

グラディエントフロー厳密くりこみ群

鈴木博（九州大学）

2022 年 7 月 19 日

基研研究会・iTHEMS 研究会「格子上の場の理論と連続空間上の場の理論」

- 園田英徳（神戸大学）-鈴木:
PTEP **2019**, no.3, 033B05 (2019) [arXiv:1901.05169 [hep-th]]
PTEP **2021**, no.2, 023B05 (2021) [arXiv:2012.03568 [hep-th]]
PTEP **2022**, no.5, 053B01 (2022) [arXiv:2201.04448 [hep-th]]
- 宮川侑樹（九州大学）-鈴木:
PTEP **2021**, no.8, 083B04 (2021) [arXiv:2106.11142 [hep-th]]
- 宮川-園田-鈴木:
PTEP **2022**, no.2, 023B02 (2022) [arXiv:2111.15529 [hep-th]]
and work in progress.

K. G. ウィルソンの厳密くりこみ群 (ERG)

- スケール変換のもとでの有効相互作用の変化：

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{S_\tau} \sim e^{n[(D-2)/2](\tau-\tau_0)} Z(\tau, \tau_0)^n \langle \phi(e^{\tau-\tau_0} x_1) \cdots \phi(e^{\tau-\tau_0} x_n) \rangle_{S_{\tau_0}}$$

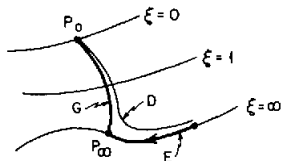


Fig. 12.6. Renormalization group trajectory

- 連続時空の場の量子論を構成する一般的手法：相関距離 $\xi = \xi_0 |K - K_c|^{1/\nu_E}$ ：

$$\begin{aligned} & \langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle_g \\ & \equiv \lim_{\tau \rightarrow +\infty} e^{n[(D-2)/2](\tau-\tau_0)} Z(\tau, \tau_0)^n \langle \phi(e^{\tau-\tau_0} x_1) \cdots \phi(e^{\tau-\tau_0} x_n) \rangle_{S_{\tau_0}, K=K_c-g e^{-\nu_E \tau}} \end{aligned}$$

- $D = 4$ での非自明な固定点？
- 多フレーバー非可換ゲージ理論 (Banks–Zaks fixed point)；テクニカラーシナリオ？
- 漸近的安全（くりこみ可能）重力？
- こうした素粒子論で興味ある理論では、ゲージ対称性が基本的

ERG の具体形：スカラー場理論での Polchinski 方程式

- なめらかな運動量カットオフ、例えば

$$K(p/\Lambda) = e^{-p^2/\Lambda^2}$$

を導入

- 運動量が UV カットオフ Λ 以上のモードを “integrate out” して、Wilson 作用 $S_\Lambda[\phi]$ を得る
- S_Λ を Λ で微分し、UV カットオフ Λ の変化に対する応答を見る
- Λ を単位として全てを無次元化し、スケール変換に対する応答に直す ($\Lambda = 1$ と置くことに対応：格子模型！)
- Polchinski 方程式 ($\tau \sim -\ln \Lambda$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{S_\tau[\phi]} &= \int d^D x \left(-2\partial^2 - \frac{D-2}{2} - \gamma_\tau - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x) \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{S_\tau[\phi]} \\ &\quad + \int d^D x (-2\partial^2 + 1 - \gamma_\tau) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(x)} e^{S_\tau[\phi]} \end{aligned}$$

(ここでは $K(p)[1 - K(p)] \rightarrow p^2$ と一般化し、異常次元 $\gamma_\tau \equiv \partial_\tau \ln Z(\tau, \tau_0)$ も導入した)

- 非摂動論的固定点の探索など、スカラー場理論では非常にうまく働く

ERG で有用な概念 (きれいなスケーリングに従う object)

- 変形された相関関数 (Sonoda, 2015)

$$\langle\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle\rangle_{S_\tau} \equiv \int [d\phi] e^{S_\tau[\phi]} \hat{s} e^{-\partial^2} \phi(x_1) \cdots e^{-\partial^2} \phi(x_n)$$

ここで、 $\hat{s}$ は “scrambler”

$$\hat{s} \equiv \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(x)} \right]$$

これは、ERG のもとできれいなスケーリング則を示す：

$$\begin{aligned} & \langle\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle\rangle_{S_\tau} \\ &= e^{n[(D-2)/2](\tau-\tau_0)} Z(\tau, \tau_0)^n \langle\langle\phi(e^{-(\tau-\tau_0)} x_1) \cdots \phi(e^{-(\tau-\tau_0)} x_n)\rangle\rangle_{S_{\tau_0}} \end{aligned}$$

- “複合演算子” (Wilson, Wegner, Becchi, ...) ($-y_\tau$: スケーリング次元)

$$\begin{aligned} & \int [d\phi] e^{S_\tau[\phi]} \mathcal{O}_\tau(x) \hat{s} \left[e^{-\partial^2} \phi(x_1) \cdots e^{-\partial^2} \phi(x_n) \right] \\ &= e^{-\int_{\tau_0}^\tau d\tau' y_{\tau'}} Z(\tau, \tau_0)^n \\ & \quad \times \int [d\phi] e^{S_{\tau_0}[\phi]} \mathcal{O}_{\tau_0}(e^{\tau-\tau_0} x) \hat{s} \left[e^{-\partial^2} \phi(x_1) \cdots e^{-\partial^2} \phi(x_n) \right]_{x_i \rightarrow e^{\tau-\tau_0} x_i} \end{aligned}$$

- 定義から、複合演算子は

$$\left(\partial_\tau - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y_\tau - \mathcal{D}_\tau \right) \mathcal{O}_\tau(x) = 0$$

という線形方程式、ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\tau \equiv & \int d^D x \left(-2\partial^2 - \frac{D-2}{2} - \gamma_\tau - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x) \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \\ & + \int d^D x 2(-2\partial^2 + 1 - \gamma_\tau) \left[\frac{\delta}{\delta \phi(x)} S_\tau[\phi] + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right] \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \end{aligned}$$

に従う

- 複合演算子は、ウィルソン作用の微小変形と見なせる：

$$S_\tau[\phi] \rightarrow S_\tau[\phi] + e^{\int^\tau d\tau' y_{\tau'}} \int d^D x \epsilon(x) \mathcal{O}_\tau(e^{-\tau} x)$$

■ 局所ゲージ変換

$$A_{\mu}^a(\textcolor{red}{k}) \rightarrow A_{\mu}^a(k) + ik_{\mu} \chi^a(k) - g \int_q f^{abc} \chi^b(q) A_{\mu}^c(\textcolor{red}{k} - q)$$

$$\psi(\textcolor{red}{p}) \rightarrow \psi(p) - g \int_q \chi^a(q) T^a \psi(\textcolor{red}{p} - q)$$

は異なる運動量モードを混ぜるため、通常の ERG は明白なゲージ対称性を保たない

- おそらくこれが、ERG が素粒子論であまり使われない理由...
- ERG には変形されたゲージ対称性が存在する (Becchi, Ellwanger, Bonini-D'Atanasio-Marchesini, Reuter-Wetterich, Higashi-Itou-Kugo, Igarashi-Itoh-Sonoda) が、具体形は Wilson 作用 S_{τ} 自身に依存している
- 通常の ERG のゲージ不変な、特に非摂動的な近似は極めて難しい (不可能?)
- 非自明固定点での臨界指数がゲージに依存、など
- 明白なゲージ対称性を保つ ERG は作れないか?

■ スカラー場理論の Wilson 作用の“積分表示”

$$e^{S_\tau[\phi]} \\ = \hat{s}^{-1} \int [d\phi'] \prod_x \delta \left(\phi(x) - e^{\int_{\tau_0}^\tau d\tau' [(D-2)/2 + \gamma_{\tau'}]} \phi'(t - t_0, e^{\tau - \tau_0} x) \right) \hat{s} e^{S_{\tau_0}[\phi']}$$

ここで、 $\phi'(t - t_0, x)$ は拡散方程式

$$\partial_t \phi'(t - t_0, x) = \partial^2 \phi'(t - t_0, x)$$

の解。拡散時間 t とスケールパラメータ τ は

$$t - t_0 = e^{2(\tau - \tau_0)} - 1$$

で結びついている。拡散の初期値は積分変数 ϕ' :

$$\phi'(0, x) = \phi'(x)$$

- ERG と拡散方程式 : Abe-Fukuma, Carosso-Hasenfratz-Neil, Matsumoto-Tanaka-Tsuchiya

これをゲージ共変な拡散方程式で置き換えたらどうだろう...

- グラディエントフロー方程式 (Narayanan-Neuberger, Lüscher) :

$$\partial_t A'_\mu{}^a(t, x) = D'_\nu F'_{\nu\mu}{}^a(t, x) = \partial^2 A'_\mu{}^a(t, x) + \text{非線形項} \quad A'_\mu{}^a(0, x) = A'_\mu{}^a(x)$$

- フェルミオンの拡散方程式 (Lüscher) :

$$\partial_t \psi'(t, x) = D'_\mu D'_\mu \psi'(t, x) \quad \psi'(0, x) = \psi'(x)$$

$$\partial_t \bar{\psi}'(t, x) = \bar{\psi}'(t, x) \overleftarrow{D}'_\mu \overleftarrow{D}'_\mu \quad \bar{\psi}'(0, x) = \bar{\psi}'(x)$$

- Wilson 作用は、スカラー場を真似して

$$e^{S_\tau[A, \psi, \bar{\psi}]}$$

$$= \hat{s}^{-1} \int [dA' d\psi' d\bar{\psi}']$$

$$\times \prod_{x, \mu, a} \delta \left(A'_\mu{}^a(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-2)/2 + \gamma_{\tau'}]} A'_\mu{}^a(t - t_0, e^{\tau - \tau_0} x) \right)$$

$$\times \prod_x \delta \left(\psi(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-1)/2 + \gamma_{F\tau'}]} \psi'(t - t_0, e^{\tau - \tau_0} x) \right)$$

$$\times \prod_x \delta \left(\bar{\psi}(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-1)/2 + \gamma_{F\tau'}]} \bar{\psi}'(t - t_0, e^{\tau - \tau_0} x) \right) \hat{s} e^{S_{\tau_0}[A', \psi', \bar{\psi}']}$$

$$\hat{s} \equiv \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x \frac{\delta^2}{\delta A'_\mu{}^a(x) \delta A'_\mu{}^a(x)} \right] \exp \left[i \int d^D x \frac{\vec{\delta}}{\delta \psi(x)} \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} \right]$$

グラディエントフロー厳密くりこみ群 (GFERG) と呼んでいます

- 実際には、ゲージモードも拡散するように

$$\partial_t A_\mu^a(t, x) = D'_\nu F_{\nu\mu}^a(t, x) + \alpha_0 D'_\mu \partial_\nu A_\nu^a(t, x) \quad A_\mu^a(0, x) = A_\mu^a(x)$$

などとする

- くりこみ群発展のもとで、**明白なゲージ対称性が保存される** : S_{τ_0} が

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \partial_\mu \chi^a(x) + g_\tau f^{abc} A_\mu^b(x) \chi^c(x)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) - g_\tau \chi^a(x) T^a \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) + g_\tau \chi^a(x) \bar{\psi}(x) T^a$$

の $\tau = \tau_0$ のもとで不変ならば、 S_τ も不変である。

- くりこみ群発展のもとで、**変形されたカイラル対称性が保存される** : S_{τ_0} が

$$\int d^D x \left\{ S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \gamma_5 \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} S_\tau \right. \\ \left. + 2i S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} S_\tau - 2i \operatorname{tr} \left[\gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \right] \right\} = 0$$

の $\tau = \tau_0$ を満たすなら、 S_τ も満たす。これは Ginsparg-Wilson 関係式の一般化

- 明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性を保つ

- 明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性を保つ
- 良いことばかりのようだが...

- 明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性を保つ
- 良いことばかりのようだが...
- 運動量カットオフを使わないので、**相関関数の有限性**が自明ではない

- 明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性を保つ
- 良いことばかりのようだが...
- 運動量カットオフを使わないので、**相関関数の有限性**が自明ではない
- 少なくとも Gauss 固定点の周りでは、有限性が議論できる。上記の定義とゲージ結合の定義

$$g_\tau \equiv e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-4)/2 + \gamma_{\tau'}]} g_{\tau_0}$$

から

$$\begin{aligned} & \int [dA] e^{S_\tau[A]} \hat{s} [g_\tau A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \cdots g_\tau A_{\mu_n}^{a_n}(x_n)] \\ &= \int [dA'] e^{S_{\tau_0}[A']} \\ & \quad \times \hat{s} \left[e^{(\tau-\tau_0)} g_{\tau_0} A_{\mu_1}'^{a_1}(t-t_0, e^{\tau-\tau_0} x_1) \cdots e^{(\tau-\tau_0)} g_{\tau_0} A_{\mu_n}'^{a_n}(t-t_0, e^{\tau-\tau_0} x_n) \right] \end{aligned}$$

右辺のグラディエントフローされた場の相関関数は有限の連続極限を持つ（くりこまれている）ことが、摂動の全次数で示されている（Lüscher-Weisz, Hieda-Makino-H.S.）。格子シミュレーションによる非摂動論的検証も多くある

- 明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性を保つ
- 良いことばかりのようだが...
- 運動量カットオフを使わないので、**相関関数の有限性**が自明ではない
- 少なくとも Gauss 固定点の周りでは、有限性が議論できる。上記の定義とゲージ結合の定義

$$g_\tau \equiv e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-4)/2 + \gamma_{\tau'}]} g_{\tau_0}$$

から

$$\begin{aligned} & \int [dA] e^{S_\tau[A]} \hat{s} [g_\tau A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \cdots g_\tau A_{\mu_n}^{a_n}(x_n)] \\ &= \int [dA'] e^{S_{\tau_0}[A']} \\ & \quad \times \hat{s} \left[e^{(\tau-\tau_0)} g_{\tau_0} A_{\mu_1}'^{a_1}(t-t_0, e^{\tau-\tau_0} x_1) \cdots e^{(\tau-\tau_0)} g_{\tau_0} A_{\mu_n}'^{a_n}(t-t_0, e^{\tau-\tau_0} x_n) \right] \end{aligned}$$

右辺のグラディエントフローされた場の相関関数は有限の連続極限を持つ（くりこまれている）ことが、摂動の全次数で示されている（Lüscher-Weisz, Hieda-Makino-H.S.）。格子シミュレーションによる非摂動論的検証も多くある

- 従って、左辺の相関関数も連続極限で有限

- 積分表示の τ 微分から

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} e^{S_\tau[A, \psi, \bar{\psi}]} \\
 &= \int d^D x \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \\
 & \times \left[-2D_\nu F_{\nu\mu}^a(x) - 2\alpha_0 D_\mu \partial_\nu A_\nu^a(x) - \left(\frac{D-2}{2} + \gamma_\tau + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) A_\mu^a(x) \right] \Big|_{A \rightarrow A + \delta / \delta A} \\
 & \quad \times e^{S_\tau[A, \psi, \bar{\psi}]} \\
 & \quad + (\text{フェルミオンの寄与})
 \end{aligned}$$

が得られる

- 場の 4 階までの汎関数微分を含んでいる（通常の ERG は 2 階まで）

- Gauss 固定点周りで、ゲージ結合 g_τ に関する摂動展開ができる
- $D = 4$ 純非可換ゲージ理論で $O(g_\tau^2)$ までの解析から、ゲージ場の異常次元 (ベータ関数) として

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{7}{2} C_A g_\tau^2$$

を得た (C_A は $f^{acd}f^{bcd} = C_A\delta^{ab}$ で定義される adjoint 表現の Dynkin index) (Sonoda-H.S., unpublished)。これは、期待される値

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} C_A g_\tau^2$$

とは異なっている

- Gauss 固定点周りで、ゲージ結合 g_τ に関する摂動展開ができる
- $D = 4$ 純非可換ゲージ理論で $O(g_\tau^2)$ までの解析から、ゲージ場の異常次元 (ベータ関数) として

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{7}{2} C_A g_\tau^2$$

を得た (C_A は $f^{acd}f^{bcd} = C_A \delta^{ab}$ で定義される adjoint 表現の Dynkin index) (Sonoda-H.S., unpublished)。これは、期待される値

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} C_A g_\tau^2$$

とは異なっている

- 摂動論では、初期 Wilson 作用 S_{τ_0} にゲージ固定が必要に思われる：

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 \sim \delta^{ab} \int_k e^{ik(x-y)} \frac{1}{k^2} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{-2tk^2} + \xi_\tau \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} e^{-2\alpha_0 tk^2} \right]$$

ゲージ固定なし $\rightarrow \xi_\tau = \infty$

ゲージ固定を取り入れる GFERG

- Faddeev-Popov (FP) ゴースト・反ゴースト場、中西-Lautrup (NL) 場を導入
- 拡散方程式は BRST 変換

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu c^a(x) + g_\tau f^{abc} A_\mu^b(x) c^c(x)$$

$$\delta c^a(x) = -\frac{1}{2} g_\tau f^{abc} c^b(x) c^c(x)$$

$$\delta \bar{c}^a(x) = B^a(x)$$

$$\delta B^a(x) = 0$$

と consistent なものを採用

- しかし、単純な scrambler

$$\hat{s} \equiv \exp \left[- \int d^D x \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\mu^a(x)} \right] \\ \times \exp \left[\int d^D x \frac{\delta}{\delta c^a(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a(x)} \right] \exp \left[\int d^D x \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta B^a(x) \delta B^a(x)} \right]$$

は BRST 不変ではない → (再び) 変形された BRST 対称性...

少なくとも量子電磁力学のような可換ゲージ理論ではうまく行く

- NL 場は消去できる
- FP ゴーストが GFERG から完全に decouple し、ゴーストセクターは解けてしまう
- BRST 対称性は、Ward-Takahashi (WT) 恒等式

$$ik_\mu \frac{\delta S_\tau}{\delta A_\mu(k)} + \frac{k^2}{\xi_\tau E(e^{-2\tau} k^2) e^{-2k^2}} ik_\mu \left[A_\mu(-k) + \frac{\delta S_\tau}{\delta A_\mu(k)} \right] \\ + ig_\tau \int_p S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(p+k)} \psi(p) - ig_\tau \int_p \bar{\psi}(-p-k) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(-p)} S_\tau = 0$$

に帰着する。これは Wilson 作用の一次式

- 通常の ERG での WT 恒等式は、Wilson 作用の無限次まで含む
- $O(g_\tau^2)$ までの摂動論的解析：ベータ関数

$$\beta = -2\gamma g^2 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{8}{3} g^4 + \dots$$

フェルミオンの質量異常次元、波動関数異常次元：

$$\beta_m = \frac{6}{(4\pi)^2} g^2 + \dots \quad \gamma_F = \frac{3}{(4\pi)^2} g^2 + \dots$$

後者は、フローさせたフェルミオンのそれ (Lüscher) になっている

- 拡散方程式が線形でないので複雑。結論は

$$\begin{aligned} & \langle\langle A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \psi(y_1) \cdots \psi(y_m) \bar{\psi}(z_1) \cdots \bar{\psi}(z_m) \rangle\rangle_{S_\tau} \\ & \equiv \int [dA d\psi d\bar{\psi}] e^{S_\tau[A, \psi, \bar{\psi}]} \\ & \quad \times \hat{s}[A_{\mu_1}^{a_1}(-1, x_1) \cdots A_{\mu_n}^{a_n}(-1, x_n) \\ & \quad \times \psi(-1, y_1) \cdots \psi(-1, y_m) \bar{\psi}(-1, z_1) \cdots \bar{\psi}(-1, z_m)] \end{aligned}$$

ここで右辺の $A_\mu^a(-1, x)$ 等は、拡散方程式

$$\partial_t A_\mu^a(t, x) = D_\nu F_{\nu\mu}^a(t, x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu A_\nu^a(t, x) \quad A_\mu^a(0, x) = A_\mu^a(x)$$

を時間の逆向きに $t = -1$ まで解いた解

- これは、スカラー場の時の

$$\langle\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle\rangle_{S_\tau} \equiv \int [d\phi] e^{S_\tau[\phi]} \hat{s} e^{-\partial^2} \phi(x_1) \cdots e^{-\partial^2} \phi(x_n)$$

のアナロジーになっている

■ これはきれいなスケーリング則

$$\begin{aligned}
 & \langle\langle A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \psi(y_1) \cdots \psi(y_m) \bar{\psi}(z_1) \cdots \bar{\psi}(z_m) \rangle\rangle_{S_\tau} \\
 &= \left\{ e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-2)/2 + \gamma_{\tau'}]} \right\}^n \left\{ e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-1)/2 + \gamma_{F\tau'}]} \right\}^{2m} \\
 & \quad \times \langle\langle A_{\mu_1}^{a_1}(e^{\tau-\tau_0} x_1) \cdots A_{\mu_n}^{a_n}(e^{\tau-\tau_0} x_n) \\
 & \quad \times \psi(e^{\tau-\tau_0} y_1) \cdots \psi(e^{\tau-\tau_0} y_m) \bar{\psi}(e^{\tau-\tau_0} z_1) \cdots \bar{\psi}(e^{\tau-\tau_0} z_m) \rangle\rangle_{S_{\tau_0}}
 \end{aligned}$$

に従う

■ 対応して、複合演算子は

$$\begin{aligned}
 & \int [dA d\psi d\bar{\psi}] e^{S_\tau[A, \psi, \bar{\psi}]} \mathcal{O}_\tau(x) \hat{s} [A_{\mu_1}^{a_1}(-1, x_1) \cdots A_{\mu_n}^{a_n}(-1, x_n) \cdots] \\
 &= e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \gamma_{\tau'}} \left\{ e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-2)/2 + \gamma_{\tau'}]} \right\}^n \cdots \\
 & \quad \times \int [dA' d\psi' d\bar{\psi}'] e^{S_{\tau_0}[A', \psi', \bar{\psi}']} \mathcal{O}_{\tau_0}(e^{\tau-\tau_0} x) \\
 & \quad \times \hat{s} [A_{\mu_1}'^{a_1}(-1, e^{\tau-\tau_0} x_1) \cdots A_{\mu_n}'^{a_n}(-1, e^{\tau-\tau_0} x_n) \cdots]
 \end{aligned}$$

なるものとすればよい

GFERG での複合演算子の面白い例

- ゲージ変換のように

$$\begin{aligned}
 & \delta e^{S_\tau[A, \psi, \bar{\psi}]} \\
 &= \hat{s}^{-1} \int [dA' d\psi' d\bar{\psi}'] \\
 & \times \prod_{x, \mu, a} \delta \left(A_\mu^a(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-2)/2 + \gamma_{\tau'}]} A_\mu'^a(t - t_0, e^{\tau - \tau_0} x) \right) \\
 & \times \delta \left(\psi(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-1)/2 + \gamma_{F\tau'}]} \psi'(t - t_0, e^{\tau - \tau_0} x) \right) \\
 & \times \delta \left(\bar{\psi}(x) - e^{\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [(D-1)/2 + \gamma_{F\tau'}]} \bar{\psi}'(t - t_0, e^{\tau - \tau_0} x) \right) \hat{s} \delta' e^{S_{\tau_0}[A', \psi', \bar{\psi}']}
 \end{aligned}$$

ただし、変換パラメターの関数 $\chi^a(x)$ が拡散方程式

$$\begin{aligned}
 \partial_s \chi'^a(s, x) &= \alpha_0 \left[\delta^{ab} \partial_\mu + g_{\tau_0} f^{acb} A_\mu'^c(s, x) \right] \partial_\mu \chi'^b(s, x) \\
 \chi'^a(s = t - t_0, x) &= \frac{g_\tau}{g_{\tau_0}} \chi^a(0, e^{-(\tau - \tau_0)} x)
 \end{aligned}$$

に従う場合、

$$\frac{\delta}{\delta \chi^a(-1, x)} S_\tau[A, \psi, \bar{\psi}]$$

はスケール次元 $(D + 4)/2 - \gamma_\tau$ の複合演算子になる

- $D = 4$, $m = 0$ とする
- 物理的なゲージ群は $U(1)$ 、大局的な対称性は $SU(N)_L \times SU(N)_R$ とする
- $SU(N)_L$, $SU(N)_R$ のカレントと結合する non-dynamical ゲージ場、 $L_\mu^A(x)$ と $R_\mu^A(x)$ を導入
- $L_\mu^A(x)$ と $R_\mu^A(x)$ のスケーリング次元は 1 (ゲージ結合を吸収した convention)
- Wilson 作用の構成は、これまでと同様。ただし scrambler には、 $L_\mu^A(x)$ と $R_\mu^A(x)$ は入れない
- Wilson 作用は、 $SU(N)_V$ ゲージ変換

$$V_\mu^A(x) \rightarrow V_\mu^A(x) + \partial_\mu \chi^A(x) + f^{ABC} V_\mu^B(x) \chi^C(x)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) - \chi^A(x) T^A \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) + \bar{\psi}(x) \chi^A(x) T^A$$

ただし

$$V_\mu^A(x) \equiv \frac{1}{2} \left[L_\mu^A(x) + R_\mu^A(x) \right]$$

のもとで明白に不変 : **これが GFERG の一つの利点**

- 一方、 $SU(N)$ カイラルアノマリーは

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_5^A(x) S_\tau = & -\partial_\mu \frac{\delta S_\tau}{\delta C_\mu^A(x)} - S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} T^A \gamma_5 \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma_5 T^A \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} S_\tau \\ & - 2i S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} T^A \gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} S_\tau + 2i \text{tr} \left[T^A \gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \right] \end{aligned}$$

で特徴付けられる。ここで

$$C_\mu^A(x) \equiv \frac{1}{2} \left[-L_\mu^A(x) + R_\mu^A(x) \right]$$

- 一般論から、

$$Q_5^A(x) \equiv \frac{\delta}{\delta \chi^A(-1, x)} \int d^D x' \chi^B(x') \hat{\delta}_5^B(x') S_\tau$$

は、**スケーリング次元が 4 の複合演算子**

- 定義から $Q_5^A(x)$ は **パリティ奇で $SU(N)_V$ ゲージ不変** ($U(1)$ BRST 不変も要求できる)

- パリティ奇、 $SU(N)_V$ ゲージ不変、スケーリング次元が 4 の複合演算子は以下の二つに限られることが議論できる
- “アノマリー演算子” :

$$q_5^A(x) \equiv \text{tr}(T^A T^B T^C) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} V_{\mu\nu}^B(-1, x) V_{\rho\sigma}^C(-1, x)$$

ここで

$$V_{\mu\nu}^A(-1, x) \equiv \partial_\mu V_\nu^A(-1, x) - \partial_\nu V_\mu^A(-1, x) + f^{ABC} V_\mu^B(-1, x) V_\nu^C(-1, x)$$

これは、 $V_\mu^A(-1, x)$ がスケーリング次元 1 の複合演算子であることから従う

- “運動方程式演算子” :

$$\begin{aligned} R_5^A(x) \equiv & e^{-S_\tau} \hat{s}^{-1} \frac{\delta}{\delta \psi(-1, x)} T^A \gamma_5 \psi(-1, x) \hat{s} e^{S_\tau} \\ & + e^{-S_\tau} \hat{s}^{-1} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(-1, x)} \bar{\psi}(-1, x) \gamma_5 T^A \hat{s} e^{S_\tau} \end{aligned}$$

これは、変形された相関関数に挿入した時、 $SU(N)$ カイラル変換を引き起こすことから従う ($\partial_\mu J_{5\mu}^A(x)$ の対応物)

- 低次の項を調べることで、 $Q_5^A(x)$ は $R_5^A(x)$ の成分を持たない、つまり

$$Q_5^A(x) = \omega q_5^A(x)$$

ように選べることがわかる。係数 ω が 't Hooft アノマリーと見なせるだろう。しかし

$$\left(\partial_\tau - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 4 - \mathcal{D}_\tau \right) Q_5^A(x) = \left(\partial_\tau - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 4 - \mathcal{D}_\tau \right) q_5^A(x) = 0$$

なのだから

$$\frac{d}{d\tau} \omega = 0$$

となり、't Hooft アノマリーはくりこみ群不変、 g_τ にも依存できない

- 具体的な Wilson 作用 S_τ の摂動計算 (20 日 (水) 午後の宮川さんの講演) から

$$\omega = -\frac{1}{16\pi^2}$$

- ERG の非摂動論的応用には、通常いわゆる 1PI 作用 Γ_τ に対する ERG 方程式 (Nicoll-Chang, Wetterich, Morris, Bonini-D'Atanasio-Marchesini) が用いられる
- GFERG でも対応するものが作れる : Legendre 変換は

$$\mathcal{A}_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = e^{-S_\tau} \hat{s}^{-1} A_\mu(x) \hat{s} e^{S_\tau}$$

$$\Psi(x) \equiv \psi(x) + i \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} S = e^{-S_\tau} \hat{s}^{-1} \psi(x) \hat{s} e^{S_\tau}$$

$$\bar{\Psi}(x) \equiv \bar{\psi}(x) + i S \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} = e^{-S_\tau} \hat{s}^{-1} \bar{\psi}(x) \hat{s} e^{S_\tau}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\tau[\mathcal{A}_\mu, \Psi, \bar{\Psi}] &= \frac{1}{2} \int d^D x \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x) + i \int d^D x \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \\ &\equiv S_\tau[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + \frac{1}{2} \int d^D x A_\mu(x) A_\mu(x) - i \int d^D x \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ &\quad - \int d^D x \mathcal{A}_\mu(x) A_\mu(x) + i \int d^D x [\bar{\Psi}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \Psi(x)] \end{aligned}$$

- 明白なゲージ不変性とカイラル対称性が保たれる (可換ゲージ理論では状況は特によい)
- GFERG 方程式は複雑

- 厳密くりこみ群 (ERG) と場の拡散の関係に着目して、**明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性**を保つ ERG、グラディエントフロー厳密くりこみ群 (GFERG) を定式化した
- 特に可換ゲージ理論 (QED) では明白なゲージ (BRST) 対称性を保つ単純な定式化が可能
- ガウス固定点周りでの相関関数の有限性を、グラディエントフローのくりこみ可能性 (Lüscher-Weisz) から議論した
- 変形された相関関数や複合演算子の概念も導入できる
- ここでは、't Hooft アノマリーの非くりこみ定理への応用を議論した
- 1PI 作用の version も作れる

- いわゆる、グラディエントフローに基づいたくりこみ群 (Lüscher, Aoki-Balog-Onogi-Weisz, Abe-Fukuma, Makino-Morikawa-H.S., Carosso-Hasenfratz-Neil, Kitazawa-H.S., Tanaka-Kitazawa-Morikawa-Suzuki) との関連
- $D = 4$ 非可換ゲージ理論での摂動論的解析から、少なくとも摂動論では、ゲージ固定が必要に思われる
- これは、一般には、変形された BRST 対称性の複雑性に導く
- 非摂動論的にもゲージ固定が必要か???
- 少なくとも可換ゲージ理論 (QED) では明白な BRST 対称性を保つ単純な定式化が可能
- これは、可換ゲージ理論での非自明な固定点の解析に有用なはず。過去の研究 (Aoki-Morikawa-Sumi-Terao-Tomoyose, Gies-Jaeckel, Igarashi-Itoh-Pawlowski, Gies-Ziebell など) との比較
- 非可換ゲージ理論での非摂動論的応用?
- 重力理論?