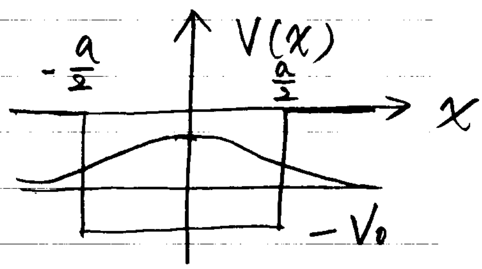
DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

(復習) 有限井戸型ポテンシャル



基底状態の波動関数：

$$\phi(x) = \begin{cases} A e^{\kappa x} & \left(x \leq -\frac{a}{2}\right) \\ B \cos k' x & \left(-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}\right) \\ A e^{-\kappa x} & \left(x \geq \frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}, \quad k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}$$

$x = \pm\frac{a}{2}$ における波動関数の接続

$$\begin{cases} \phi_>\left(\pm\frac{a}{2}\right) = \phi_<\left(\pm\frac{a}{2}\right) \rightarrow A e^{-\frac{\kappa a}{2}} = B \cos\frac{k'a}{2} \\ \phi'_>\left(\pm\frac{a}{2}\right) = \phi'_<\left(\pm\frac{a}{2}\right) \rightarrow -A\kappa e^{-\frac{\kappa a}{2}} = -B k' \sin\frac{k'a}{2} \end{cases}$$

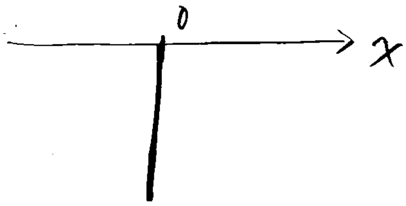
$\rightarrow \kappa = k' \tan\frac{k'a}{2}$ これを解けば Eが求まる。

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

No

3.4. デルタ関数型ポテンシャル（束縛状態）

$$V(x) = -g\,\delta(x) \qquad (g>0)$$



（井戸型で $V_0 a$ = 一定のまま $a \to 0$ としたもの）

$$\phi(x) = \begin{cases} A e^{\kappa x} & (x<0) \\ A e^{-\kappa x} & (x>0) \end{cases}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$$

(note) 波動関数は $x=0$ で連続

$$\phi_>'(x) - \phi_<'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\, \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\phi(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{2m}{\hbar^2}\cdot(-g)\,\delta(x)\,\phi(x)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2} g\,\phi(0)$$

$\Downarrow$

$$-2\kappa = -\frac{2m}{\hbar^2} g$$

$\Downarrow$

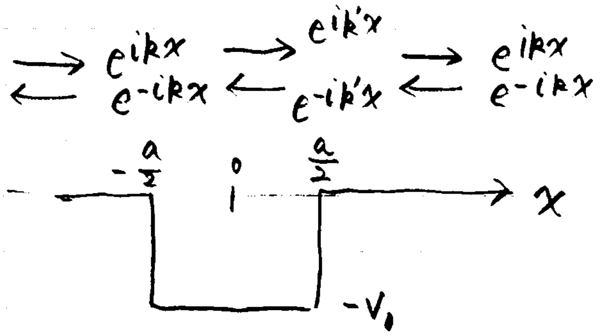
$$\kappa = \frac{m}{\hbar^2} g$$

$\Downarrow$

$$E = -\frac{\kappa^2 \hbar^2}{2m} = -\frac{m g^2}{2\hbar^2}$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY

3.6. 有限井戸型ポテンシャル（連続状態：$E>0$）



$$\phi(x) = \begin{cases} A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx} & (x < -\frac{a}{2}) \\ B_+ e^{ik'x} + B_- e^{-ik'x} & (-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}) \\ C_+ e^{ikx} + C_- e^{-ikx} & \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}$$

※ パリティの固有状態となる解もつくれるが、
ここでは一般的に書く。

※ 束縛状態：遠方で $Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$ の
どちらかがゼロ → エネルギーは離散化

散乱状態：$Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ のどちらも存在
→ どんな E でも解がある
（連続状態）

$x = -\frac{a}{2}$ での波動関数の接続

$$\begin{cases} \phi_>(-\frac{a}{2}) = \phi_<(-\frac{a}{2}) \\ \phi'_>(-\frac{a}{2}) = \phi'_<(-\frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = S_< \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{2kk' e^{-ika}}{2kk'\cos k'a - i(k^2+k'^2)\sin k'a}$$

$$R = \frac{-i(k^2-k'^2)e^{-ika}\sin k'a}{2kk'\cos k'a - i(k^2+k'^2)\sin k'a}$$

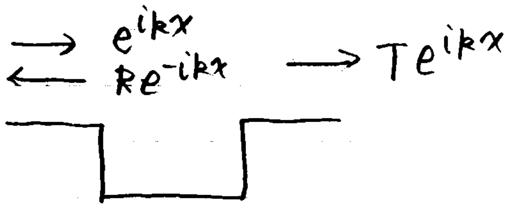
$x = \frac{a}{2}$ での接続条件

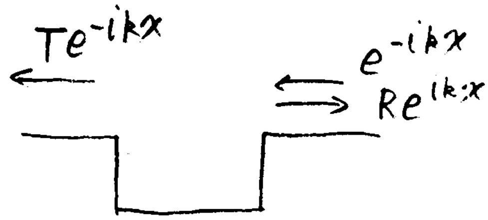
$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = S_> \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

両者を合わせると

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = S_< S_> \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}$$

物理的に興味がある解：



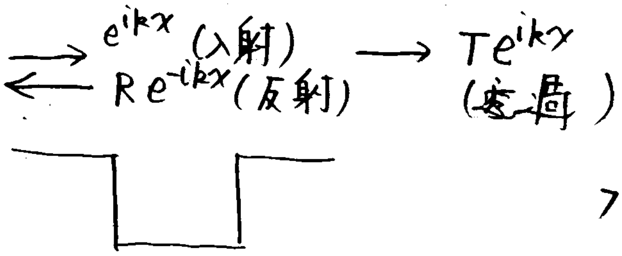


左から入射した波：ϕ_L 右から入射した波：ϕ_R

※ポテンシャルがパリティ対称なので，R と T は ϕ_L と ϕ_R で同じ

フラックス ： $j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(x)\frac{d\psi}{dx} - \psi\frac{d\psi^*}{dx}\right)$

$\psi(x) = e^{\pm ikx}$ に対して $j = \pm\frac{k\hbar}{m}$



T：透過係数
R：反射係数

井戸型ポテンシャルでは解析的に求まる

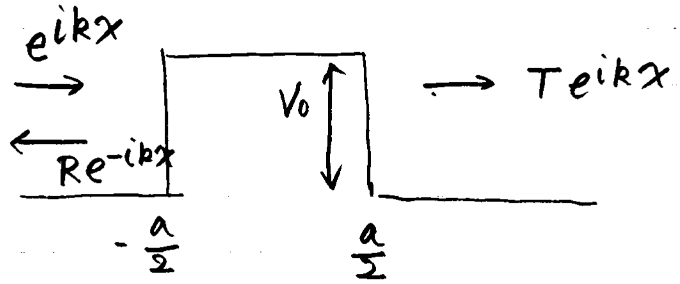
フラックスの保存：
$$1 = |T|^2 + |R|^2$$

cf. 量子反射

このとき

$$1 = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| + \int_0^\infty dE\ |\phi_{E,L}\rangle\langle\phi_{E,L}| + \int_0^\infty dE\ |\phi_{E,R}\rangle\langle\phi_{E,R}|$$

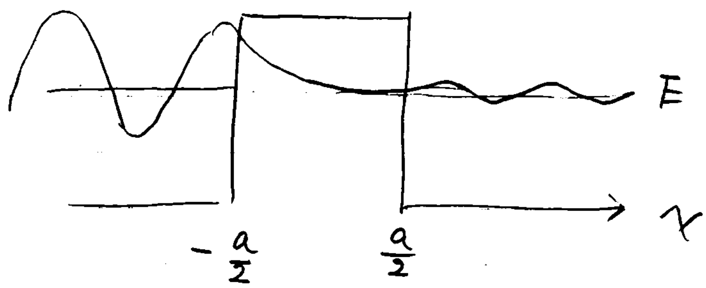
3.7. ポテンシャル障壁と量子トンネル現象



$E < V_0$ でも $T \neq 0$ ⇒「量子トンネル現象」

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & (x < -\frac{a}{2}) \\ Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} & (-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ Te^{ikx} & (x > \frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$



$$T = \frac{2k\kappa e^{-ika}}{2k\kappa \cosh(\kappa a) - i(k^2 - \kappa^2)\sinh(\kappa a)}$$

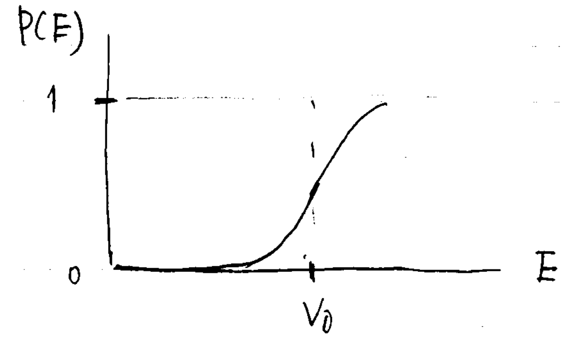
トンネル確率 ： $P(E) = \frac{j_{out}}{j_{in}} = |T|^2$

(note) $V_0 \gg E$ のとき

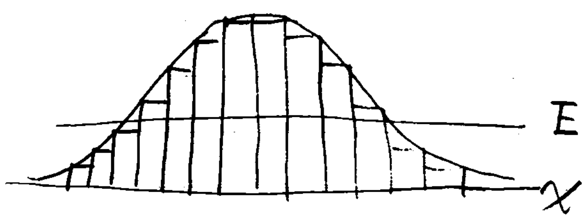
$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \ll \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

$\downarrow$

$$|T|^2 \sim \frac{4k^2\kappa^2}{\kappa^4 \cdot \left(\frac{e^{\kappa a}}{2}\right)^2} = \frac{16k^2}{\kappa^2} \underbrace{e^{-2\kappa a}}_{\text{指数関数}}$$



一般の障壁の場合：

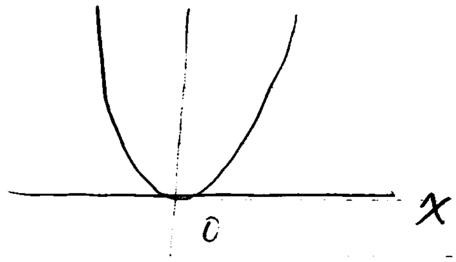


$$P(E) \sim \prod_i e^{-2\kappa_i a} \sim e^{-2\int_{\text{障壁}} dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)}}$$

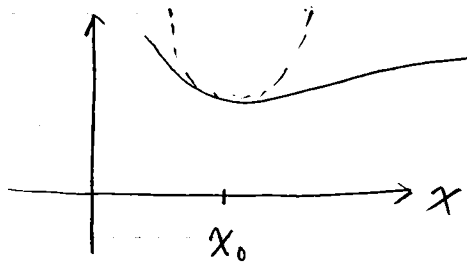
※ よりきちんとした議論は WKB 近似のときに.

3.8. 調和振動子ポテンシャル

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$



(note)



$$V(x) \sim V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right)\phi(x) = E\phi(x)$$

・$x \to \pm\infty$ での解の様子：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right)\phi(x) \sim 0$$

解： $\phi(x) \sim e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

$$\phi'(x) = -\frac{m\omega}{\hbar} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\phi''(x) = -\frac{m\omega}{\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\sim \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

↓ $\phi(x) = f(x) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ とおいて f について解く.

$$\to -\frac{\hbar^2}{2m} f'' + \hbar\omega x f' = \left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) f$$

or $\quad y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$

$$\rightarrow \quad f'' - 2y f' + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) f(y) = 0$$

(note) エルミート多項式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n\right) H_n(x) = 0$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; H_n(x) H_{n'}(x) e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, \delta_{n,n'}$$

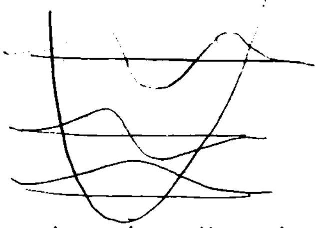
$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$\vdots$$

$\downarrow \quad f(y) = H_n(y) \quad ; \quad \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 = 2n$

$$\rightarrow \quad E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

規格化まで含めると

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$



スペクトル

$\frac{5}{2}\hbar\omega$

$\hbar\omega \updownarrow$

$\frac{3}{2}\hbar\omega$

$\hbar\omega \updownarrow$

$\frac{1}{2}\hbar\omega \leftarrow$ ゼロ点振動