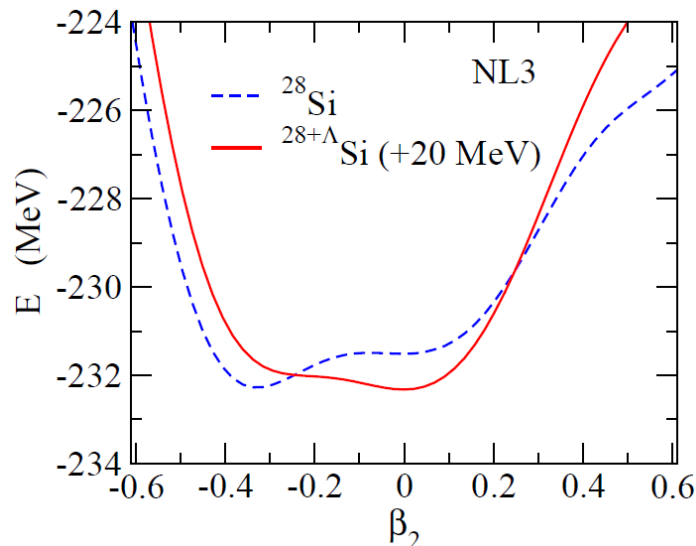
$$H = - \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \rightarrow \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \underline{V_{\text{MF}}(\mathbf{r}_i)} \right)$$

➤ 回転対称性

変形した基底状態

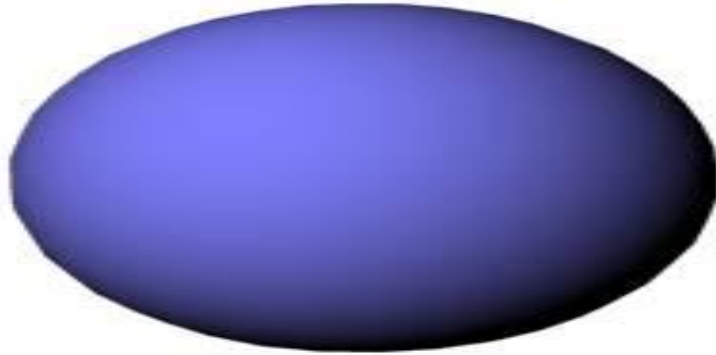


$\rightarrow V(r, \theta)$



Nuclear Deformation

実験的な証拠



Nuclear Deformation

Excitation spectra of ^{154}Sm

(MeV)

0.903 ————— 8^+

0.544 ————— 6^+

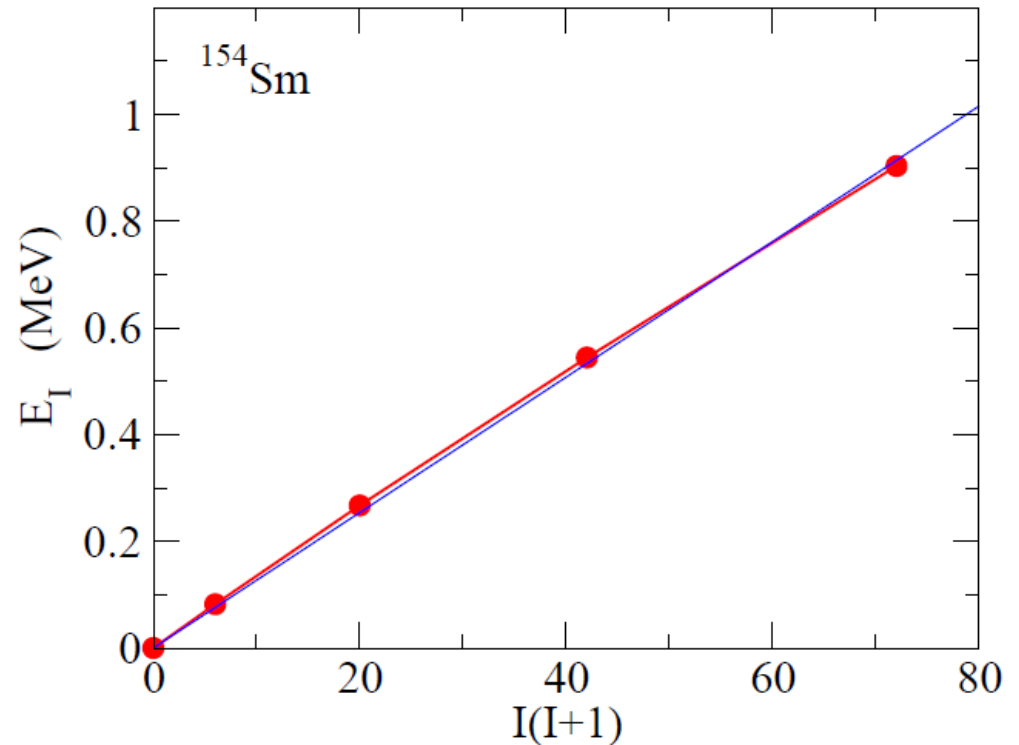
0.267 ————— 4^+

0.082 ————— 2^+

0 ————— 0^+

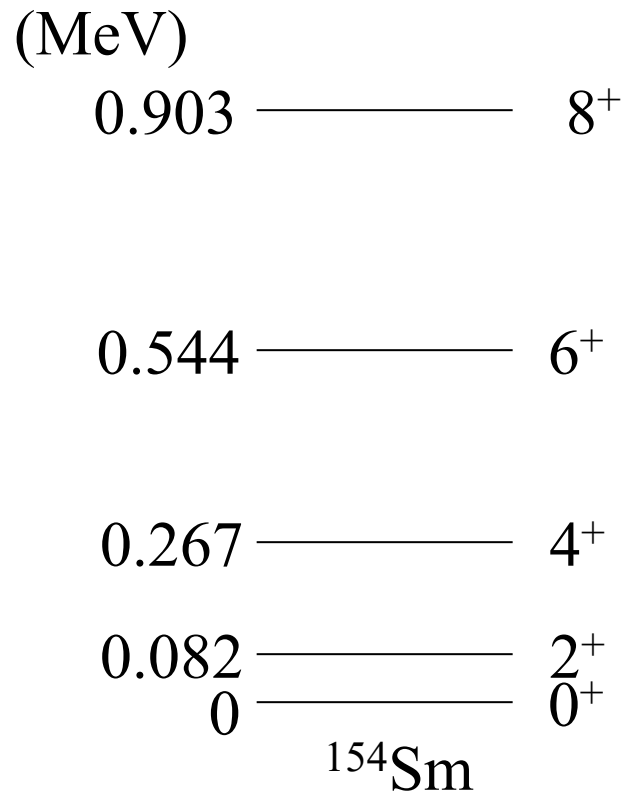
^{154}Sm

$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$



Nuclear Deformation

Excitation spectra of ^{154}Sm

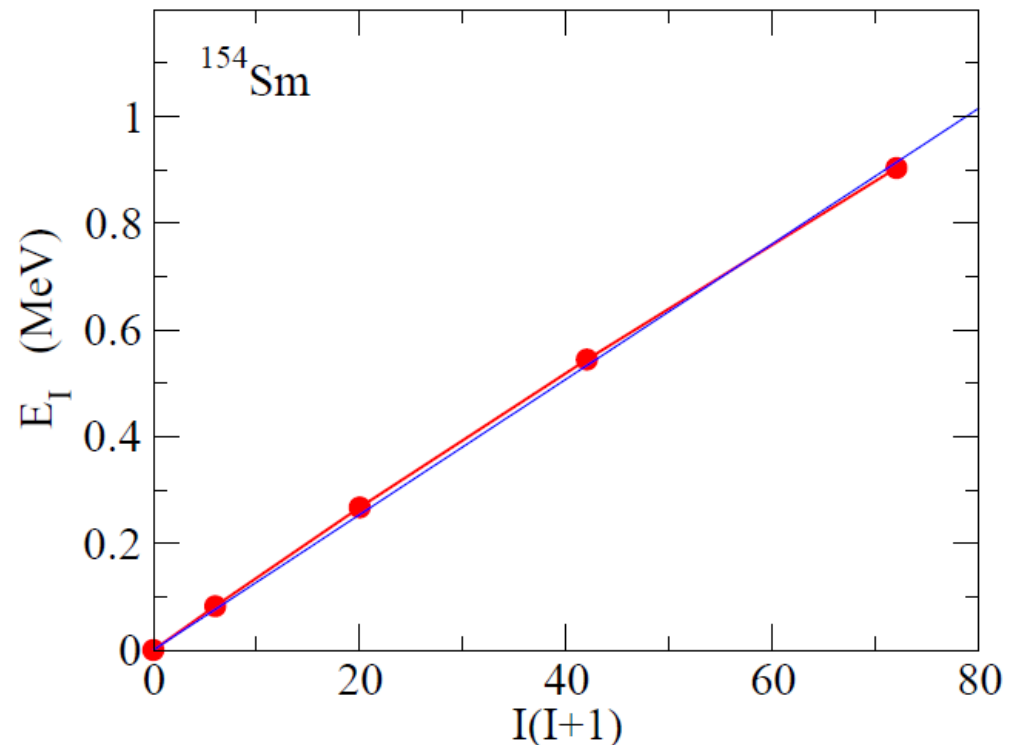


$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

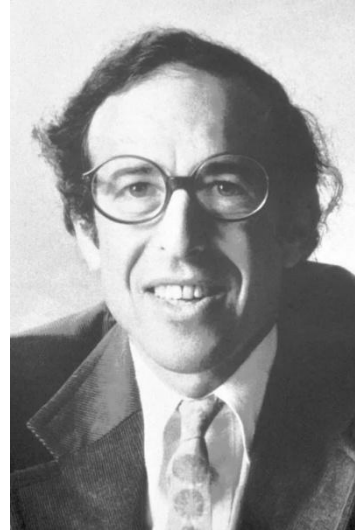
cf. a classical rigid rotor

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J}\omega, \omega = \dot{\theta})$$



1975年ノーベル物理学賞



J. レインウォーター、
A. ボーア、
B. モッテルソン

変形した原子核の研究
(1950年代)

レインウォーター (1950):

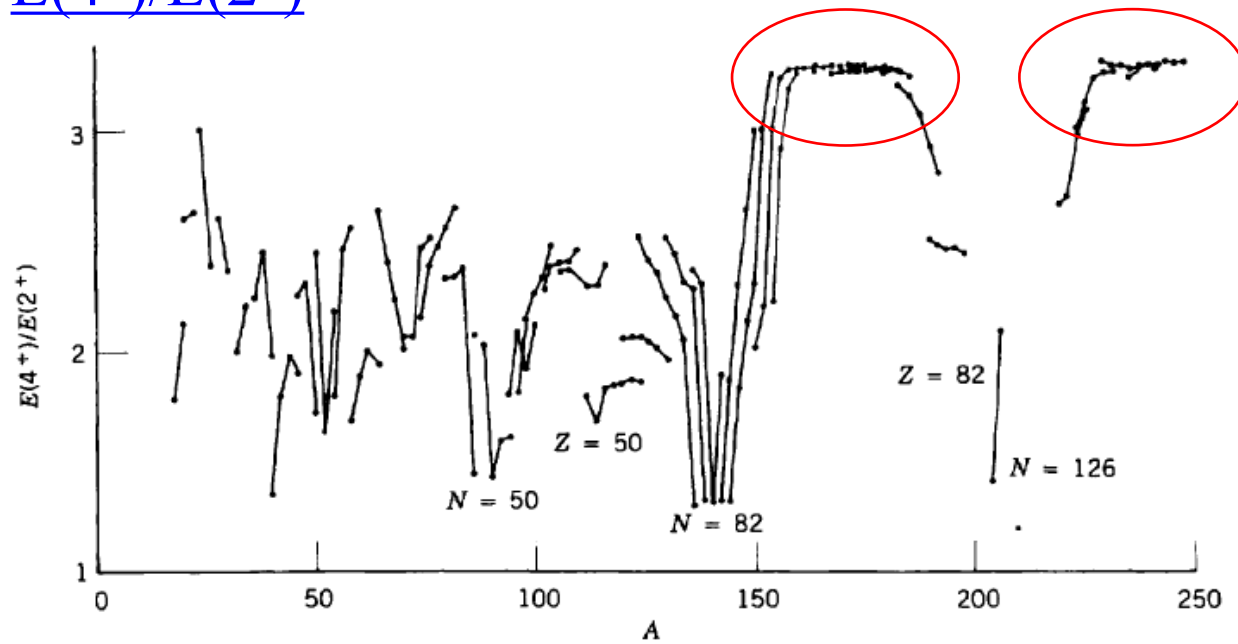
$^{175}_{71}\text{Lu}$ などでみられる大きな四重極モーメントは原子核全体
が変形していることを意味する

どれだけ球形に近いのかを測る量

ボーア、モッテルソン (1952):

原子核が変形すると回転運動がみられるはず

$$E(4^+)/E(2^+)$$

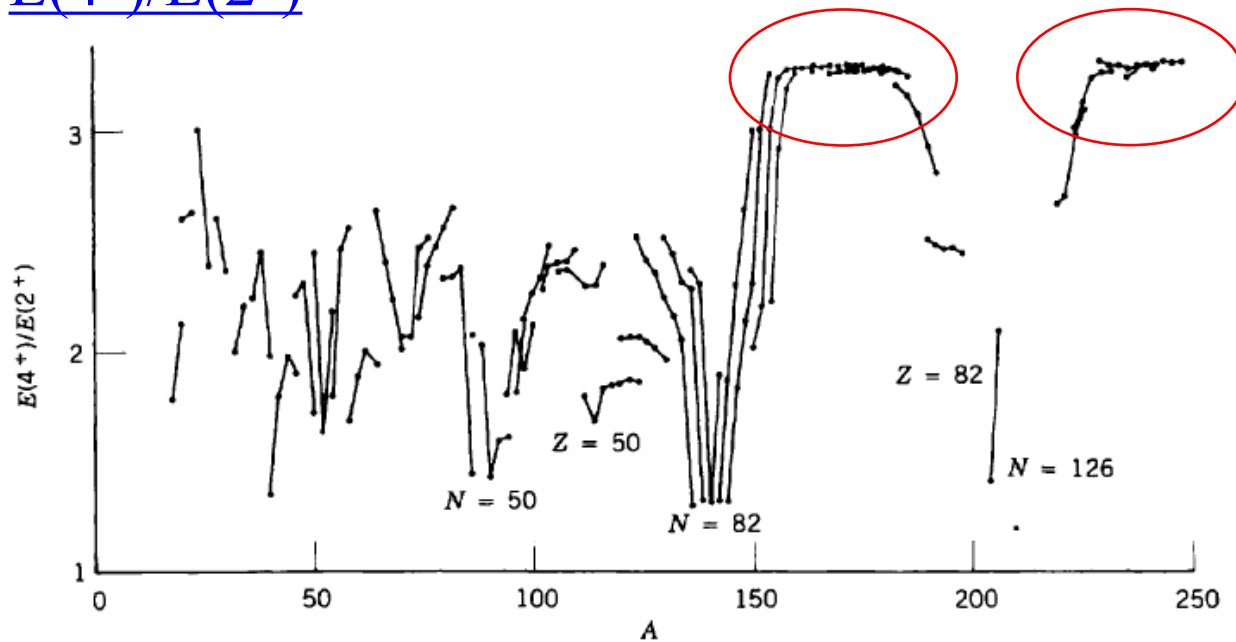


deformed nuclei:
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

spherical nuclei:
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics"

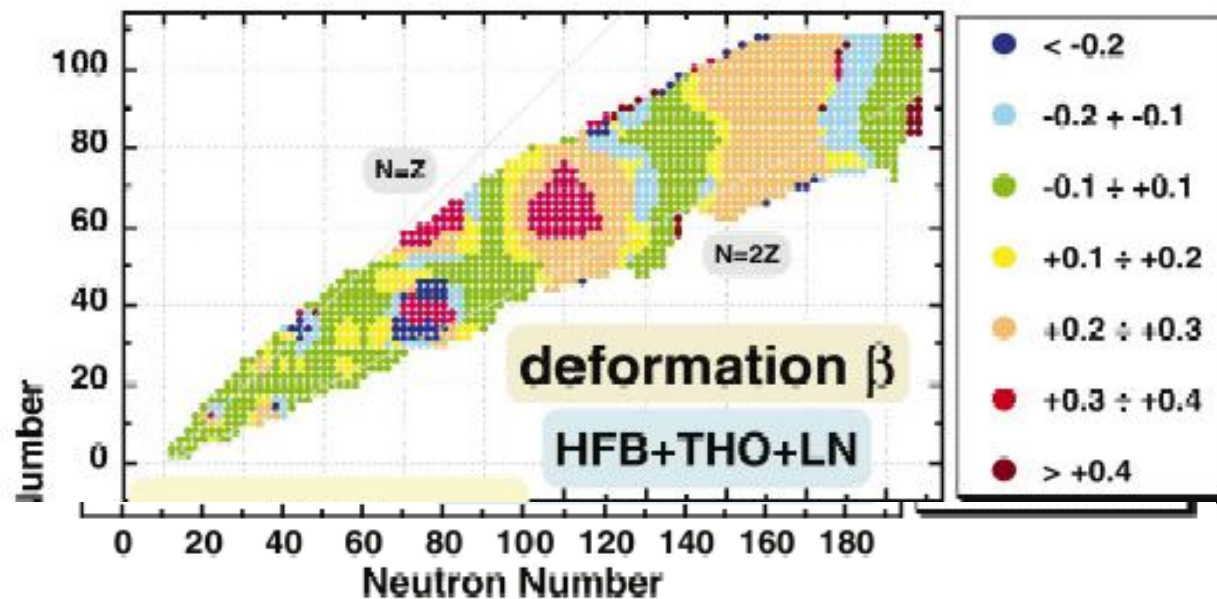
$$E(4^+)/E(2^+)$$



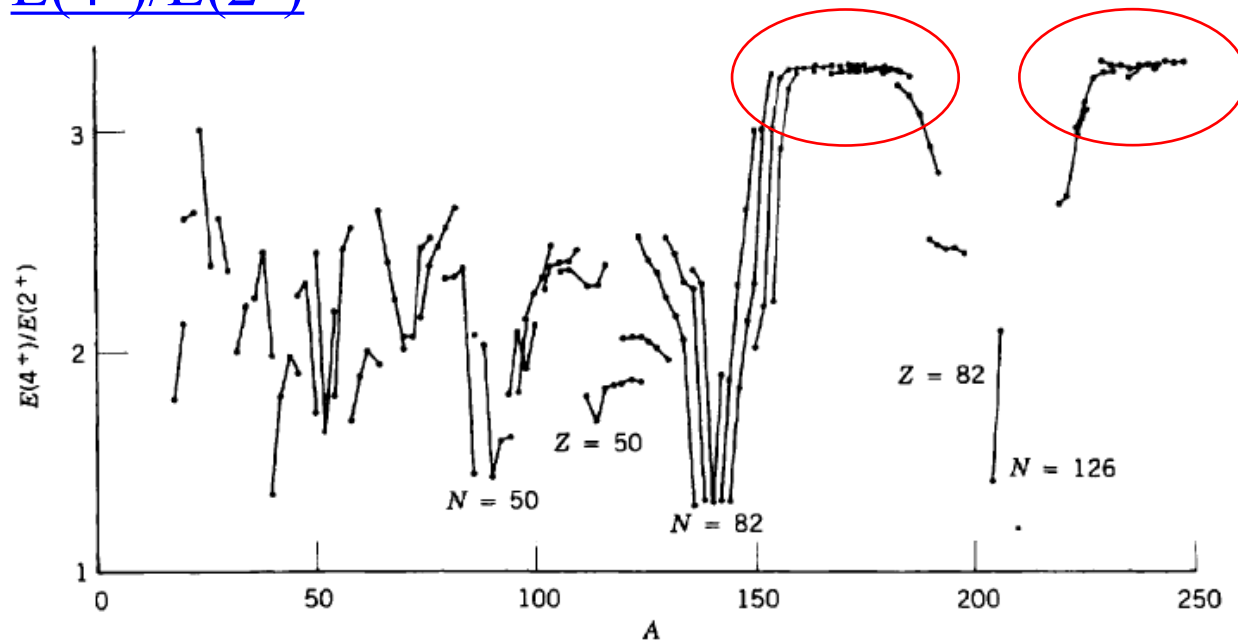
deformed nuclei:
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

spherical nuclei:
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics"



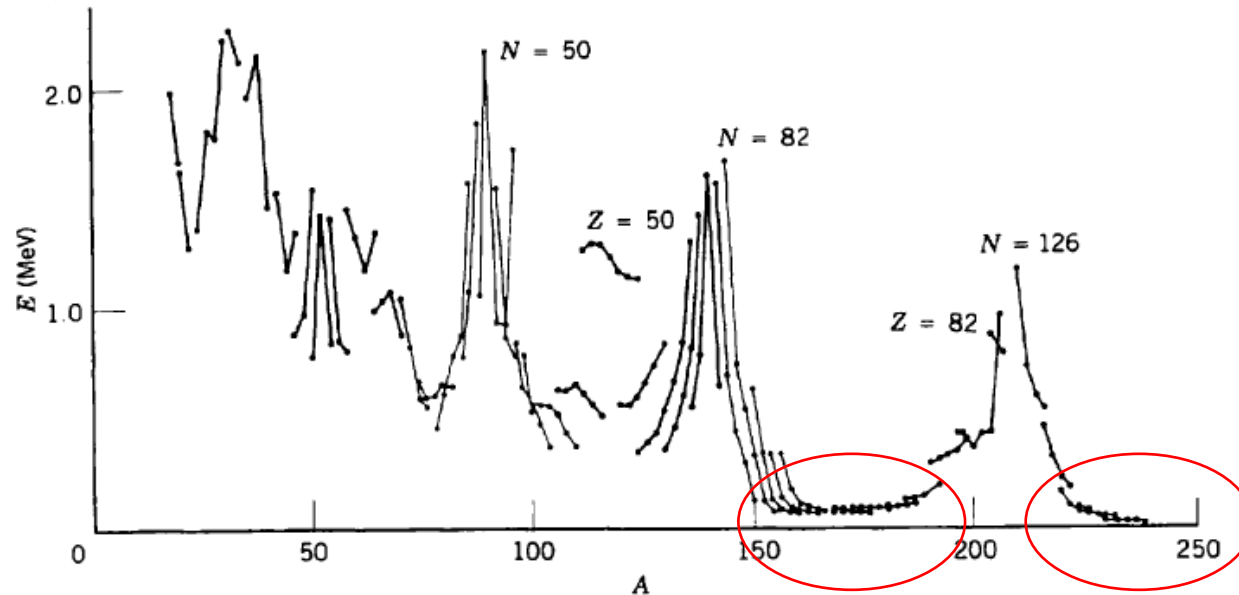
$E(4^+)/E(2^+)$



deformed nuclei:
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

spherical nuclei:
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

$E(2^+)$



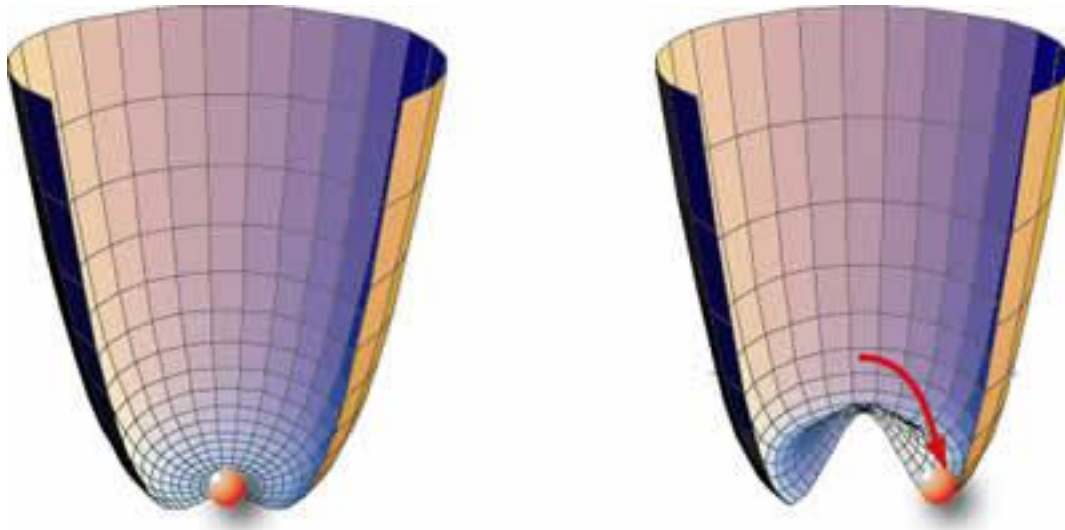
K.S. Krane. "Introductory Nuclear Physics"

a small energy
→ spontaneously
symm. breaking

deformed nuclei

Spontaneous symmetry breaking

The vacuum state does not have (i.e, the vacuum state violates) the symmetry which the Hamiltonian has.



Nambu-Goldstone mode (zero energy mode)
to restore the symmetry

なぜ原子核は変形するのか？

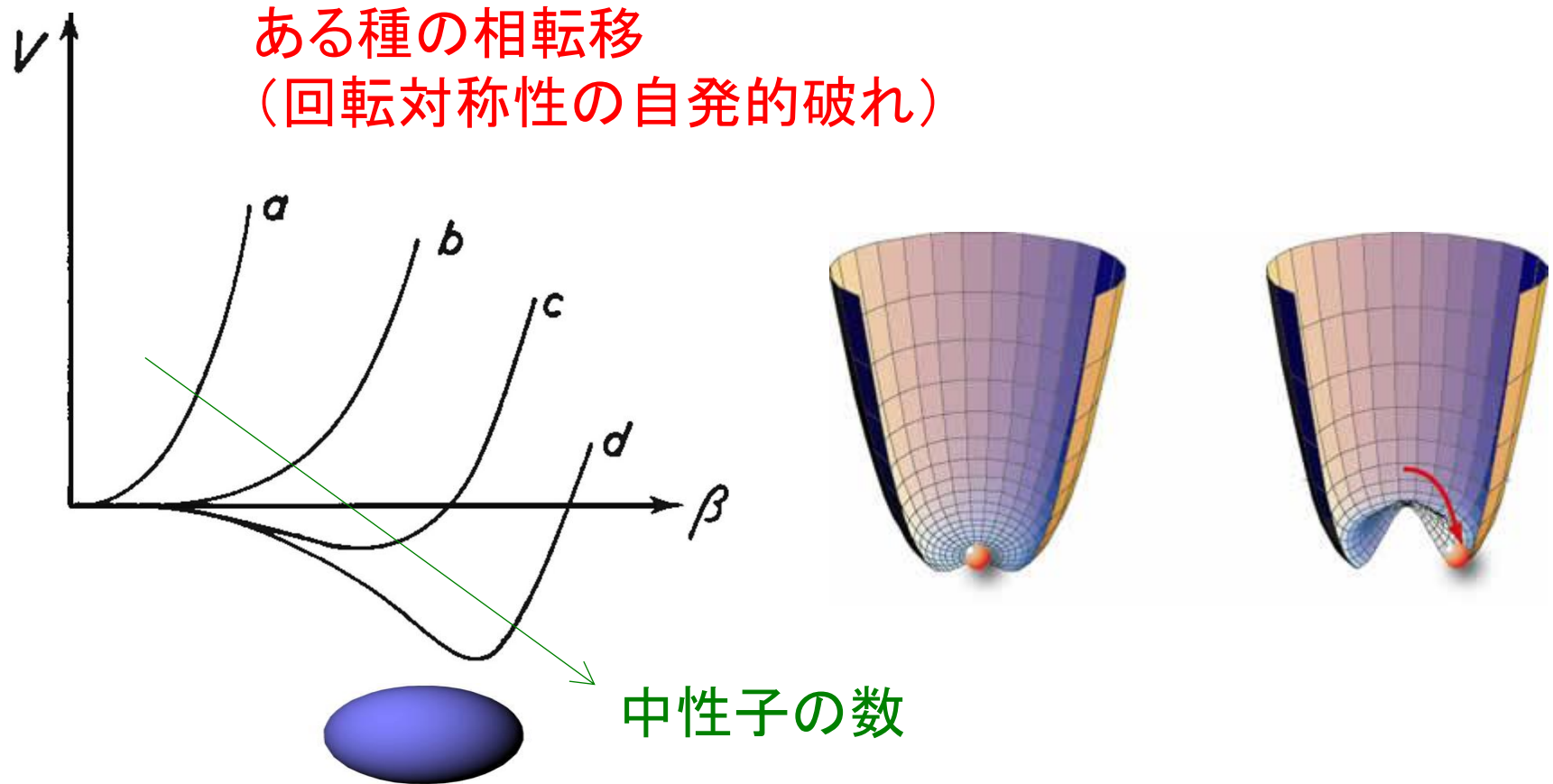


figure:

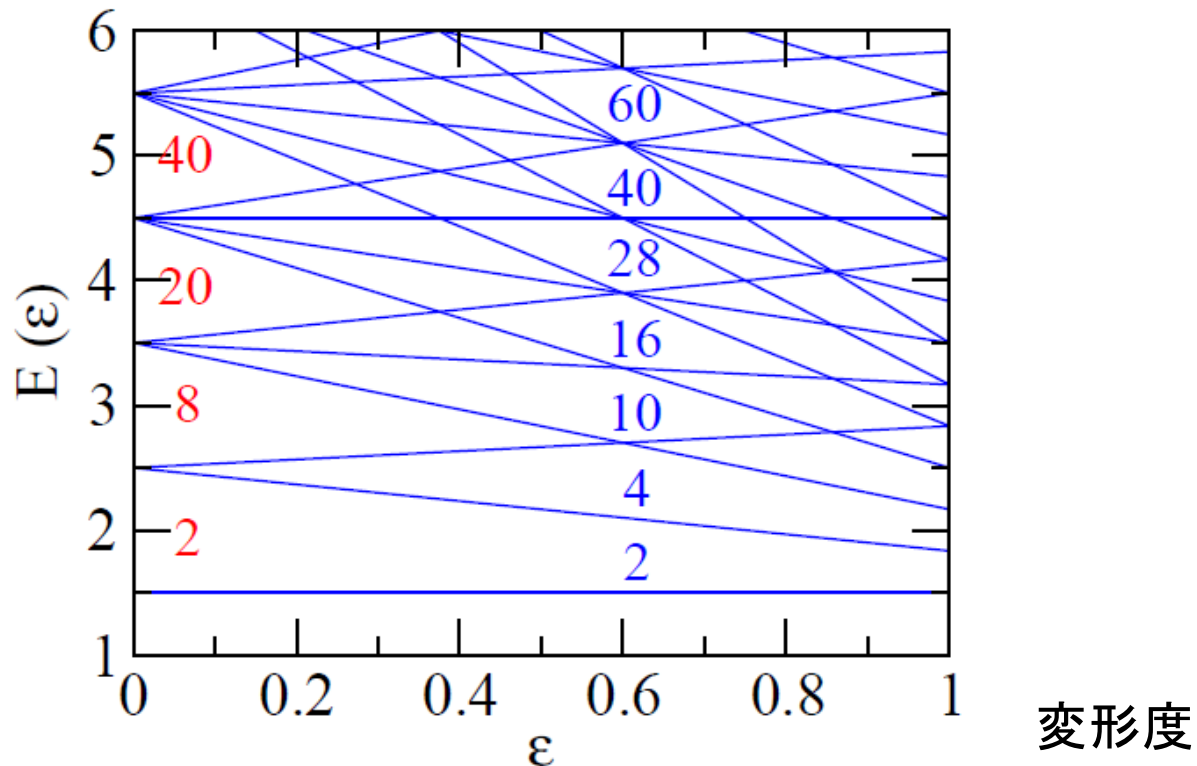
B.R. Mottelson, Nobel Lecture

なぜ原子核は変形するのか？

核子に対する軌道

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2)$$

$$\omega_{\perp} = \omega_0(1 + \frac{\epsilon}{3}), \quad \omega_z = \omega_0(1 - \frac{2}{3}\epsilon)$$



粒子数によっては変形した方が閉殻構造になる

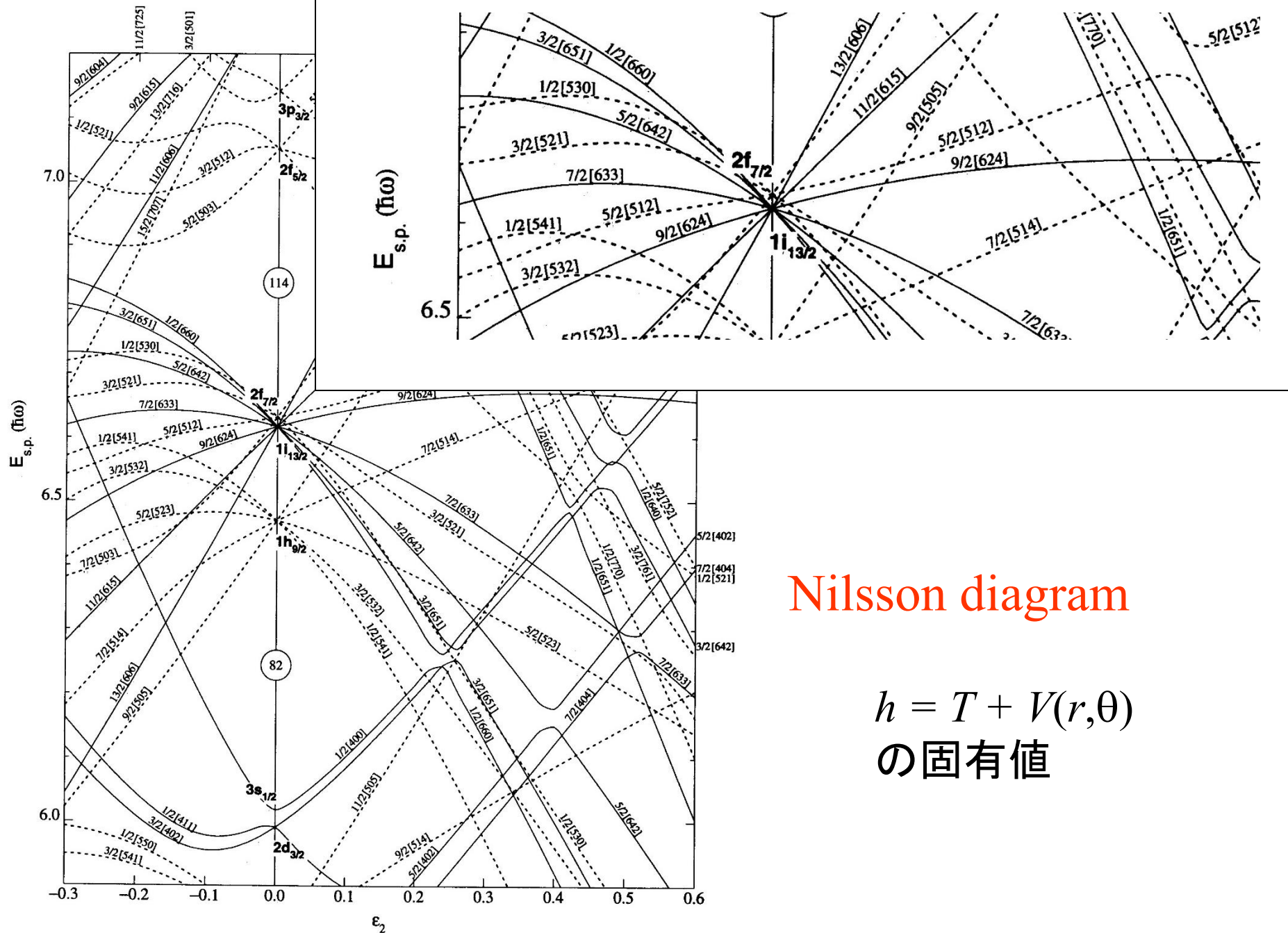


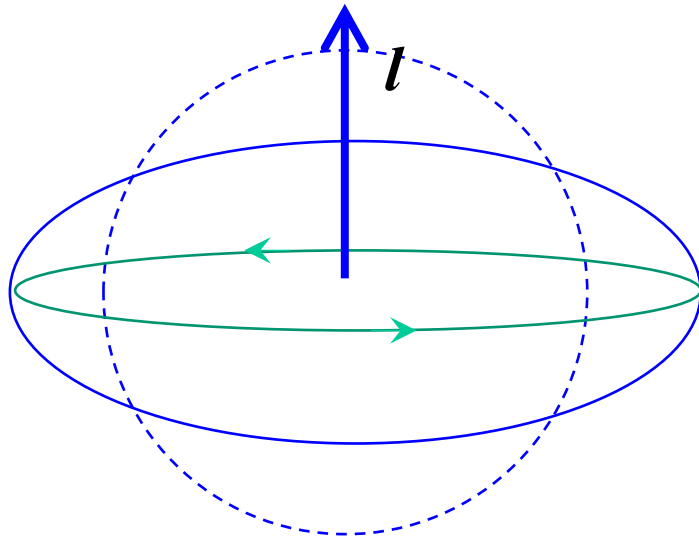
Figure 13. Nilsson diagram for protons, $Z \geq 82$ ($\epsilon_4 = \epsilon_2^2/6$).

Nilsson diagram

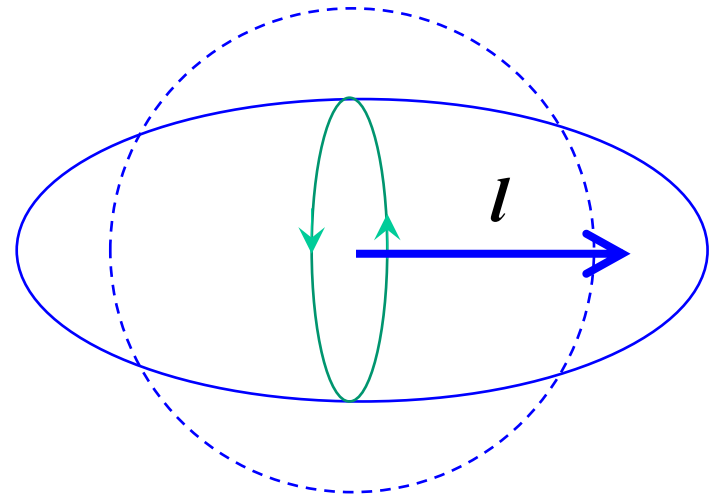
$h = T + V(r, \theta)$
の固有値

One-particle motion in a deformed potential

長軸に沿った運動

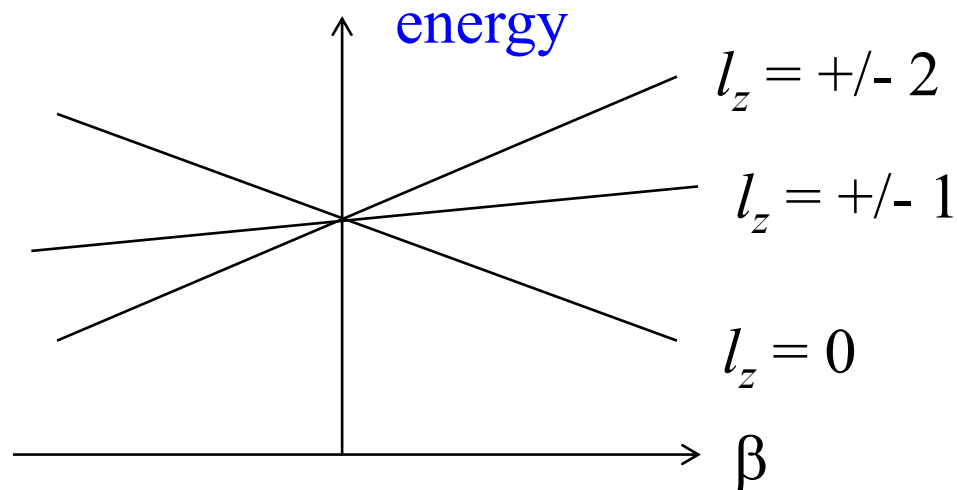


短軸に沿った運動

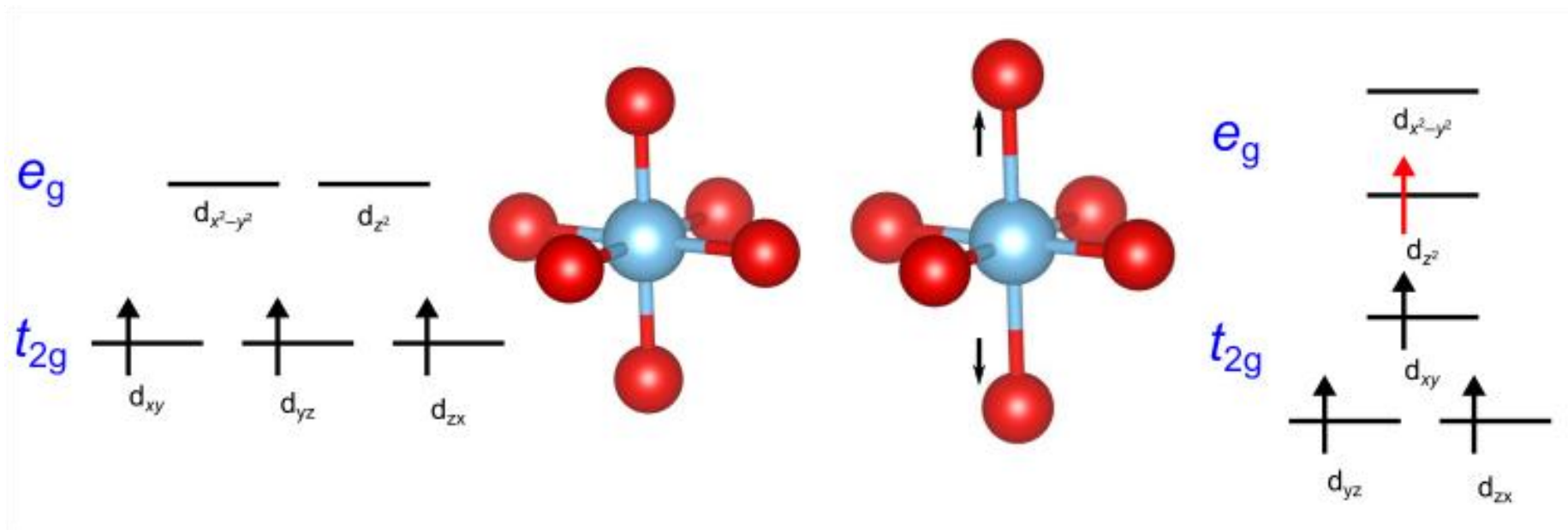


→ z 軸

軌道が
スプリット



電子系における似たような物理: ヤン・テラー効果



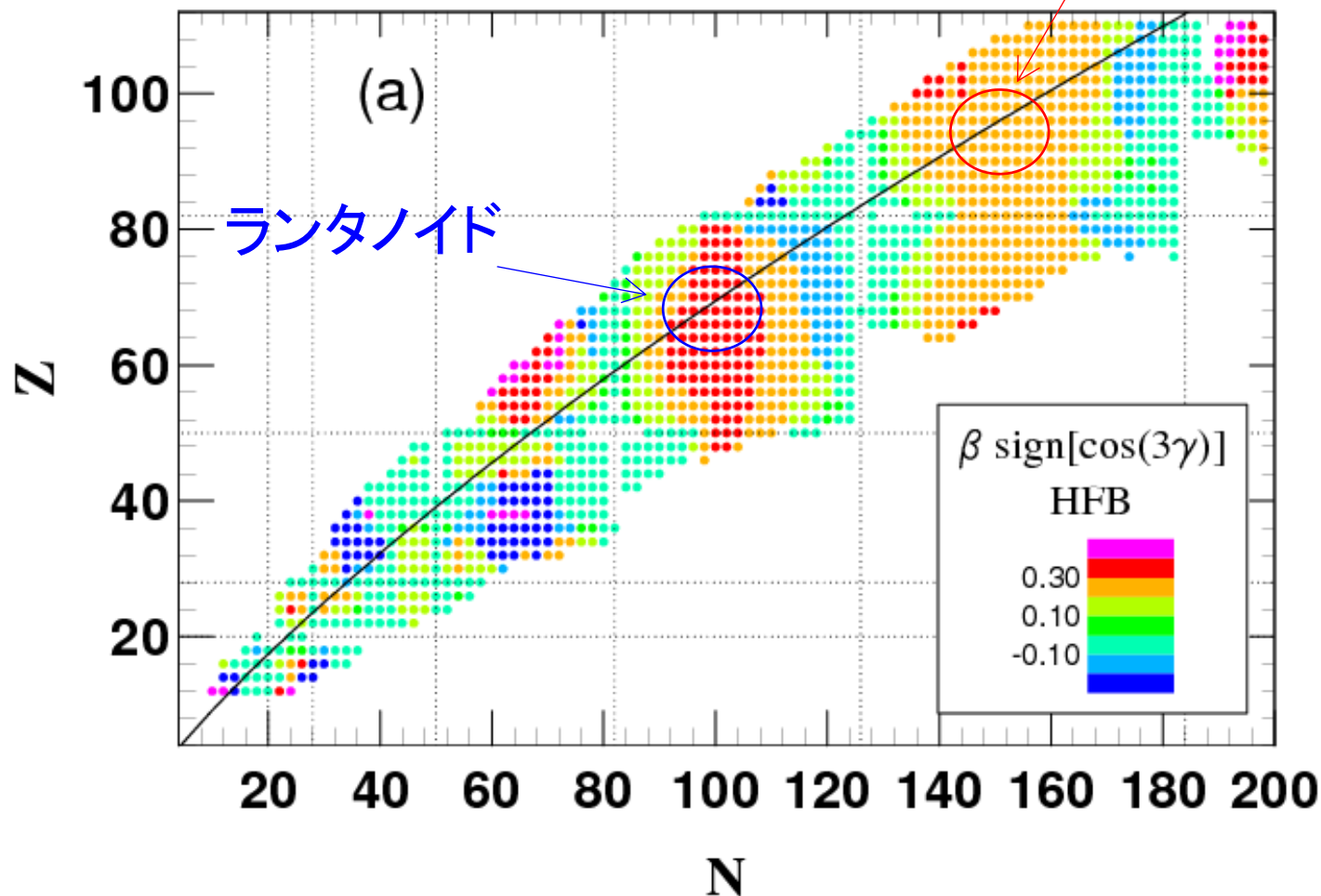
<https://solid-mater.com/entry/jt>

対称性が高く、軌道が部分縮退

→ 対称性を破ることにより軌道のエネルギーを下げ、
そこに電子を入れる

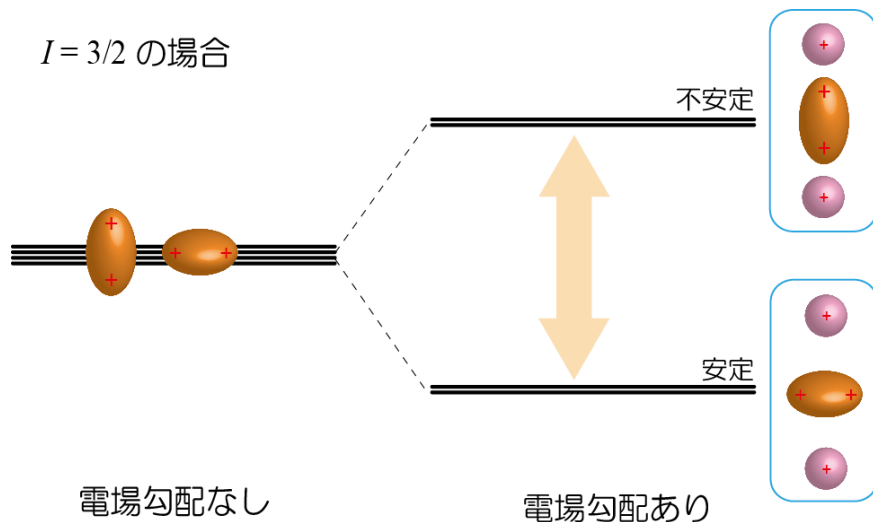
原子核の変形

密度汎関数法による計算



原子核の変形をどのように測るのか？

i) 原子核の四重極モーメントを測定する



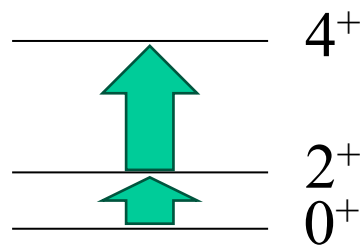
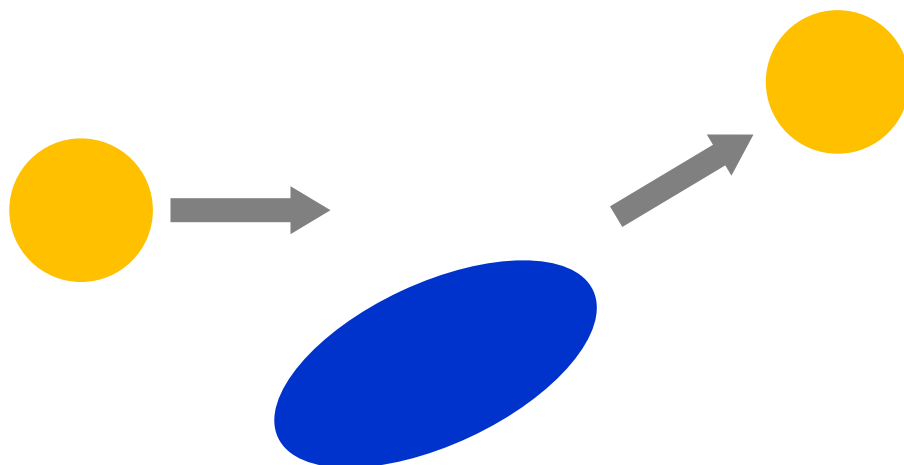
https://sm1018.skr.u-ryukyu.ac.jp/db50031_yogi/research/nqr

電場勾配をかけてエネルギーの分離を見る
(Nuclear Quadrupole Resonance: NQR)

*偶々核の基底状態には使えない ($I = 0$)

原子核の変形をどのように測るのか？

- ii) 原子核反応で励起の確率を測定する
→ それを変形の度合いと関係づける



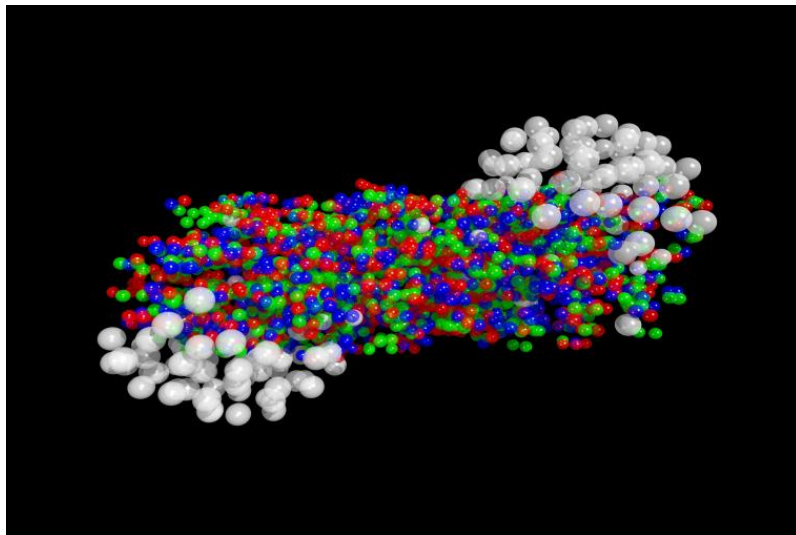
^{154}Sm

- ✓ 非弾性散乱
- ✓ 多重クーロン励起

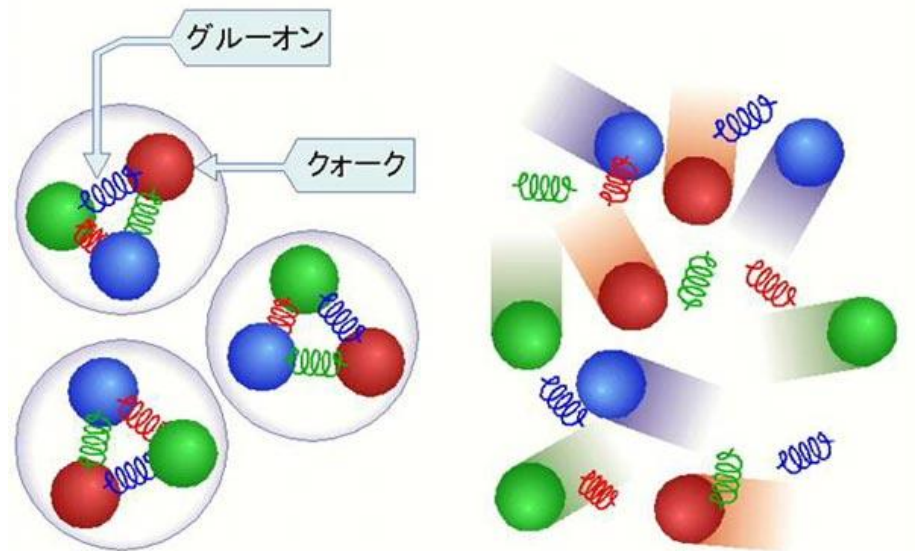
相対論的重イオン衝突で見る原子核の形

この数年、相対論的重イオン衝突で原子核の形を見るアプローチが大きな注目を浴び、多くの論文が出版されている。

相対論的重イオン衝突



<http://www-alice.gsi.de/fsp201/qgp.html>



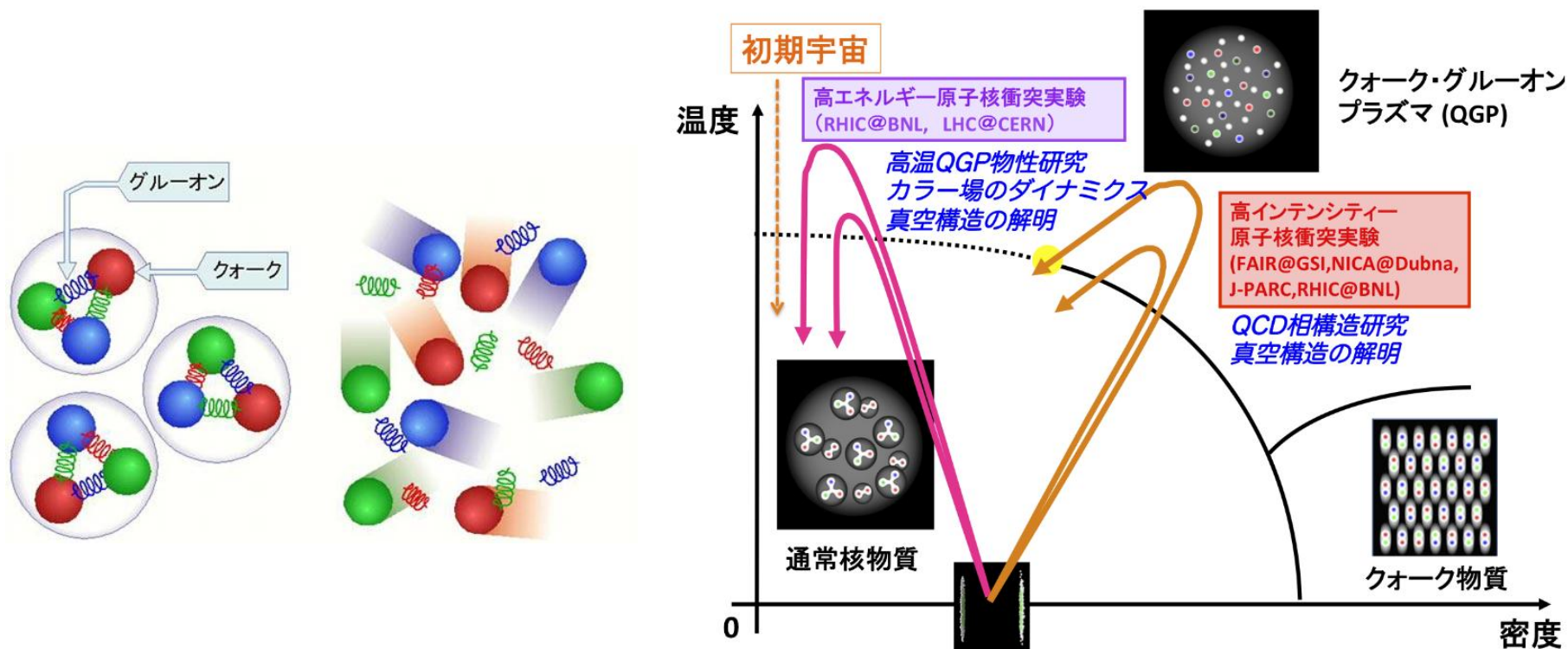
<http://kakudan.rcnp.osaka-u.ac.jp/jp/overview/world/QGP.html>

通常、核子の中にクォークやグルーオンが閉じ込められているが、超高エネルギーで原子核をぶつけることにより、それを解放する。

「クォーク・グルーオン・プラズマ(QGP)」

相対論的重イオン衝突で見る原子核の形

この数年、相対論的重イオン衝突で原子核の形を見るアプローチが大きな注目を浴び、多くの論文が出版されている。



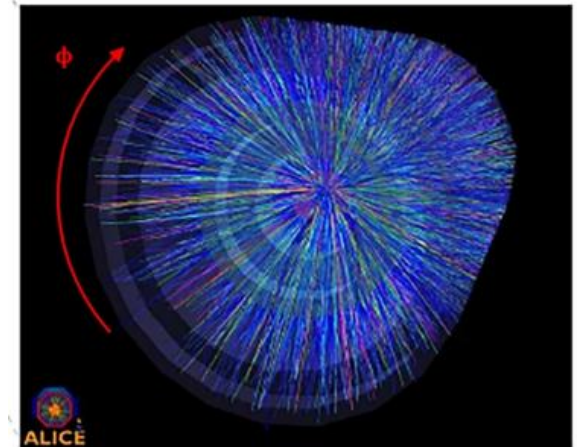
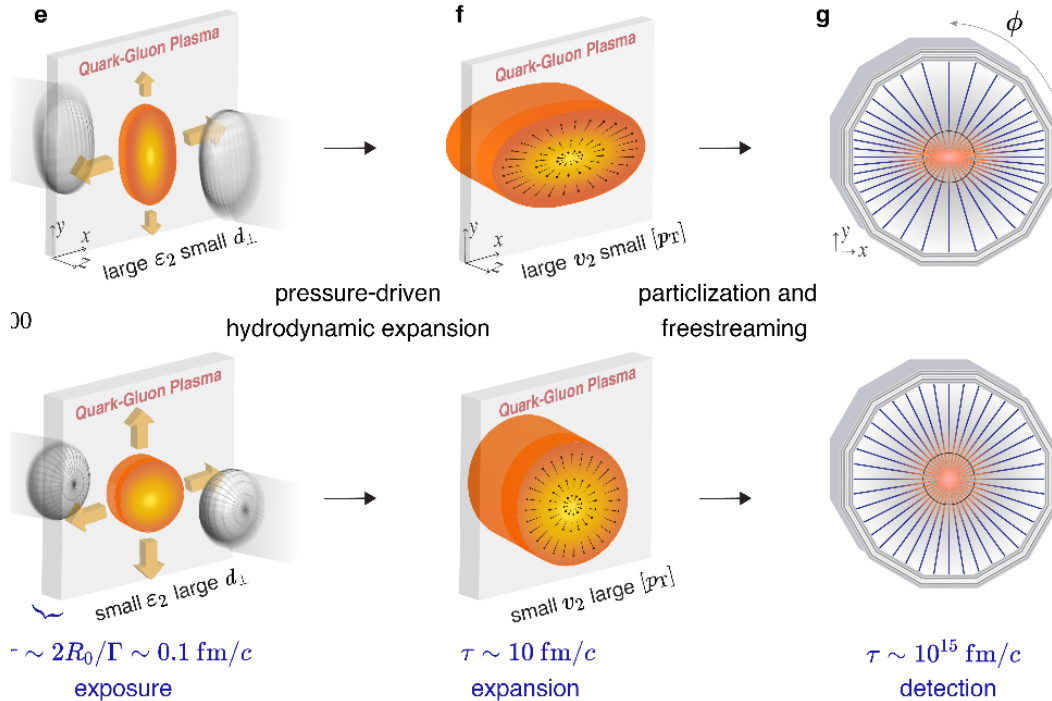
これにより核物質の相図を解明する

相対論的重イオン衝突で見る原子核の形

the initial shape
of QGP

expansion

detection

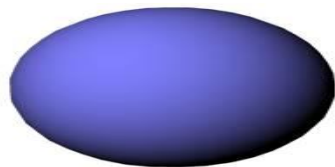


STAR collaboration,
Nature 635, 67 (2024)

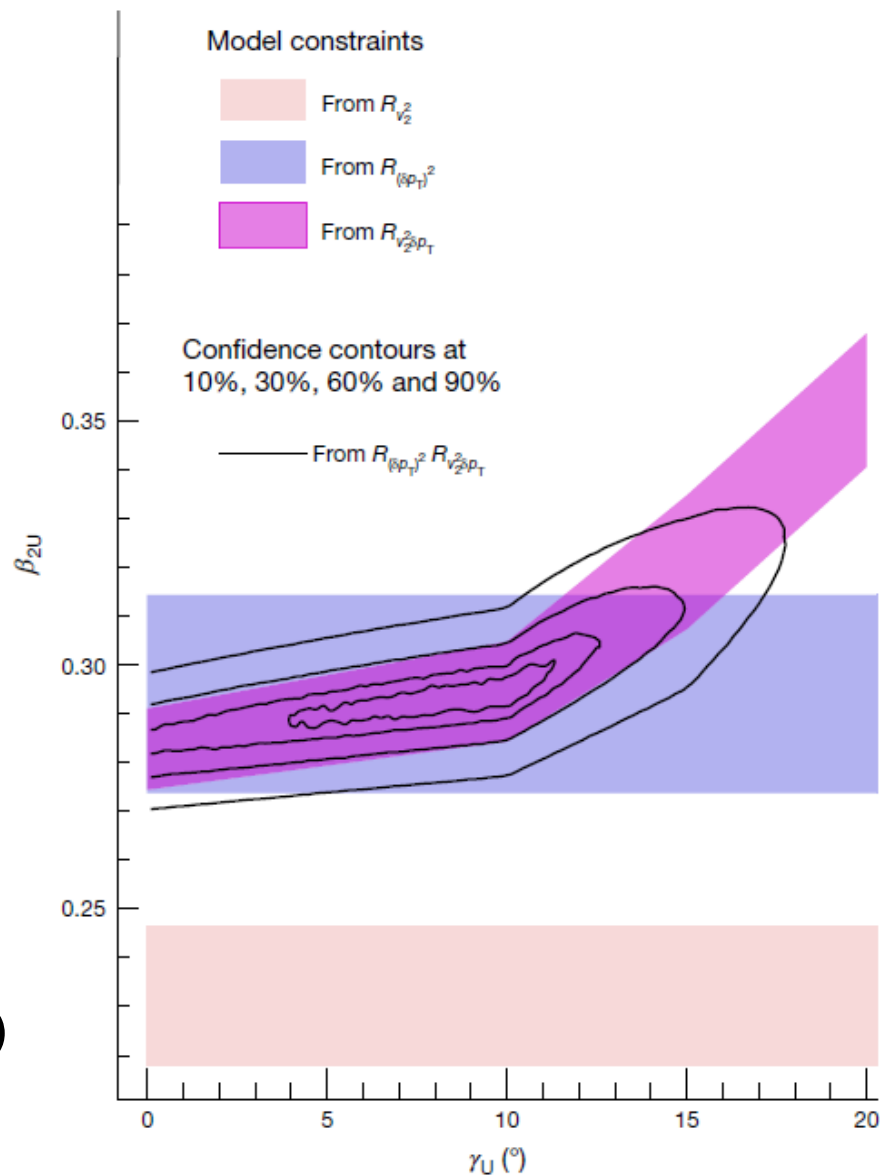
原子核が変形すると、QGPの初期形状が変わり、それが最終的に
測定される粒子の分布の変化に反映される
→ そこから原子核の変形を読み取る

相対論的重イオン衝突で見る原子核の形

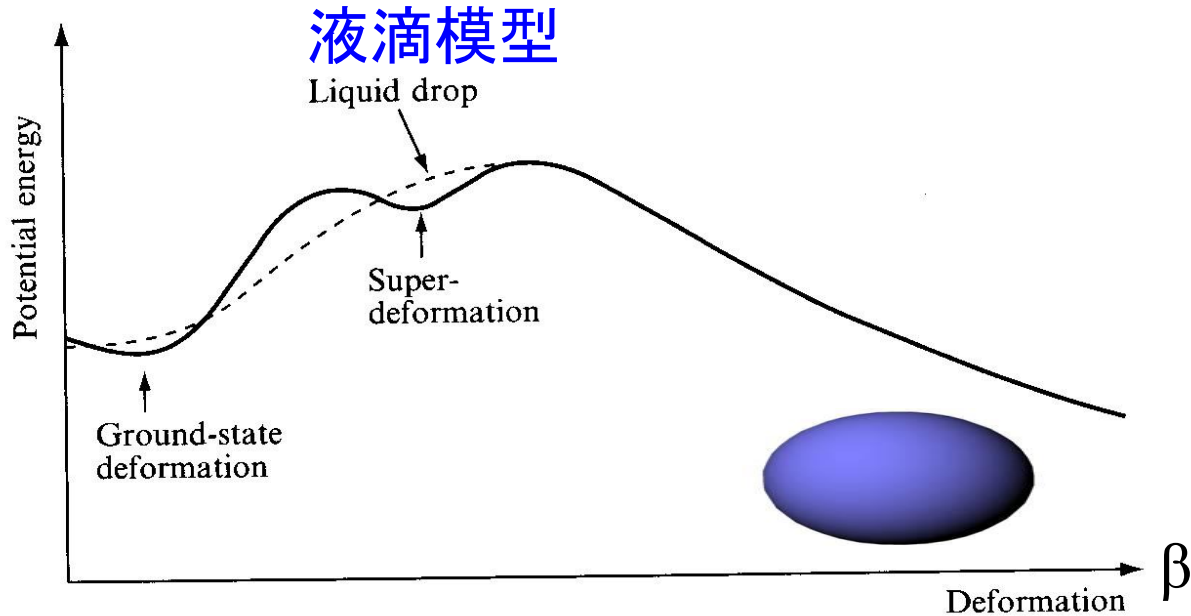
^{238}U 原子核の変形



STAR collaboration,
Nature 635, 67 (2024)

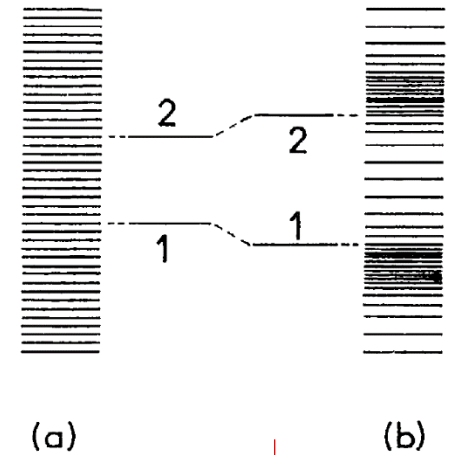
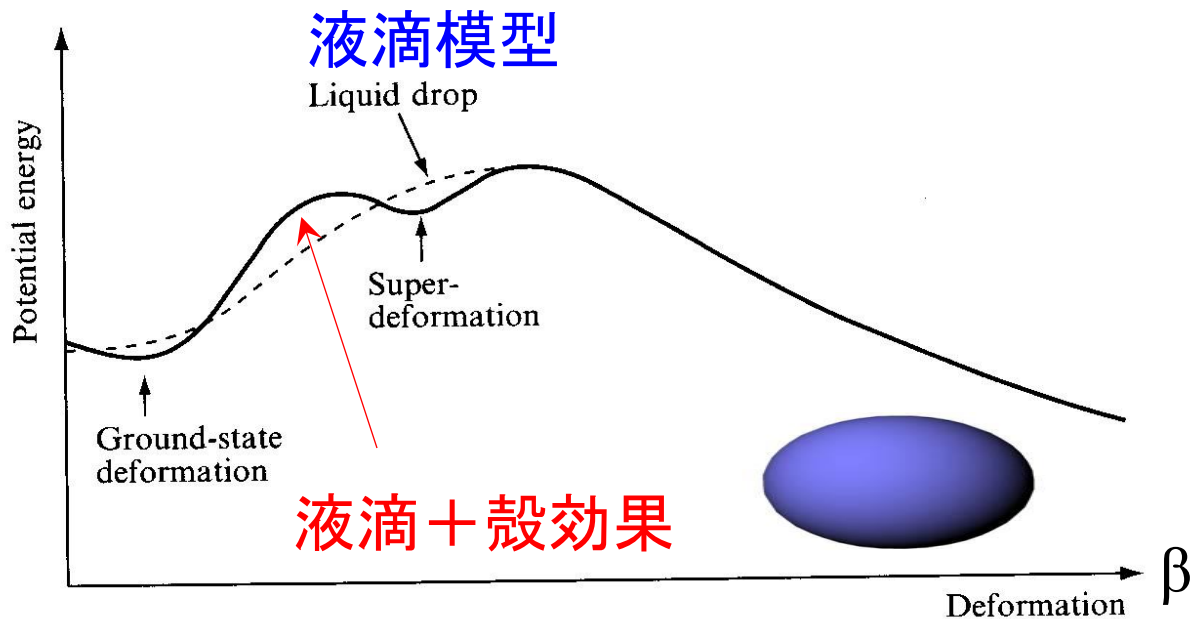


原子核の変形と殻効果



$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\text{shell}}(\beta)$$

液滴模型→常に球形が基底状態



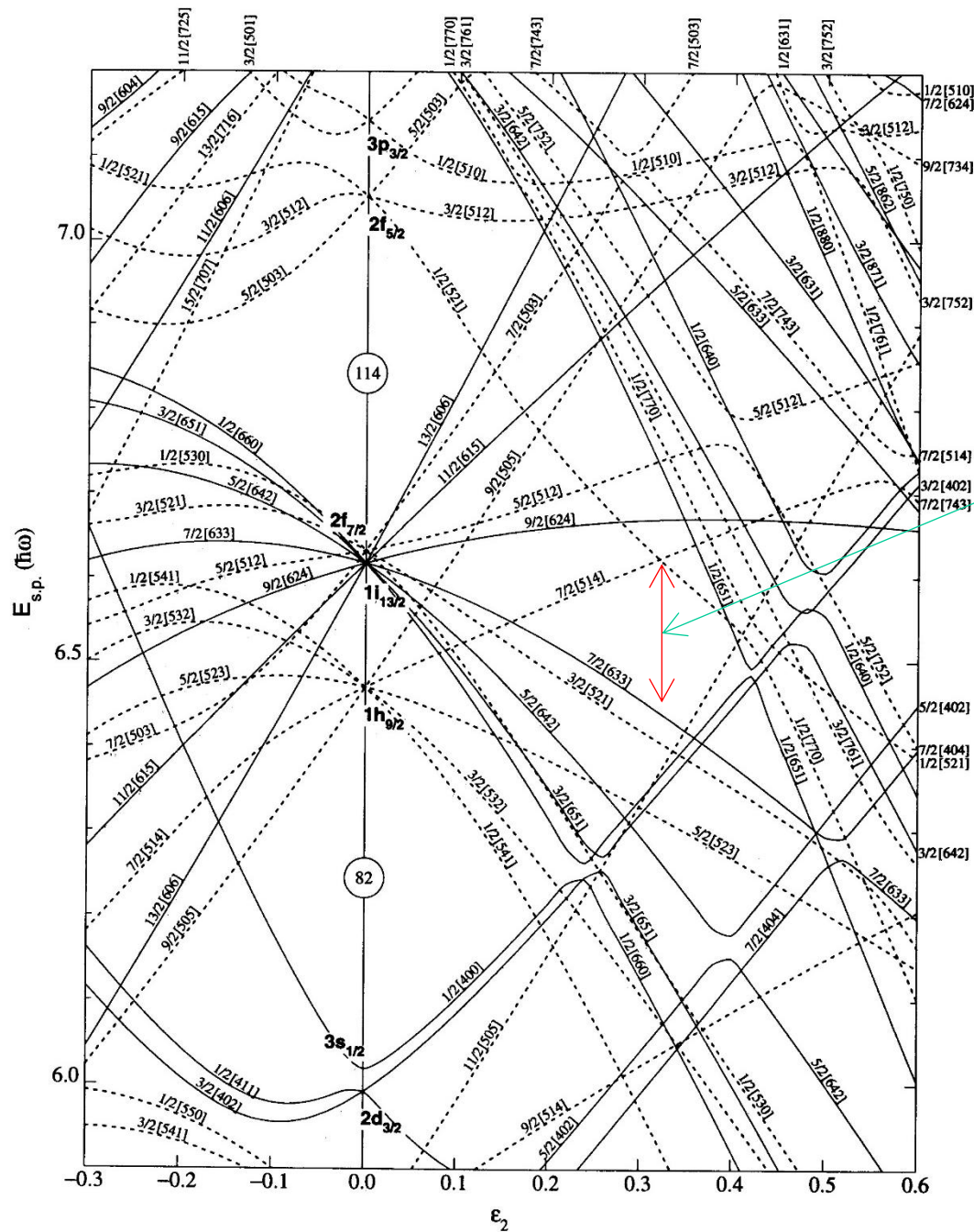
準位にギャップ
が開くと原子核が
安定になる

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\text{shell}}(\beta)$$

原子核が変形

→ 核子が感じるポテンシャルも変形

→ 変形度によって異なる量子力学的補正(殻効果)

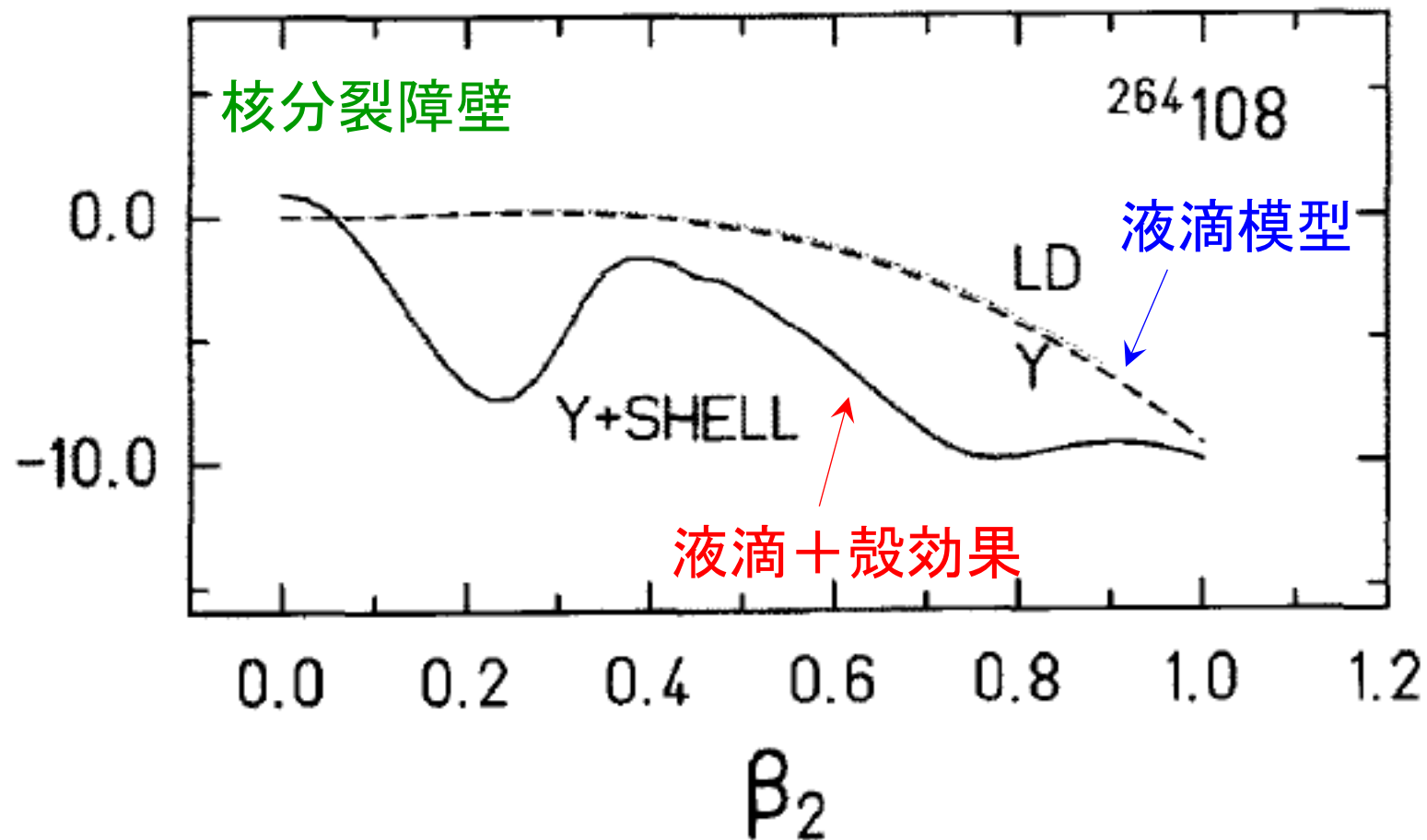


変形することにより
ギャップが開く

Nilsson diagram

Figure 13. Nilsson diagram for protons, $Z \geq 82$ ($\epsilon_4 = \epsilon_2^2/6$).

殻構造の帰結：超重核の安定化



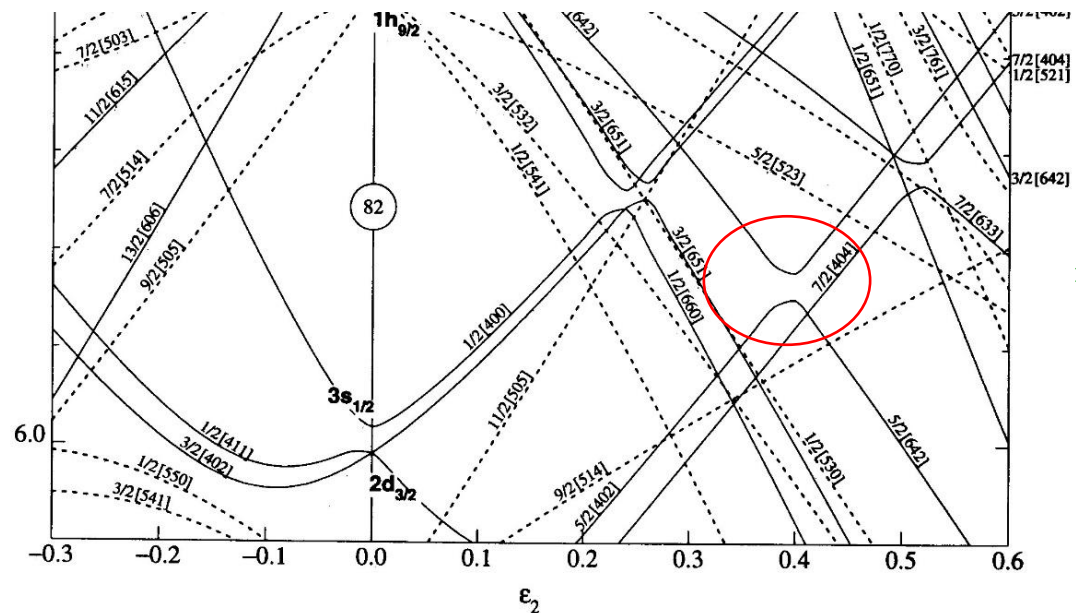
殻効果により核分裂障壁が高くなり原子核が安定化する

レポート問題7 KULMSから提出、提出×切 7/28(火) 23:59

$E_0 = -\varepsilon, E_1 = \varepsilon$ のエネルギーをもつ2つの状態が強さ V で相互作用しているとする。このときの固有状態は 2×2 行列

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & V \\ V & \varepsilon \end{pmatrix}$$

を対角化して得られる。2つの固有エネルギーの差が必ず 2ε ($V=0$ のときのエネルギー差) より大きくなることを示せ。



*これを「ノイマン-ウィグナーの定理」といい、ニルソンレベルで準位反発が見られる理由である。

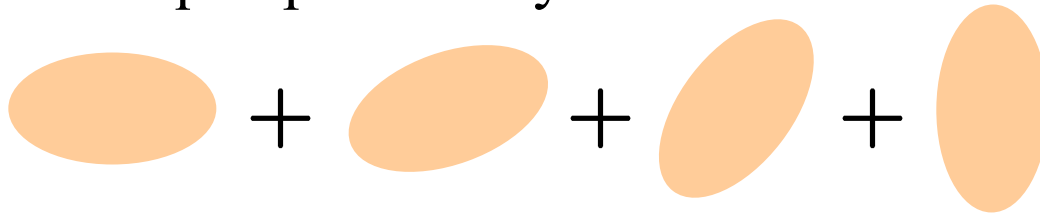
Angular Momentum Projection

- ✓ 変形→角運動量が混ざる(角運動量の固有状態になっていない)
- ✓ 観測される状態→角運動量の固有状態

→角運動量射影

0^+ : no preference of direction (spherical)

→ Mixing of all orientations with an equal probability



$$|\psi_{0+}\rangle = \int d\Omega |\psi_{\Omega}\rangle$$

other states:

$$|\psi_{IM}\rangle = \int d\Omega Y_{IM}(\Omega) |\psi_{\Omega}\rangle$$

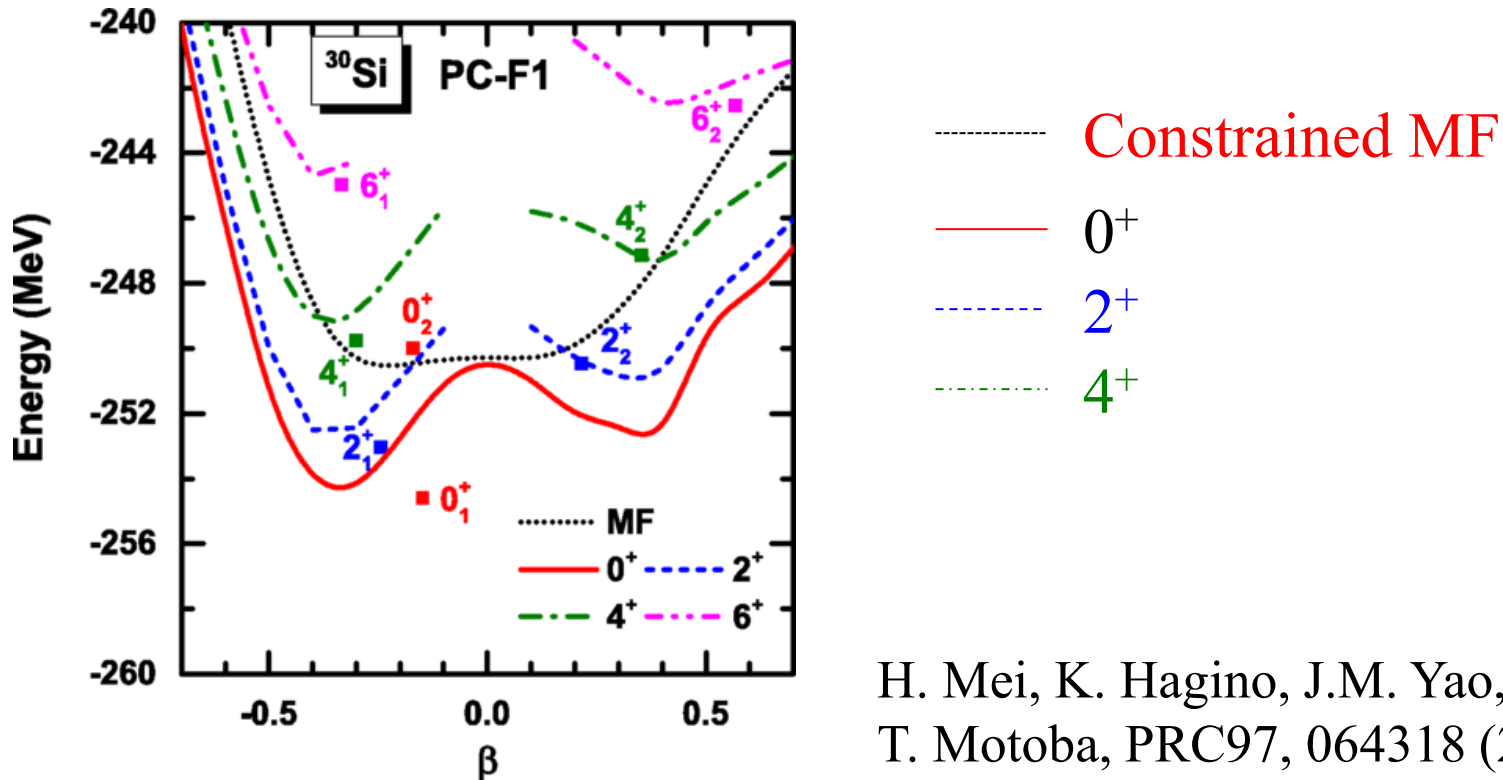
(for $K=0$)

Projected wave function:

$$|\Psi_{IM}\rangle = \hat{P}_{MK}^I |\Psi\rangle = \frac{2I+1}{8\pi^2} \int d\Omega D_{MK}^{I*}(\Omega) \hat{\mathcal{R}}(\Omega) |\Psi\rangle$$

→ Projected energy surface:

$$E_I = \frac{\langle \Psi_{IM} | H | \Psi_{IM} \rangle}{\langle \Psi_{IM} | \Psi_{IM} \rangle} = \frac{\langle \Psi | \hat{P}_{KM}^I H \hat{P}_{MK}^I | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \hat{P}_{KM}^I \hat{P}_{MK}^I | \Psi \rangle}$$



H. Mei, K. Hagino, J.M. Yao,
T. Motoba, PRC97, 064318 (2018)