

Gapped Ground States ,
Split Property and Entanglement Entropy
in 1+1 dim Quantum Spin Systems

松井 卓 Taku Matsui

九州大学大学院数理学研究院

2022 年 7 月 22 日 Yukawa Hall にて

1. Introduction

- ▶ 量子スピン系の Gapped Ground States
(時空は 1+1 次元)
- ▶ Haldane's Conjecture, Lieb-Schultz-Mattis Th の一般化
- ▶ Entanglement Entropy の Area Law
Gapped Ground States の Split Property
- ▶ Gapped Ground States は Matrix Product States の一般化
- ▶ AKLT 模型の String Order
- ▶ (相互作用のある) 1+1 dim Fermion の $\mathbb{Z}_2$ -index と String Order

参考書

(無限自由度の量子スピン系を数学的に扱う方法) Hal Tasaki :
Physics and Mathematics of Quantum Many Body Systems,
Graduate Texts in Physics. , Springer, 2020

P. Naaijken: *Quantum spin systems on infinite lattices. A concise introduction*. Lecture Notes in Physics, 933. Springer, 2017

Quantum Spin Chain

普通は体積有限の系で模型を解き、熱力学極限を考える。

- ▶ 相互作用のあるフェルミ粒子系では基底状態がどのようなヒルベルト空間に住んでいるのか分からない。
- ▶ 例えば相互作用のないフェルミ粒子系ではボゴリューボフ変換を使い生成消滅作用素と真空状態を作る。
標準的フォック空間上の表現とはユニタリー同値でないヒルベルト空間に真空状態は属する。

- ▶ そこで、最初から 無限自由度の量子系で何が起こるか考えたい。例えば系の時間発展はハイゼンベルク描像を用いる。
- ▶ (ヒルベルト空間より先に) 局所物理量の生成する代数が最初にありきとする。

$$\mathfrak{A} = \overline{\bigotimes_{\mathbf{Z}} M_n(\mathbf{C})}^{C^*}$$

$$Q^{(k)} = \cdots \otimes 1 \otimes \underbrace{Q}_k \otimes 1 \otimes \cdots$$

$Q^{(k)}$ は格子点 k 上にある物理量

$\mathfrak{A}$: 準局所的な物理量からなる代数、

- ▶ 厳格に有限領域に局在する物理量のなす代数より少し大きな代数であるがヒルベルト空間によらないで定まる。
- ▶ $\mathfrak{A}$ の中でハイゼンベルクの時間発展は定義できる。

系の対称性、時間発展、状態の変換は $\mathfrak{A}$ の自己同型で表される。

$$\alpha(c_1 Q_1 + c_2 Q_2) = c_1 \alpha(Q_1) + c_2 \alpha(Q_2)$$

$$\alpha(Q_1 Q_2) = \alpha(Q_1) \alpha(Q_2), \quad \alpha(Q^*) = \alpha(Q)^*$$

translation

(空間方向に) 並進不変性あるいは周期性のある系を考える。

$\tau_j \in \text{Aut}(\mathfrak{A})$ translation 並進移動

$$\tau_j(Q^{(k)}) = Q^{(k+j)} \quad j, k \in \mathbf{Z}$$

局所性が重要

$$\Lambda \subset \mathbf{Z}$$

$\mathfrak{A}_\Lambda$: Λ 内に局在した物理量全体が生成する代数

$$\mathfrak{A}_{loc} = \bigcup_{|\Lambda| < \infty} \mathfrak{A}_\Lambda$$

algebra of strictly localized observables

State

State とは量子状態の期待値（ベクトルではない）

$$\varphi(c_1 Q_1 + c_2 Q_2) = c_1 \varphi(Q_1) + c_2 \varphi(Q_2)$$

$$\varphi(Q^* Q) \geq 0, \quad \varphi(1) = 1$$

$(\Omega, Q\Omega) = \varphi(Q)$ と思って良い。

GNS 表現

ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_\varphi$, $\Omega_\varphi \in \mathfrak{H}_\varphi$

$\pi_\varphi(\cdot) : \mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}_\varphi$ の表現

$$(\Omega_\varphi, \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi) = \varphi(Q)$$

$$\overline{\{ \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi \mid Q \in \mathfrak{A} \}} = \mathfrak{H}_\varphi$$

が存在する。

純粋状態 = 既約表現

熱平衡状態（純粋相） = 因子状態

Ground State の定義

Heisenberg Time Evolution of $\mathfrak{A}$

$$\alpha_t(Q) = e^{itH} Q e^{-itH}$$

H (formal) infinite volume Hamiltonian

例えば

$$H = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=x,y,z} S_{\alpha}^{(k)} S_{\alpha}^{(k+1)}$$

局所物理量 Q に対して $\delta(Q) = [H, Q]$ は有限であり

$$e^{itH} Q e^{-itH} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \delta^k(Q)$$

Definition 1.1 (Ground State)

φ が H の *ground state* $\iff$

$Q \in \mathfrak{A}_{loc}$ に対して以下の不等式が成立

$$\varphi(Q^*\delta(Q)) = \varphi(Q^*[H, Q]) \geq 0 \quad (1)$$

この時、 $\{\pi_\varphi, \Omega_\varphi, \mathfrak{H}\}$, ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$, ベクトル $\Omega_\varphi \in \mathfrak{H}$
 H_φ : effective Hamiltonian が存在

$$H_\varphi \geq 0, \quad H_\varphi \Omega_\varphi = 0, \quad e^{itH_\varphi} \pi_\varphi(Q) e^{itH_\varphi} = \pi_\varphi(\alpha_t(Q))$$

有限系の時 1

$\mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$: $n \times n$ 行列全体 $H = H^* \in \mathcal{A}$ ハミルトニアン,

E : H の基底状態エネルギー, Ω 基底状態ベクトル

$$H\Omega = E\Omega, \quad H - E1 \geq 1$$

ここで $H - E1 \geq 1$ とは、 $H - E1$ の全ての固有値は非負と言う意味。

任意のベクトル ξ に対して

$$(\xi, (H - E1)\xi) \geq 0$$

有限系の時 2

H の Ω 基底状態ベクトルと $Q \in \mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$
に対して

$$\begin{aligned} & (\Omega, Q^*[H, Q]\Omega) = (\Omega, Q^*[(H - E1), Q]\Omega) \\ &= (Q\Omega, [(H - E1), Q]\Omega) \\ &= (Q\Omega, (H - E1)Q\Omega) - (Q\Omega, Q(H - E1)\Omega) \\ &= (Q\Omega, (H - E1)Q\Omega) \geq 0 \end{aligned}$$

有限系の基底状態ベクトルの期待値に関して (1) が成立

Quantum Ising Model (有限体積では基底状態は一意)

$$H_L = - \sum_{k=-L}^{L-1} \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)} + 2\lambda \sum_{k=-L}^L \sigma_x^{(k)}$$

基底状態ベクトル： Ω_0 基底状態エネルギー E_0

第一励起状態ベクトル： Ω_1 基底状態エネルギー E_1

$|\lambda| > 1$ の時 $(E_1 - E_0) > \gamma(\lambda)$ スペクトル・ギャップがあり

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\Omega_0, Q\Omega_0) = \varphi(Q)$$

φ がただ一つの ground state

Quantum Ising Model (II)

 $|\lambda| < 1$ の時

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (E_1 - E_0) = 0$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\Omega_0, Q\Omega_0) = \varphi(Q)$$

は混合状態

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2} ((\Omega_0 \pm \Omega_1), Q(\Omega_0 \pm \Omega_1)) = \varphi_{\pm}(Q)$$

 $\varphi_{\pm}$ も ground state

$$\varphi(Q) = \frac{1}{2}(\varphi_+(Q) + \varphi_-(Q))$$

AKLT 模型 $S=1$

$$H_L = \sum_{k=-L}^{L-1} \{S^{(k)} S^{(k+1)} + \frac{1}{3}(S^{(k)} S^{(k+1)})^2\}$$

$$S^{(k)} S^{(k+1)} = \sum_{\alpha=x,y,z} S_{\alpha}^{(k)} S_{\alpha}^{(k+1)}$$

基底状態は 4 重縮退 Ω_{α} , $\alpha = 0, 1, 2, 3$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (\Omega_{\alpha}, Q \Omega_{\alpha}) = \varphi(Q)$$

φ が $S=1$ AKLT 模型のただ一つの ground state

ここで定義した基底状態には、この他に 1+1 次元で kink ,
1+2 次元の anyon などの並進不変でない基底状態がある。

Classical Ising Model

$$H_L = - \sum_{k=-L}^{L-1} \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)} - \sigma_z^{(L)} + \sigma_z^{(-L)}$$

スピンのそろった基底状態

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ \Omega_- &= \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \Omega_K &= \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \end{aligned}$$

量子イジング模型 (I) (II) , AKLT 模型, Kink などの基底状態の熱力学極限で (1) が成立

Definition 1.2 (Gapped Ground State)

φ は *Gapped Ground State* $\Longleftrightarrow$

$$\sigma(H_\varphi) \subset \{0\} \cup [M, \infty), \quad \dim \ker H_\varphi = 1$$

$\sigma(H_\varphi)$ は H_φ のスペクトル

Gapped Ground State is a pure state

If φ is a Gapped Ground State

$$\Longleftrightarrow \quad \exists M > 0$$

$$\varphi(Q^*[H, Q]) \geq M(\varphi(Q^*Q) - |\varphi(Q)|^2),$$

反強磁性ハイゼンベルク模型の Haldane 予想

$\mathfrak{A}$: one-site algebra $M_{2s+1}(\mathbf{C})$

spin s irreducible rep of $SU(2)$. ($s = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$)

$\gamma_g : \mathfrak{A}$ の global $SU(2)$ ゲージ変換

$$H_L = \sum_{k=-L}^{L-1} \sum_{\alpha=1,2,3} S_{\alpha}^{(k)} S_{\alpha}^{(k+1)}$$

S_{α} は $[S_1, S_2] = iS_3$ ($su(2)$ representation of standard generators) .

$$\alpha_t(Q) = \lim_{L \rightarrow \infty} e^{itH_L} Q e^{-itH_L}$$

Ground State は一意的であり、 $SU(2)$ 不変 並進不変

$s = 1, 2, 3, \dots$: unique gapped ground state

$s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ gapless excitation

Lieb-Mattis-Schultz の定理 (1961)

$s = \frac{1}{2}$ $SU(2)$ 不変反強磁性模型に対して
以下の何れかが成立

- ▶ ground state は一意的でない
- ▶ ground state は一意的であり gapless excitation

LMS Theorem では可解性は不要、連続対称性が本質的

2.LMS の定理の一般化

$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}} \Psi(X)$ を考える。

Interaction 相互作用

1. $\{\Psi(X) | X \subset \mathbf{Z}\}$: 相互作用
 $X \subset \mathbf{Z}$ (有限集合)

$$\Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathfrak{A}_X$$

2. $\Psi(X)$ の並進不変性

$$\tau_1(\Psi(X)) = \Psi(X + 1)$$

3. $\Psi(X)$ **finite range** if $\exists R > 0$ s.t.

$$\Psi(X) = 0, \quad (d(X) > R)$$

$$(d(X): X \text{ radius} \quad d(X) = \sup_{i,j \in X} |i - j|)$$

4. $\Psi(X)$ **short range** $\exists r > 0$

$$\sup_{j \in \mathbf{Z}} \sum \left\{ \|\Psi(X)\| e^{rd(X)} \mid j \in X \right\} < \infty$$

Short Range $\Psi(X)$ 相互作用に対して

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}} \Psi(X)$$

$$\delta(Q) = [H, Q] = \sum_{X \subset \mathbf{Z}} [\Psi(X), Q], \quad Q \in \mathfrak{A}_{loc}$$

$\alpha_t(Q) = e^{itH} Q e^{-itH}$ が定義できる。

Theorem 2.1 (T.M. 2013)

$$s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$$

H : 並進不変 $SU(2)$ 不変ハミルトニアン
with short range interaction

次の何れかが成立する。

(i) 並進不変でない基底状態が存在

または

$SU(2)$ 対称性が破れ

(ii) *ground state* 一意的であり *Gapless Excitation* がある。

Remark 2.2

- ▶ $T.M.2013$ の議論では相互作用 $\Psi(X)$ の並進不変性が必要
- ▶ 対称性 G は $SU(2)$ 以外でも類似の定理はある
- ▶ *Gapped Ground State* の *Split Property* が本質的

離散対称性、並進不変でない場合の結果

$\Rightarrow$ *Y.Ogata and H.Tasaki (2019)* ,

Y.Ogata, Y.Tachikawa and H.Tasaki (2020)

Split Property

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{(-\infty, 0]} \otimes \mathfrak{A}_{[1, \infty)}$$

Bipartite System : $A : \mathfrak{A}_{(-\infty, 0]}$ $B : \mathfrak{A}_{[1, \infty)}$

Split Property = A と B の弱い統計的独立性

$$(\pi_\varphi, \mathfrak{H}) \simeq (\pi_{\varphi_L} \otimes \pi_{\varphi_R}, \mathfrak{H}_L \otimes \mathfrak{H}_R)$$

準同値である。

φ が $\mathfrak{A}$ の純粋状態の場合の Split Property (I)

$$\varphi(Q) = \psi_L \otimes \psi_R(UQU^*)$$

$U \in \mathfrak{A}$ ユニタリー

$\psi_L : \mathfrak{A}_{(-\infty, 0]}$ の純粋状態 $\psi_R : \mathfrak{A}_{[1, \infty)}$ の純粋状態
をみたす ψ_L, ψ_R, U が存在するとき

Split Property が成立

φ が $\mathfrak{A}$ の純粋状態の場合の Split Property (II)

ヒルベルト空間の言葉で言い換えると

$$\mathfrak{H}_\varphi = \mathfrak{H}_{\psi_L} \otimes \mathfrak{H}_{\psi_R}, \quad \Omega_\varphi = U \Omega_{\psi_L} \otimes \Omega_{\psi_R}$$

$$\pi_\varphi(Q_L \otimes Q_R) = \pi_{\psi_L}(Q_L) \otimes \pi_{\psi_R}(Q_R)$$

$$Q_L \in \mathfrak{A}_{(-\infty, 0]}, \quad Q_R \in \mathfrak{A}_{[1, \infty)}$$

Split Property をみたさない例

Maximally Entangled State

Two q-bit $\mathcal{A} = M_2(\mathbf{C}) \otimes M_2(\mathbf{C})$, ψ singlet pair から定まるベクトル状態

$$\psi_0(Q \otimes 1) = \text{tr}(Q), \quad \psi_0(1 \otimes Q) = \text{tr}(Q)$$

この状態の積状態を $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{(-\infty, 0]} \otimes \mathfrak{A}_{[1, \infty)}$ に拡張

ψ は $\mathfrak{A}$ の純粋状態で

$$\begin{aligned} & \psi(\cdots 1 \otimes Q_{-L} \otimes Q_{-L+1} \otimes \cdots \otimes Q_0 \\ & \quad \otimes Q_1 \otimes Q_2 \cdots \cdots \otimes Q_L \otimes Q_{L+1} \otimes 1 \cdots) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \psi_0(Q_{-k} \otimes Q_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\psi(Q) = tr(Q), \quad \psi(Q') = tr(Q'), \quad Q \in \mathfrak{A}_{(-\infty, 0]}, \quad Q' \in \mathfrak{A}_{[1, \infty)}$$

ψ が split property を持たないことの証明にはフォン・ノイマン代数の分類 (Type of Von Neuman Algebras) の理論を使う。

3. Entanglement Entropy と Split Property

Entanglement Entropy

φ : $\mathfrak{A}$ の pure state $\varphi_{[a,b]} : \varphi$ の $\mathfrak{A}_{[a,b]}$ への制限

$\rho_{[a,b]}(\varphi) : \varphi_{[a,b]}$ の密度行列

$$\varphi_{[a,b]}(Q) = \text{tr}(\rho_{[a,b]}(\varphi)Q) \quad Q \in \mathfrak{A}_{[a,b]}$$

Entanglement Entropy:

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -\text{tr}(\rho_{[a,b]}(\varphi) \ln(\rho_{[a,b]}(\varphi)))$$

Theorem 3.1 (Area Law of Entanglement Entropy)

φ : *gapped ground state*

$$\sup_{0 \leq a < b < \infty} s_{[a,b]}(\varphi) < \infty$$

M. Hastings. An Area Law for One Dimensional Quantum Systems (2007) (finite range interaction)

Fernando G. S. L. Brandao, Michal Horodecki (2015)

Tomotaka Kuwahara and Keiji Saito (2019)

Cororally 3.2 (T.M. 2013)

任意の *gapped ground state* φ について *split property* が成立する。
 φ の $\mathfrak{A}_{(-\infty, 0]}$ への制限 ($\mathfrak{A}_{[1, \infty)}$ への制限) は *I 型* である。

$\mathfrak{A}_{(-\infty, 0]}$ への制限が *I 型* であると、(行列のサイズが無限大の)
Matrix Product State 表示が可能

$$V_k : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

$$\begin{aligned} & \psi(\cdots 1 \otimes e_{k_0 l_0} \otimes e_{k_1 l_1} \otimes e_{k_2 l_2} \cdots \otimes e_{k_L l_L} \otimes 1 \cdots) \\ = & \psi(V_{k_L} \cdots V_{k_1} V_{k_0} V_{k_0}^* V_{l_1}^* \cdots V_{l_L}) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n V_k V_k^* = 1, \quad \sum_{k=1}^n \psi(V_k Q V_k^*) = \psi(Q)$$

Ground State Phase Diagram

$\mathcal{S}$: 基底状態が一意的であり、Spectral Gap があるような
相互作用全体

$(\varphi_1, H(\Psi_1)) \in \mathcal{S}$ と $(\varphi_2, H(\Psi_2)) \in \mathcal{S}$ があれば、Gap を閉じない
で $(\varphi_1, H(\Psi_1))$ と連続的につなぐことはできるか？

$$(\varphi_s, H(\Psi_s)) \in \mathcal{S} \quad (0 \leq s \leq 1)$$

1. $\varphi_s(Q)$ は連続関数
2. ある $m > 0$ があり $\sigma(H_{\Psi_s}) \subset \{0\} \cup [m, \infty)$

G (global gauge) 対称性がある場合

$\mathcal{S}$: 基底状態が一意的であり、Spectral Gap があるような
G 不変相互作用全体

- ▶ $(\varphi_1, H(\Psi_1)) \in \mathcal{S}$ と $(\varphi_2, H(\Psi_2)) \in \mathcal{S}$ があれば、Gap を閉じないで $(\varphi_1, H(\Psi_1))$ と連続的につなげない例がある。
- ▶ G が有限群の時、不変量は群のコホモロジーで表されることが分かっている。

Theorem 4.1 (Automorphic Equivalence)

$(\varphi_s, H(\Psi_s)) \in \mathcal{S} \quad (0 \leq s \leq 1) :$

スペクトルギャップが一様に開いた *gapped ground states* の族
この時、

$$\varphi_0 \circ \beta^s = \varphi_s \quad 0 \leq s \leq 1$$

をみたす時間に依存する *Hamiltonian* $H^{(s)}$ が生成する時間発展 β^s
が存在

S. Bachmann, S. Michalakis, B. Nachtergaele, R. Sims (2012)

A.Moon, Y.Ogata (2019)

$1 + 1$ 次元時空のフェルミオンの Gapped Ground State では
Ground State Phase Diagram は連結でない。

⇒ Fermionic String Order と Z_2 不変量

接動のある AKLT 模型の String Order

AKLT model (Spin =1)

$$H_{AKLT} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \{ S^{(k)} \cdot S^{(k+1)} + 1/3 (S^{(k)} \cdot S^{(k+1)})^2 \}$$

$$S^{(k)} \cdot S^{(k+1)} = \sum_{a=x,y,z} S_a^{(k)} S_a^{(k+1)}$$

perturbed AKLT model

$$H_{AKLT} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \{ S^{(k)} \cdot S^{(k+1)} + (1/3 + k) (S^{(k)} \cdot S^{(k+1)})^2 \}$$

$|k| \ll 1$ なら a unique gapped ground state $\psi_{AKLT}(k)$

$\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 対称性

$$\beta_{+-}(S_x^{(j)}) = -S_x^{(j)}, \beta_{+-}(S_y^{(j)}) = -S_y^{(j)}, \beta_{+-}(S_z^{(j)}) = S_z^{(j)}$$

$$\beta_{-+}(S_x^{(j)}) = S_x^{(j)}, \beta_{-+}(S_y^{(j)}) = -S_y^{(j)}, \beta_{-+}(S_z^{(j)}) = -S_z^{(j)}$$

$$\beta_{--} = \beta_{-+} \circ \beta_{+-} = \beta_{+-} \circ \beta_{-+}$$

をみたす変換を考える。

Theorem 4.2

(i) For $\psi_{AKLT}(k)$, String Order exists ($a = x, y, z$)
namely,

$$\lim_{|j-k| \rightarrow \infty} -\psi_{AKLT}(k)(S_a^{(j)} \exp[i\pi \sum_{l=j+1}^{k-1} S_a^{(l)}] S_a^{(k)}) > 0$$

(ii) String Order を持つ gapped ground state は $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 不変性

を保ちながら

連続的な gapped ground state の path で product state につなぐことは不可能

(いろいろな結果を結びつけると分かる。)

3. Fermionic String Order

$\mathcal{A}$ = CAR algebra (簡単のため single component)

フェルミオンの生成消滅作用素が生成する代数

CAR : Canonical Anti-Commutation Relations

$$\{c_j, c_k\} = 0, \quad \{c_j^*, c_k^*\} = 0, \quad \{c_j^*, c_k\} = \delta_{jk} 1$$

$\mathcal{A}$: $\mathbf{Z}_2$ graded algebra

$$\Theta(c_j) = -c_j, \quad \Theta(c_k^*) = -c_k^*$$

$$\mathcal{A}^{(\pm)} = \{ Q \in \mathcal{A} \mid \Theta(Q) = \pm Q \}$$

$\mathcal{A}_\Lambda$: c_j, c_k^* ($j, k \in \Lambda$) が生成する代数

$$\mathcal{A}_{loc} = \cup_{|X| < \infty} \mathcal{A}_X$$

以下では相互作用は short Range 並進不変 $\Psi(X)$ のみ考える。

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}} \Psi(X)$$

$$\alpha_t^\Psi(Q) = e^{itH} Q e^{-itH}$$

Definition 5.1

1. $\{\Psi(X) | X \subset \mathbf{Z}\}$ が相互作用とは $X \subset \mathbf{Z}$

$$\Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}^{(+)}$$

2. $\Psi(X)$ 並進不変

$$\tau_1(\Psi(X)) = \Psi(X + 1)$$

$\mathcal{A}$ の φ が状態が因子状態であるとは

$$\pi_{\varphi}(\mathcal{A})'' \cap \pi_{\varphi}(\mathcal{A})' = \mathbf{C}1$$

ここで

$$\pi_{\varphi}(\mathcal{A})' = \{B \mid [Q, B] = 0, Q \in \pi_{\varphi}(\mathcal{A})\}$$

$$\pi_{\varphi}(\mathcal{A})'' = (\pi_{\varphi}(\mathcal{A})')'$$

Lemma 5.2

もしも φ が $\mathcal{A}$ の並進不変純粋状態（因子状態）であれば φ は Θ 不変。

$$\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_{(-\infty, 0]}, \quad \mathcal{A}_R = \mathcal{A}_{[1, \infty)}$$

Definition 5.3

Θ 不変な φ が *split property* 持つとは φ と $\psi_L \otimes_{\mathbf{Z}_2} \psi_R$ が（準）同値

Theorem 5.4 (T.M. 2020)

フェルミオンの *gapped ground state* に対して *split property* が成立

Fermion $\mathbb{Z}_2$ index

$$\Theta_- \in \text{Aut}(\mathcal{A}) \quad :$$

$$\Theta_-(c_j) = \begin{cases} -c_j & (j \leq 0) \\ c_j & (1 \leq j) \end{cases}$$

Lemma 5.5

$\varphi : \Theta$ 不変純粋状態 + *split property*

φ の $\mathcal{A}_L$ への制限が因子状態であるための条件は
 φ と $\varphi \circ \Theta_-$ の $\mathcal{A}^{(+)}$ への制限が同値な表現であること

Definition 5.6 ($\mathbb{Z}_2$ 指数)

φ は Θ 不変な $\mathcal{A}$ の純粋状態で *split property* が成立すると仮定

- ▶ φ の $\mathcal{A}_L$ への制限が因子状態であれば $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2} \varphi = 1$ と定める。
- ▶ φ の $\mathcal{A}_L$ への制限が因子状態でなければ $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2} \varphi = -1$ と定める

T.M.2020, C.Bourne,and H.Schulz-Baldes 2019

- ▶ AS 指数 = D のゼロ固有値の次元 - D^* のゼロ固有値の次元
- ▶ 実ベクトル束 では AS 指数 = 次元の偶奇性
- ▶ 上で定義した $\mathbf{Z}_2$ 指数は Free Fermion の場合の (対称性がない時の) $\mathbf{Z}_2$ 指数と一致
- ▶ 前に定義した Spectral Gap を閉じない gapped ground states の連続変形で $\mathbf{Z}_2$ 指数は定数である。

Fermionic String Order

AKLT 模型の場合の類似物

Definition 5.7

ψ が $\mathcal{A}$ の並進不変純粋状態とする。

ψ に *Fermionic String Order* があるとは

ある $Q_1 \in \mathfrak{A}^{(-)} \cap \mathfrak{A}_{[n,-1]}$ と $Q_2 \in \mathfrak{A}_{loc}^{(-)} \cap \mathfrak{A}_{[0,m]}$ ($n < 0 \leq m$) に関して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(Q_1 S[0, 2k-1] Q_2) \neq 0$$

が成立すること。ここで

$$S[0, k-1] = \prod_{j=0}^{k-1} (2c_j^* c_j - 1).$$

Proposition 5.8

ψ が $\mathcal{A}$ の並進不変純粋状態とする。

(1) と (2) の条件は同値

(1) $\text{ind}_{\mathbf{Z}_2} \psi = -1$, (2) *Fermionic String Order* がある。

結論

Theorem 5.9

φ は並進不変 *gapped ground state* であり、*String Order* があると
する。

$\Rightarrow$

φ は標準的なフォック状態 ψ_{Fock} ($\psi_{Fock}(c_j^* c_j) = 0$ にスペクトル
ギャップを閉じないで連続変形することは出来ない。

Proof: Jordan-Wigner transformation を相互作用のある系で応用
する。

フェルミ粒子系の String Order = パウリスピン系 $\mathfrak{A}$ の長距離
秩序