

ハミルトニアン形式を用いた格子ゲージ理論

日高義将
(KEK)

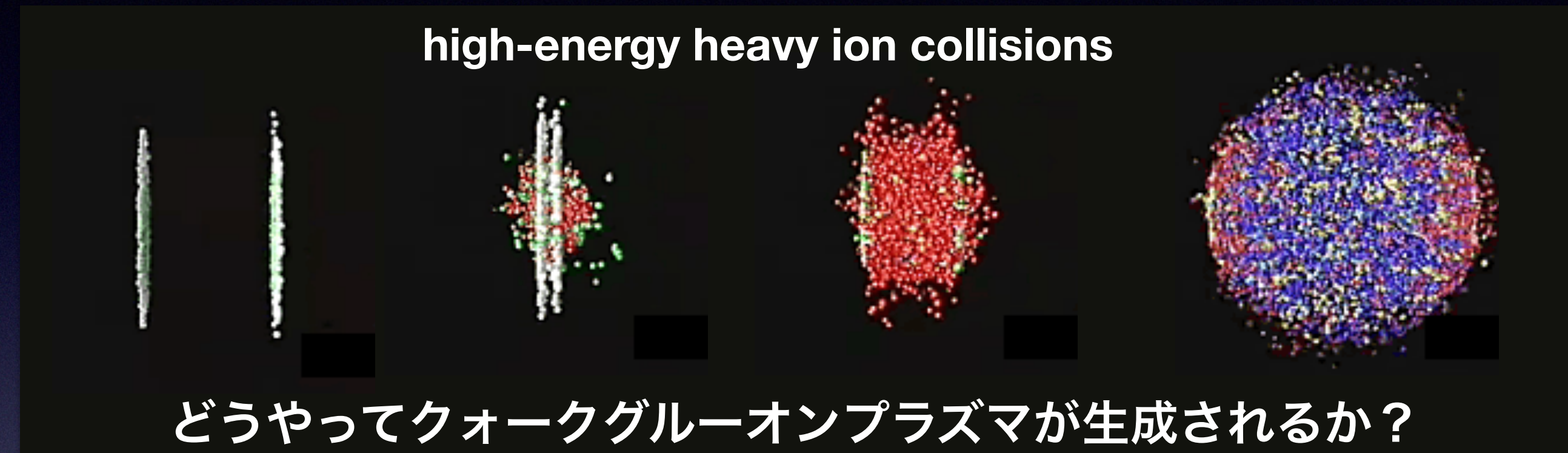
共同研究者: 早田智也(慶応)
西村健太郎(KEK)

based on 2011.09814 [hep-lat]+ in preparation

動機

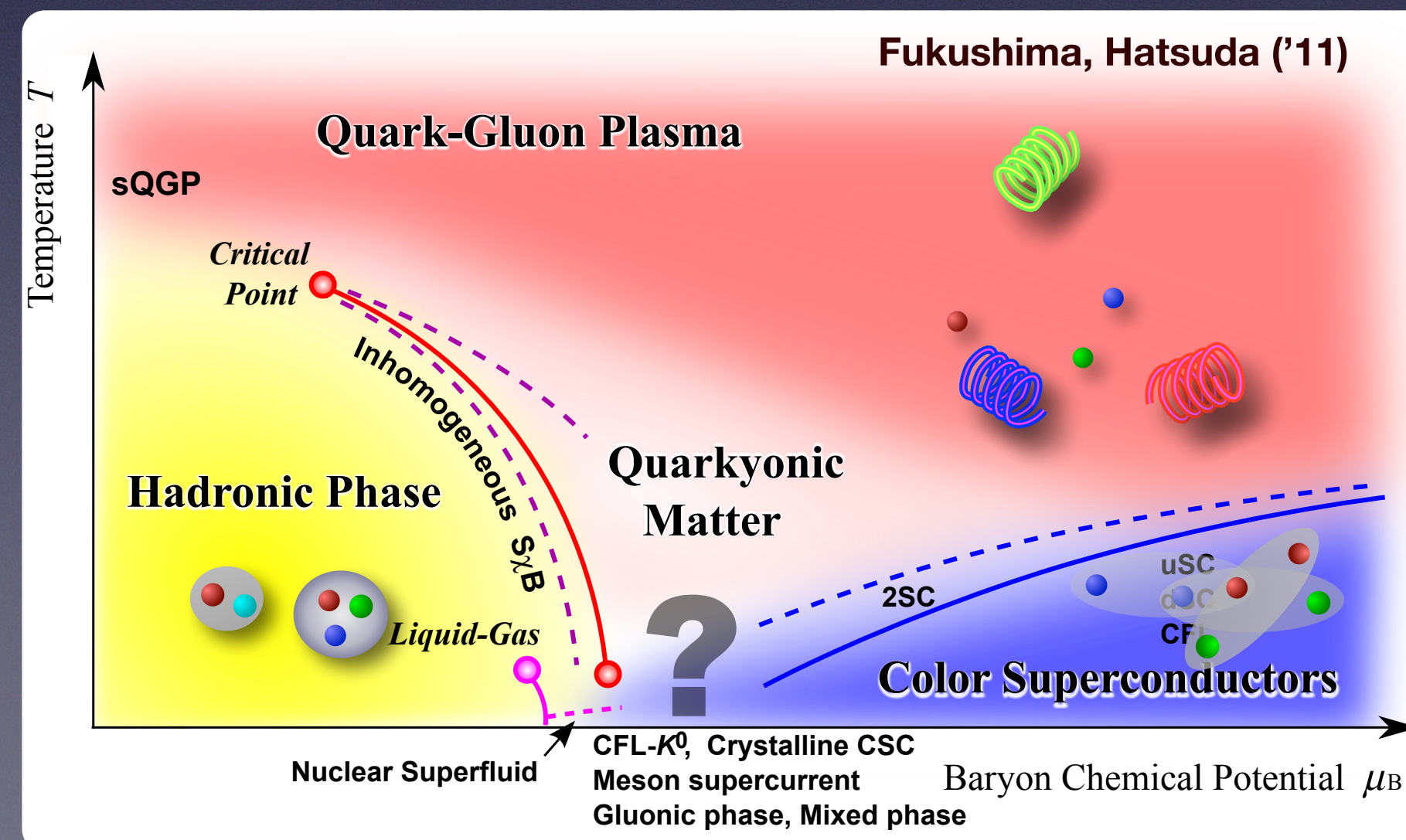
QCDの大きな未理解問題

QCDの多体系の
実時間発展

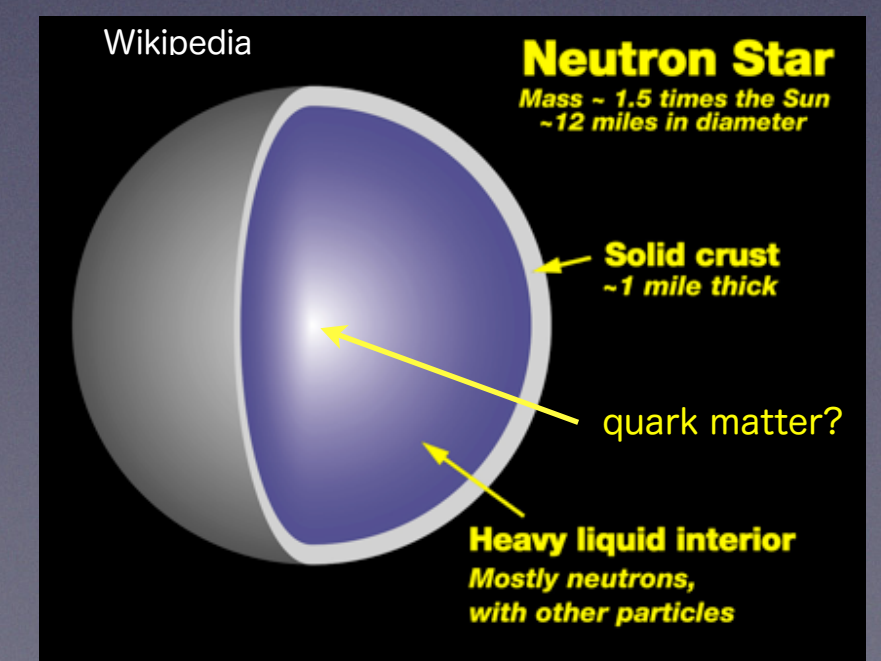


BNLのホームページより

高密度QCD



中性子星の内部では
どんな状態が
実現しているか？



困難

符号問題: importance samplingに
基づいた第一原理計算の困難

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}A \det(D + m) e^{iS} O$$

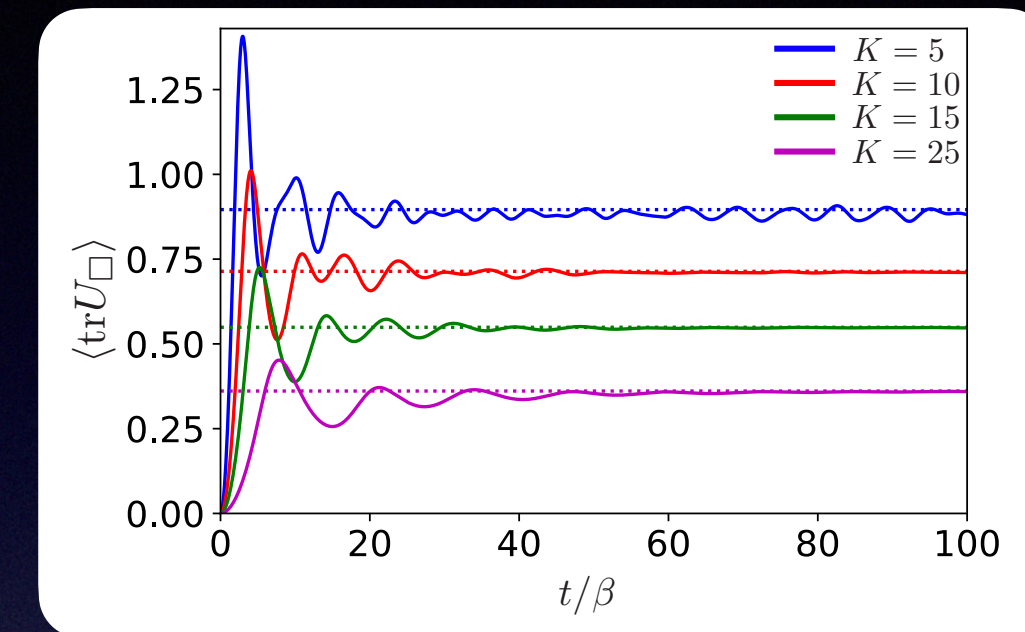
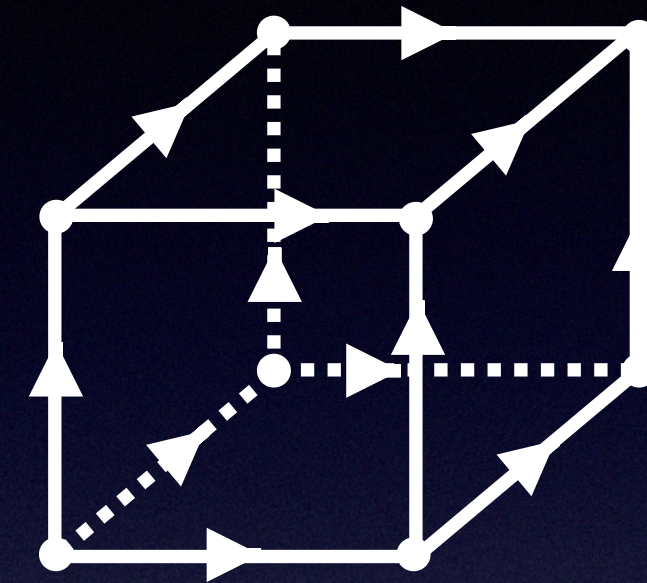
実時間, 有限密度の問題では複素
なため確率分布とみなせない

$$\not\approx \frac{1}{N} \sum_j O_j$$

ハミルトニアン形式を使ったアプローチ

Schrodinger方程式を直接解いて符号問題回避

小さい系なら直接
ミュレーション可能

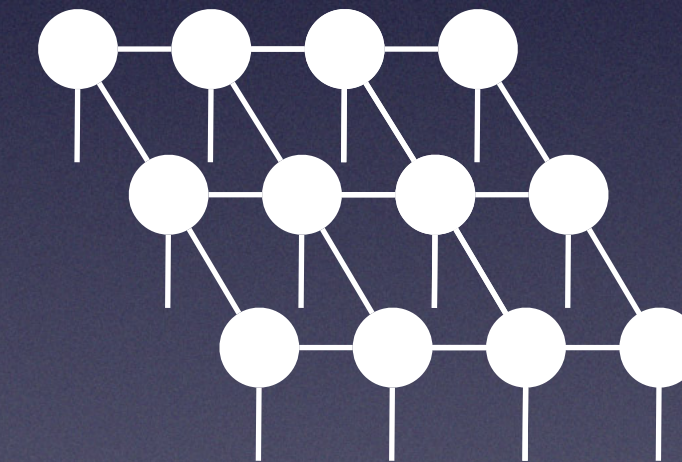


テンソルネットワークを
使った手法

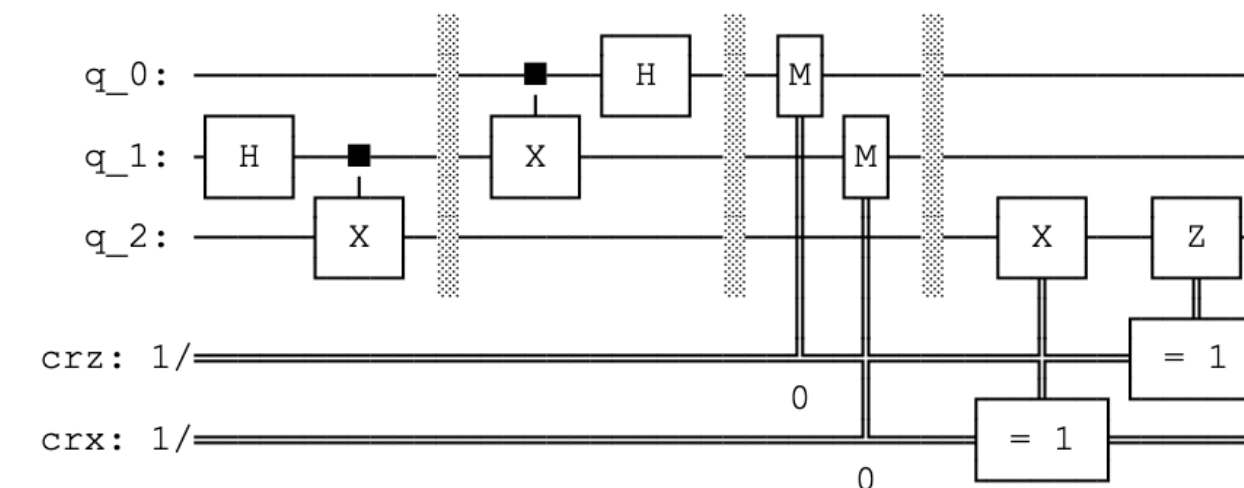
MPS



PEPS



量子コンピュータでの
シミュレーション



ハミルトニアン形式を使ったアプローチ

ゲージ理論での困難

Link変数が連続変数

⇒自由度無限大
(正則化が必要)

$$U \in \text{SU}(N)$$

連続空間

ゲージ対称性と相性の
良い近似法は？

ゲージ不変性があるため $\dim \mathcal{H}_{\text{phys}} \ll \dim \mathcal{H}_{\text{total}}$
無駄な自由度が大きい Gauss law constraintを解く必要性

目次

●定式化

Kogut-Susskindのハミルトニアン形式

ゲージ自由度の消去

有限自由度への正則化法

●シミュレーション

(3+1)次元小さい系でのYang-Mills理論の熱化

●まとめ

$SU(N)$ ゲージ理論 ($A_0 = 0$ ゲージ)

正準交換関係

$$[A_n^i(x), E_{mj}(x')] = i\delta_{nm}\delta_j^i\delta(x-x')$$

ゲージ場 電場

ハミルトニアン

$$H = \int d^3x \left(\frac{g^2}{2} E^2(x) + \frac{1}{2g^2} B^2(x) \right)$$

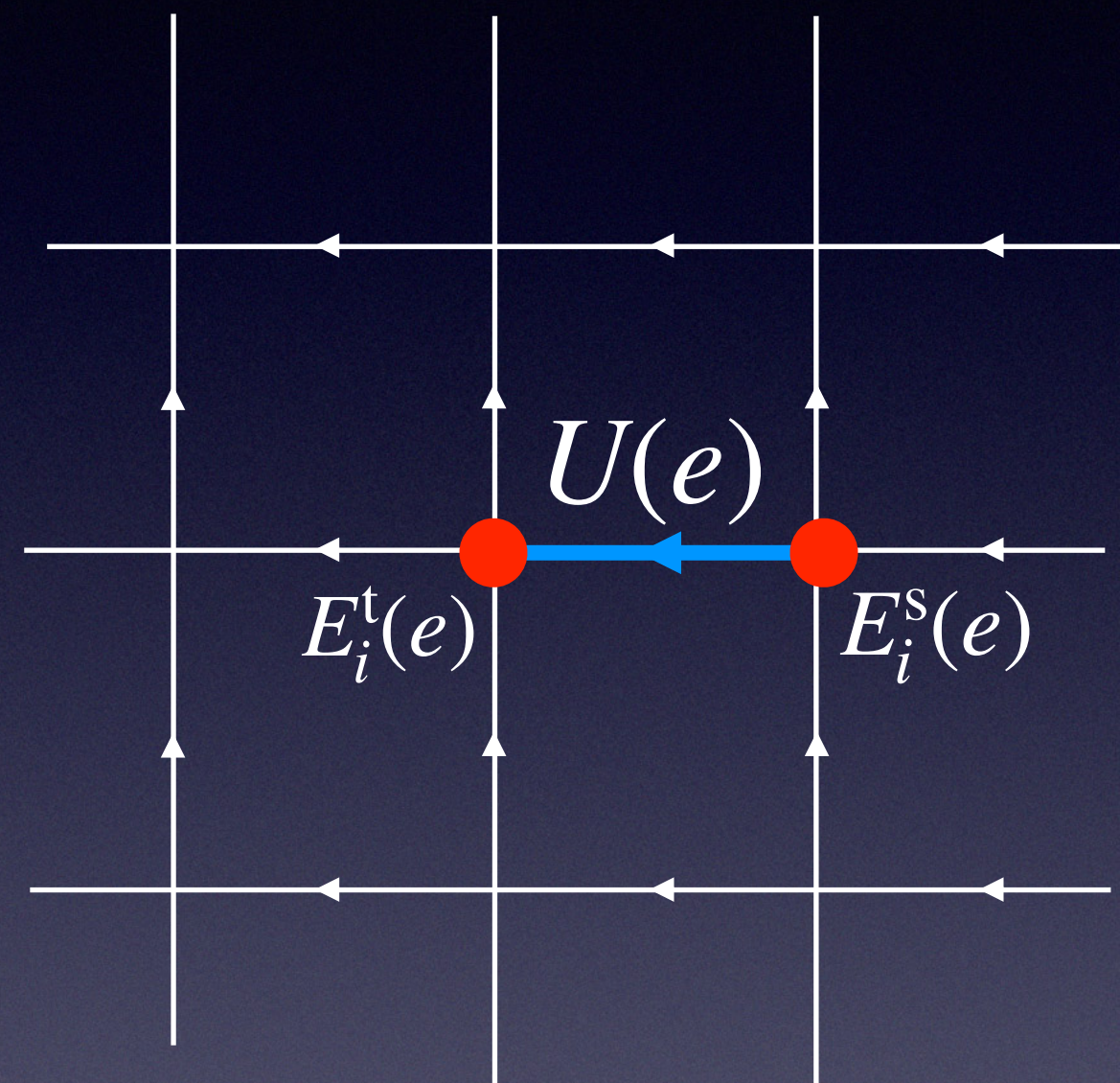
磁場 $B_l^i = \frac{1}{2}\epsilon_{lnm}(\partial_m A_n^i - \partial_n A_m^i + f_{jk}^i A_m^j A_n^k)$

Gauss law 拘束条件 $(D \cdot E)^i |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0$

Kogut-Susskind Hamiltonian 形式

Kogut, Susskind, Phys. Rev. D 11, 395 (1975)

時間は連続, 空間を離散化



$e^{i\int A} \rightarrow U(e)$: 辺 e 上のリンク変数 $\in \text{SU}(N)$

$E_i^s(e), E_i^t(e)$: 辺の始点, 終点上の電場 $\in \mathfrak{su}(N)$

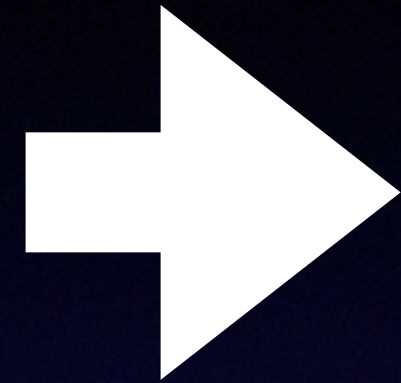
$E_i^s(e)$ と $E_i^t(e)$ は, 独立でない

$[U_{\text{adj}}(e)]_i^j E_j^t(e) = E_i^s(e)$ で関係

➡ $E^2(e) = \delta^{ij} E_i^s(e) E_j^s(e) = \delta^{ij} E_i^t(e) E_j^t(e)$

交換関係

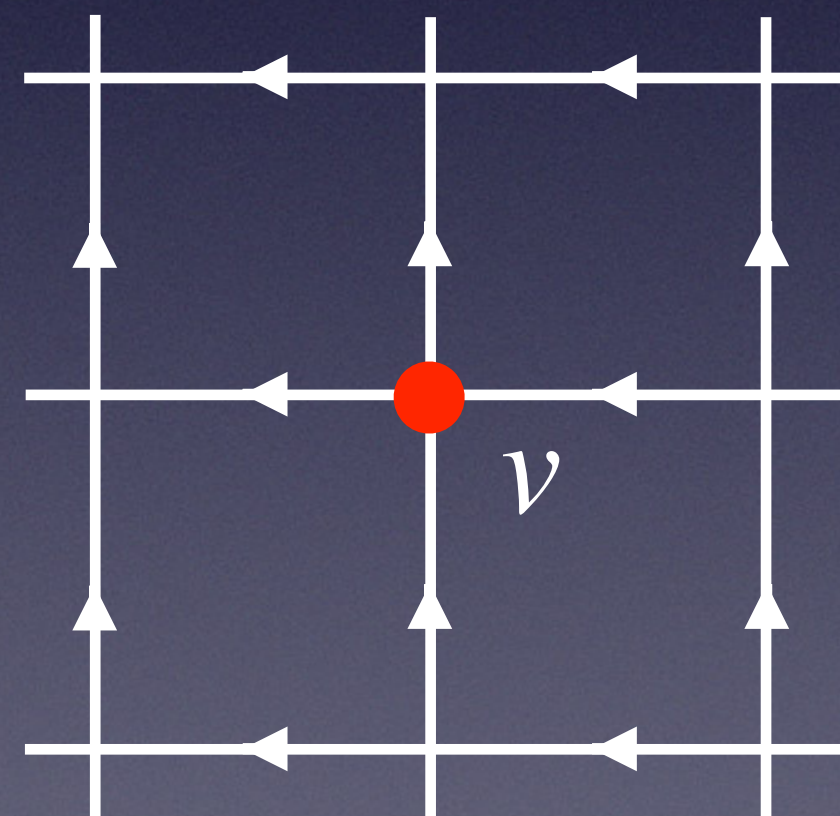
$$[A_n^i(x), E_{mj}(x')] = i\delta_{nm}\delta_j^i\delta(x-x')$$



$$[E_i^s(e), U(e')] = U(e)T_i\delta_{e,e'}$$

$$[E_i^t(e), U(e')] = T_iU(e)\delta_{e,e'}$$

$$[E_i^{s/t}(e), E_j^{s/t}(e')] = if_{ij}^k E_k^{s/t}(e)\delta_{e,e'}$$



ガウスの拘束条件 $(D \cdot E)^i |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0$

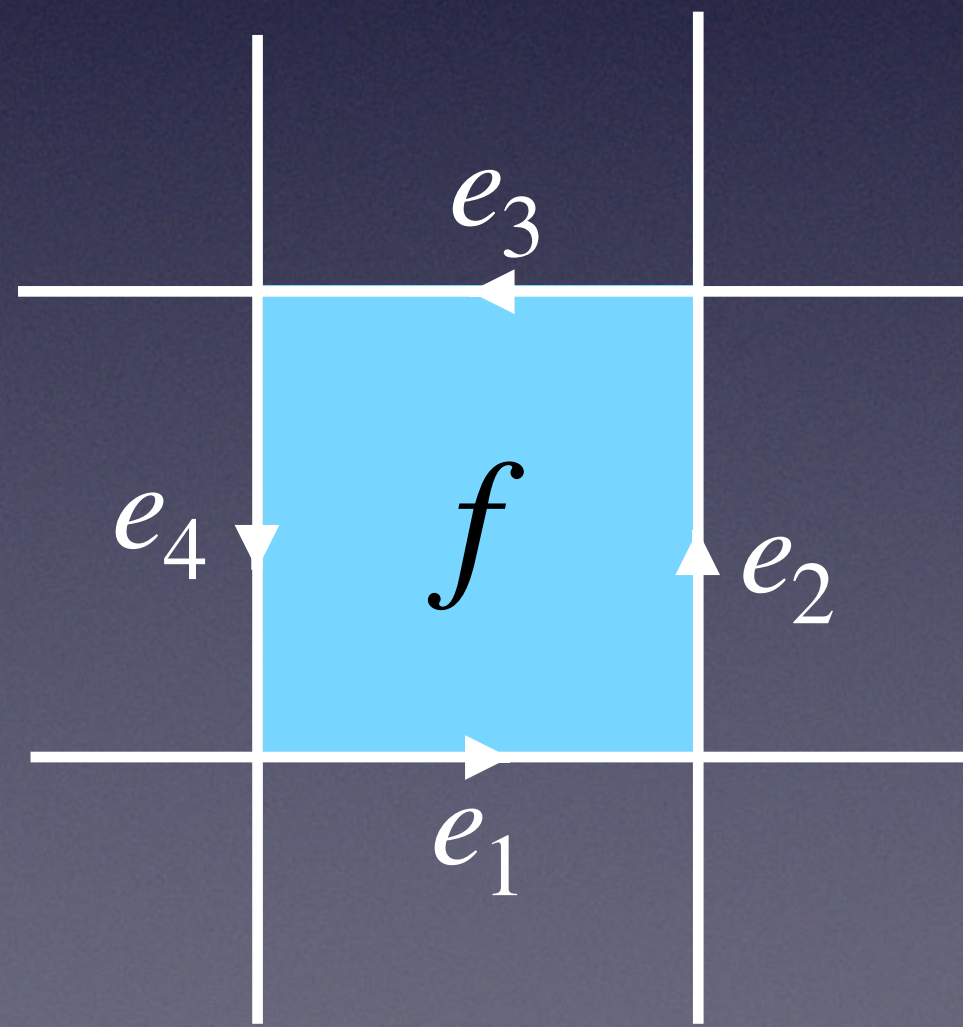
$$\left(\sum_{e \in C_1 | s(e)=v} E_i^s(e) - \sum_{e \in C_1 | t(e)=v} E_i^t(e) \right) |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0$$

C_1 : 辺の集合, s, t : 辺の始点, 終点を取る関数

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} \sum_{e \in C_1} (E(e))^2 - \frac{K}{2} \sum_{f \in C_2} (\text{tr} U(f) + \text{tr} U^\dagger(f))$$

C_2 :面の集合



$$U(f) := U(e_4)U(e_3)U(e_2)U(e_1)$$

具体的に解くためには,

- 基底構成する
- Gauss law 拘束条件を解いて物理状態の基底を構成する
⇒SU(2)の場合はスピンネットワーク
- スピンネットワークへの演算子の作用を計算
- ゲージ対称性を尊重した有限自由度近似

2種類の基底:磁氣的基底, 電氣的基底

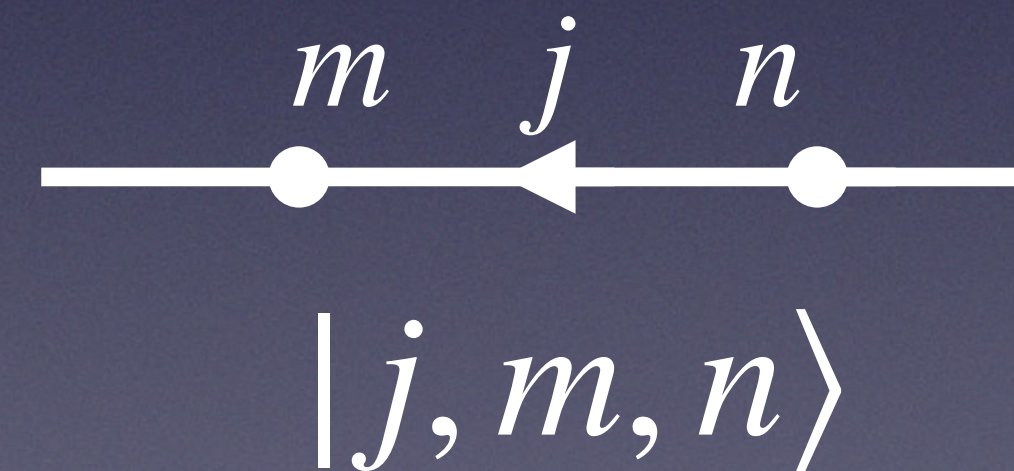
磁氣的基底(Wilson lineの固有状態)

$$[U_a]_n^m |g\rangle = [R_a]_n^m(g) |g\rangle \quad g \in \text{SU}(2)$$

表現 a のWilson line 表現行列

電氣的基底(電場の固有状態)

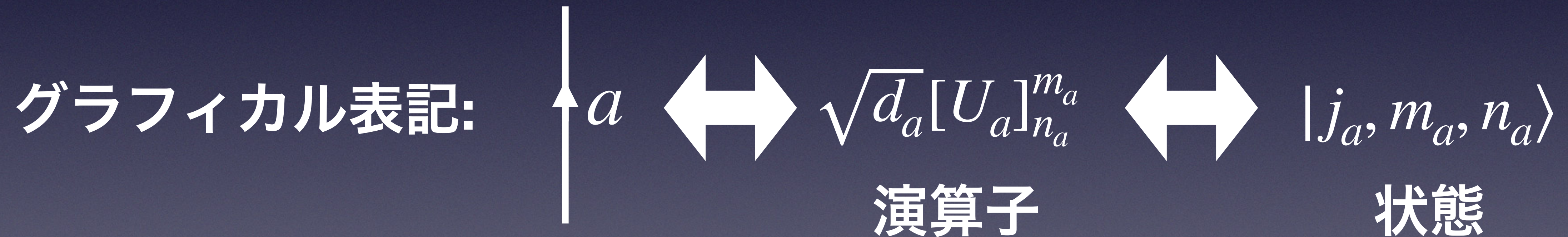
$$\begin{aligned} E^2 |j, m, n\rangle &= j(j+1) |j, m, n\rangle \\ E_3^s |j, m, n\rangle &= n |j, m, n\rangle \\ E_3^t |j, m, n\rangle &= m |j, m, n\rangle \end{aligned}$$



状態はWilson lineで生成できる

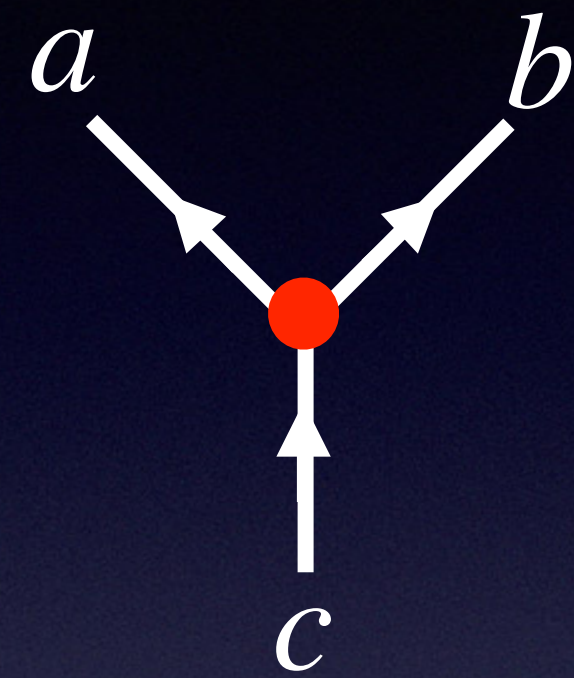
$$\sqrt{d_a}[U_a]_{n_a}^{m_a}|0,0,0\rangle = |j_a, m_a, n_a\rangle$$

$$d_a = 2j_a + 1 \quad \text{量子次元}$$



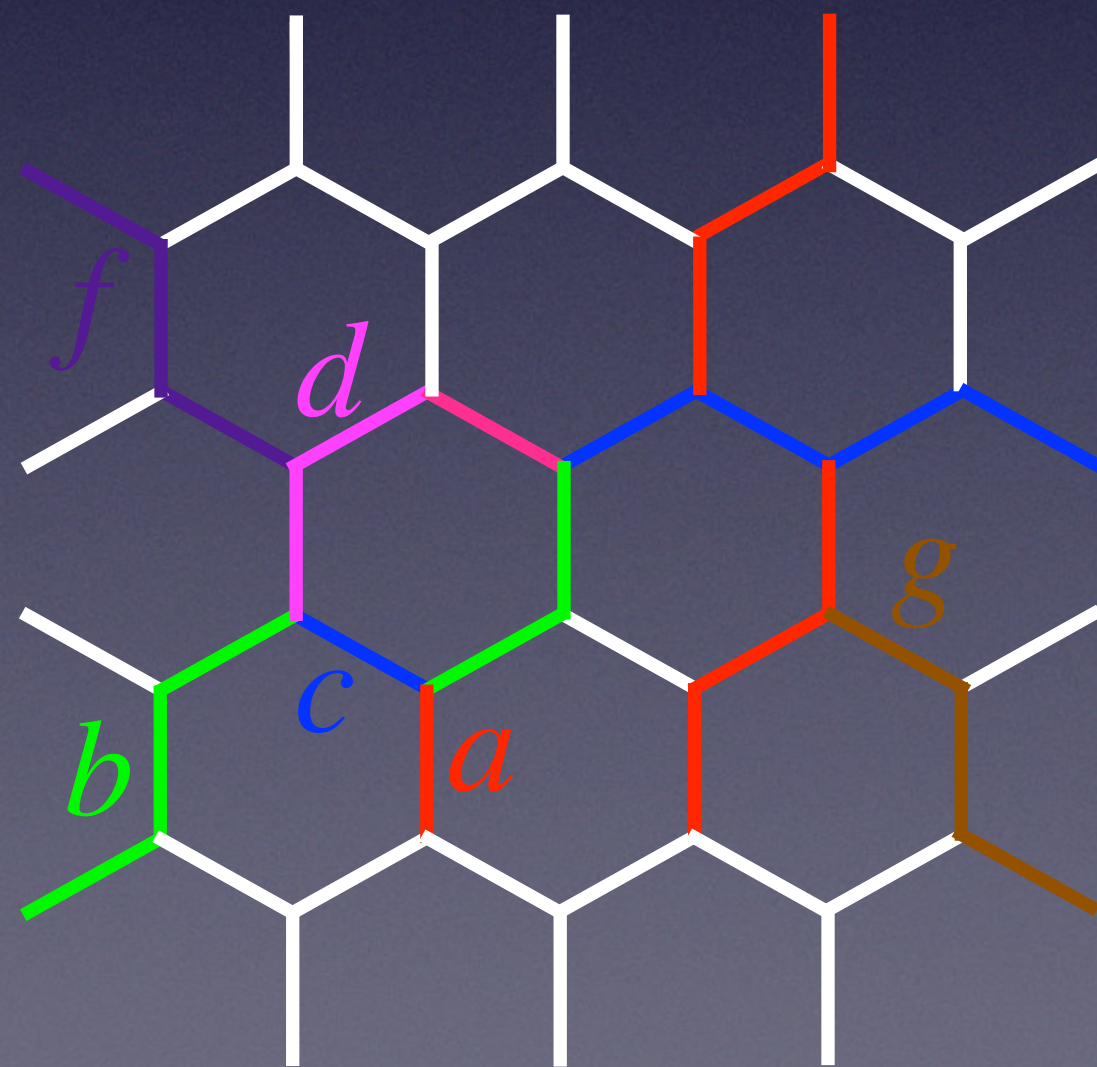
物理状態: スピンネットワーク

Gaussの拘束条件: 各頂点でSU(2)不変



$$\sum_{n_a, n_b, m_c} \frac{1}{\sqrt{d_c}} \langle j_a n_a j_b n_b | j_c m_c \rangle |j_a, m_a, n_a\rangle |j_b, m_b, n_b\rangle |j_c, m_c, n_c\rangle$$

Clebsch-Gordan係数



物理状態: 3点頂点を持つスピンネットワーク

辺に角運動量のラベル

各頂点は三角不等式を満たす

状態はWilson lineで生成可

⇒Wilson lineのネットワーク

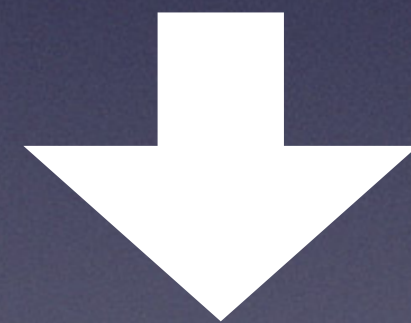
物理量: 電場とWilson lineで構成

状態: Wilson lineで生成

Wilson lineの合成規則がわかると

演算子の状態への作用が決まる

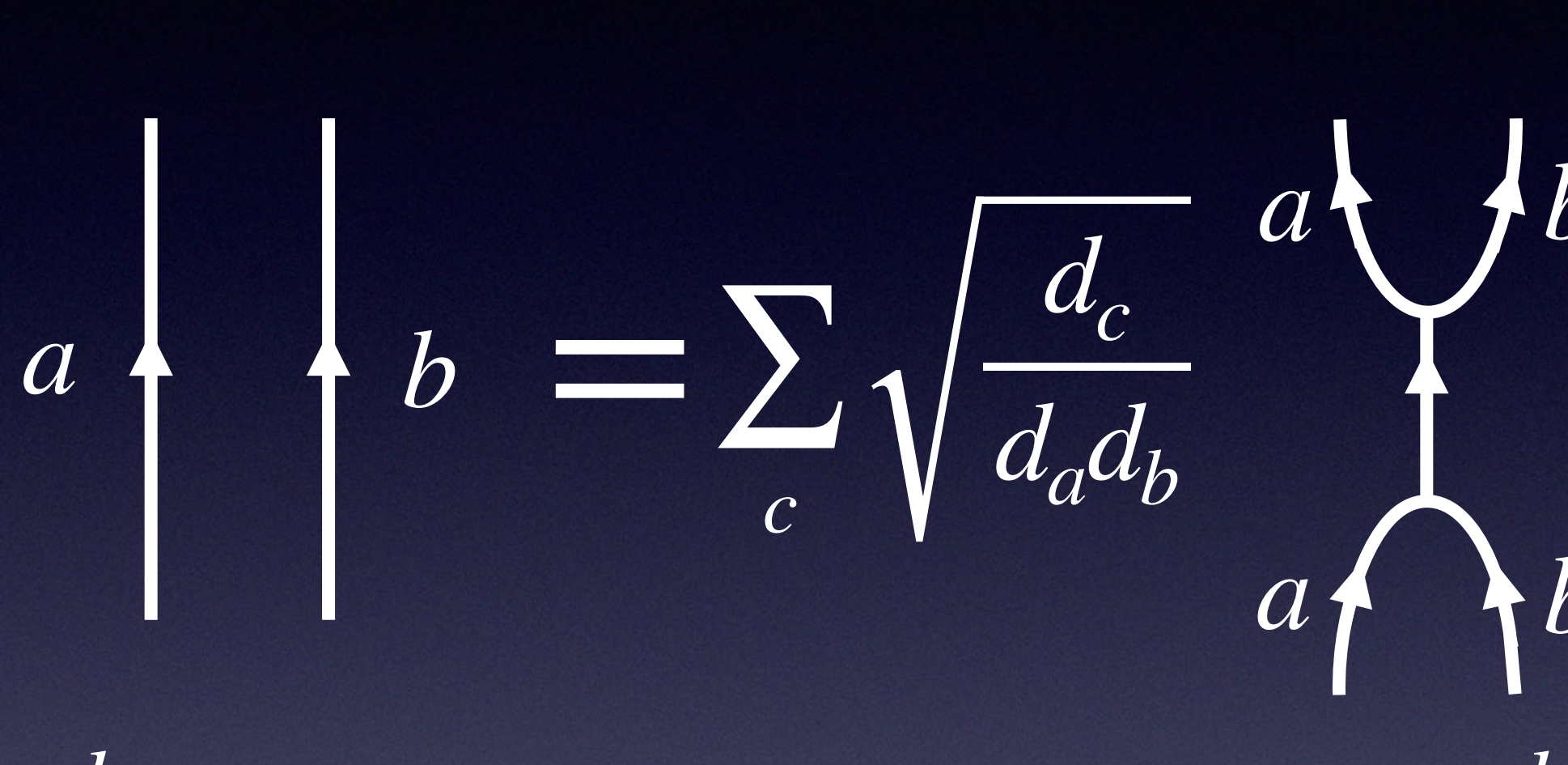
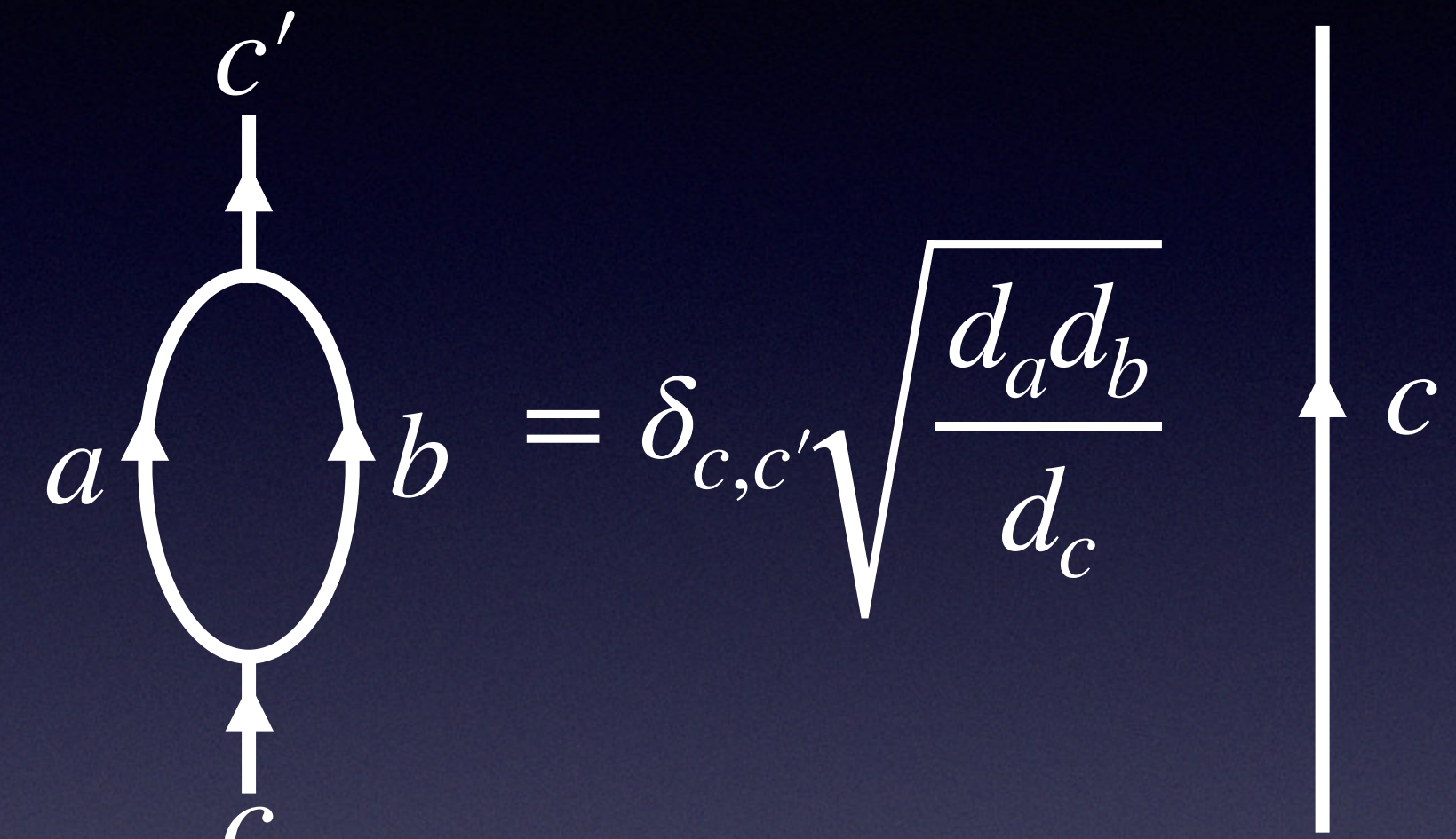
例えば $[U_a]_{n_a}^{m_a} [U_b]_{n_b}^{m_b} = \sum_{j_c, m_c, n_c} \langle j_a m_a j_b m_b | j_c, m_c \rangle \langle j_c, n_c | j_a n_a j_b n_b \rangle [U_c]_{n_c}^{m_c}$

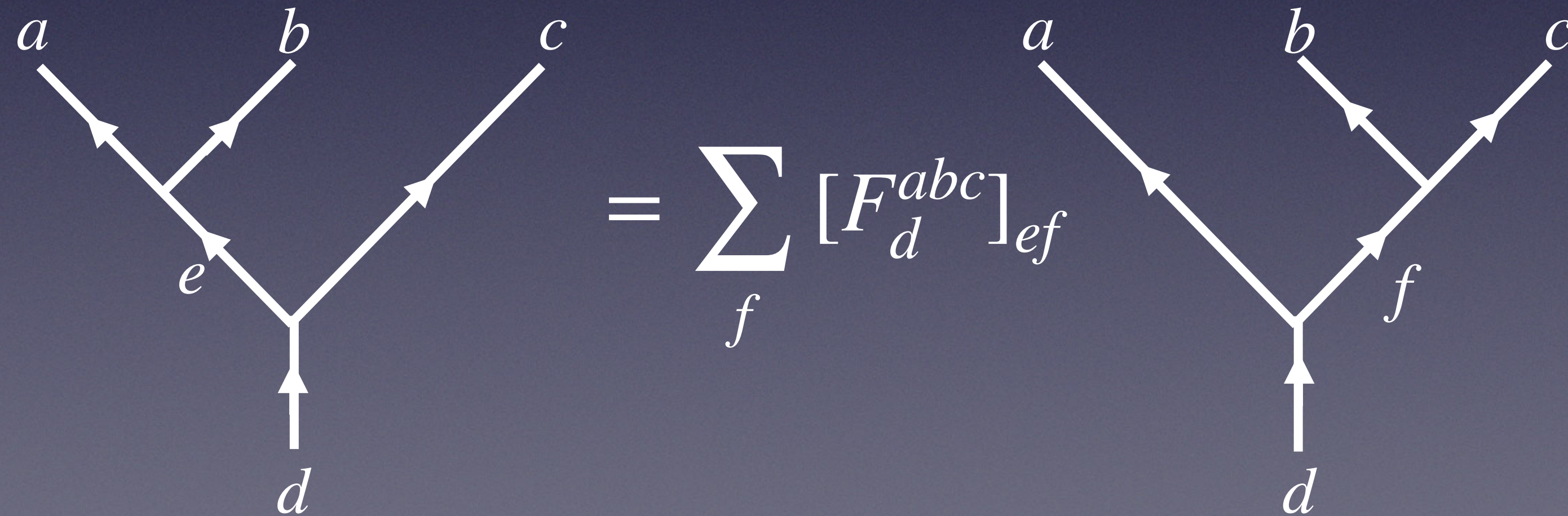
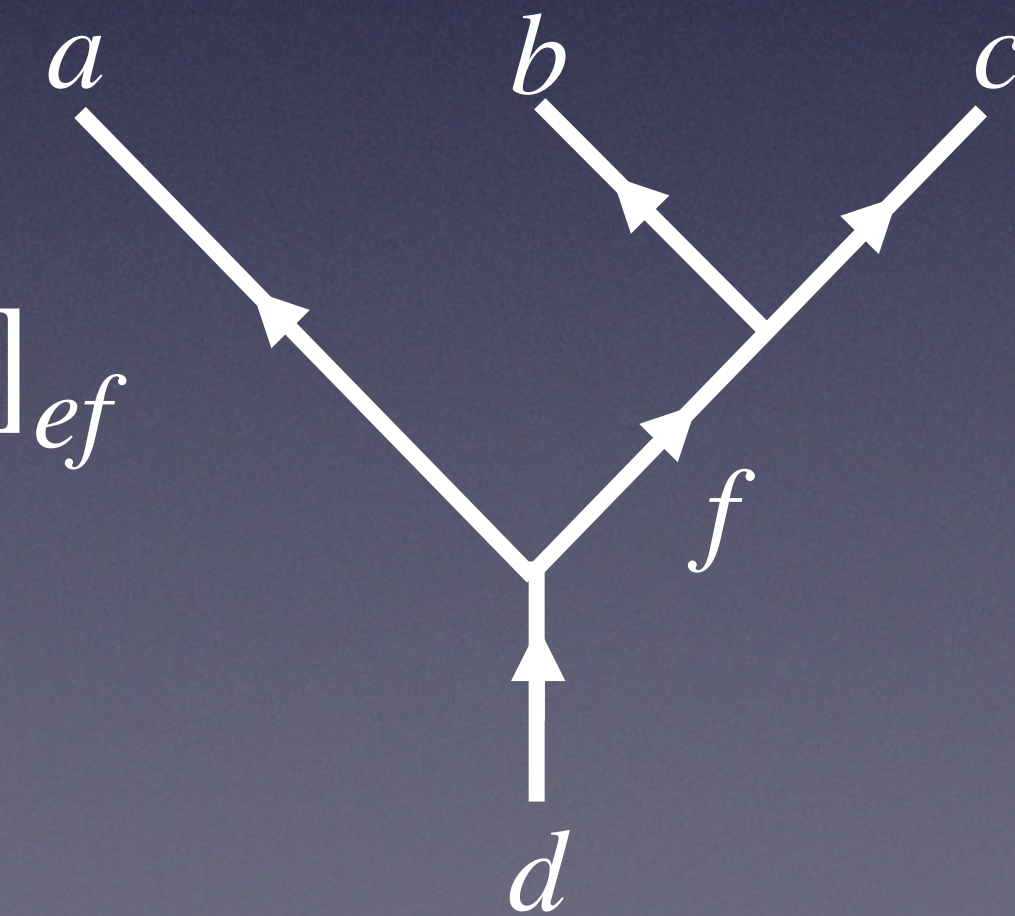


グラフィカル表記 $a \uparrow \uparrow b = \sum_c \sqrt{\frac{d_c}{d_a d_b}}$

ネットワークの合成規則

融合ルール: $a \times b = \sum_c N_{ab}^c c$ $N_{ab}^c = \delta_{abc} = \begin{cases} 1 & |j_a - j_b| \leq j_c \leq j_a + j_b, j_a + j_b + j_c \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$


$$a \quad b = \sum_c \sqrt{\frac{d_c}{d_a d_b}}$$

$$a \quad b = \delta_{c,c'} \sqrt{\frac{d_a d_b}{d_c}} c$$

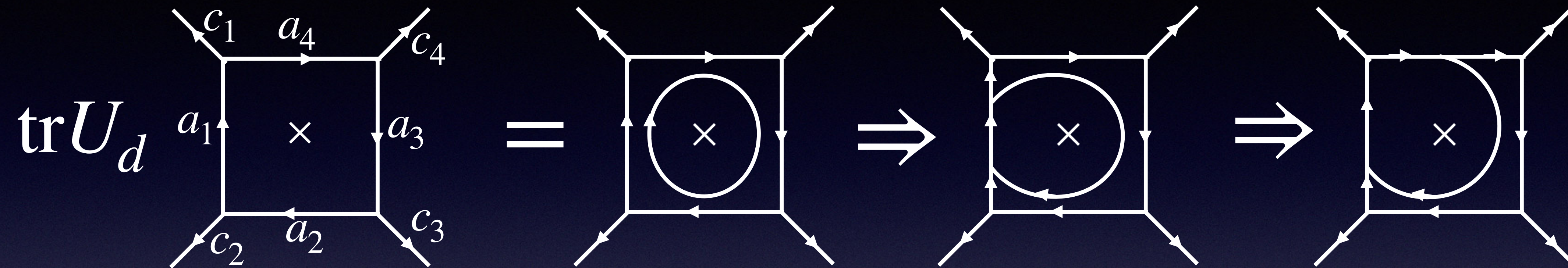

$$a \quad b \quad c = \sum_f [F_d^{abc}]_{ef}$$


Wigner 6-j symbol

$$[F_d^{abc}]_{ef} = (-1)^{j_a + j_b + j_c + j_d} \sqrt{d_e d_f} \begin{Bmatrix} j_a & j_b & j_e \\ j_c & j_d & j_f \end{Bmatrix}$$

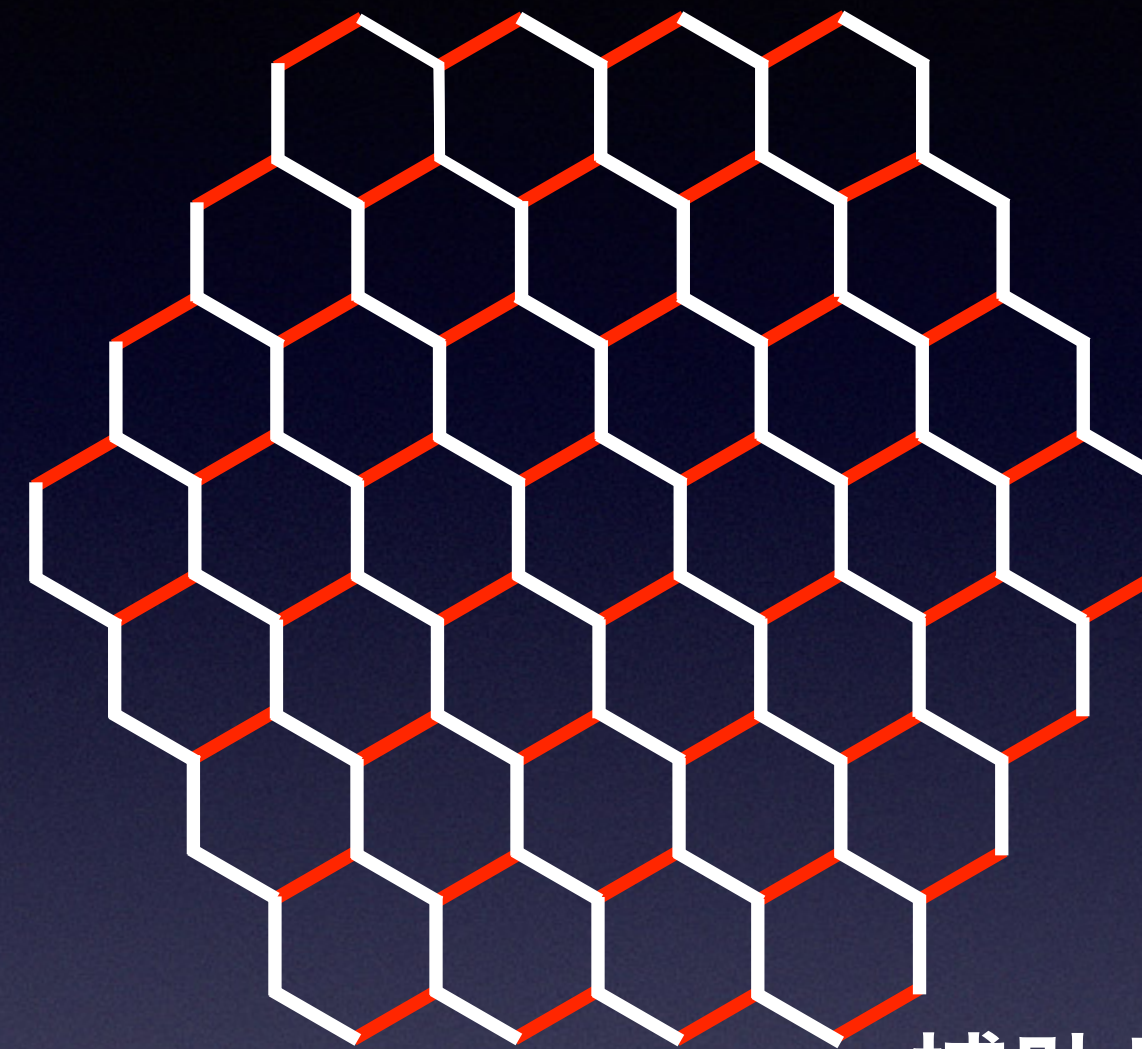
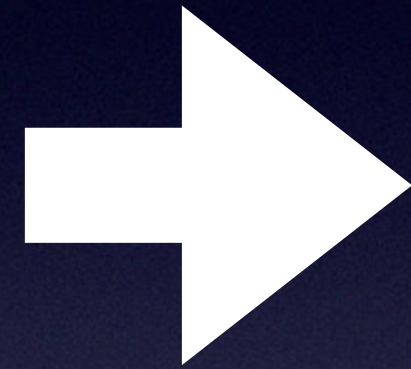
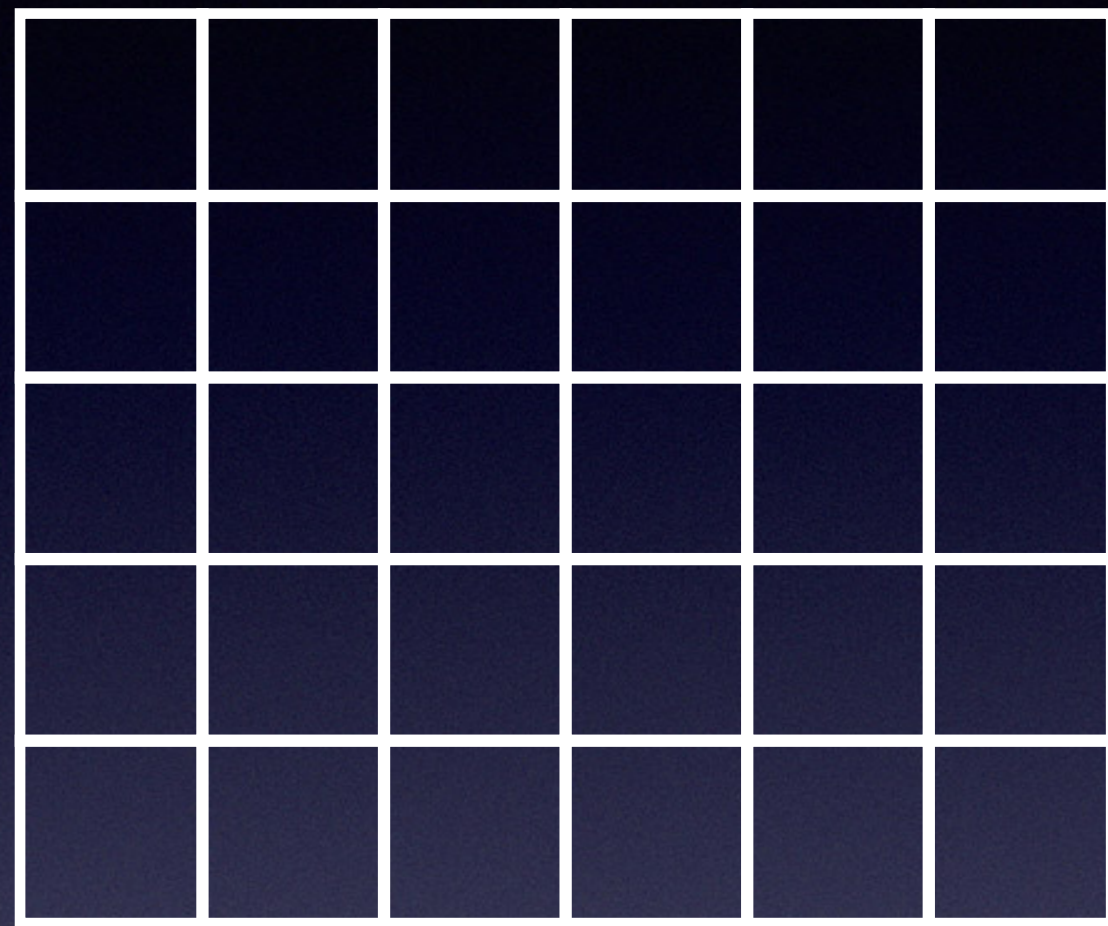
+ 無矛盾条件

ネットワークへのWilson loopの作用

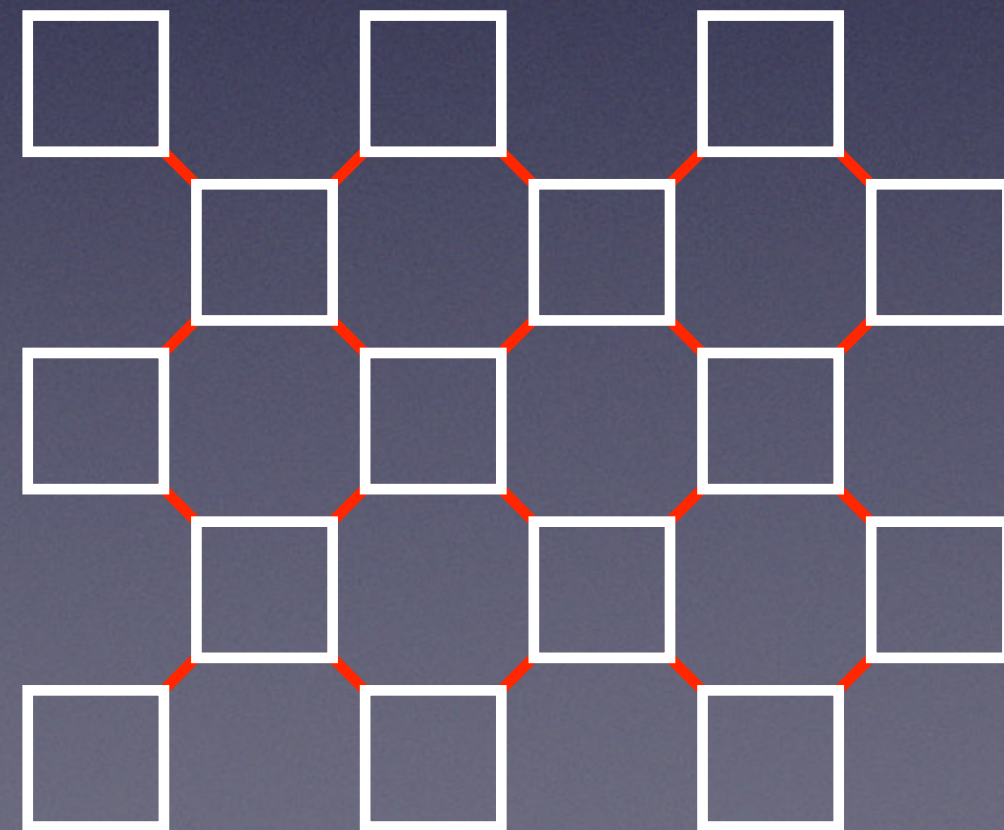


$$= \prod_{i=1}^4 \sum_{b_i} [F_{b_i}^{c_i a_{i-1} d}]_{a_i b_{i-1}}$$

正方格子の取り扱い



補助リンク



別の補助リンクの入れ方

ネットワークの合成ルールにより
行列要素が補助リンクの入れ方によらない

表現のラベルによる正則化

合成ルールを満たすように表現の最大値を

整数 k でカットオフ $j \leq k/2$

⇒量子群 $SU(2)_k$

実用上は, (半)整数 n を $[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{k+2} n}{\sin \frac{\pi}{k+2}}$ に置き換えればOK

ネットワークの合成ルールはFusion圏

スピンネットワークは非局所的で使いにくい

状態に三角不等式を課さない

代わりにハミルトニアンにペナルティ項を入れる.

$$\delta_{abc} = \begin{cases} 1 & |j_a - j_b| \leq j_c \leq j_a + j_b, j_a + j_b + j_c \in \mathbb{Z} \text{ かつ } j_a + j_b, j_a + j_b + j_c \leq k/2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とし $Q|j_a, j_b, j_c\rangle = \delta_{abc}|j_a, j_b, j_c\rangle$ とする

$$H \rightarrow H - t \sum_{\substack{v \in C_0 \\ \text{頂点の集合}}} Q_v \quad \text{と置き換えて } t \rightarrow \infty \text{ を考える}$$

$SU(2)_k$ Yang-Mills理論のスピンモデルによる表現

辺に自由度: $j = 0, 1/2, \dots, k/2$

ハミルトニアン $H = \frac{1}{2} \sum_{e \in C_1} (E_i(e))^2 - K \sum_{f \in C_2} \text{tr} U(f) - t \sum_{v \in C_0} Q(v)$

状態への作用

$$E_i^2 \begin{array}{c} \uparrow \\ a \end{array} = [j_a][j_a + 1] \begin{array}{c} \uparrow \\ a \end{array}$$

$$Q \begin{array}{c} a \quad b \\ \searrow \quad \swarrow \\ \uparrow \\ c \end{array} = \delta_{abc} \begin{array}{c} a \quad b \\ \searrow \quad \swarrow \\ \uparrow \\ c \end{array}$$

$$\text{tr} U \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & c_1 & a_4 & & c_4 \\ & \swarrow & \rightarrow & \searrow & \\ a_1 \uparrow & \times & \downarrow & a_3 & \\ & c_2 & a_2 & & c_3 \end{array} \end{array} = \prod_{i=1}^4 \sum_{b_i} [F_{b_i}^{c_i a_{i-1} \frac{1}{2}}] \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & c_1 & b_4 & & c_4 \\ & \swarrow & \rightarrow & \searrow & \\ b_1 \uparrow & \times & \downarrow & b_3 & \\ & c_2 & b_2 & & c_3 \end{array} \end{array}$$

シミュレーション

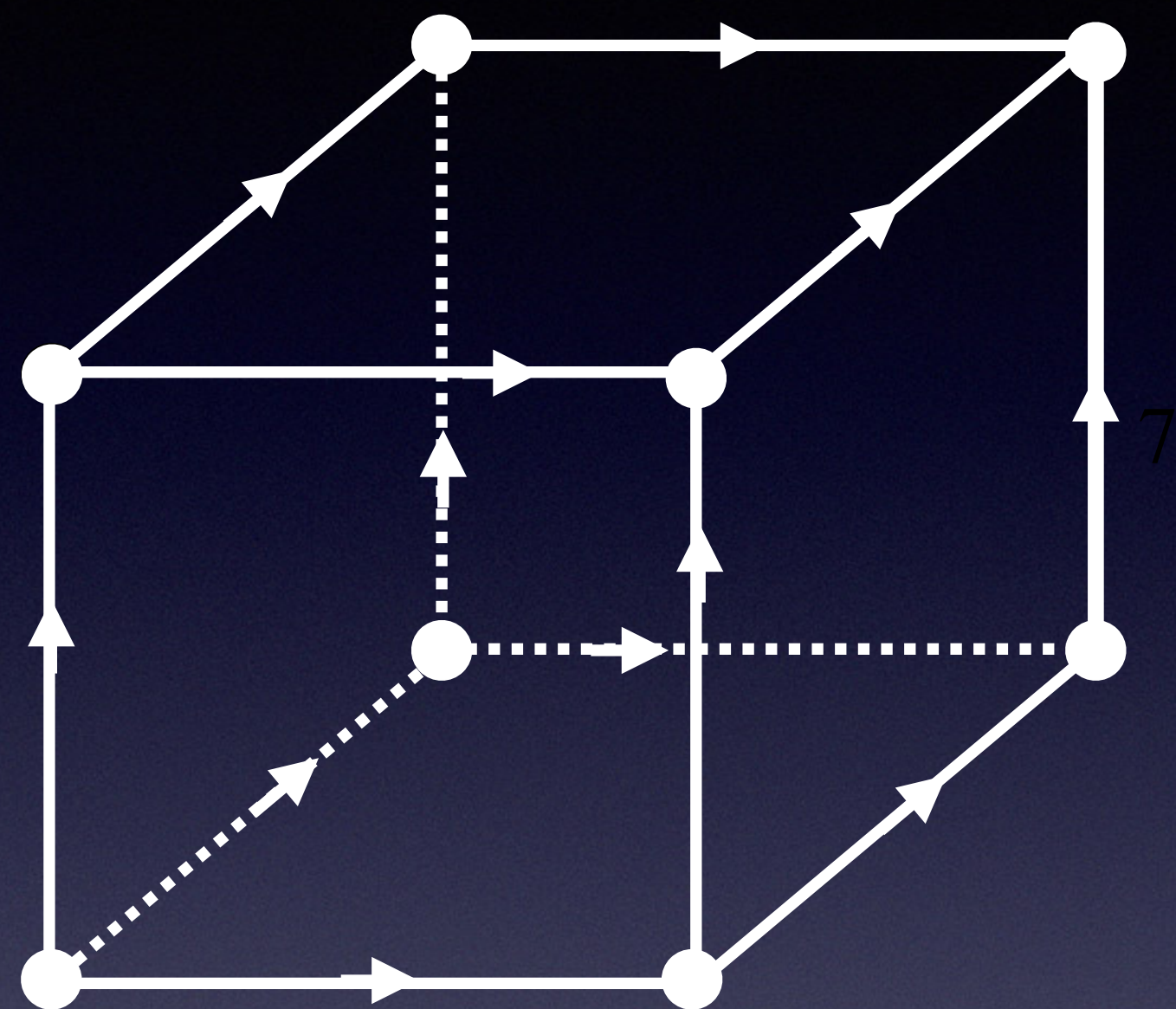
(3+1)次元 Yang-Mills理論の熱化

Hayata, YH, 2011.09814 [hep-lat]

(1+1)次元 QCDの有限密度計算

Hayata, YH, Nishimura, 2208.xxxxxx

(3+1)次元 Yang-Mills理論の熱化



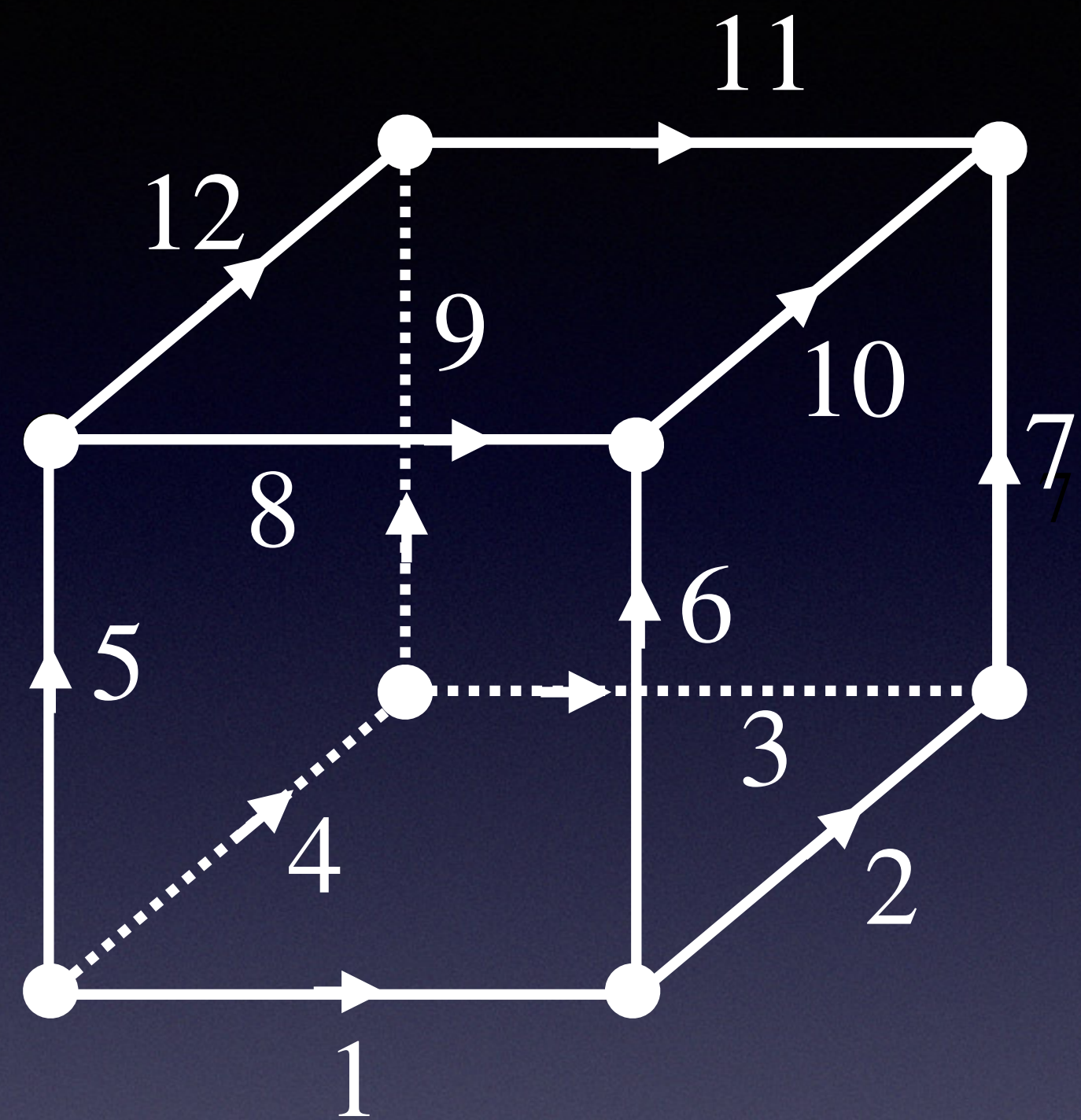
1つの立方体

- 8個の頂点

- 6個の面

- 12個のリンク

物理状態の基底



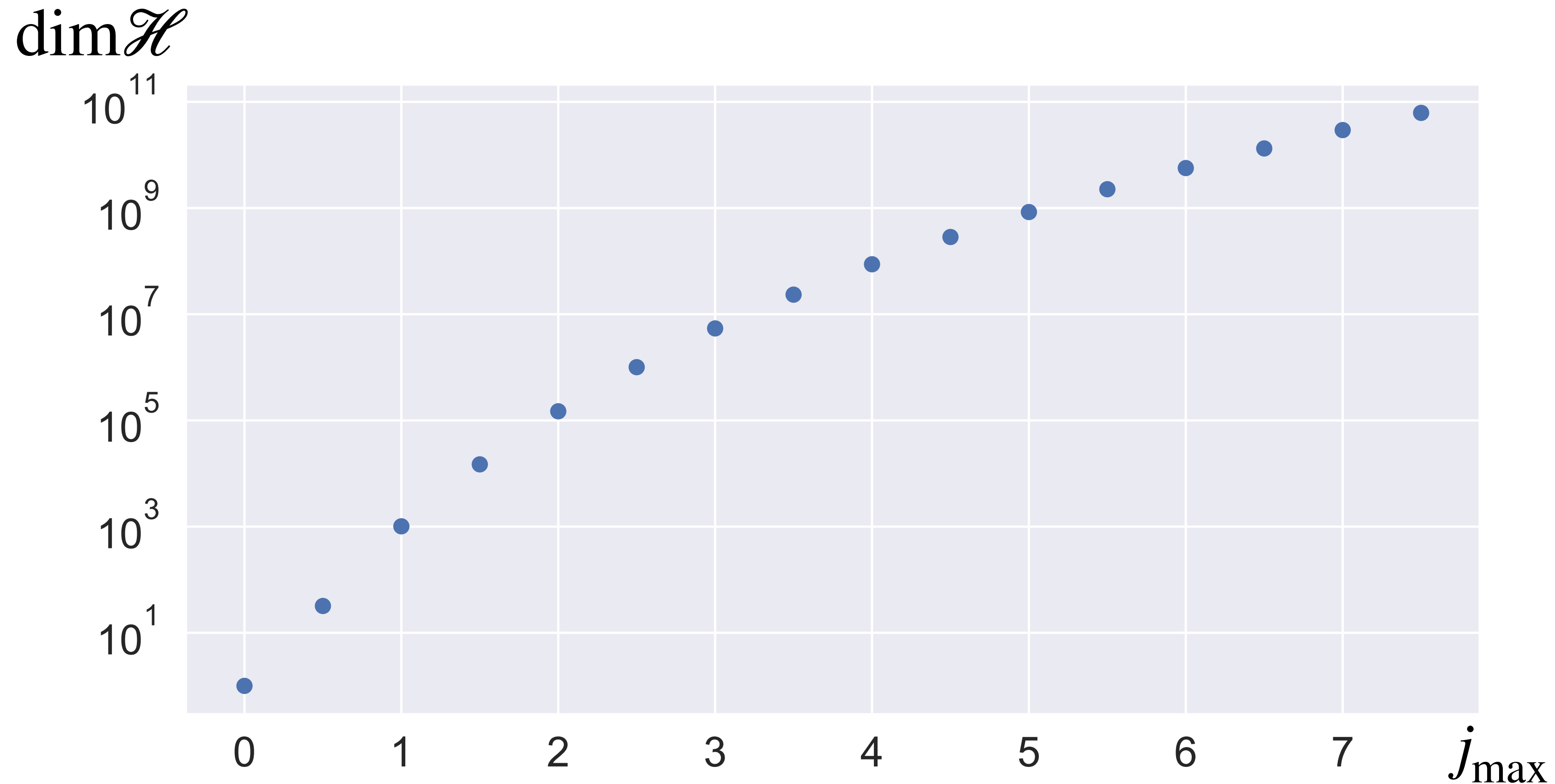
基底

$$|j_1, \dots, j_{12}\rangle = |j_1, j_2, j_6\rangle |j_2, j_3, j_7\rangle |j_3, j_4, j_8\rangle |j_1, j_4, j_5\rangle \\ |j_6, j_9, j_{10}\rangle |j_7, j_{10}, j_{11}\rangle |j_8, j_{11}, j_{12}\rangle |j_5, j_9, j_{12}\rangle$$

スピンの上限にnaiveカットオフ $j_i \leq j_{\max}$

三角不等式は解いてしまう

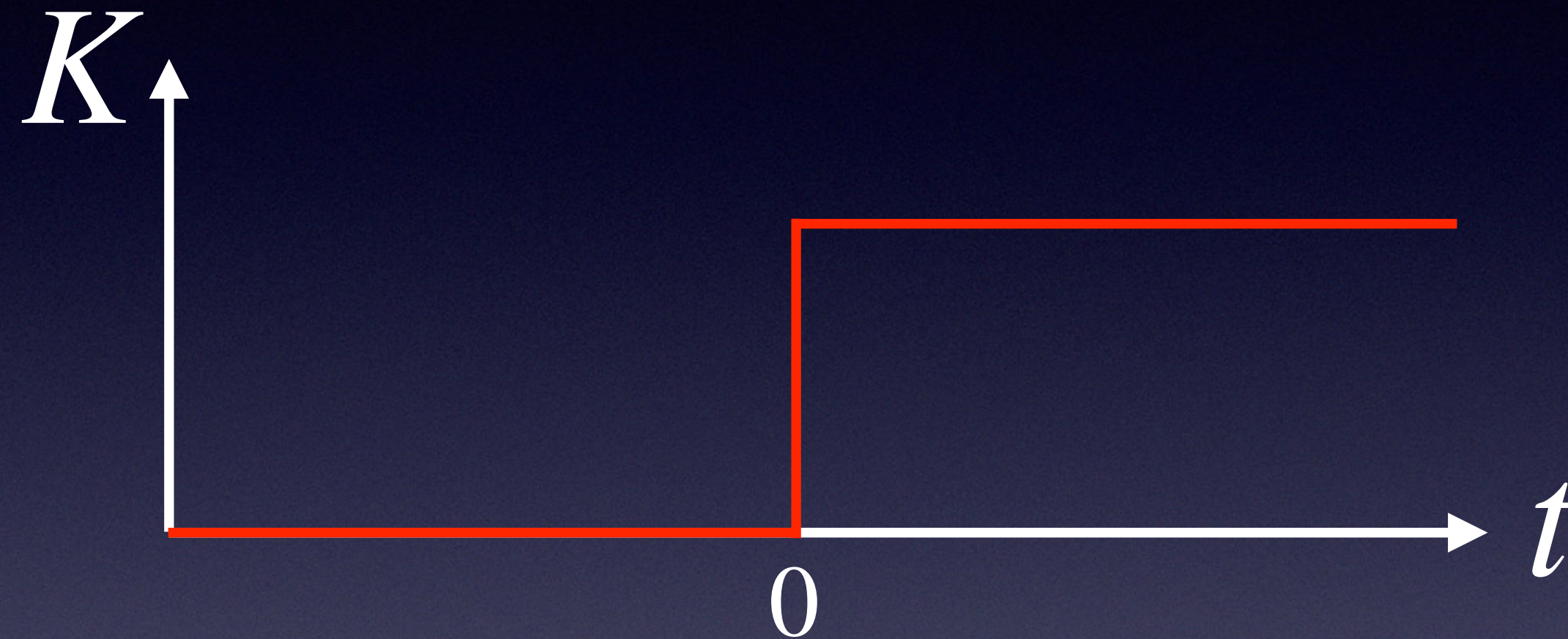
ヒルベルト空間の次元



$j_{\max} = 4$ を用いる : $\dim \mathcal{H} = 87,426,119$

セットアップ

重イオン衝突実験を真似るため、
相互作用クエンチングを行う

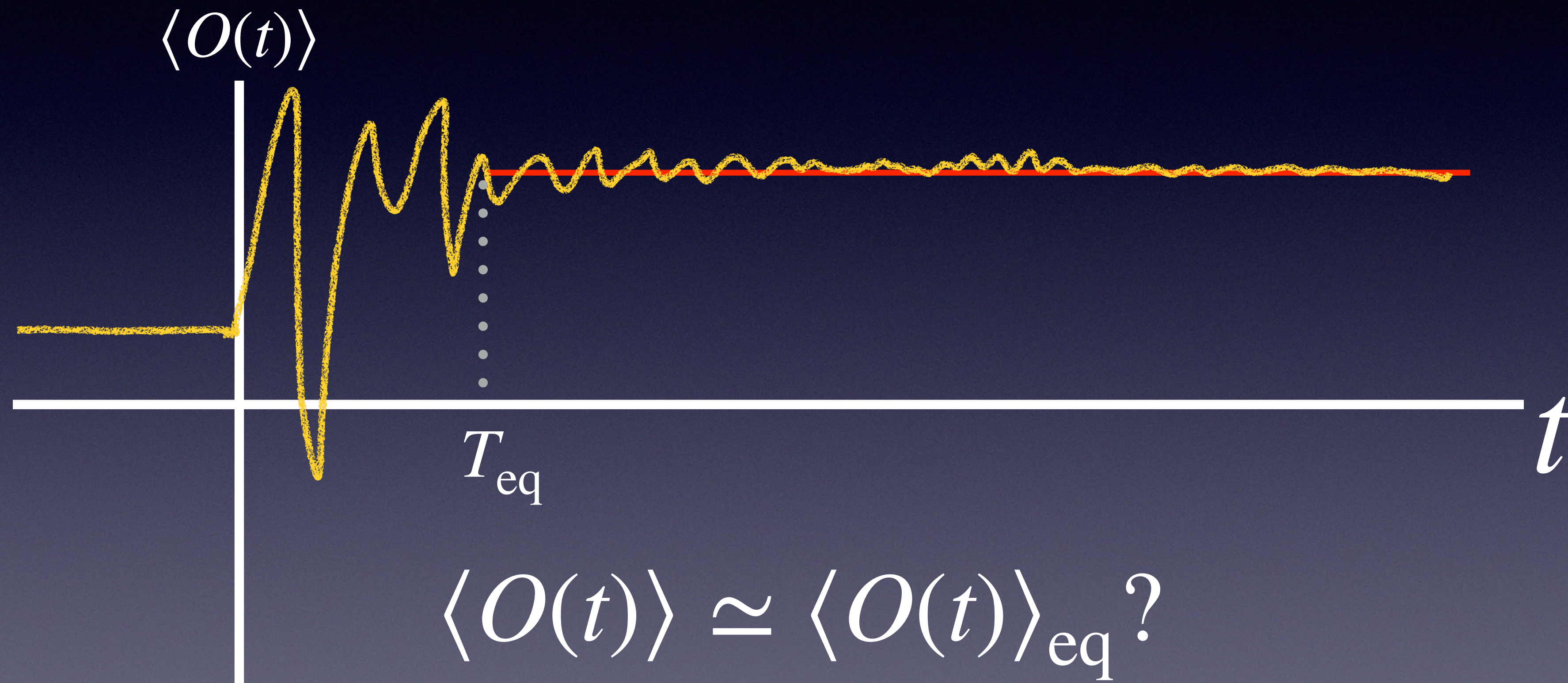


$$t < 0 \quad |\text{Vac}\rangle_{K=0}$$

$$t \geq 0 \quad |\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\text{Vac}\rangle_{K=0}$$

予期される振る舞い

ある演算子 O について $\langle O(t) \rangle := \langle \Psi(t) | O | \Psi(t) \rangle$



温度とカノニカルアンサンブル

初期状態を決めるとエネルギーが決まる

$$E = \langle H \rangle = \langle \Psi(t) | H | \Psi(t) \rangle$$

(時間に依存しない)

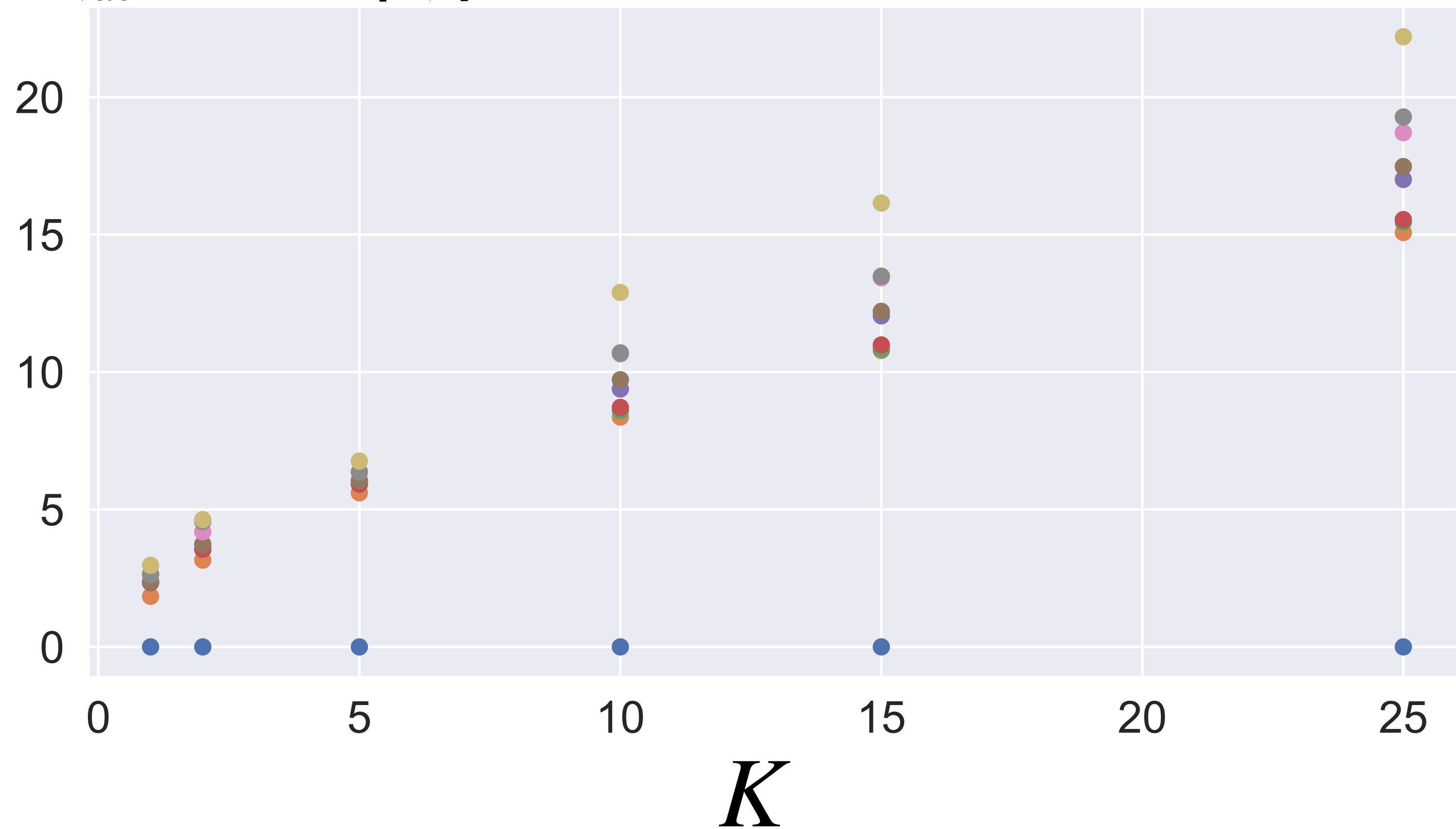
エネルギーを決めるとそのエネルギーを
期待値として再現するカノニカル分布が
定義できる

$$E = \langle H \rangle_{\text{eq}} := \text{tr} \rho_{\text{eq}} H \quad \text{with} \quad \rho_{\text{eq}} = \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr} e^{-\beta H}}$$

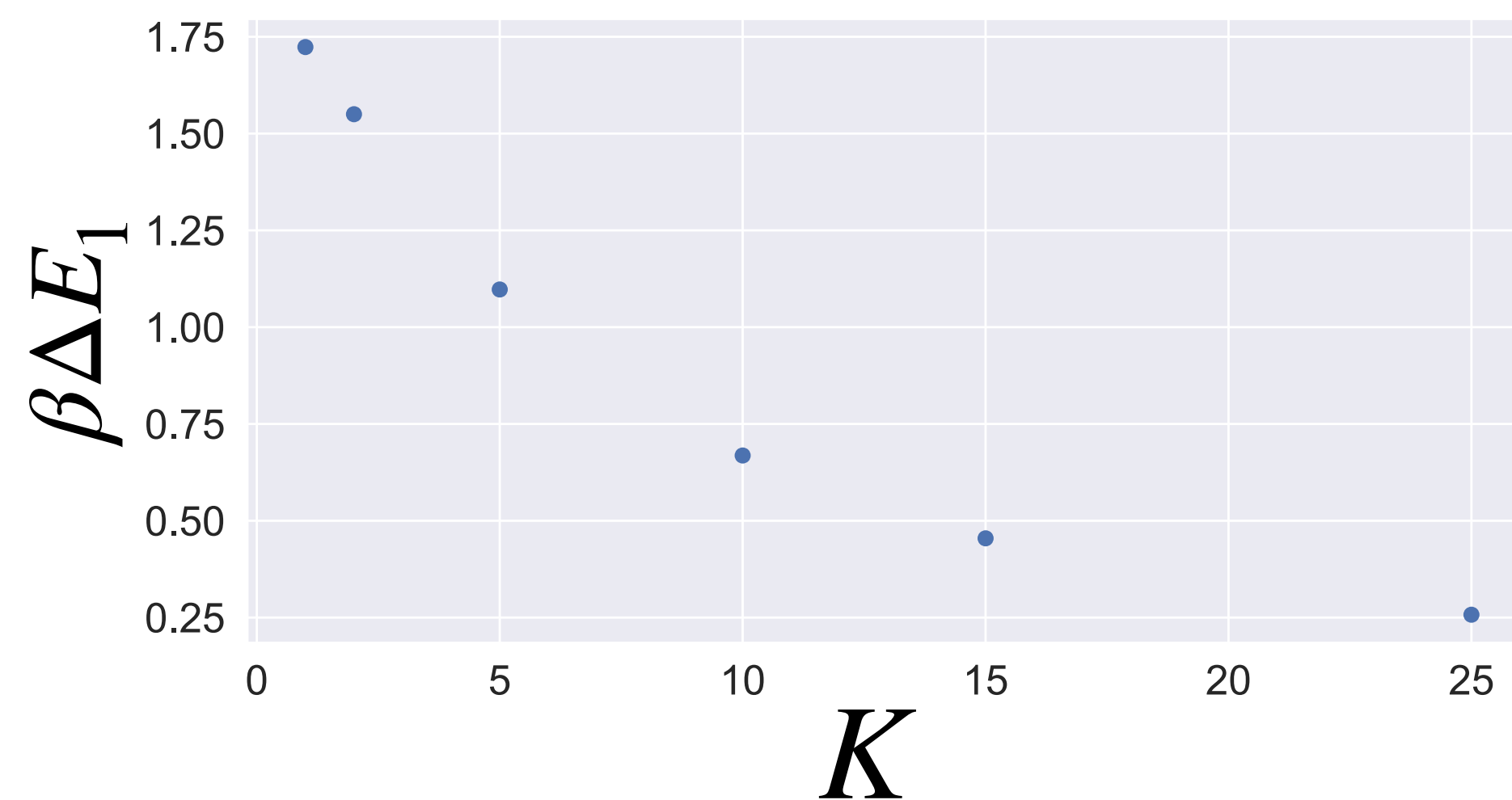
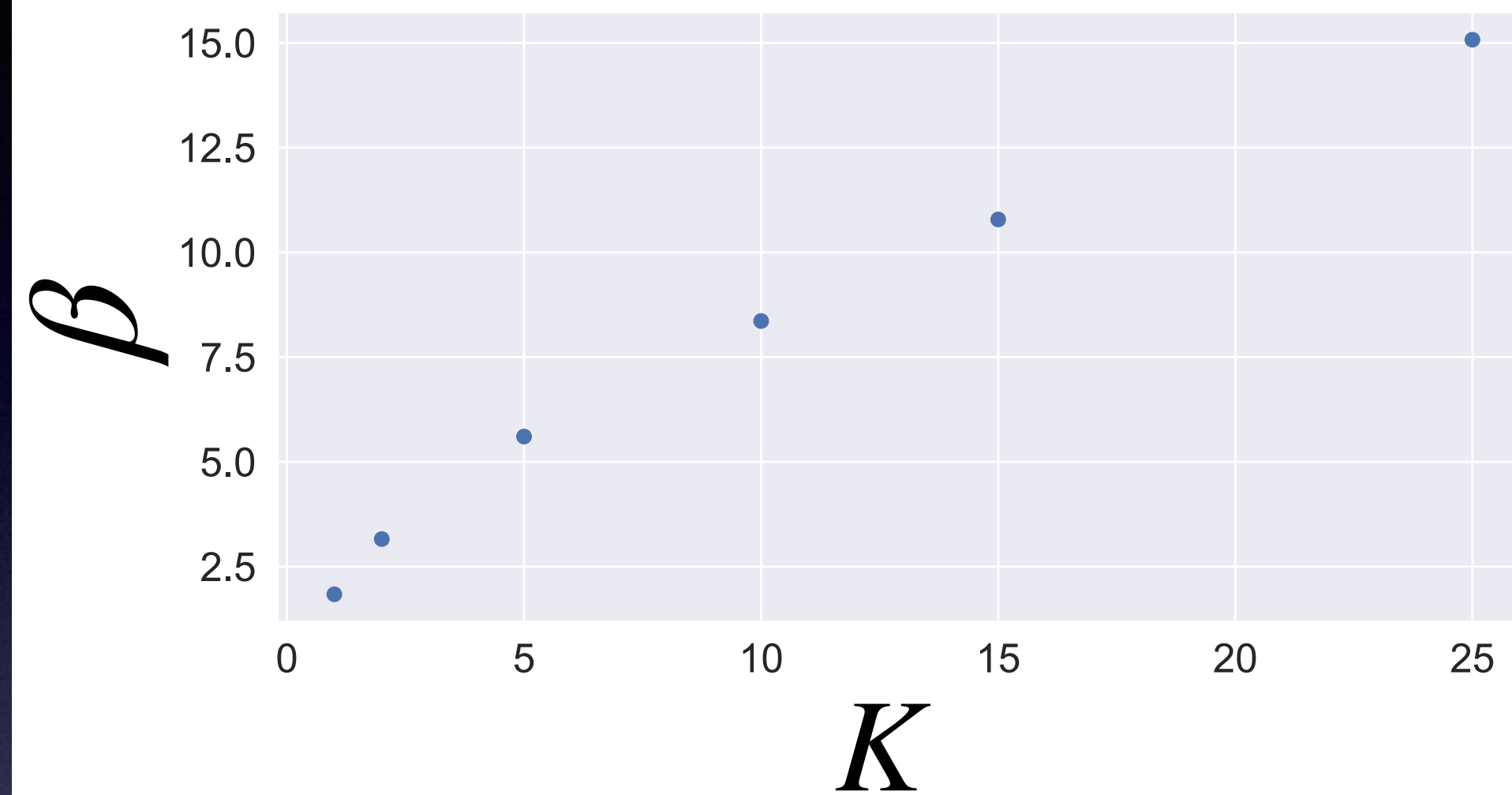
数值計算結果

$j_{\max} = 4$ についてのエネルギー固有値

$E - E_{\text{vac}}$ 最初の 9 つについて



温度のK依存性



第一励起エネルギー

$$\Delta E_1 : E_1 - E_0$$

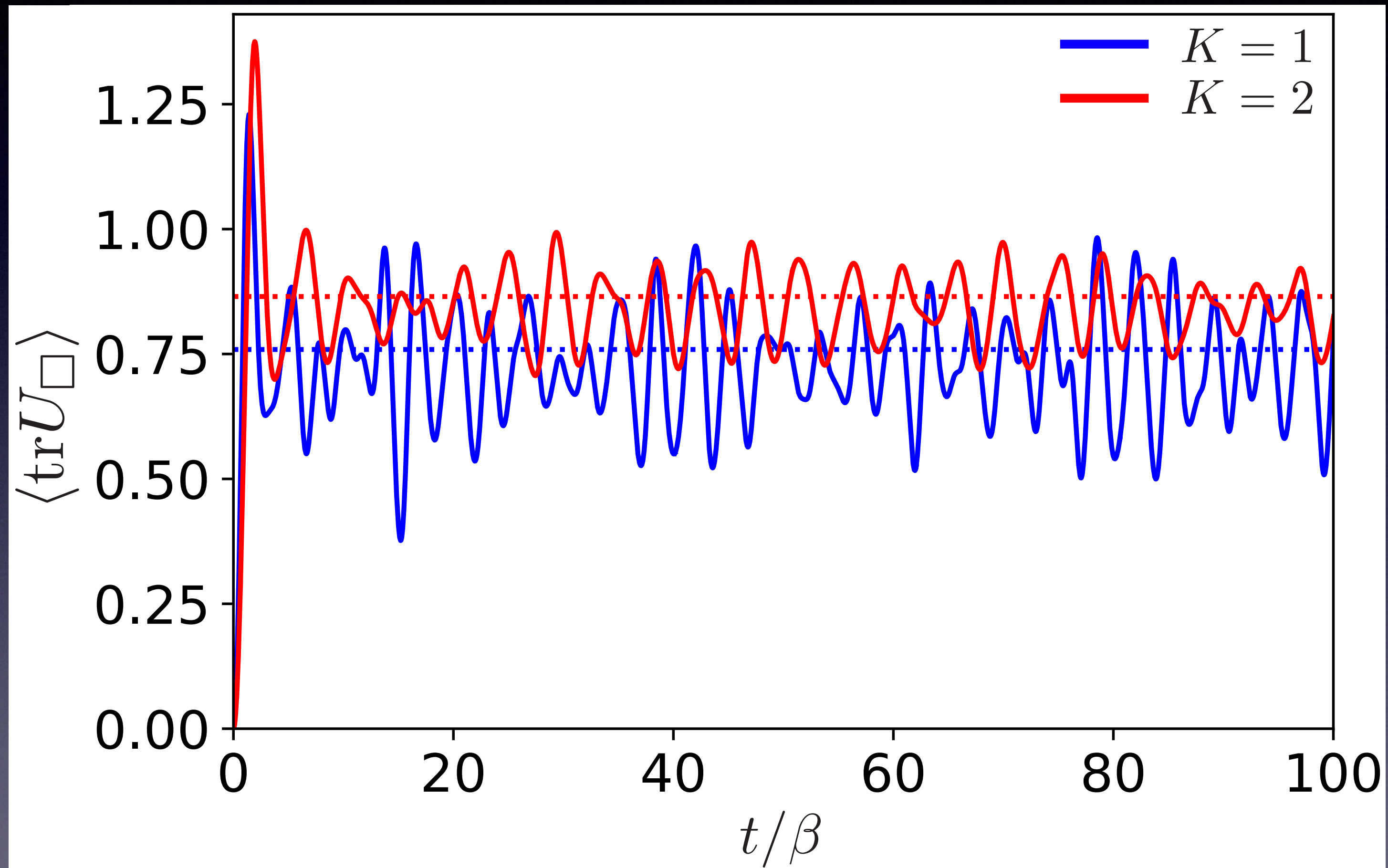
典型的なエネルギースケール

$$\beta\Delta E_1 > 1 \quad \text{低温}$$

$$\beta\Delta E_1 < 1 \quad \text{高温}$$

Wilsonループの期待値

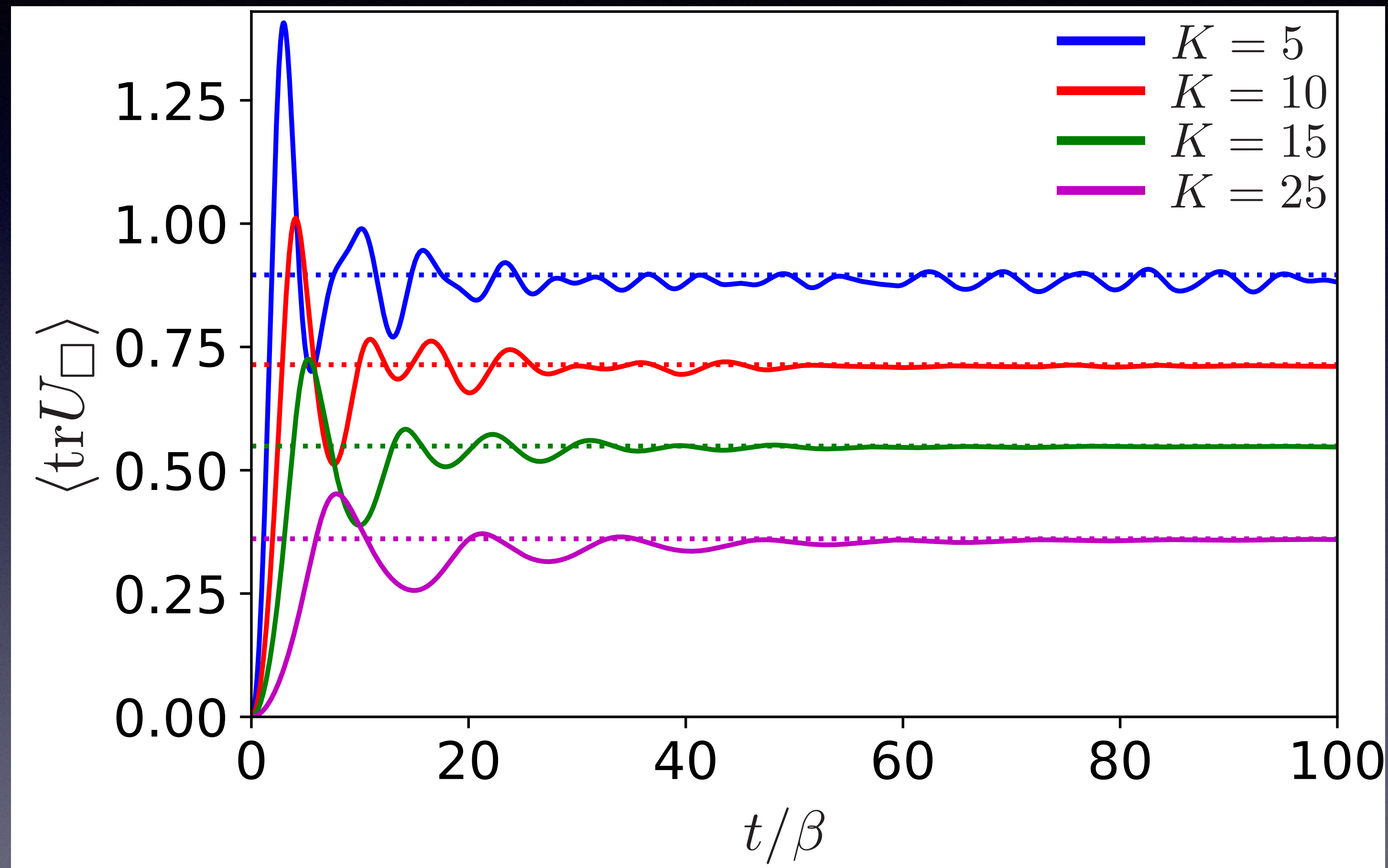
強結合(低温T)



ゆらぎは小さくない

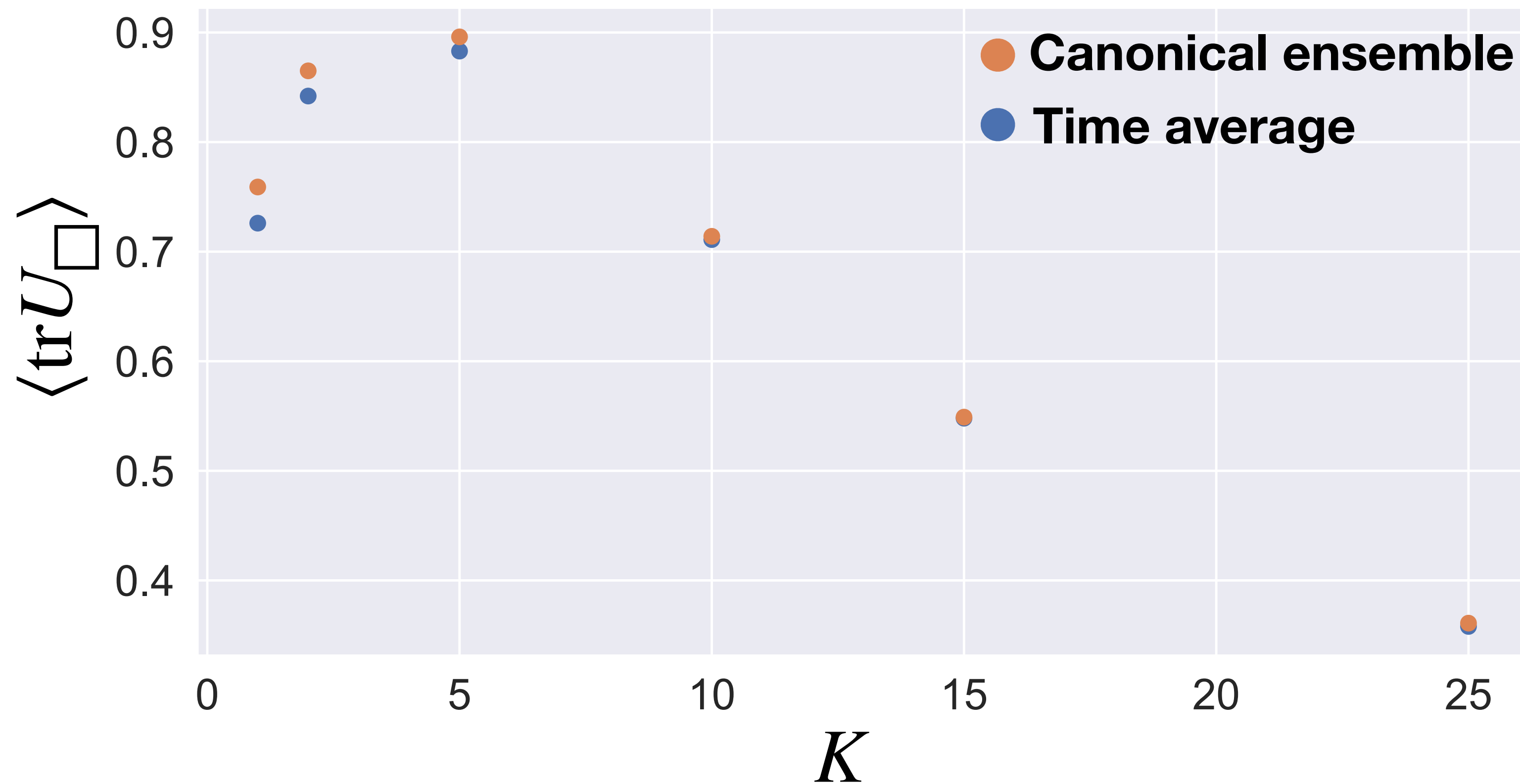
Wilsonループの期待値

弱結合(高温T)



定常状態が観測された

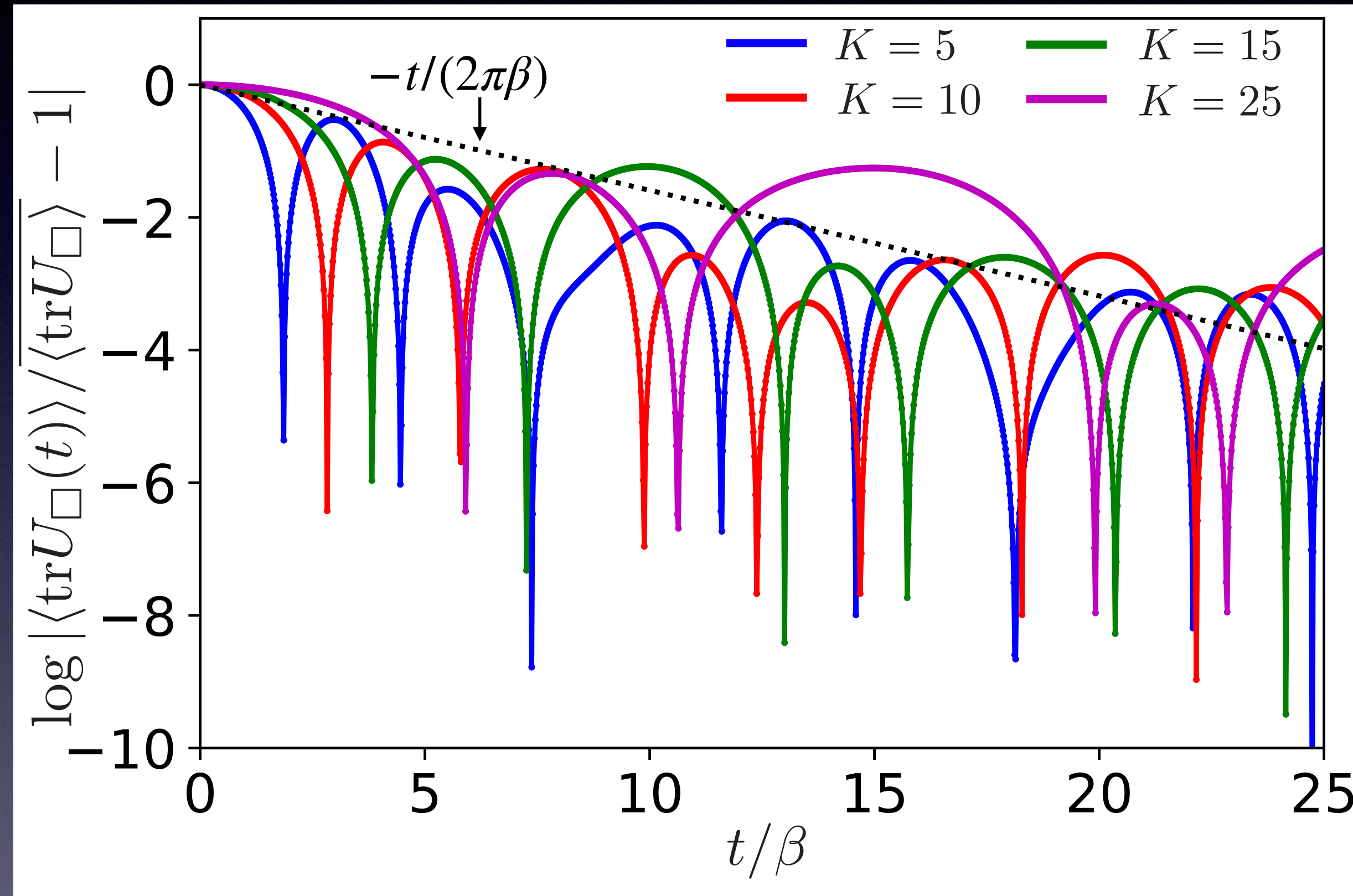
長時間平均 vs カノニカルアンサンブル



$K > 5$ について差は1%未満

平衡状態への緩和

$$\langle \text{tr} U_{\square}(t) \rangle - \overline{\langle \text{tr} U_{\square} \rangle} \sim e^{-t/\tau_{\text{eq}}}$$



これらはBoltzmann時間に近い $2\pi\beta$.

まとめ: (3+1)次元 Yang-Mills理論の熱化

- 小さい格子 Yang-Mills theory系は熱化する.
- 熱化の緩和時間

$$\tau_{\text{eq}} \sim 2\pi/T \text{ ボルツマン時間}$$

結合定数にあまり寄らない

$$\begin{aligned} \tau_{\text{eq}} &\sim 6 \text{ fm}/c \text{ for } T = 200 \text{ MeV} \\ &\sim 1 \text{ fm}/c \text{ for } T = 1000 \text{ MeV} \end{aligned}$$

まとめ

●定式化

Kogut-Susskindのハミルトニアン形式

Levin-Wen模型のようなSpin模型にマッピング

●シミュレーション

(3+1)次元小さい系でのYang-Mills理論の熱化

展望

- SU(3)でのシミュレーション

SU(3) k のF-moveの表式を知る必要がある

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \alpha \quad \beta \quad e \\ \downarrow \\ d \end{array} = \sum_{f, \mu, \nu} [F_d^{abc}]_{(e, \alpha, \beta)(f, \mu, \nu)} \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \mu \quad \nu \quad f \\ \downarrow \\ d \end{array}$$

- 高次元系

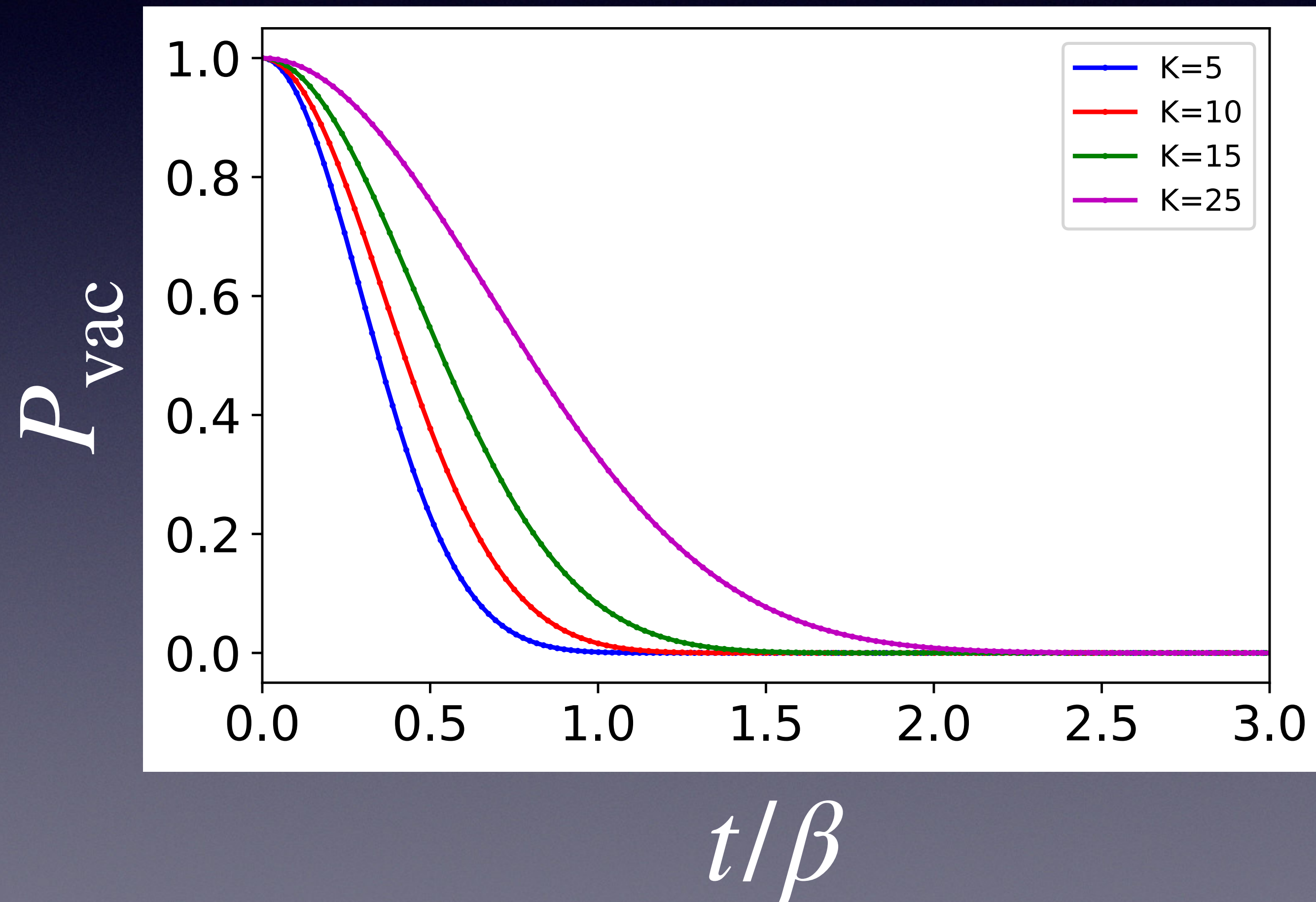
- 大きい系, 連続極限

- 量子コンピュータでシミュレーション

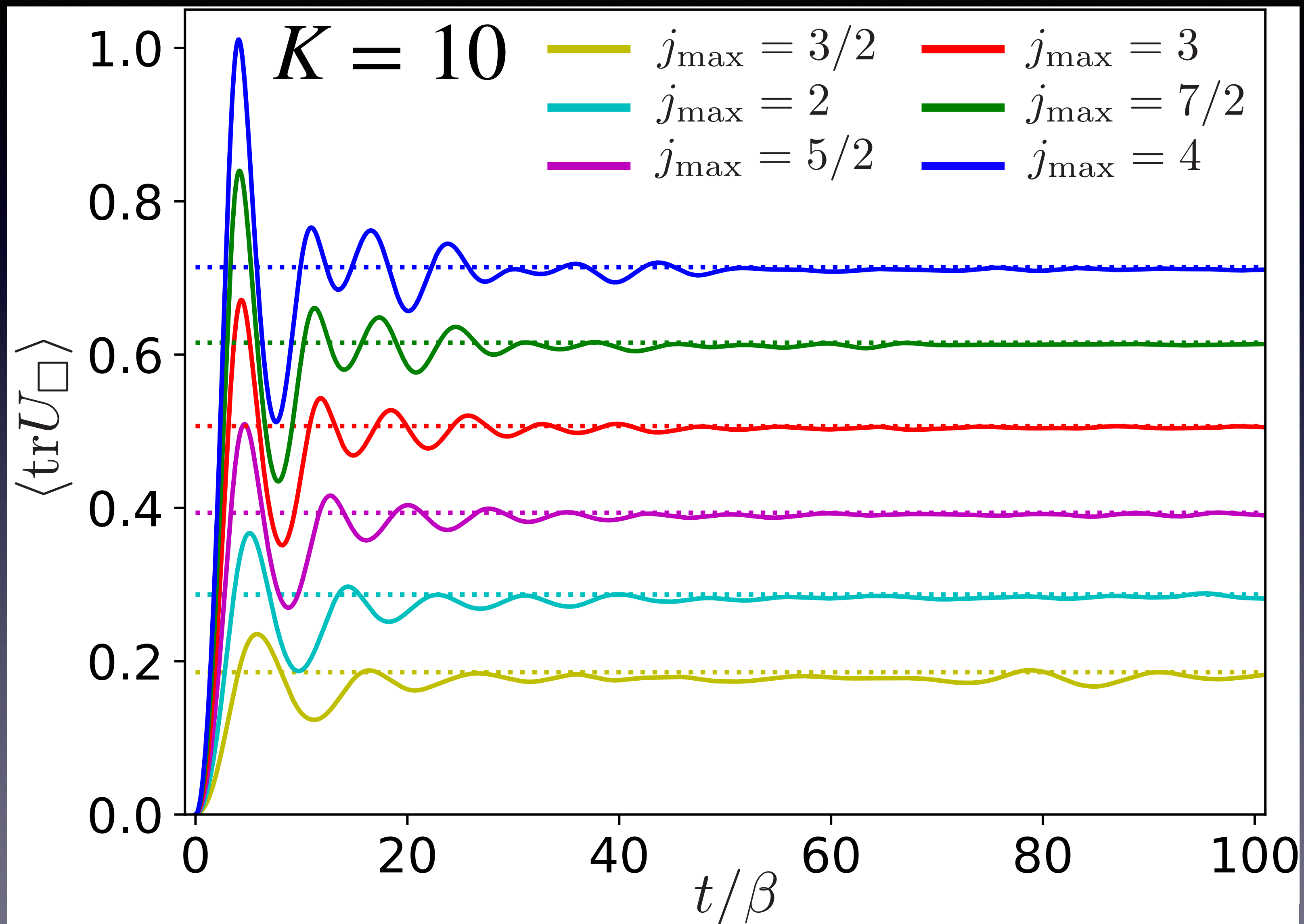
Backup

Vacuum persistency probability (Loschmidt echo)

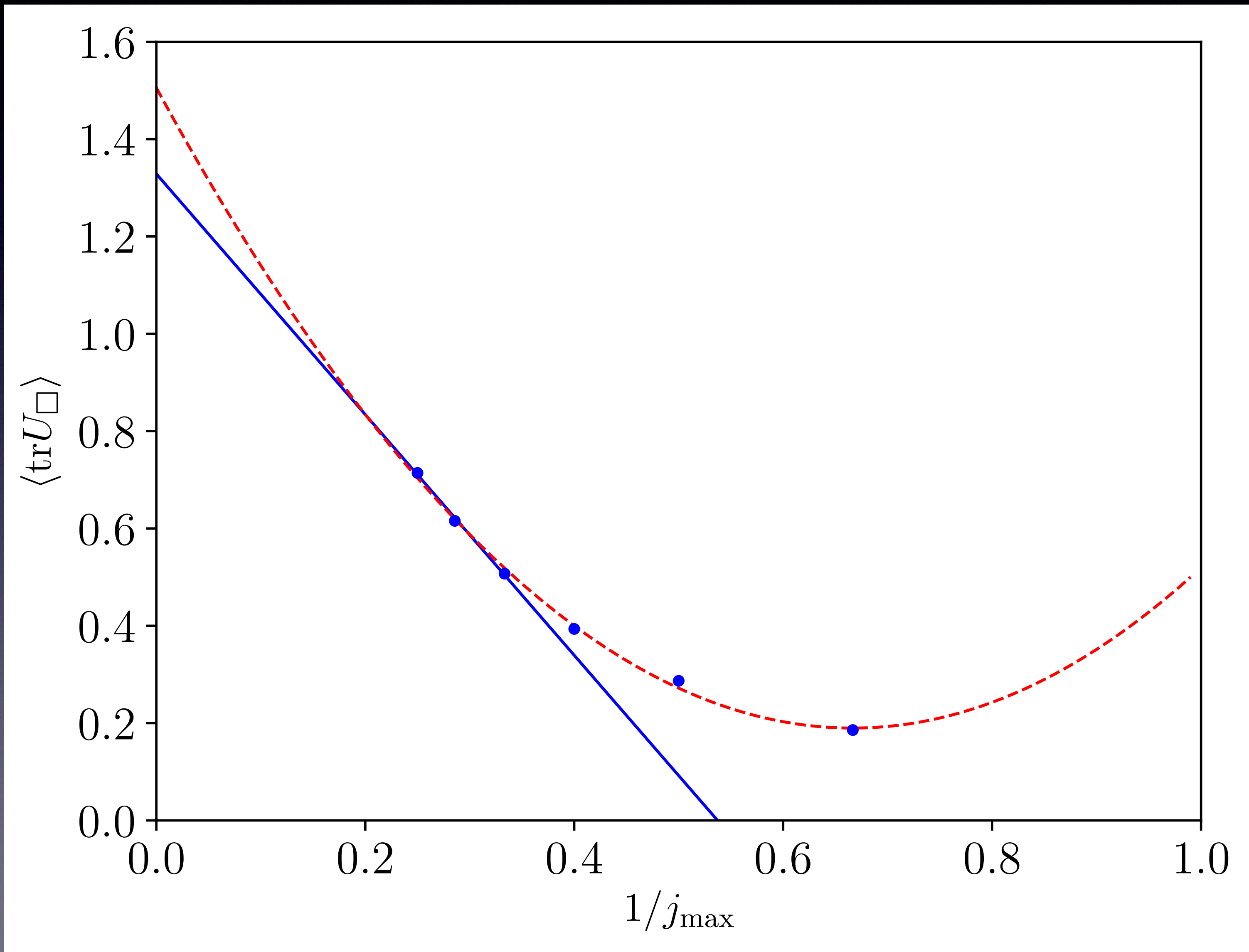
$$P_{\text{vac}} := |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|^2$$



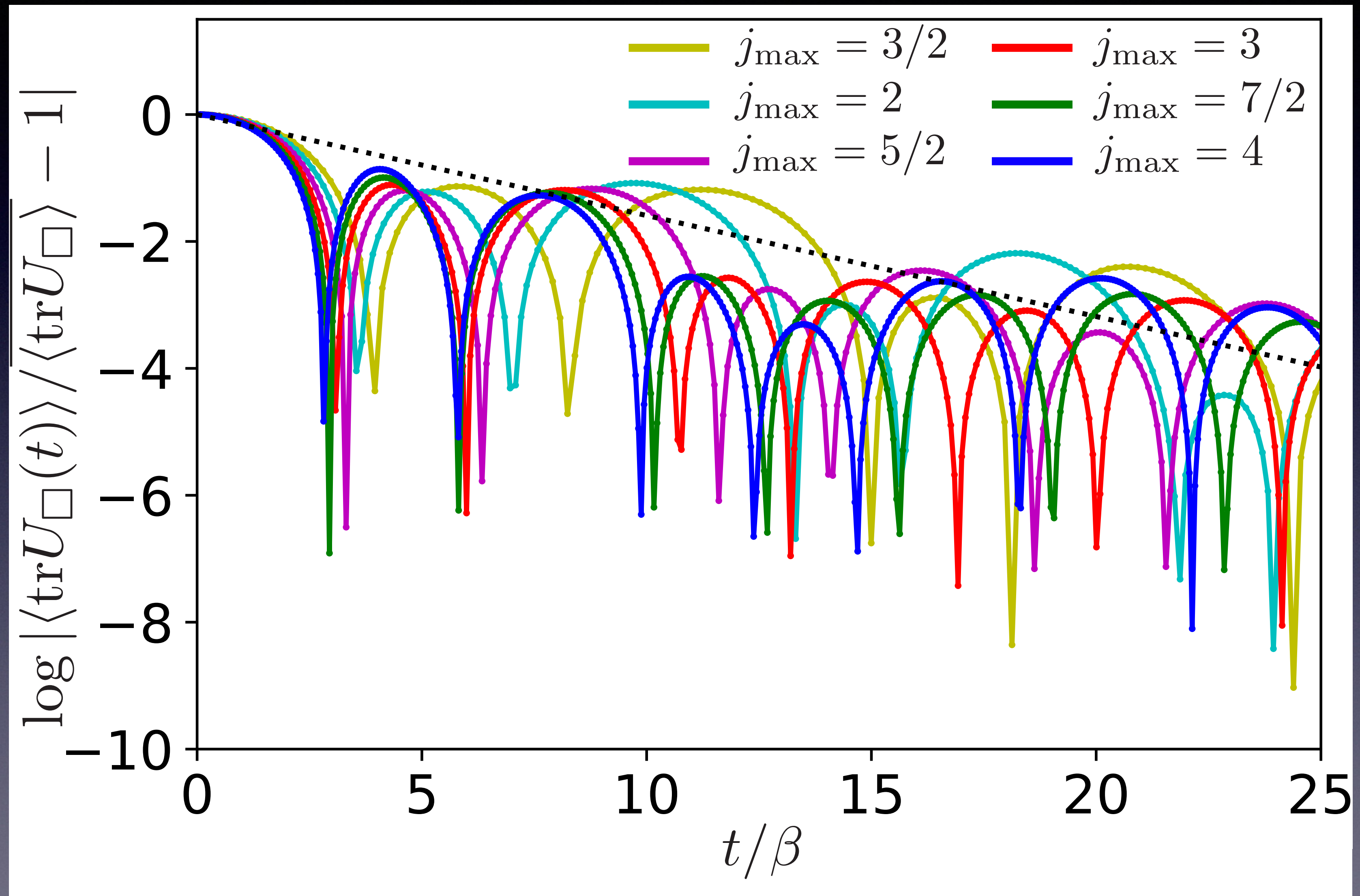
jmax 依存性



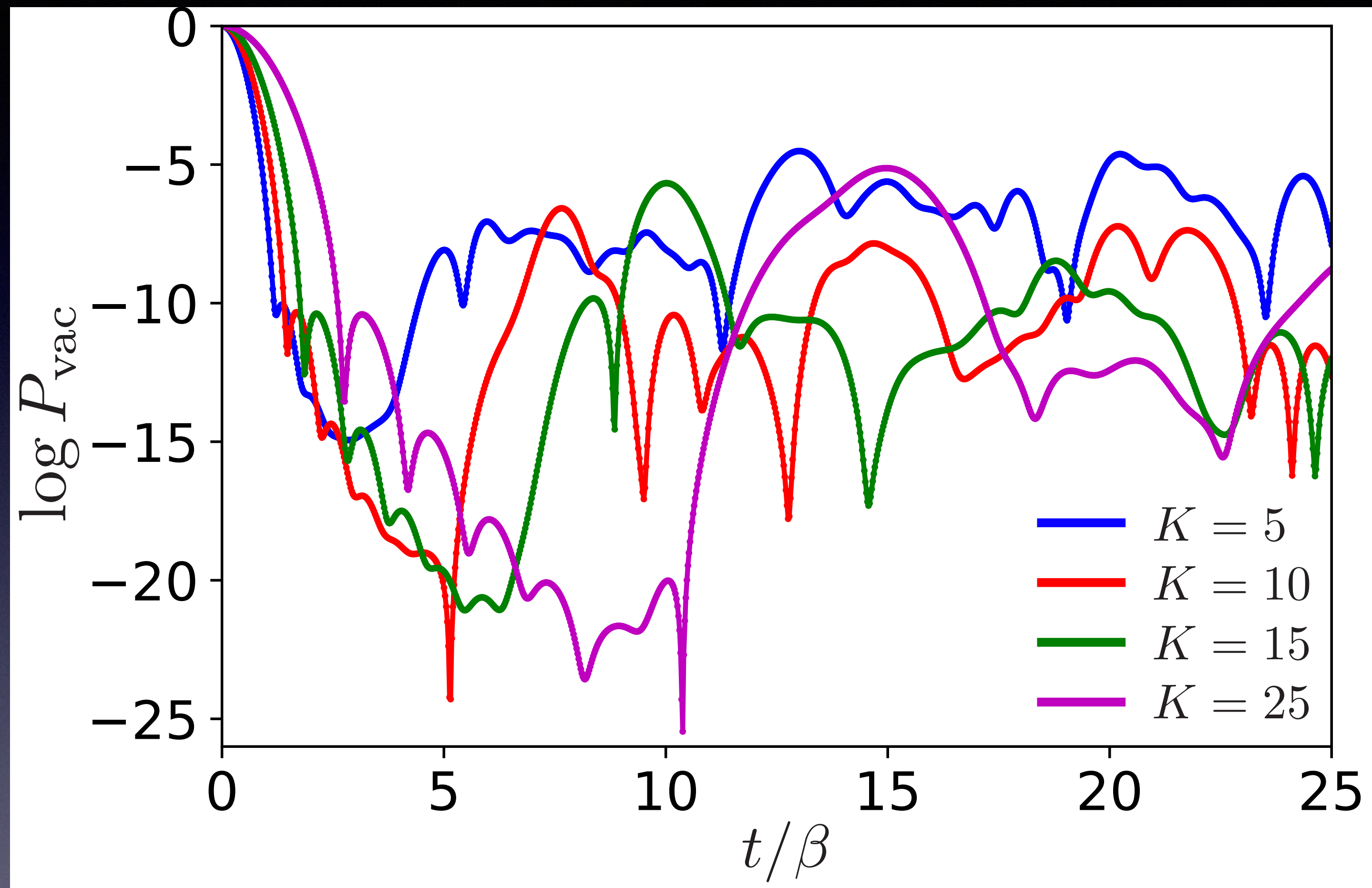
外挿



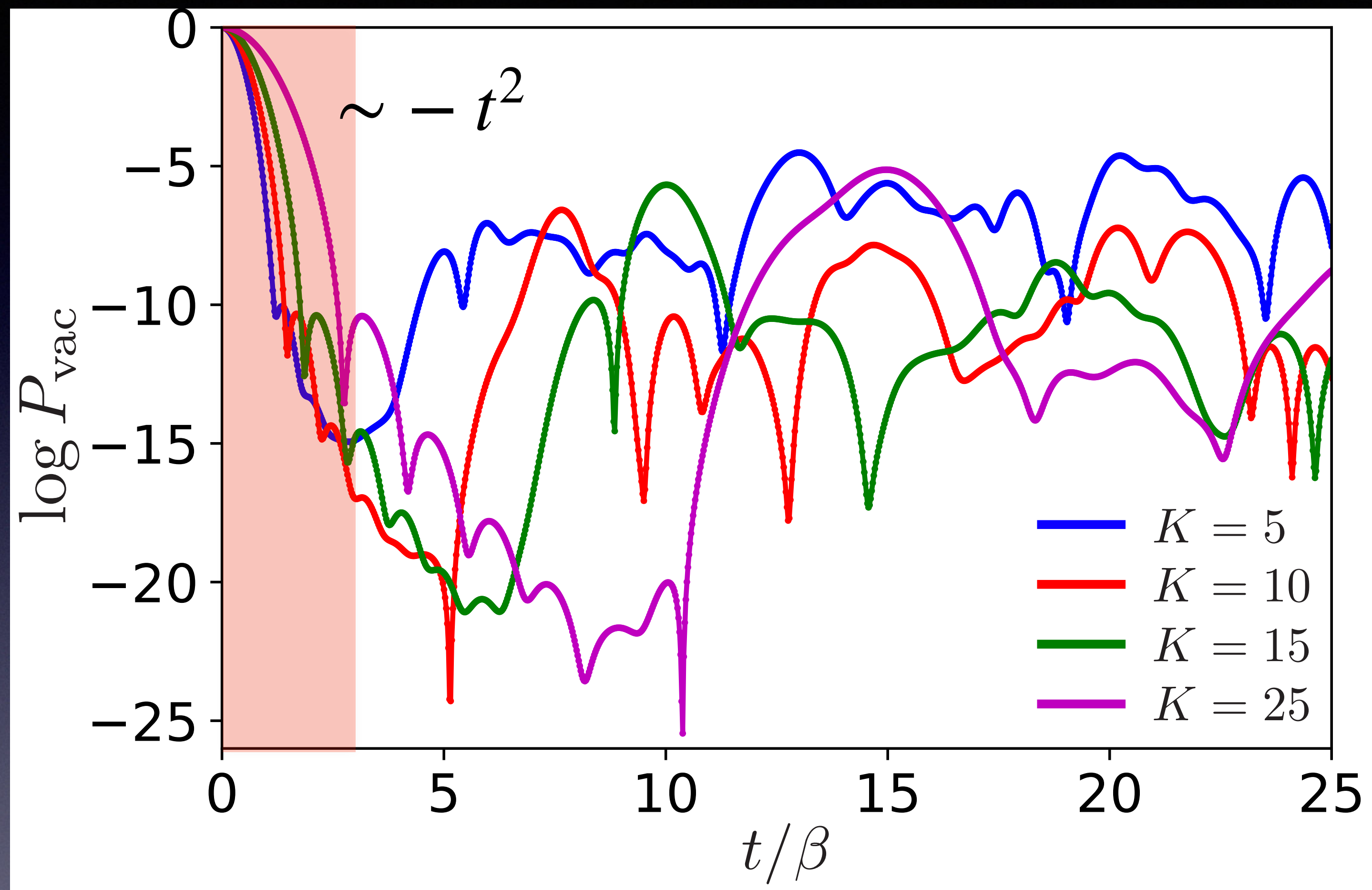
緩和時間の $j_{\max}$ 依存性



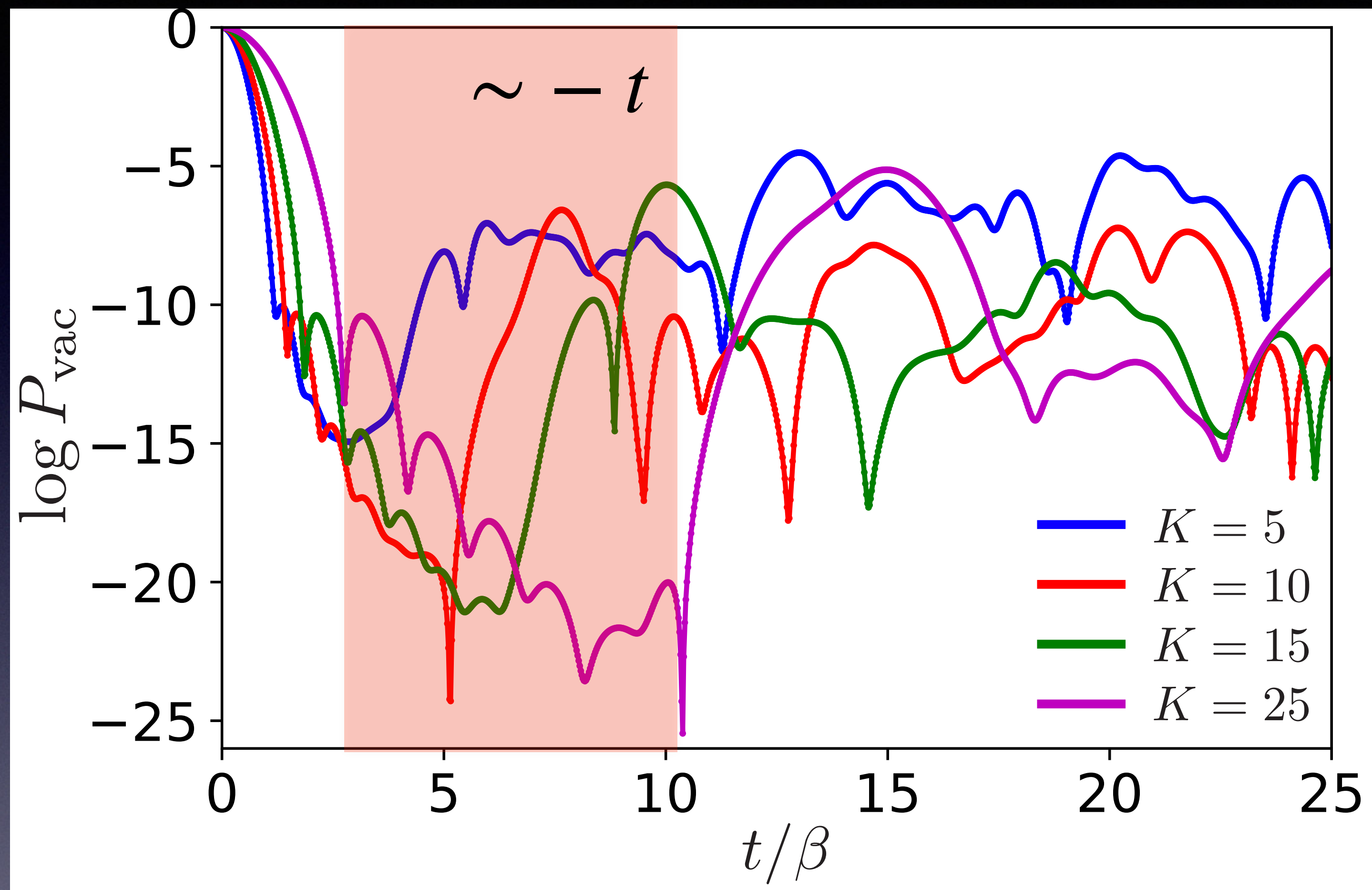
log of Loschmidt echo



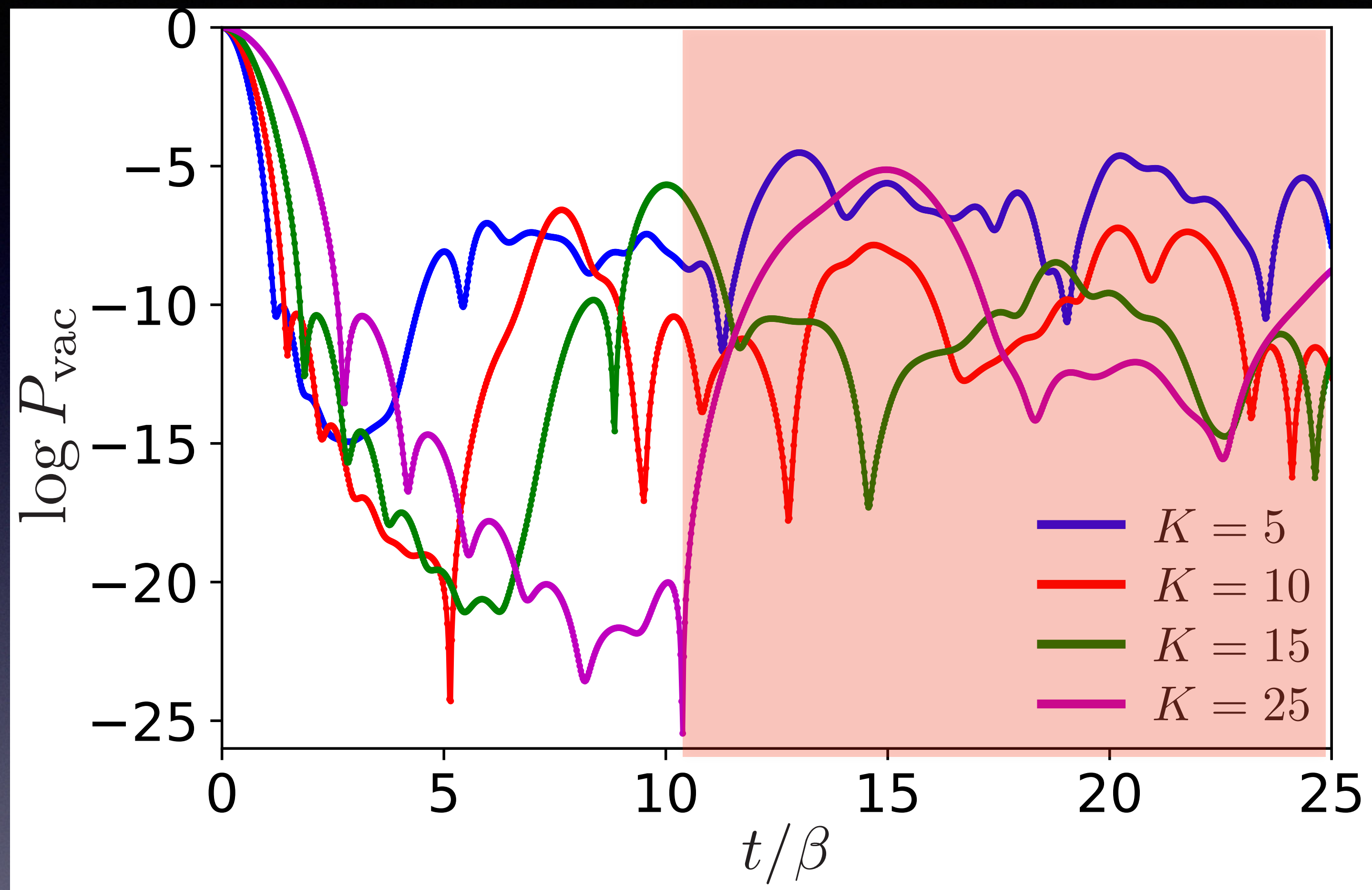
log of Loschmidt echo



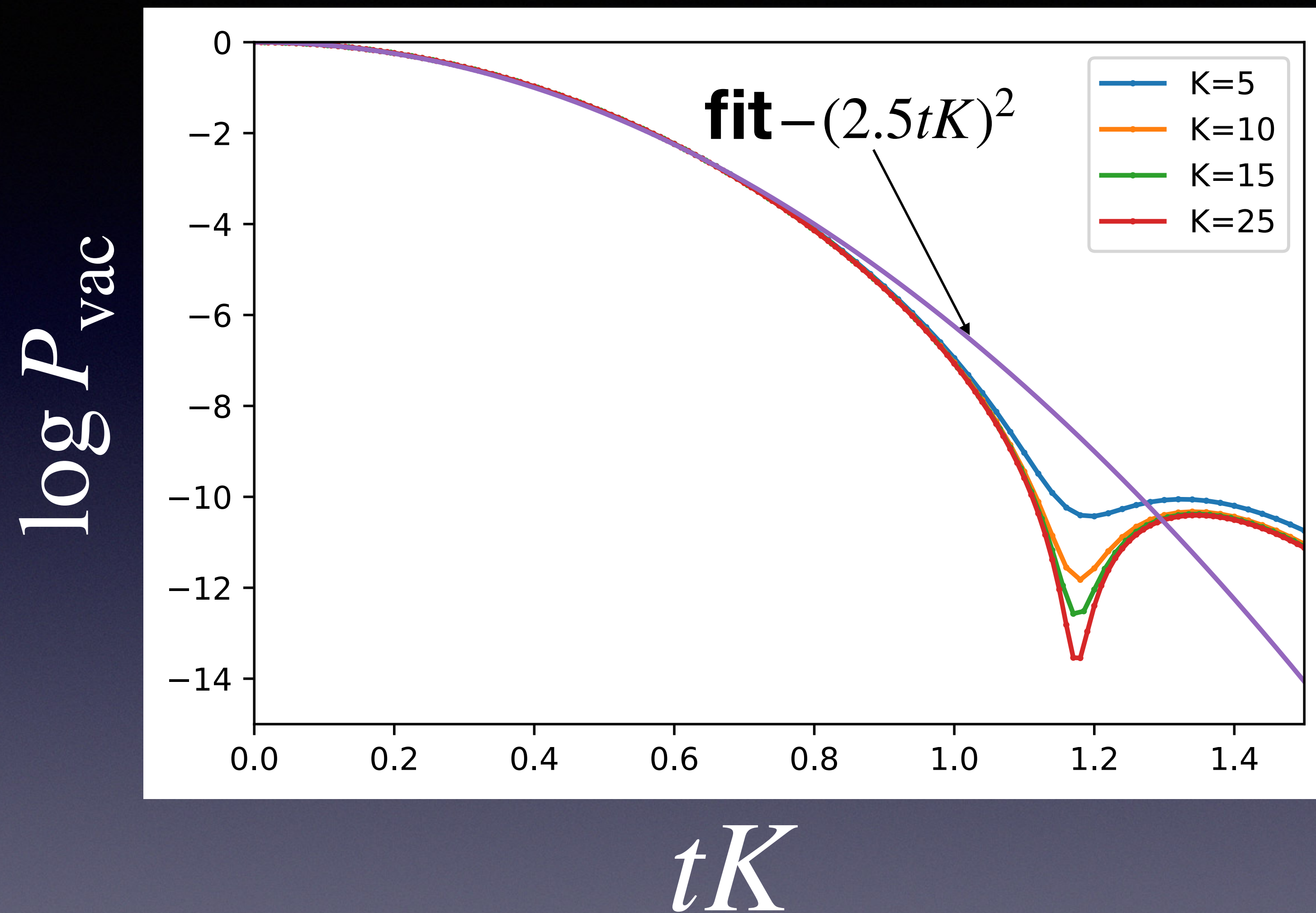
log of Loschmidt echo



log of Loschmidt echo

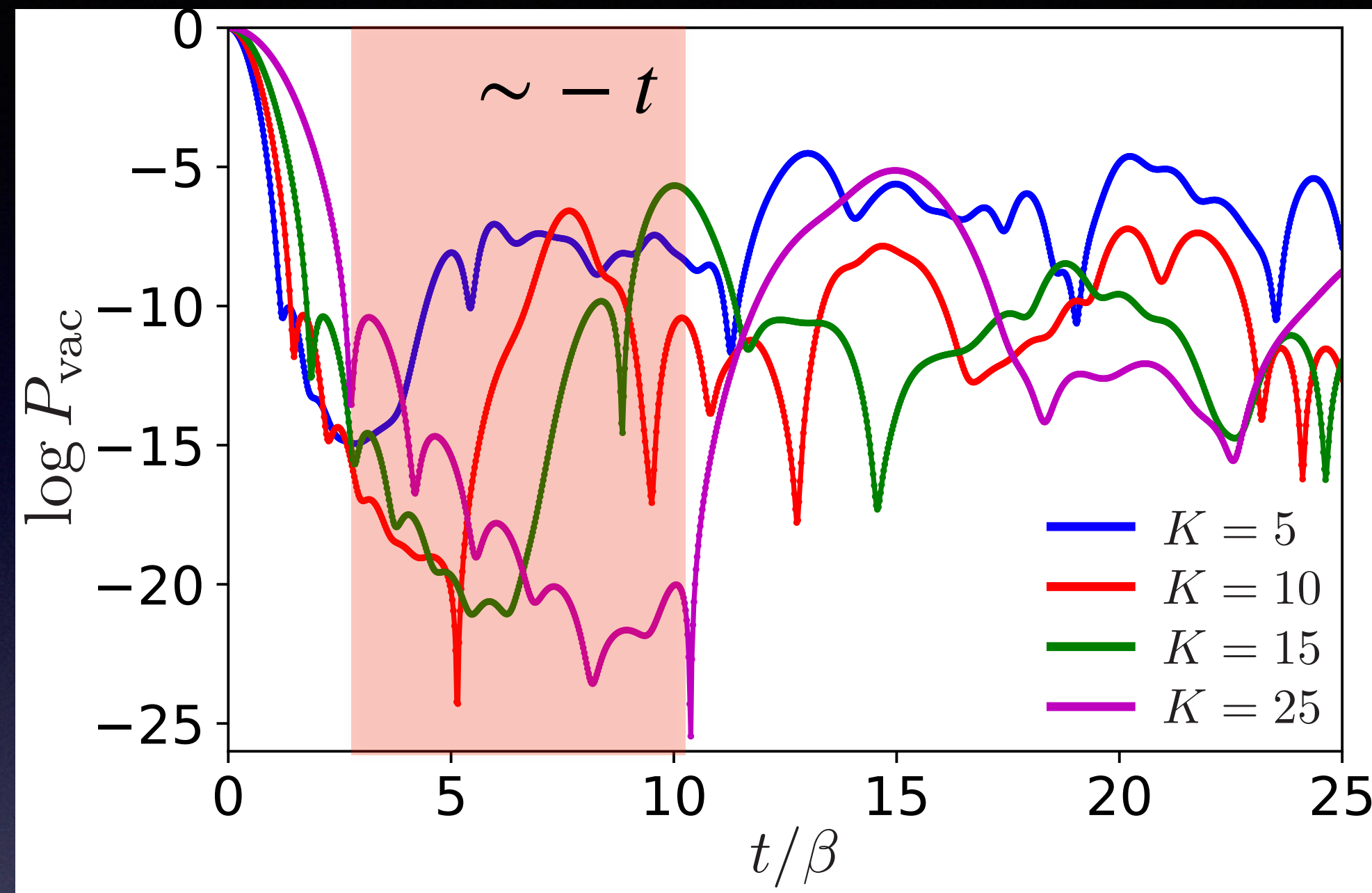


初期時刻



$$\log P_{\text{vac}} \sim - (tK)^2 \quad \text{摂動論的}$$

中間時間



$$\log P_{\text{vac}} \sim -t/\tau_{\text{LE}}$$

$$\tau_{\text{LE}} = \begin{cases} 0.23 \text{ for } K = 10 \\ 0.28 \text{ for } K = 15 \\ 0.40 \text{ for } K = 25 \end{cases}$$

傾きを極大点から推定

$$\tau_{\text{LE}} \sim 0.3\beta \sim 1/(\pi T)$$

カオス的？