

グラフ理論と位相不変量に基づく doubler の最大個数についての考察

湯本 純¹ , 三角樹弘²

¹ 秋田大理工 ² 近畿大理工

July 20, 2022

Introduction

格子上の場の理論には ダブリング問題 と呼ばれる難問が存在する .

ダブリング問題

chiral charge の正と負が対となっている格子 fermion が複数出現する .

4 dimensional naive fermion では , 16 個も出現する .

以降 , これら複数の fermion を doubler と呼ぶ .

この問題を定理として厳密に定式化したものが

「Nielsen-Ninomiya's no-go theorem」

これまでに次のことが判明している .

- ▶ no-go 定理自体は、doubler の個数について詳細に言及していない .
- ▶ doubler の最大個数は、格子離散化された時空 (多様体) に依存する .

e.g. d 次元トーラス: Max 2^d , d 次元球体 B^d : Max 1, 2 次元球面 S^2 (経験的に): Max 2

Ohta, Matsuura, Misumi (15)

JY, Misumi (22)

これらの事実から、次のことが考えられる .

時空 (多様体) の位相的性質に基づき、
doubler の最大個数について言及する定理が存在する .

今回の発表では、

1. 上の定理の予想とその根拠、
2. 予想の証明に必要な概念等、
3. 証明のスケッチについて議論していく .

Table of Contents

1. New conjecture
2. Graph theory & Dirac matrix
3. Sketch of Proof

New conjecture

Conjecture

格子離散化された d 次元多様体 M における *doubler* の最大個数 $\#doubler$ は、その多様体における各 r 次 Betti 数 $\beta_r(M)$ の総和に等しい。つまり、

$$\#doubler = \sum_{r=0}^d \beta_r(M). \quad (1)$$

ここで「 r 次 Betti 数」とは

Definition (r -th Betti number)

多様体 M の r 次 Betti 数 $\beta_r(M)$ とは、 M の r 次ホモロジー群 $H_r(M)$ の階数として定義される。つまり、

$$\beta_r(M) \equiv \dim H_r(M) = \dim \text{Ker } \partial_r / \text{Im } \partial_{r+1}. \quad (2)$$

Betti 数の直感的な説明

多様体 M における r 次元の「穴」の数（位相的性質）
→ 位相不変量

Conjecture

格子離散化された d 次元多様体 M における *doubler* の最大個数 $\#doubler$ は、その多様体における各 r 次 Betti 数 $\beta_r(M)$ の総和に等しい。つまり、

$$\#doubler = \sum_{r=0}^d \beta_r(M). \quad (1)$$



— 予想の言わんとしていること —

格子離散化された多様体 M における *doubler* の最大個数は、

Betti 数と呼ばれる「位相不変量」によって決定される。

予想に対する一つの根拠として、

e.g. 4次元トーラス T^4 (周期的境界条件を課した4次元正方格子)

このときの momentum space における naive fermion の作用は

$$S = \int d^4p \bar{\psi}(-p) \left[i \sum_{\mu=1}^4 \sin p_{\mu} \gamma_{\mu} \right] \psi(p) \quad (0 \leq p_{\mu} < 2\pi) \quad (3)$$

doubler ($\sum_{\mu=1}^4 \sin p_{\mu} \gamma_{\mu} = 0$) となる momentum は合計で 2^4 個 .

一方で、 T^4 の r 次 Betti 数は $\beta_r(T^4) = {}_4C_r$ であるから、

$$\sum_{r=0}^4 \beta_r(T^4) = \sum_{r=0}^4 {}_4C_r = 2^4 \quad (4)$$

T^4 の Betti 数の総和は doubler の個数と同じく 2^4 個 となる .

★ d 次元の場合でも Betti 数の総和と doubler の個数は一致する .

$$\sum_{\mu=1}^d \sin p_{\mu} \gamma_{\mu} = 0 \Rightarrow \#\text{doubler} = 2^d \quad \longleftrightarrow \quad 2^d = \sum_{r=0}^d \beta_r(T^d) \Leftarrow \beta_r(T^d) = {}_dC_r$$

他にも ...

e.g. 中身が詰まった d 次元ボール B^d (Dirichlet 境界条件を課した d 次元正方格子)

$$\#\text{doubler} = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 1 = \sum_{r=0}^d \beta_r(B^d) \leftarrow \beta_r(B^d) = \delta_{r,0}$$

e.g. d 次元トーラスと D 次元ボールの直積 $T^d \times B^D$

$$\#\text{doubler} = 2^d \quad \longleftrightarrow \quad 2^d = \sum_{r=0}^{d+D} \beta_r(T^d \times B^D) \leftarrow \begin{cases} \beta_r(T^d \times B^D) = {}_d C_r & (r \leq d) \\ \beta_r(T^d \times B^D) = 0 & (d < r \leq D) \end{cases}$$

まとめると、

| Mfd. M | T^d | B^d | $T^d \times B^D$ |
|--------------------|-------|-------|------------------|
| $\#\text{doubler}$ | 2^d | 1 | 2^d |
| $\sum \beta_r(M)$ | 2^d | 1 | 2^d |

$\#\text{doubler} = \sum_r \beta_r(M) \quad \longrightarrow \quad$ 十分信頼に足る予想である .

Graph theory & Dirac matrix

Definition (graph)

頂点の集合 V とその頂点どうしを結んだ辺の集合 E の一対を *graph* G とよぶ。つまり

$$G = (V, E)$$

Definition (directed graph (or digraph))

graph に $\text{init} : E \rightarrow V$ と $\text{ter} : E \rightarrow V$ が付与されているとき, *digraph* とよぶ。
このとき任意の辺 $e_{ij} \in E$ に対して

- $\text{init}(e_{ij})$ を *initial vertex* $v_i \in V$
- $\text{ter}(e_{ij})$ を *terminal vertex* $v_j \in V$

と呼び, 辺 e_{ij} は $\text{init}(e_{ij}) = v_i$ から $\text{ter}(e_{ij}) = v_j$ への *directed edge* とよぶ。

Definition (weighted graph)

graph の任意の *edge* にある値が付与されているとき, *weighted graph* とよぶ。
ここで便宜上、*edge* e_{ij} のある値を $w(e_{ij})$ とする。

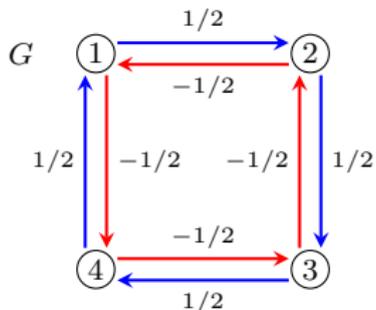
Definition (adjacency matrix)

行列要素が

$$(A_G)_{ij} \equiv w(e_{ij}) \quad (5)$$

である $|V| \times |V|$ 行列を *weighted graph* G の隣接行列 (*adjacency matrix*) A_G とよぶ .

e.g. グラフ G の隣接行列 A_G



$$A_G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

これらの概念を用いて、格子を表現したグラフの隣接行列から
格子 Dirac 演算子を構成することが可能 となる .

e.g. G の隣接行列 A_G と周期的境界条件が課された 1 次元格子上的差分演算子 D_{1d} (ただし、lattice parameter = 1)

隣接行列 A_G に対して、 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^t$ の双 1 次形式をとると

$$\begin{aligned} \bar{\psi} A_G \psi &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3, \bar{\psi}_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \{ \bar{\psi}_1 (\psi_2 - \psi_4) + \bar{\psi}_2 (\psi_3 - \psi_1) + \cdots + \bar{\psi}_4 (\psi_1 - \psi_4) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 \bar{\psi}_n (\psi_{n+1} - \psi_{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^4 \bar{\psi}_n D_{1d} \psi_n \end{aligned}$$

実際に、

隣接行列 A_G が 1 次元格子上的差分演算子 D_{1d} を表現している .

したがって格子作用は、グラフ理論を用いて次のように表現することができる。

$$S_f = \sum_n \bar{\psi}_n \left[\sum_{\mu} \gamma_{\mu} D_{\mu} \right] \psi_n = \bar{\psi} \left[\sum_{\mu} \gamma_{\mu} A_{G_{\mu}} \right] \psi \quad (6)$$

ここで G_{μ} は μ 方向に関するグラフを意味する。

naive fermion における

doubler の個数は、隣接行列 $A_{G_{\mu}}$ の退化次数として導出される。

理由： $A_{G_{\mu}}$ の対角化を考える：

$$U^{\dagger} A_{G_{\mu}} U = \sum_p F_{\mu}(p) |p\rangle \langle p|, \quad U^{\dagger} U = 1$$

このときの fermion の伝播関数 G_f は

$$G_f = \left(\sum_{\mu} \gamma_{\mu} A'_{G_{\mu}} \right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{\mu,p} \gamma_{\mu} F_{\mu}(p) |p\rangle \langle p|} \implies \text{極となるのは } F_{\mu}(p) = 0$$

よって、doubler の個数は隣接行列 $A_{G_{\mu}}$ の退化次数として導出される。

Sketch of Proof

1. 1次元トーラス T^1 or 1次元ボール B^1 において、
0次と1次の Betti 数 (β_0, β_1) が Dirac 行列の退化次数に等しいことを示す。



2. $T^1, B^1 \rightarrow T^d, B^d, T^d \times B^D$ への拡張 (C_*, C'_* を自由加群からなる鎖複体)

$$\text{K\"unneth theorem: } H_n(C_* \otimes C'_*) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*)$$



3. 定理として必要な条件などを分類し、証明を完成させる。

1. 1次元トーラス T^1 or 1次元ボール B^1 において、
0次と1次の Betti 数 (β_0, β_1) が Dirac 行列の退化次数に等しいことを示す。
-

1次元トーラス T^1 の単体分割 $L_N^{(p)}$ とその1次元鎖群 $C^1(L_N^{(p)})$ を考える。

$$C^1(L_N^{(p)}) \equiv \left\{ \sum_{k=1}^N a_{k,k+1} \langle v_k, v_{k+1} \rangle \mid a_{k,k+1} \in \mathbb{Z} \right\} \quad (7)$$

$$= \{ a_{1,2} \langle v_1, v_2 \rangle + a_{2,3} \langle v_2, v_3 \rangle + \cdots + a_{N,1} \langle v_N, v_1 \rangle \mid a_{k,k+1} \in \mathbb{Z} \}$$

ここで1-単体 i.e. 辺を $\langle v_k, v_{k+1} \rangle$ 、0-単体 i.e. 頂点を v_k として定義する。

Definition (r -dim Chain group)

単体的複体 K の向きづけられた r -単体によって生成される自由加群を K の r 次元鎖群という。

→ $\langle v_k, v_{k+1} \rangle$, v_k を基底として扱える (線形独立性)。

Definition (boundary operator)

写像 $\partial_r : C^r(K) \rightarrow C^{r-1}(K)$ を境界作用素という。

→ $\text{Ker } \partial_1$ の議論に必要。

1. 1次元トーラス T^1 or 1次元ボール B^1 において、
0次と1次の Betti 数 (β_0, β_1) が Dirac 行列の退化次数に等しいことを示す。
-

1次元輪体群 $\text{Ker } \partial_1: c_1 \in \mathcal{C}^1(L_N^{(p)})$ に対して

$$\begin{aligned}\partial_1 c_1 &= \sum_{k=1}^N a_{k,k+1} \partial_1 \langle v_k, v_{k+1} \rangle = \sum_{k=1}^N a_{k,k+1} (v_k - v_{k+1}) \\ &= a_{1,2} (v_1 - v_2) + a_{2,3} (v_2 - v_3) + \cdots + a_{N,1} (v_N - v_1) \\ &= (a_{1,2} - a_{N,1}) v_1 + (a_{2,3} - a_{1,2}) v_2 + \cdots + (a_{N,1} - a_{N-1,N}) v_N = 0\end{aligned}$$

⇓

$$a = a_{1,2} = a_{2,3} = \cdots = a_{N-1,N} \quad (v_k \text{ の線形独立性})$$

⇓

$$H_1(L_N^{(p)}) = \text{Ker } \partial_1 = \{a(\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle + \cdots + \langle v_N, v_1 \rangle) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

⇓

$$\beta_1(L_N^{(p)}) = \dim H_1(L_N^{(p)}) = 1 \quad (\text{Homology theory})$$

1. 1次元トーラス T^1 or 1次元ボール B^1 において、
0次と1次の Betti 数 (β_0, β_1) が Dirac 行列の退化次数に等しいことを示す。
-

$\forall c'_1 \in \text{Ker } \partial_1$ は $c'_1 = a \sum_{k=1}^N \langle v_k, v_{k+1} \rangle$ であり、

$$\begin{aligned} \partial_1 c'_1 &= a \sum_{k=1}^N \partial_1 \langle v_k, v_{k+1} \rangle = a (v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \cdots + v_N - v_1) \\ &= a \left(\underline{v_N - v_2} + \underline{v_1 - v_3} + \cdots + \underline{v_{N-1} - v_1} \right) \\ &= a (w_1 + w_2 + \cdots + w_N) = 0 \end{aligned}$$

ここで v_k (基底) を e_k (標準基底) とみなすと

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, w_N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow D_{1d} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\partial_1 c'_1 = a (w_1 + w_2 + \cdots + w_N) = 0 \implies$ Dirac 行列が退化している。

$\implies \beta_1(L_N^{(p)}) = 1$ が退化次数 1 を表現している。

1. 1次元トーラス T^1 or 1次元ボール B^1 において、
0次と1次の Betti 数 (β_0, β_1) が Dirac 行列の退化次数に等しいことを示す .
-

$\beta_0(L_N^{(p)}) = 1$ が Dirac 行列の残りの退化次数を表現している . \rightarrow 証明はまだ不完全 .

$$\beta_0(L_N^{(p)}) = \dim H_0(L_N^{(p)}) = \dim \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1$$

\Downarrow

$$w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + \cdots + w_{N-1} - w_N = 0$$

\Downarrow

Dirac 行列が退化している .

\Downarrow

$\beta_1(L_N^{(p)}) = 1$ が残りの退化次数 1 を表現している .

1. 1次元トーラス T^1 or 1次元ボール B^1 において、
0次と1次の Betti 数 (β_0, β_1) が Dirac 行列の退化次数に等しいことを示す。



2. $T^1, B^1 \rightarrow T^d, B^d, T^d \times B^D$ への拡張 (C_*, C'_* を自由加群からなる鎖複体)

$$\text{K\"unneth theorem: } H_n(C_* \otimes C'_*) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*)$$



3. 定理として必要な条件などを分類し、証明を完成させる。

Summary

Conjecture

格子離散化された d 次元多様体 M における *doubler* の最大個数 $\#\text{doubler}$ は、その多様体における各 r 次 Betti 数 $\beta_r(M)$ の総和に等しい。つまり、

$$\#\text{doubler} = \sum_{r=0}^d \beta_r(M). \quad (8)$$

- 十分信頼に足る予想を立てることができた。
- 証明のスケッチも立てることができた。
- しかし、 β_0 と退化次数についての証明は未だ不完全。