連続理論と格子理論での指数定理とη不変量

山口哲（大阪大学）

共同研究者：深谷 英則、古田幹雄、川井 直樹、松木 義幸、松尾信一郎、
森 真輝人、中山 勝政、大野木 哲也、山下真由子

青字：物理　　赤字：数学

予定

連続

- 指数
- η 不変量

格子

- 格子での指数
- 格子でのAPS定理

指数

設定

時空： 4次元、 T^4 （Euclideanの経路積分で考える）

背景ゲージ場： A_μ 、ゲージ群G

フェルミオン： ψ 、表現R、Dirac

作用：

$$S = \int d^4x \bar{\psi} i D \psi$$

Dirac 演算子： $D := \gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu)$

Dirac 演算子： $D := \gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu)$

指数

$$\mathrm{Ind}(D) := \operatorname*{Tr}_{\mathrm{Ker}\,D} \gamma_5 = n_+ - n_-$$

$n_\pm$ ： $D\psi = 0$ の $\gamma_5 = \pm 1$ の解の数

- どういう物理に現れるか
- どういう性質を持つか

物理で指数が現れるところ

- $U(1)_A$ アノマリー

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi \qquad \int D\bar{\psi}D\psi \to \int D\bar{\psi}D\psi e^{2i\alpha\mathrm{Ind}(D)}$$

- 弦理論などのコンパクト化での世代数

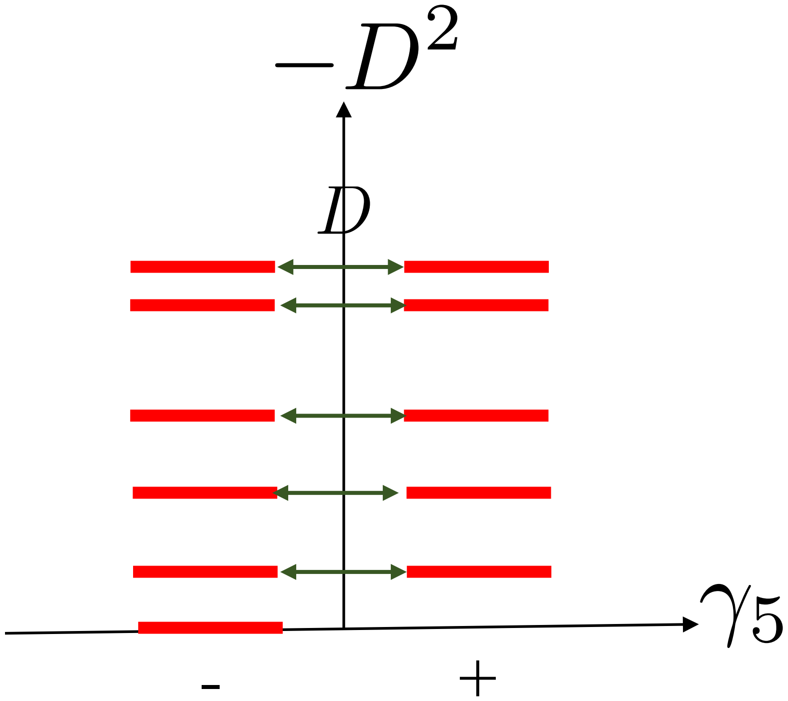
指数の重要な性質

閉じた時空の場合、指数はA_μの連続変形で不変！

「トポロジカル」

指数が連続変形で不変なことの説明

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0$$



$$\Rightarrow [D^2, \gamma_5] = 0$$

D=0だけがペアを作らない ⇒ 変形でD=0から出入りするものは必ずペア

⇒ **指数は不変**

別の言い方

一見、Dによらない $$\text{“}\mathop{\mathrm{Tr}}_{\mathcal{H}}\text{”}\gamma_5 = \mathop{\mathrm{Tr}}_{\mathrm{Ker}\, D} \gamma_5 =: \mathrm{ind}(D)$$

ψの配位全体

Atiyah-Singer 指数定理

$$\mathrm{Ind}(D) = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{Tr}[F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}]$$

η 不变量

定義

H：エルミート演算子（有限次元 or 無限次元）

λ_i：固有値

η 不変量

$$\eta(H) := \sum_i \mathrm{sign}\lambda_i$$

無限次元の場合、ゼータ関数正則化 → **整数とは限らない。**

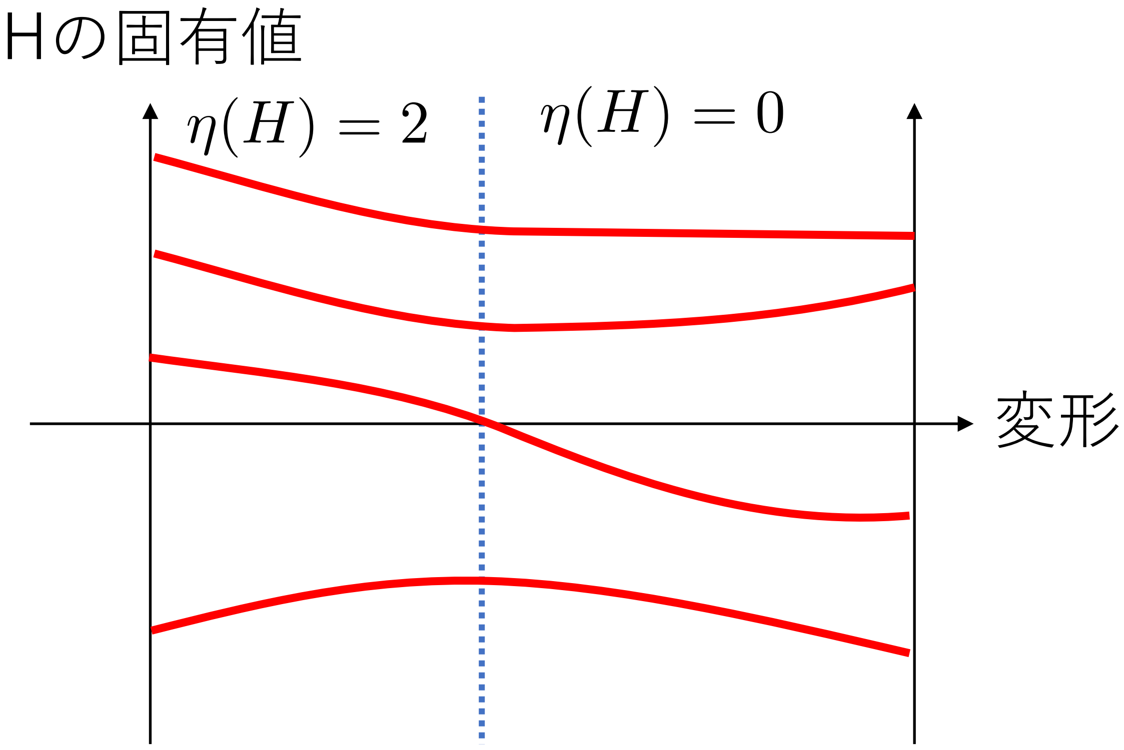
$$\eta(H,s) := \sum_i \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|^{s+1}} \xrightarrow{\text{解析接続}} \eta(H) := \eta(H,0)$$

$\mathrm{Re}\, s$ が十分大きいとき

$$\eta(H) := \sum_i \mathrm{sign}\lambda_i$$

η 不変量は一般にはトポロジカルではない！

例：

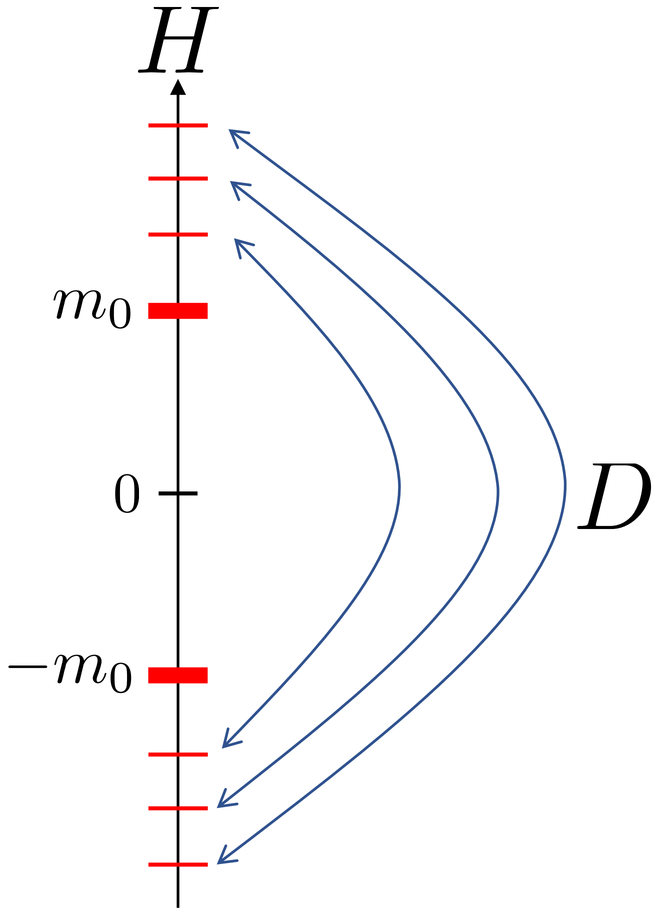


※無限次元の場合は連続的に
変化する場合もある

指数との関係

D ：4 次元Dirac演算子 $\quad H := \gamma_5(D+m_0) \quad m_0 > 0$

$$\boxed{\eta(H) = \mathrm{Ind}(D)}$$



$$DH + HD = 0$$

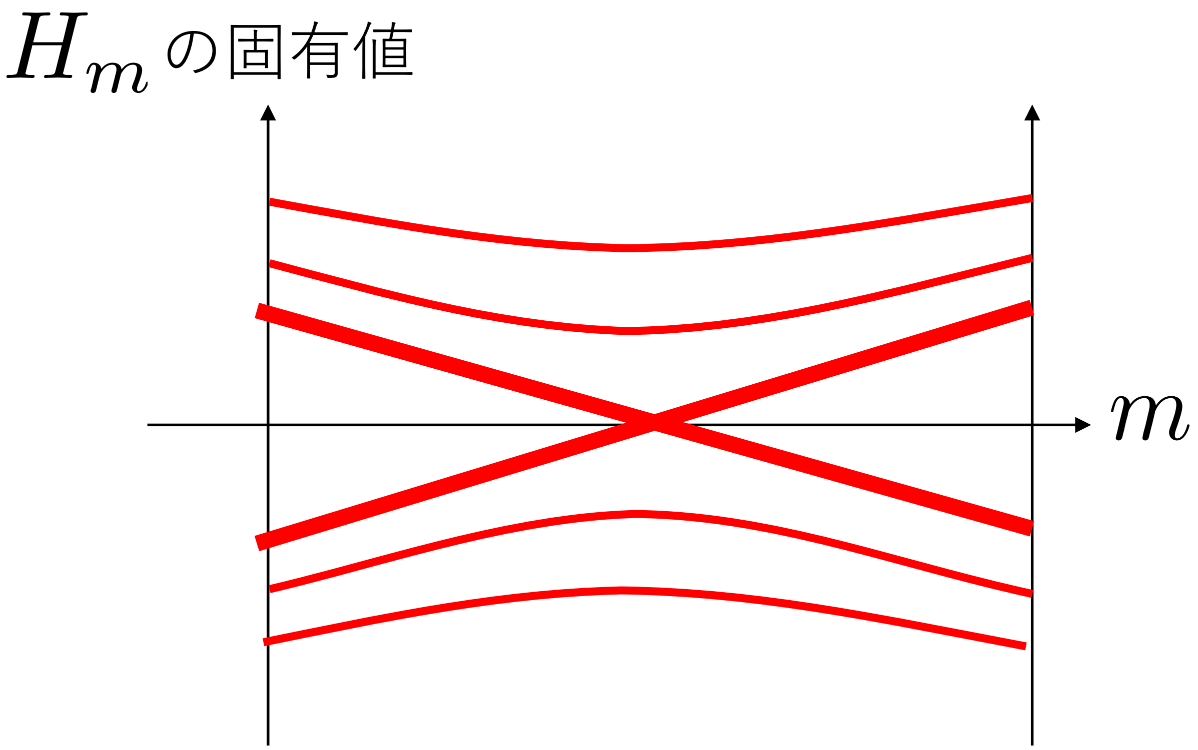
$D \neq 0$ の固有状態は必ず正負のペア

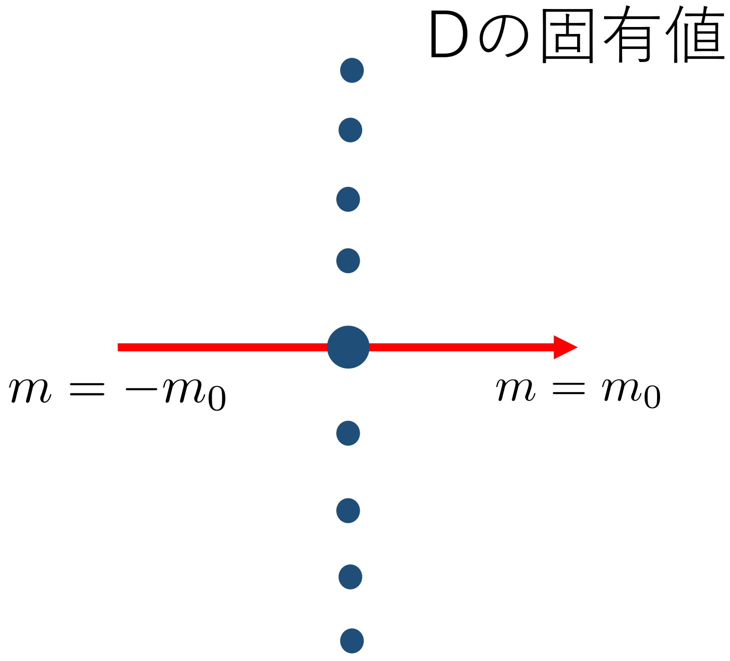
$$\eta(H) = \sum \mathrm{sign}\lambda_i = \sum_{\mathrm{Ker}\,D} \mathrm{sign}\lambda_i = \mathrm{Ind}(D)$$

指数との関係：後々のためちょっとだけ別の見方

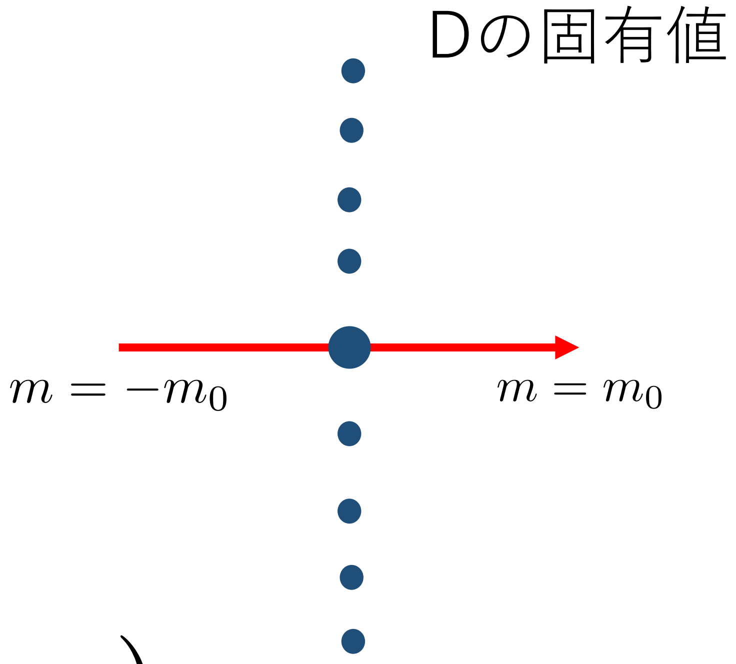
$$H_m := \gamma_5(D - m) \qquad -m_0 < m < m_0$$

$$H_m\psi = 0 \Leftrightarrow D\psi = m\psi$$





$$\mathrm{Ind}(D) = (\text{固有値が0を切る符号付き数}) = -\frac{1}{2}\eta(H_{m_0}) + \frac{1}{2}\eta(H_{-m_0})$$

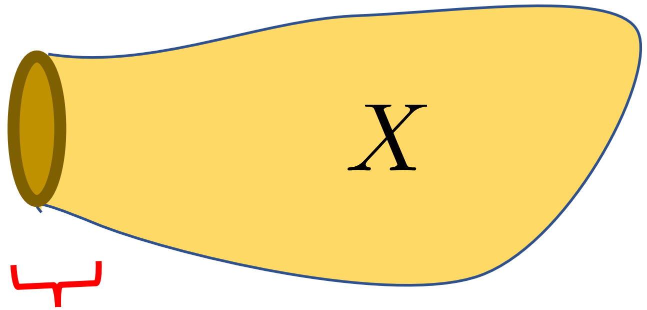


$$\mathrm{Ind}(D) = -\frac{1}{2}\eta(H_{m_0}) + \frac{1}{2}\eta(H_{-m_0})$$

※今、 $\eta(H_{m_0}) = -\eta(H_{-m_0})$ なのでさっきの結果と同じ

Atiyah-Patodi-Singer(APS)指数定理

境界つき４次元多様体



$A_4 = 0$ ゲージ

$$D \approx \gamma^4(\partial_4 + \underbrace{\gamma^4\gamma^i D_i}_{A})$$

エルミート

$$\boxed{[A, \gamma_5] = 0}$$

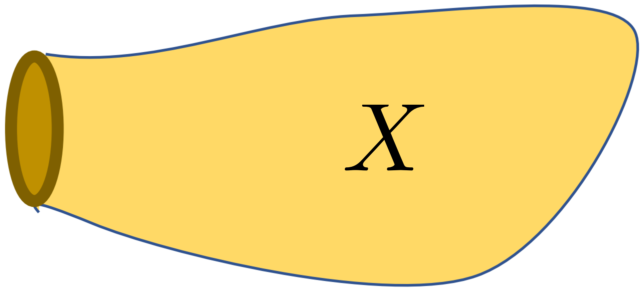
APS境界条件 $\quad (A - |A|)\psi|_{\partial X} = 0$

- カイラリティを保つ
- 非局所的

APS境界条件でのDirac演算子 D_{APS}

Atiyah-Patodi-Singer(APS)指数定理

境界つき４次元多様体



APS境界条件

- カイラリティを保つ
- 非局所的

$$\mathrm{Ind}(D_{\mathrm{APS}}) := \mathop{\mathrm{Tr}}_{\mathrm{Ker}\, D_{\mathrm{APS}}} \gamma_5$$

∂X（３次元）のDirac演算子

APS指数定理

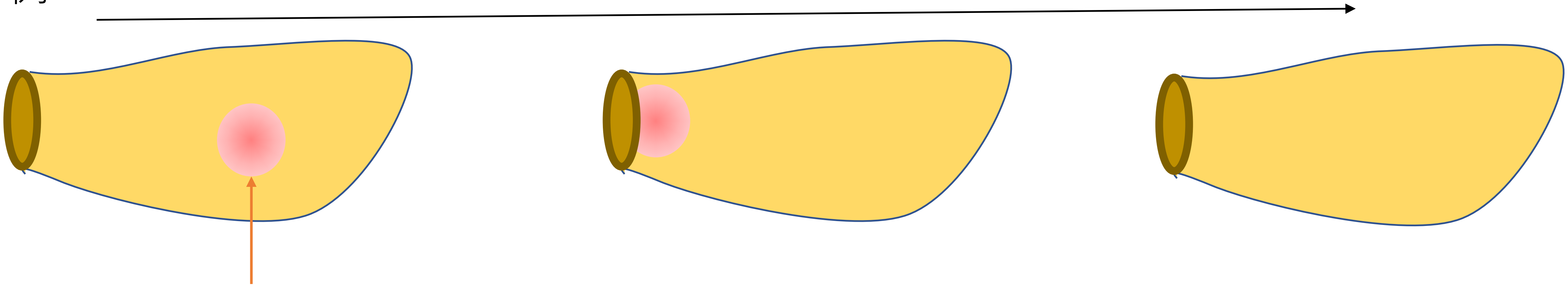
$$\mathrm{Ind}(D_{\mathrm{APS}}) = \frac{1}{2}\eta(iD_3) + \frac{1}{32\pi^2}\int_X d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \mathrm{Tr}[F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}]$$

APS指数はトポロジカルではない！

連続変形で変わる！

例

連続変形

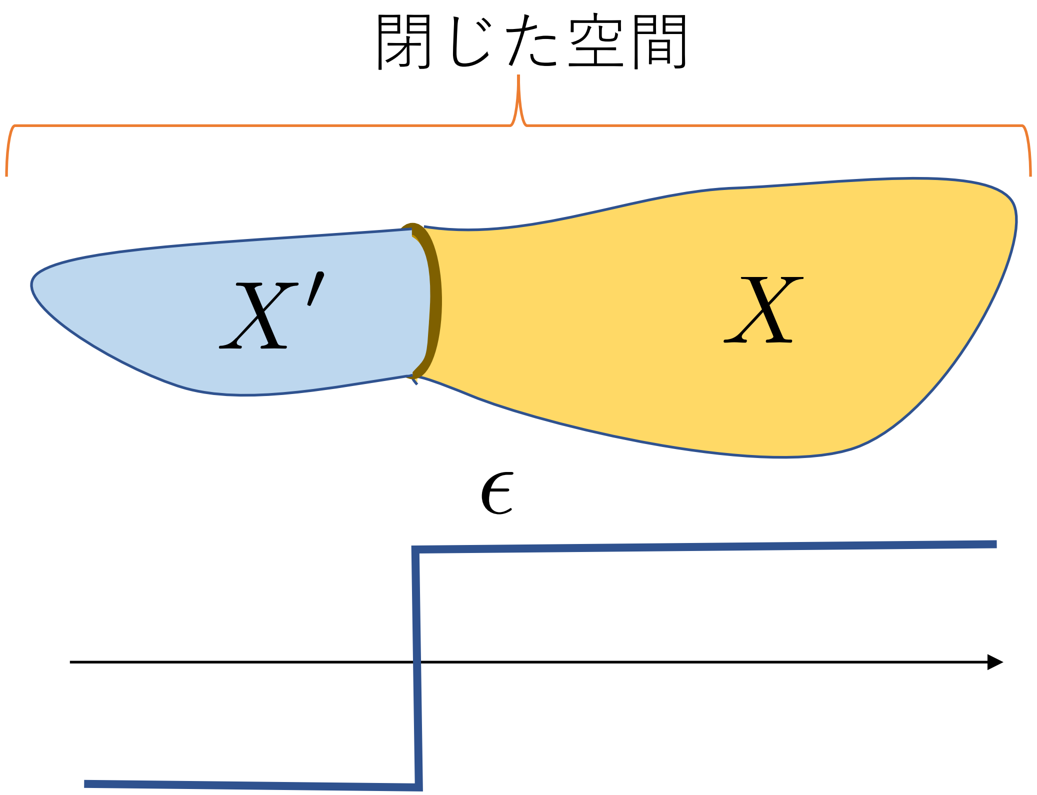


1 instanton

$$\mathrm{Ind}(D_{\mathrm{APS}}) = 1$$

$$\mathrm{Ind}(D_{\mathrm{APS}}) = 0$$

Domain-wall フェルミオンとAPS指数



右辺にはAPS境界条件が出てこない！

[Fukaya, Onogi, SY 17], [Fukaya, Furuta, Matsuo, Onogi, SY, Yamashita 19]

定理

$$\mathrm{Ind}(D_{\mathrm{APS}}(X)) = -\frac{1}{2}\Big(\eta(\gamma_5(D - m\epsilon)) - \eta(\gamma_5(D+m))\Big)$$

格子での指数

格子ゲージ理論（数値計算をやってない立場から見た）

場の理論の一番信用出来る正則化：
経路積分が普通の積分になる

ちゃんと正則化された枠組みで指数、η不変量などを議論したい。

素朴な離散化

サイトのラベル

$\psi(n)$　　サイトに置く

$$D_0 := \frac{1}{2}\gamma^\mu(\nabla_\mu^* + \nabla_\mu)$$

反エルミートにするため平均

連続理論で微分になりそうな差分２種類

$$\nabla_\mu\psi(n) = U_{n,\mu}\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n)$$

$$\nabla_\mu^*\psi(n) = \psi(n) - U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi(n-\hat{\mu})$$

素朴な離散化

$$D_0 := \frac{1}{2}\gamma^\mu(\nabla_\mu^* + \nabla_\mu)$$

連続理論と同じ性質が成り立っている。

$$D_0^\dagger = -D_0$$

$$\gamma_5 D_0 + D_0 \gamma_5 = 0$$

指数

$$\mathrm{Ind}(D_0) := \underset{\mathrm{Ker}\, D_0}{\mathrm{Tr}}\ \gamma_5$$

は良いもののはず…

しかし、

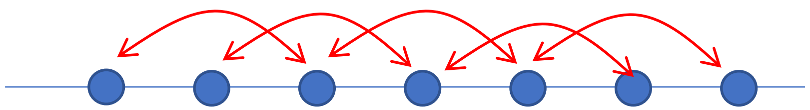
$$\mathrm{Ind}(D_0) = 0$$ **（恒等的に）**

証明：指数は連続変形で不変。格子なので連続変形ですべて$U_{n,\mu} = 1$に出来る。

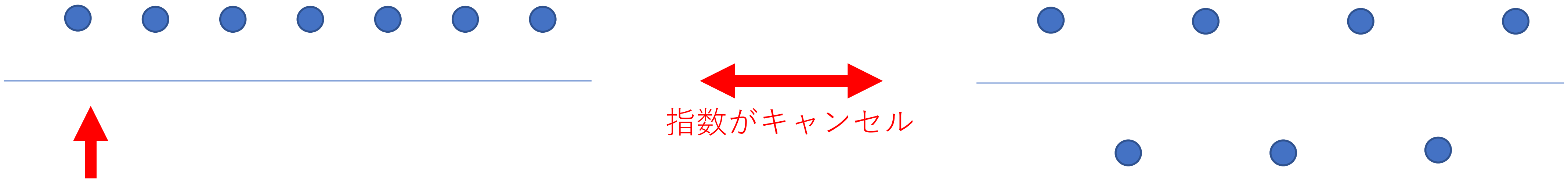
そもそも…(格子間隔)→0極限で思っている連続理論に行かない。

$$D_0 = \frac{1}{2}\gamma^\mu\Big(U_{n,\mu}\psi(n+\hat{\mu}) - U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi(n-\hat{\mu})\Big)$$

相互作用は一つ飛ばし



$\mathrm{Ker}\, D_0$



指数がキャンセル

長波長：こういうのは連続理論にもある

波長～格子間隔：連続理論にはない！

ダブラー

No go theorem: [Nielsen, Ninomiya 81]

格子上のDirac演算子で $\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0$ $D^\dagger = -D$ …を満たすものには、必ずダブラーが存在する。

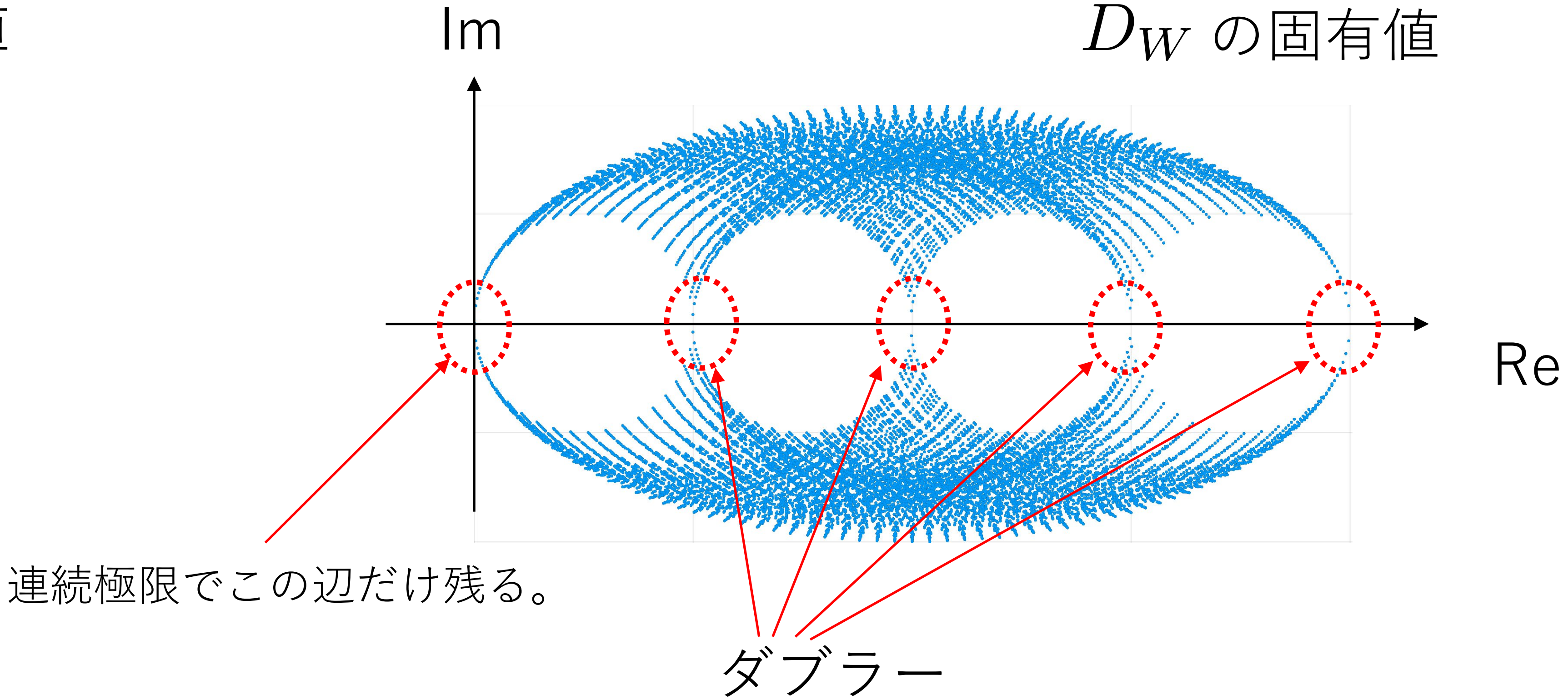
Wilson Dirac 演算子

ダブラーを消したい！

$$D_W = D_0 + W \qquad W = -\frac{1}{2}\nabla_\mu^* \nabla_\mu$$

D_0 の固有値

D_W の固有値



D_W で指数を考えよう！

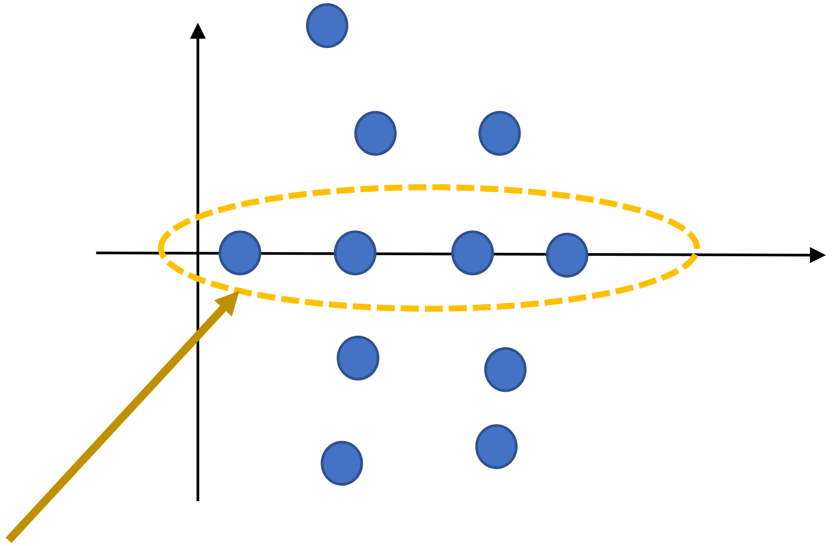
[Fukaya, Furuta, Matsuo, Onogi, Yamashita, SY, to appear]

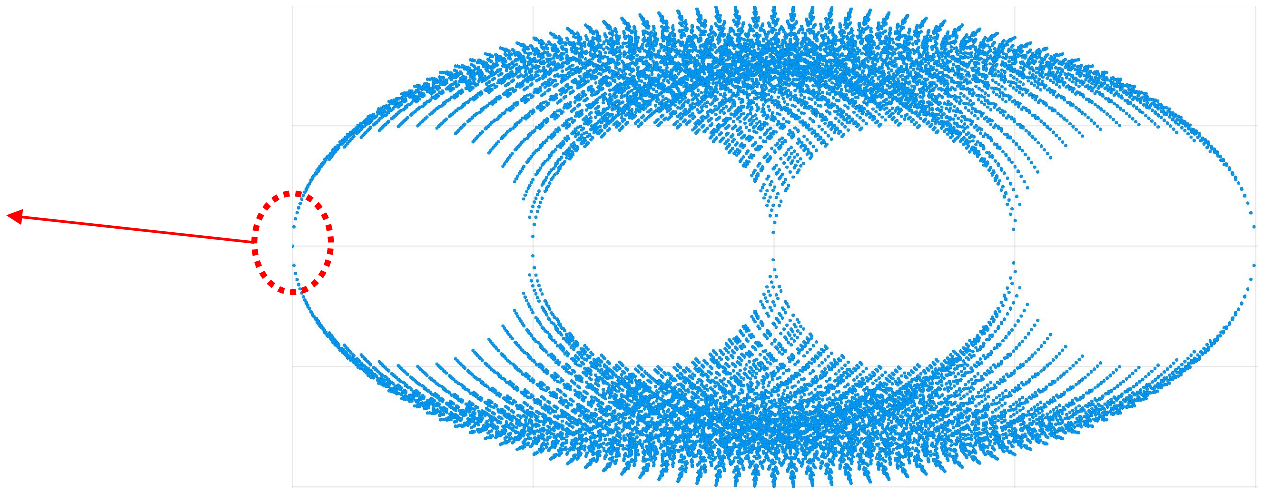
$$D_W = D_0 + W$$

しかし $\gamma_5 D_W + D_W \gamma_5 \neq 0$ $\quad D_W^\dagger \neq -D_W$

$\Downarrow$

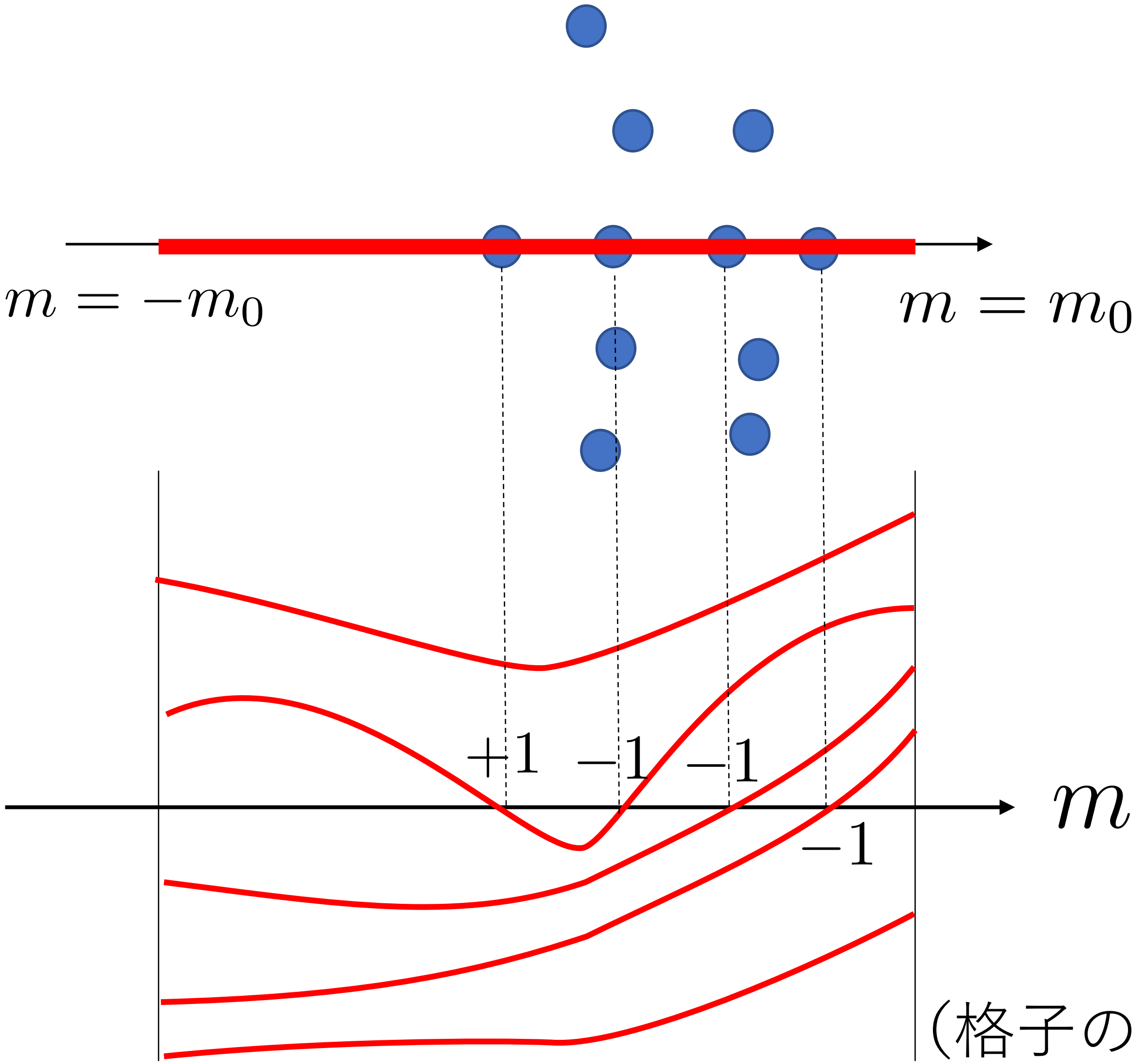
$D_W \psi = 0$ の解を考えても仕方がない





連続極限で $D\psi = 0$ に行くはずの固有値

アイデア：一つのDirac演算子ではなく、演算子の１パラメーターの族を考える。



エルミートにするため

$$H_{W,m}=\gamma_5(D_W-m)$$

$$-m_0<m<m_0$$

$$H_{W,m}$$

（格子の指数）＝（0を切る符号込みの数）

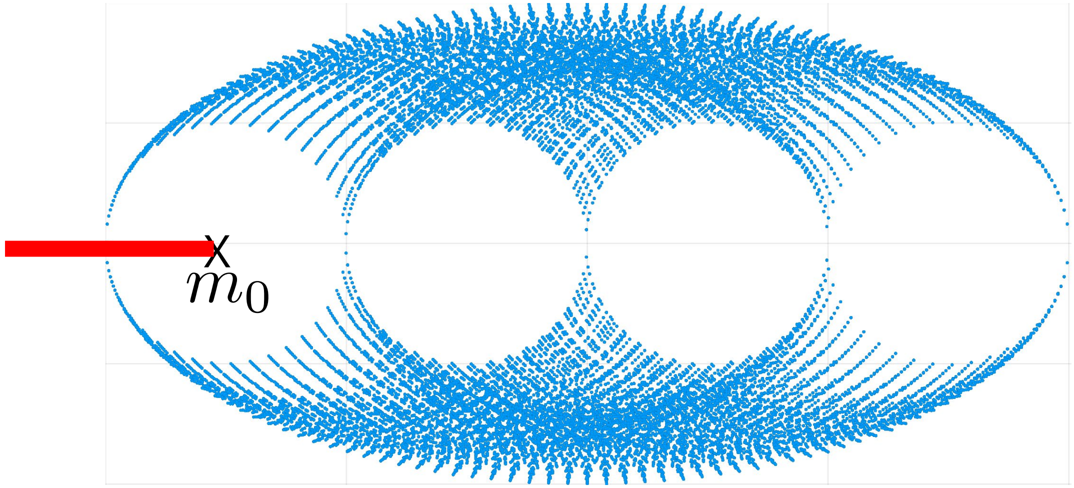
両端が0固有値を持たないままでの変形で不変

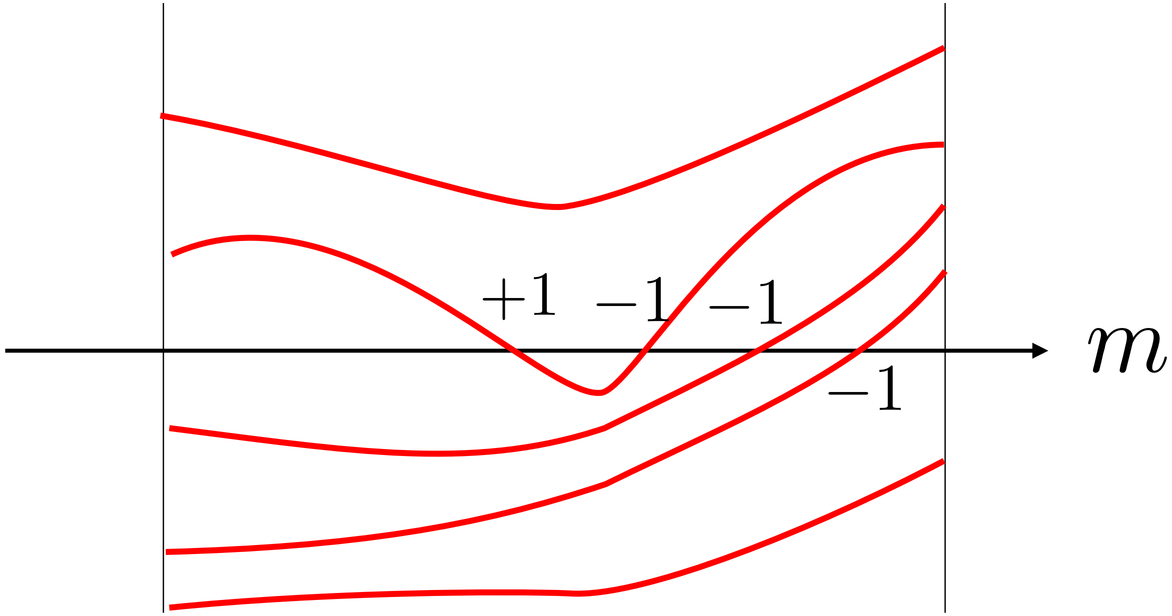
定理：

適切なm_0 をとって、格子間隔を十分小さくしたとき

$$\mathrm{Ind}(D) = \text{（０を切る符号込みの数）} = -\frac{1}{2}\Big(\eta(H_{W,m_0}) - \eta(H_{W,-m_0})\Big)$$

連続理論の指数

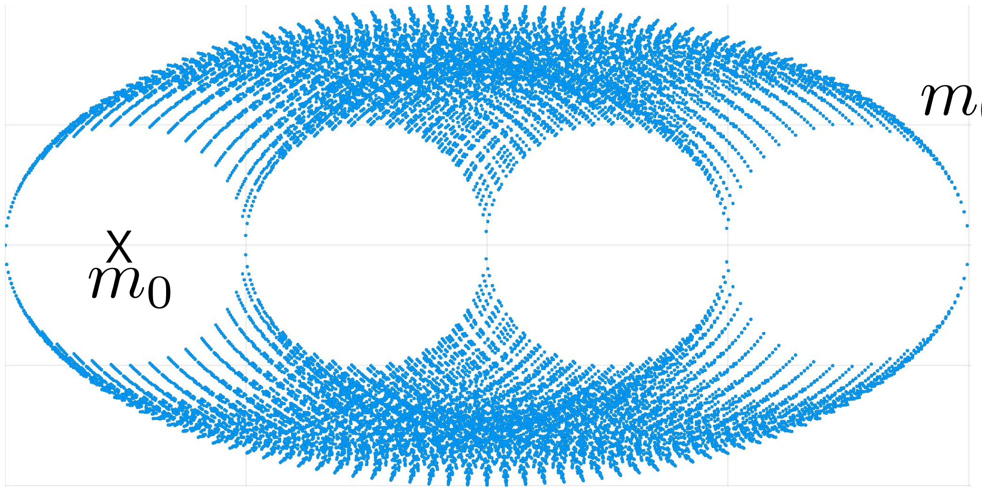




オーバーラップDirac演算子

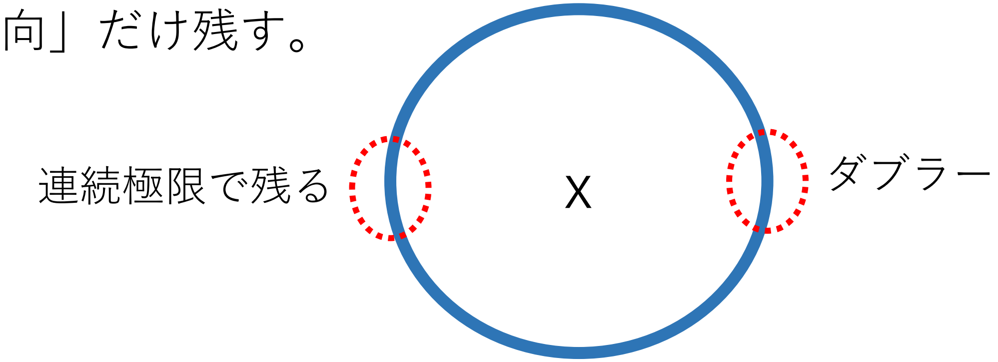
オーバーラップDirac演算子 [Neuberger 1998]

$|A| := \sqrt{A^\dagger A}$



m_0 からの「方向」だけ残す。

$A/|A|$: ユニタリー



$$A = D_W - m_0$$

$$D_{OV} = 1 + A/|A|$$

指数：

$$\mathrm{Ind}(D_{OV}) := \underset{\mathrm{Ker}\, D_{OV}}{\mathrm{Tr}} \gamma_5$$

[Hasenfratz, Lailiena, Niedermayer 98]

定理：十分細かい格子間隔で

$$\mathrm{Ind}(D_{OV}) = \mathrm{Ind}(D)$$

[Kikukawa-Yamada 98], [Fujikawa 98],
[Adams 98] [Suzuki 98]

U(1)$_A$ 対称性

$$D_{OV} = 1 + A/|A|$$

[Hasenfratz, Lailiena, Niedermayer 98]

[Lüscher 98]

$$\hat{\gamma}_5 := \gamma_5(-A/|A|)$$

$$\hat{\gamma}_5^2 = 1$$

$$\gamma_5 D_{OV} + D_{OV}\hat{\gamma}_5 = 0$$

U(1)$_A$変換

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{i\alpha\hat{\gamma}_5}$$

- 作用は不変

- U(1)$_A$アノマリー

$$\int D\bar{\psi}D\psi \to \int D\bar{\psi}D\psi e^{2i\alpha \mathrm{Ind}(D_{OV})}$$

厳密！

Open question ① いろんな表現のフェルミオン

[Discussion with Morikawa, Suzuki]

例えばゲージ群がSU(N)の場合

$$\underset{R}{\mathrm{Tr}}(T_a T_b) = \ell \, \underset{\square}{\mathrm{Tr}}(T_a T_b)$$

表現RでのTr

基本表現でのTr

「Dynkin指数」（非負の整数）

$$\mathrm{Ind}(D) = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{Tr}[F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}]$$

連続理論での指数は

$$\mathrm{Ind}(D_R) = \ell \, \mathrm{Ind}(D_\square)$$

表現RのDirac演算子　　基本表現のDirac演算子

Open question ① いろんな表現のフェルミオン

連続理論では

$$\mathrm{Ind}(D_R) = \ell\,\mathrm{Ind}(D_\square) \quad \mathrm{Ind}(D_R)\text{ は } \ell \text{ の倍数}$$

問題：格子でこの性質を保つような定式化はあるか？

動機

$$\int D\bar{\psi}D\psi \to \int D\bar{\psi}D\psi e^{2i\alpha\underbrace{\mathrm{Ind}(D)}_{\ell\text{ の倍数}}}$$

$$\underbrace{e^{2i\alpha\mathrm{Ind}(D)}}= 1 \quad \left(\alpha = \frac{2\pi n}{2\ell}\quad \text{のとき}\right)$$

理論にアノマリーのない $\mathbb{Z}_{2\ell}$ 対称性がある。これを保つ格子の定式化はあるか？

Open question ②

連続理論、massless QEDの場合$U(1)_A$アノマリー

⇒ 「対称性がない」のではなく
「非可逆対称性」がある！
[Choi, Lam, Shao 22], [Cordova, Ohmori 22]

問題：格子でこの非可逆対称性を実現できるか？

必要と思われること

- 時空の一部でchiral 変換できる。
- トポロジカル場の理論が格子で書ける。
- そのトポロジカル場の理論と電磁場を結合させることができる。

格子でのAPS指数

格子でのAPS指数

まともにオーバーラップフェルミオンでやるのは難しそう…

- APS境界条件？
- そもそもオーバーラップフェルミオンで境界を入れれるか？

ドメインウォールフェルミオンでの定式化

[Fukaya, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi 19]

$$\mathrm{Ind} = -\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - m\epsilon))$$

（有限格子で整数）

議論

- 数学的に厳密な議論？トポロジカルではないところが難しい。
- 曲がったドメインウォールの話

  cf [Aoki, Fukaya], 青木さんのトーク20日13:00~

まとめ

連続理論での指数、η不変量

格子での指数、η不変量

（非摂動論的な正則化）

様々な困難、技術的？あるいは本質的？（アノマリー）