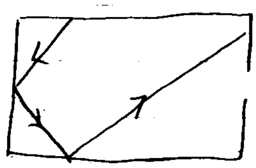
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

1.2. 真空の比熱とエネルギー量子の発見

温度 T の真空 → 様々な波長の電磁波が存在
— cf. 3度 K 輻射 (WMAP)



小孔

空洞放射　　小孔から空洞に入った電磁波は外に出ない → 「黒体」
黒体放射

小孔から空洞内の色を観測したときに温度 T がわかるか?

cf. 18世紀後半　産業革命
→ 鉄を精錬する溶鉱炉の温度を知りたい

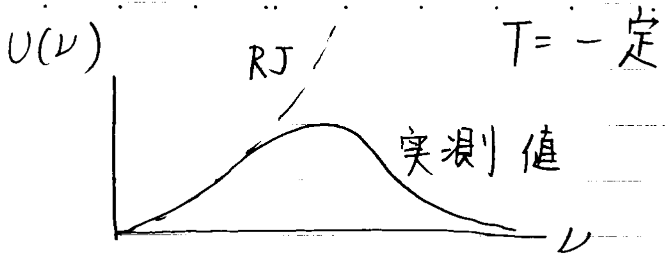
a) レーリー・ジーンズ (RJ) の式 (古典論)

単位体積あたり, ν と $\nu + d\nu$ のあいだの振動数を持つ光のエネルギー

$$U(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \, d\nu \quad (\text{RJの式})$$

※導出は後ほど

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY



・νが小さいときには実測値をよく再現

・全エネルギー　:　$E = \int_0^\infty d\nu\, U(\nu) = k_B T \underbrace{\int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu}_{\downarrow \text{発散}}$

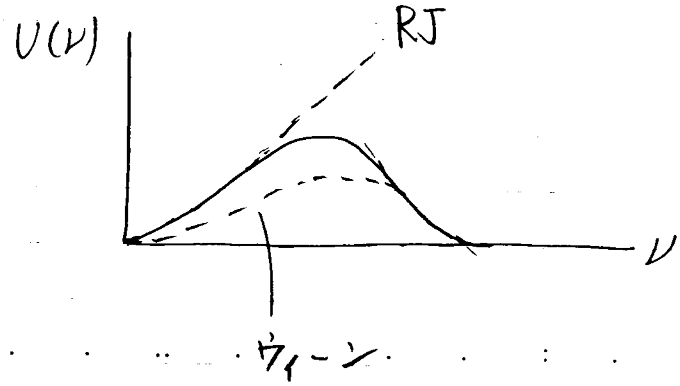
比熱　$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \infty$

→ 温度を1度上げるために無限の熱が必要

b) ウィーンの式

$$U_{RJ}(\nu) = \frac{8\pi^2}{c^3} \nu^2 k_B T = \frac{8\pi^2}{c^3} \nu^3 \cdot \underbrace{\frac{k_B T}{\nu}}_{\downarrow}$$

ウィーン:　$k_B \beta e^{-\beta\nu/T}$ とおいた
(仮定した)
(導出は朝永を見よ)



c) プランクの式

RJとウィーンを結ぶ内挿公式を発見

$$U(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^3 \cdot F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{k_B}{x} & (\mathrm{RJ}) \\ k_B \beta e^{-\beta x} & (\text{ウィーン}) \end{cases}$$

プランク $F(x) = \dfrac{k_B \beta}{e^{\beta x} - 1}$

β は現象論的に決める

$\rightarrow$ $h \equiv k_B \beta = 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ とすると
実験データとぴったり（プランク定数）

$x \ll 1$

$$e^{\beta x} - 1 \sim 1 + \beta x - 1 = \beta x$$

$$\Downarrow \quad F(x) \sim \frac{k_B}{x} \qquad (\leftrightarrow \mathrm{RJ})$$

$x \gg 1$

$$e^{\beta x} - 1 \sim e^{\beta x}$$

$$\Downarrow \quad F(x) \sim k_B \beta e^{-\beta x} \qquad (\leftrightarrow \text{ウィーン})$$

四 レイリー・ジーンズの式（もう一度）

電磁波 $\longleftrightarrow$ ばねの振動

長さLに閉じこめられた一次元のばね

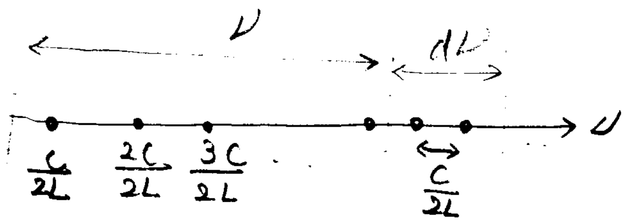
・ばね1個につきエネルギー $k_B T$
（エネルギー等分配の式）

固有振動

$$\rightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2L} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

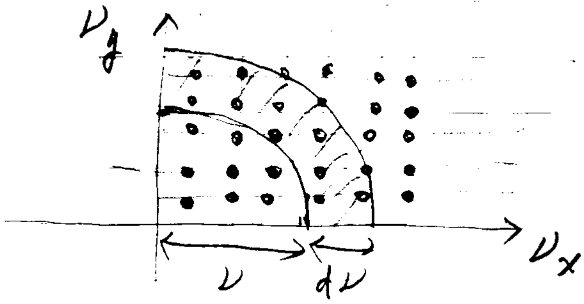
振動数 ν と $\nu + d\nu$ のあいだの固有振動の数



$$\equiv Z(\nu)\, d\nu = \frac{d\nu}{\left(\frac{c}{2L}\right)} = \frac{2L}{c}\, d\nu \qquad \longleftrightarrow \quad d\nu = \frac{c}{2L}\, dn$$

$h\nu = [E]$
$hc = [EL]$

・2次元の場合

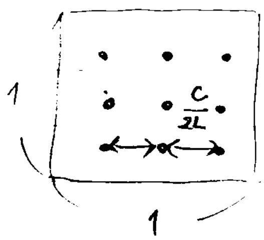


$\nu = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$ として

$\nu \sim \nu + d\nu$ のあいだにある固有振動の数

→ 面積 = $2\pi\nu \times d\nu \times \frac{1}{4}$

単位面積を考えると



x 方向に $1/(\frac{c}{2L}) = \frac{2L}{c}$ 個
y 〃 $\frac{2L}{c}$ 個

→ $(\frac{2L}{c})^2$ 個の点,

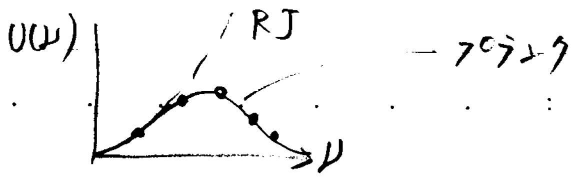
↓ $Z(\nu)d\nu = 2\pi\nu \times d\nu \times \frac{1}{4} \times (\frac{2L}{c})^2$ 個の点,

・3次元の場合

$$Z(\nu)d\nu = 4\pi\nu^2 d\nu \times \frac{1}{8} \times 2 \times \left(\frac{2L}{c}\right)^3 = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$$

↑
偏極

↓ $U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T d\nu$



$$U(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \cdot \frac{h}{e^{h\nu/k_BT} - 1} \nu^3 d\nu$$

$h = 6.626 \times 10^{-34}$ J・s

$$S = 1 + e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}} S$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

エネルギー量子の発見

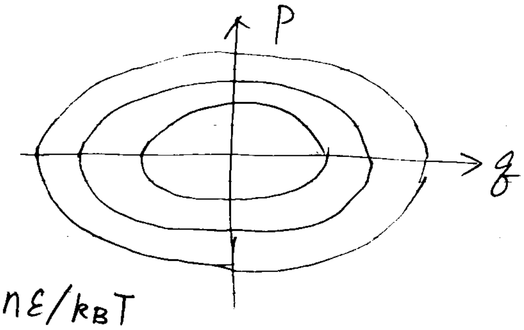
プランク：プランクの式が得られるための条件を考えた。

ばねのエネルギー $\quad E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \equiv ap^2 + bq^2$

$$\rightarrow \langle E \rangle = n \int dq\,dp\,(ap^2 + bq^2)\, e^{-E/k_BT}$$

$$n = \left[\int dq\,dp\ e^{-E/k_BT} \right]^{-1}$$

プランク：$\boxed{E = ap^2 + bq^2 = n\varepsilon \quad (n = 0, 1, 2 \cdots)}$ のみをとる



$$\rightarrow \quad \langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon\, e^{-n\varepsilon/k_BT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT}}$$

(note) $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT} = 1 + e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}} + e^{-\frac{2\varepsilon}{k_BT}} + \cdots = \frac{e^{\varepsilon/k_BT}}{e^{\varepsilon/k_BT} - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon\, e^{-n\varepsilon/k_BT} = -\frac{\partial}{\partial(1/k_BT)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon/k_BT} = \frac{\varepsilon\, e^{\varepsilon/k_BT}}{[e^{\varepsilon/k_BT} - 1]^2}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1}$$

$\varepsilon = h\nu$ とすると

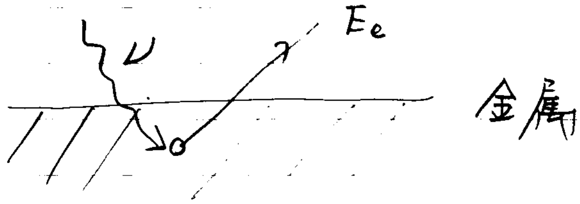
$$U(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

電磁波のエネルギー：$h\nu$ の整数倍のみ

「エネルギー量子」

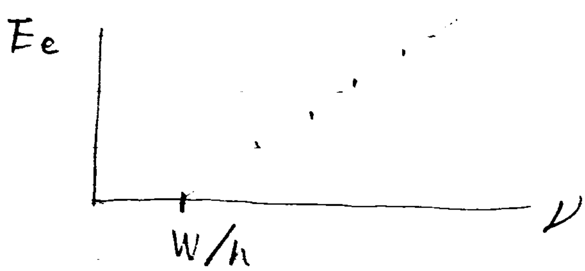
↳ 電磁波が粒子のように振るまう

1.3 光電効果と光量子仮説



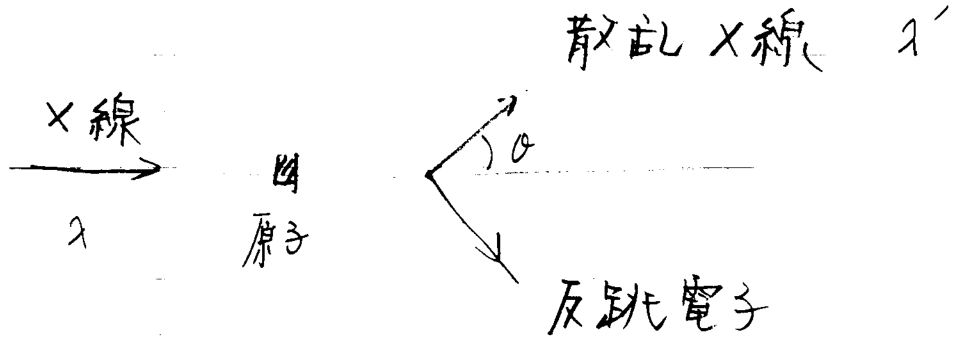
$E_e = h\nu - W$ （アインシュタイン 光量子仮説）

ミリカンの実験

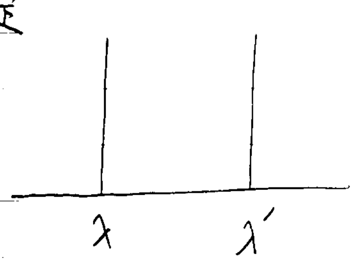


E_e は光の強さには関係しない

・コンプトン効果



θ：一定



原子全体との散乱
(反跳もが小さいのでλのまま)

電子との散乱

X線の「粒子」と電子の2体散乱を仮定すると
実験データをきれいに説明
→「光子(フォトン)」

1.4. ボーアの原子模型

エネルギーの離散性 → 原子でも

バルマーの公式（原子のスペクトル線に成り立つ式）

$$\frac{1}{\lambda} = R_y \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$ （n_1, n_2 は自然数）

⤳ 原子のエネルギーが $\frac{1}{n^2}$ に比例することを示唆