# A gauge invariant mechanism of color confinement in QCD due to monopoles coming from violation of non-Abelian Bianchi identity

鈴木恒雄(大阪大学RCNP): （連絡先: tsuneo@rcnp.osaka-u.ac.jp)

基研研究会「格子上の場の理論と連続空間上の場の理論」 2022/07/20

# 1.双対マイスナー効果によるQCDにおけるカラーの閉じ込め

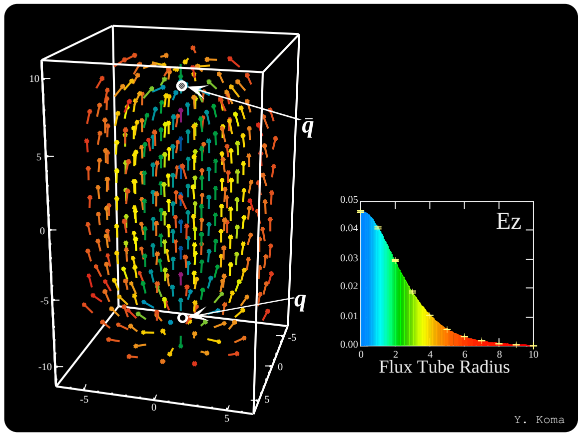



Figure 1: electric flux

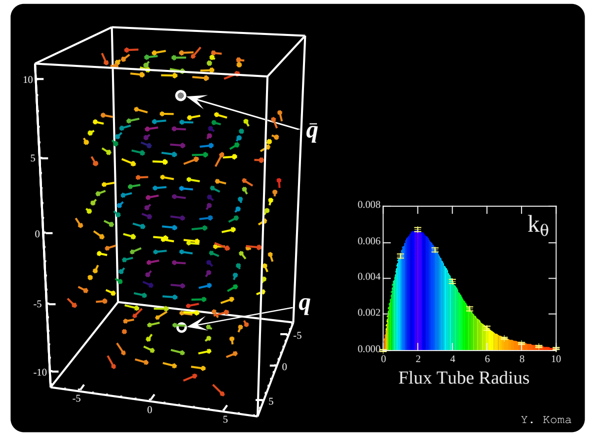



Figure 2: solenidal magnetic current

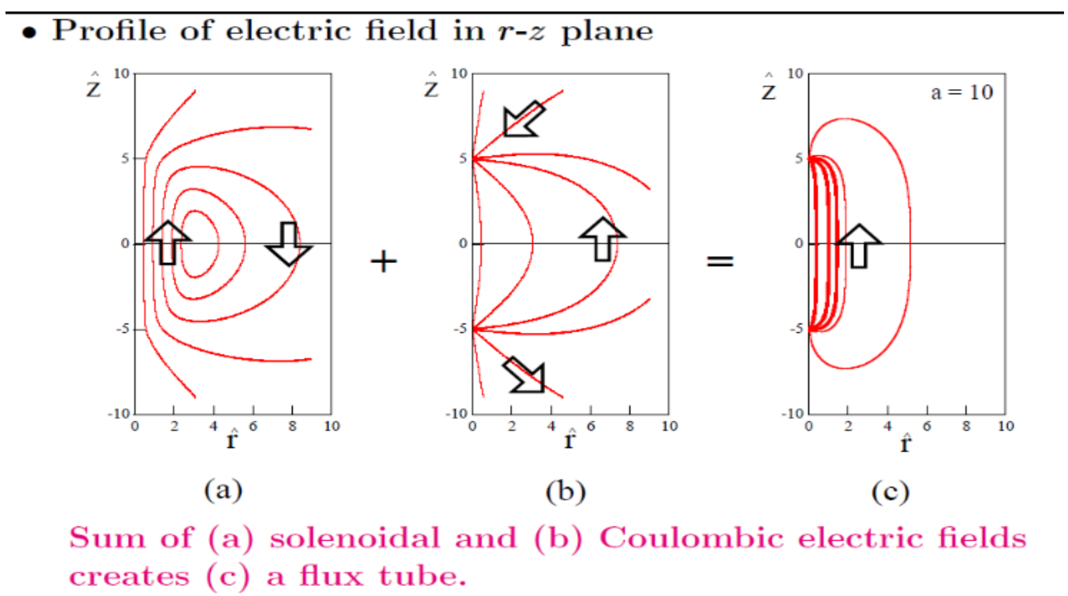



Figure 3: The dual Meissner effect

QCDは、カラー電荷を持った粒子のみから構成されるSU3非可換ゲージ理論

$$\Downarrow$$

## QCDでのカラー磁荷を持ったモノポールはなにか？

アーベリアン射影('tHooft '81): $SU3 \to U1 \times U1$

しかしこの考え方は、真実とは言えない。なぜなら、
１．射影の仕方への依存性、２．正しくない反例(Polyakov gauge)、３．$U1^2$ の電場のみしか絞れない。SU3カラーの閉じ込めにはなっていない。

このような欠点のないモノポールがQCDに存在できる可能性
（T.Suzuki, arXiv:1402.1294, T.Suzuki et al., P.R.D97(2018)034501 )

# 2.QCDにおけるDiracタイプの8個のAbelian磁気モノポール

1. $D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu$ に対する Jacobi 恒等式：$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu,[D_\rho,D_\sigma]] = 0$

2. $[D_\rho,D_\sigma] = -ig(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho - ig[A_\rho,A_\sigma]) + [\partial_\rho,\partial_\sigma] = -igG_{\rho\sigma} + [\partial_\rho,\partial_\sigma]$

3. $[D_\nu,G_{\rho\sigma}] = D_\nu G_{\rho\sigma}$

$$\Downarrow$$

1.$[\partial_\rho,\partial_\sigma] = 0 \to D_\nu G^*_{\mu\nu} = 0$ : Non-Abelian Bianchi identity (NABI):

2.$[\partial_\rho,\partial_\sigma] \neq 0 \to$
$J_\mu = D_\nu G^*_{\mu\nu} = -\frac{i}{2g}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu,[\partial_\rho,\partial_\sigma]] = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[\partial_\rho,\partial_\sigma]A_\nu = \partial_\nu f^*_{\mu\nu} = k_\mu$

ここで、$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)\lambda^a/2.$

$$\boxed{J_\mu = \sum_a J^a_\mu \frac{\lambda^a}{2} = k_\mu = \sum_{a=1}^{8} k^a_\mu \frac{\lambda^a}{2}},\qquad \text{可換保存則：} \partial_\mu k^a_\mu = 0$$

# 3. 新しいカラーの閉じ込め機構

仮定：SU3非可換ゲージ理論のゲージ場は、もともとnon-Abelian Bianchi恒等式を満たしておらず、Dirac型のsingularityを持っている。その結果生じる８個のAbelian保存則を満たす モノポールがQCDの低温相では、真空に凝縮する。

$\Downarrow$

カラーの閉じ込め

SU2を例にとって説明しよう。$SU(2)$: $V(x) = e^{i\alpha_i(x)\sigma_i}$
SU2の部分群の$U(1)_3$ :　$e^{i\alpha_3(x)\sigma_3} \in SU(2)$を考える。 Quark doublet $(u_3, d_3)$は このU$(1)_3$に関して、$\pm g/2$の電荷を持つ。 ここで、 $k_\mu^3(x)$が真空に凝縮すると、 $U(1)_3$に関する電荷をもつQuarkなどのすべての状態は、閉じ込められる。しかし、tripletの一部、$\bar{\mathbf{u}}_3\mathbf{u}_3 - \bar{\mathbf{d}}_3\mathbf{d}_3$ は、 $k_\mu^3(x)$が真空に凝縮しても閉じ込められない。

しかし、３個の保存する Abelian monopole と対応する $U_1$ がある．例えば、$U_1 : e^{i\alpha_1(x)\sigma_1}$ を考える。すると、$U_1$ に対して電荷 $\pm g/2$ を持つ doublet を $(u_1, d_1)$ と書くと、これは、$(u_3, d_3)$ で表すと $(\frac{(u_3+d_3)}{\sqrt{2}}, \frac{(u_3-d_3)}{\sqrt{2}})$ と書かれる。

上記の $U_3$ に対して中性であった状態は、$\bar{u}_3 u_3 - \bar{d}_3 d_3 = \bar{u}_1 d_1 + \bar{d}_1 u_1$. と書け、$U_1$ では、電荷 $\pm g$ を持つ混合状態となり、閉じ込められる。

すべての $(U_1, U_2, U_3)$ に関する電場が、$k^a \quad (a = 1, 2, 3)$ が凝縮すると絞られるので、外部に出てこれる物理的な状態は、すべての U1 部分群に対して singlet となる SU2 singlet のみ

SU3 では、８個の可換モノポールが真空に凝縮すると、SU3 singlet のみが、物理的な状態となる。

# 4. 新しい閉じ込め機構の格子QCDのモンテ・カルロ計算による検証（1）

Pure SU2 QCD, SU3 QCDで、一切の追加的な仮定なしに、Abelian Monopoleによる双対マイスナー効果から期待される以下の３点が調べられ、SU2では、非常にきれいに、またSU3でも大変有望な結果が得られた。

1. **(Perfect Abelian dominance)** :通常の$Q-\bar{Q}$間の静的なポテンシャルの弦定数$\sigma_F$は、８個のAbelianの静的ポテンシャルの弦定数の平均と解釈される。追加の近似がないときは、８個のカラーに関する対称性があるので、８個のカラーの静的ポテンシャルの弦定数は、等価である。したがってどのカラー成分のAbelian弦定数$\sigma_a$と$\sigma_F=\sigma_a$が成立する。

2. **(Perfect monopole dominance)** :Abelianの静的ポテンシャルは、カラー電場に関するクーロン部分とソレノイド型のモノポールによる電場の和でかけ、線形ポテンシャル部分は、ソレノイド型のモノポールのみから生じる。したがってすべてのカラー成分に対して、$\sigma_F=\sigma_m$が言える。

3. **(The dual Ampère's law and Ginzburg-Landau parameter)** すべての成分のAbelianカラー電場は、対応するモノポールによるソレノイド型磁流で絞られる。双対アンペール則が成立する。GLパラメーターを測定することで、モノポール凝縮相での真空のタイプが決められる。

## (1) 格子上での定式化

1. $a \to 0$でゲージ場となる格子上でのAbelian link fieldsの定義は、アーベリアン射影の立場でうまくいった定義と一致する以下の定義を採用した。

$R = \sum Re\,\mathrm{Tr}\, e^{i\theta_1(s,\mu)\lambda_1}U^\dagger(s,\mu)$ を最大化する。

$$\theta_1(s,\mu) \;=\; \tan^{-1}\frac{U_1(s,\mu)}{U_0(s,\mu)}, (SU2), \tan^{-1}\frac{Im(U_{12}(s,\mu)+U_{21}(s,\mu))}{Re(U_{11}(s,\mu)+U_{22}(s,\mu))}, (SU3)$$

2.the Dirac quantization conditionを満たすモノポールの定義：
$\theta_1(s,\mu\nu) = \partial_\mu\theta_1(s,\nu) - \partial_\nu\theta_1(s,\mu)$,
$\theta_1(s,\mu\nu) = \bar{\theta}_1(s,\mu\nu) + 2\pi n_1(s,\mu\nu) \quad (|\bar{\theta}_1(s,\mu\nu)| < \pi)$

$n_1(s,\mu\nu)$ は、モノポールから生じるthe Dirac stringの本数と解釈できる。
（DeGrand-Toussaintの定義）

$$k^1_\mu(s) \;=\; -(1/2)\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\bar{\theta}_1(s+\hat{\mu},\beta\gamma) = (1/2)\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha n_1(s+\hat{\mu},\beta\gamma)$$

これは、保存則　$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\theta_1(s+\hat{\mu},\beta\gamma) = 0$　を満たす。このような連続理論で生じるsingularityに対応する量を格子上で定義できることが、重要。

$\frac{g_m\vec{r}}{4\pi r^3} = \vec{\nabla}\times\vec{A} + g_m\delta(x)\delta(y)\theta(z)\vec{e}_z,\ \theta_{\mu\nu} = ea^2 f_{\mu\nu},\ a^2 f_{\mu\nu} = g_m$

## (2) Polyakov-loop の相関による静的ポテンシャルの測定

$$V(R) = -\frac{1}{aN_t}\ln\langle P(0)P^*(R)\rangle \ .$$

$$P_{\mathrm{F}} = \mathrm{Tr}\,\Pi_{k=0}^{N_t-1}U(s+k\hat{4},4) \ ,$$

$$P_{\mathrm{A}} = \exp[i\sum_{k=0}^{N_t-1}\theta_1(s+k\hat{4},4)] = P_{\mathrm{ph}}\cdot P_{\mathrm{mon}} \ ,$$

$$P_{\mathrm{ph}} = \exp\{-i\sum_{k=0}^{N_t-1}\sum_{s'}D(s+k\hat{4}-s')\partial'_{\nu}\bar{\Theta}_1(s',\nu 4)\} \ ,$$

$$P_{\mathrm{mon}} = \exp\{-2\pi i\sum_{k=0}^{N_t-1}\sum_{s'}D(s+k\hat{4}-s')\partial'_{\nu}n_1(s',\nu 4)\}$$

**(3) Perfect Abelian dominance は、大幅に誤差を減らせる Lüscher's multilevel 法を利用**

Table 1: Simulation parameters (SU3): $N_{\rm sub}$ :the sublattice size, $N_{\rm iup}$: internal updates 数

| $\beta$ | $N_s^3 \times N_t$ | $a(\beta)$ [fm] | $N_{\rm conf}$ | $N_{\rm sub}$ | $N_{\rm iup}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.60 | $16^3 \times 16$ | 0.2235 | 6 | 2 | 10000000 |
| 5.70 | $12^3 \times 12$ | 0.17016 | 6 | 2 | 5000000 |
| 5.80 | $12^3 \times 12$ | 0.13642 | 6 | 3 | 5000000 |

Table 2: 弦定数 $\sigma a^2$, Coulombic 係数 $c$, 定数項 $\mu a$.

| $\beta = 5.6, 16^3 \times 12$ | $\sigma a^2$ | $c$ | $\mu a$ |
|---|---|---|---|
| $V_{\rm NA}$ | 0.239(2) | -0.39(4) | 0.79(2) |
| $V_{\rm A}$ | 0.25(2) | -0.3(1) | 2.6(1) |
| $\beta = 5.7, 12^3 \times 12$ | | | |
| $V_{\rm NA}$ | 0.159(3) | -0.272(8) | 0.79(1) |
| $V_{\rm A}$ | 0.145(9) | -0.32(2) | 2.64(3) |
| $\beta = 5.8, 12^3 \times 12$ | | | |
| $V_{\rm NA}$ | 0.101(3) | -0.28(1) | 0.82(1) |
| $V_{\rm A}$ | 0.102(9) | -0.27(2) | 2.60(3) |

## (4) Perfect monopole dominance:

Lüscher's multilevel 法は、適用不可。$< P_{\rm mon} P^*_{\rm mon} >$ を計算するには、非常にたくさんの真空配位を必要とする。

Table 3: 測定パラメーター例. $N_{\rm RGT}$： random gauge 変換数

| | $\beta$ | $N_s^3 \times N_t$ | $a(\beta)$ [fm] | $N_{\rm conf}$ | $N_{\rm RGT}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $SU2$ | 2.43 | $24^3 \times 8$ | 0.1029(4) | 7,000 | 4,000 |
| $SU3$ | 5.6 | $24^3 \times 4$ | 0.2235 | 910000 | 400 |

Table 4: Best fitted values of the string tension $\sigma a^2$, the Coulombic coefficient $c$, and the constant $\mu a$.

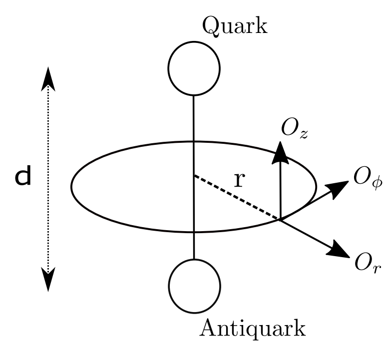
| $SU(3)$ $(24^3 \times 4)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\sigma a^2$ | $c$ | $\mu a$ | FR$(R/a)$ | $\chi^2/N_{\rm df}$ |
| $V_{\rm NA}$ | 0.178(1) | 0.86(4) | 0.99(1) | 5 - 9 | 1.23 |
| $V_{\rm A}$ | 0.16(3) | 0.9(11) | 2.5(3) | 5 - 9 | 1.03 |
| $V_{\rm mon}$ | 0.17(2) | | 2.9(1) | 4 - 7 | 1.08 |
| $V_{\rm ph}$ | $-0.0007(1)$ | 0.046(3) | 0.945(1) | 3 - 10 | 7.22e-08 |
| $SU(2)$ $(24^3 \times 8)$ | | | | | |
| $V_{\rm NA}$ | 0.0415(9) | 0.47(2) | 0.46(8) | 4.1 - 7.8 | 0.99 |
| $V_{\rm A}$ | 0.041(2) | 0.47(6) | 1.10(3) | 4.5 - 8.5 | 1.00 |
| $V_{\rm mon}$ | 0.043(3) | 0.37(4) | 1.39(2) | 2.1 - 7.5 | 0.99 |
| $V_{\rm ph}$ | $-6.0(3) \times 10^{-5}$ | 0.0059(3) | 0.46649(6) | 7.7 - 11.5 | 1.02 |

## (5) Abelian dual Meissner 効果の測定

Table 5: 測定のパラメーター： $E_i^a$ and $k^2$ (Left). $\nabla\times\vec{E}$, $\partial_4\vec{B}$, $k_i^a$ (Right). id はPolyakov loops間距離. Nconf, Nran、Ns：真空数, random gauge変換数、smearing数

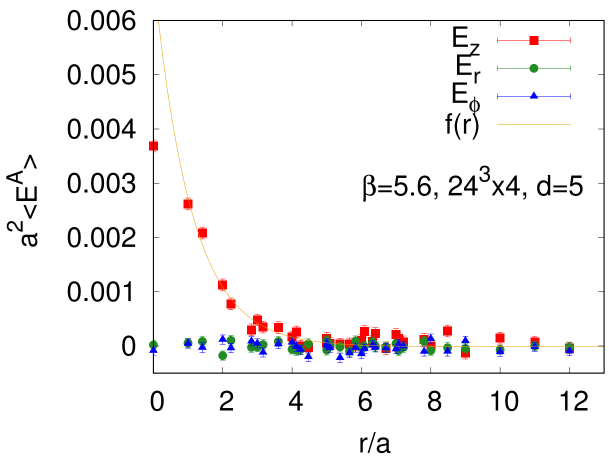
| $E_i^a$ | | | |
|---|---|---|---|
| id | Nconf | Nran | Ns |
| d=5 | 80000 | 100 | 120 |
| d=6 | 80000 | 100 | 120 |
| $k^2$ | | | |
| id | Nconf | Nran | Ns |
| d=5 | 960000 | 0 | 120 |
| d=6 | 960000 | 0 | 120 |

| 双対 Ampère's 則 | | | |
|---|---|---|---|
| id | Nconf | Nran | Ns |
| d=3 | 20000 | 100 | 90 |
| $k_\phi^a$ | | | |
| d=3 | 11200 | 3000 | 90 |




$$\rho_{conn}(O(r)) = \frac{\langle \mathrm{Tr}(P(0)LO(r)L^\dagger)\mathrm{Tr}P^\dagger(d)\rangle}{\langle \mathrm{Tr}P(0)\mathrm{Tr}P^\dagger(d)\rangle} - \frac{1}{3}\frac{\langle \mathrm{Tr}P(0)\mathrm{Tr}P^\dagger(d)\mathrm{Tr}O(r)\rangle}{\langle \mathrm{Tr}P(0)\mathrm{Tr}P^\dagger(d)\rangle},$$

Figure 4: Abelian 電荷分布 for $d = 5$ at $\beta = 5.6$ on $24^3 \times 4$ 格子. (Left)、monopole 密度分布 at $d = 5$.(Right)



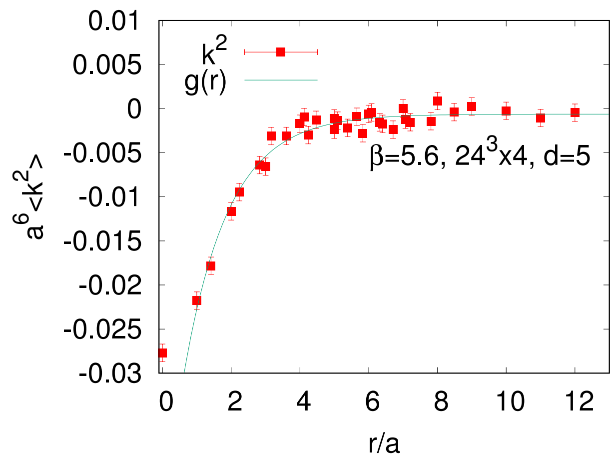
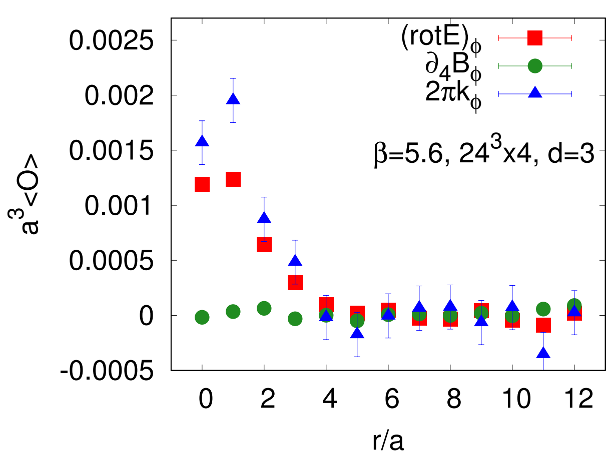




Figure 5: 双対 Ampère's 則 with $d = 3$ at $\beta = 5.6$ on $24^3 \times 4$ lattices. Ginzburg-Landau パラメーター $\kappa = \lambda/\xi$ (Right).




| d | $\sqrt{2}\kappa$ |
|---|---|
| 3 | 0.87(5) |
| 4 | 0.93(7) |
| 5 | 0.83(9) |
| 6 | 0.9(2) |

$SU(2)$: $\sqrt{2}\kappa \sim 1.1$

# 4. 新しい閉じ込め機構の格子QCDのモンテ・カルロ計算による検証（2）

$k^a(s,\mu)$ は連続極限で、有限に存在するか？

pure SU2 and SU3 QCDで、モノポール密度の連続極限を調べる。

格子空間では、lattice artifact と呼ばれる非物理的なモノポールが含まれている。これらも、正定値の密度に寄与する。そのため、熱平衡状態の格子真空をなるだけlattice artifactが少ないものにしなければならない。

1. Tadpole improved (SU2) and Iwasaki (SU3) action:
$48^4$ at $\beta = 3.0 \sim 3.9$ in SU2 and at $\beta = 2.3 \sim 3.5$ in SU3

2. 種々のsmoothな追加のゲージ固定の導入
1) Maximal center gauge(MCG): Maximization of $R = \sum_{s,\mu}(\mathrm{Tr}U(s,\mu))^2$
SU(3) $\rightarrow$ Z(3)
2) Maximal Abelian and $U(1)^2$ Landau gauge (MAU1)
3) Direct Laplacian center gauge (DLCG) only in SU2
4) Maximal Abelian Wilson loop gauge (AWL) only in SU2: Maximization of $R = \sum_{s,\mu\neq\nu}\sum_a(cos(\theta^a_{\mu\nu}(s))$

# 3. モノポールのblcok-spin変換による考察

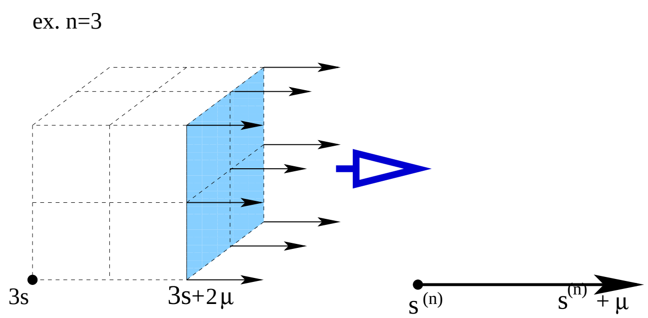



Figure 6: Blockspin definition of monopoles:
T.L. Ivanenko et al., Phys. Lett. **B252**, (1990) 631

$k_\mu(s)$をもとの格子間隔$a$での格子空間上のモノポールとすると格子間隔$b = na$での$n$-blocked モノポールは、以下で定義される：

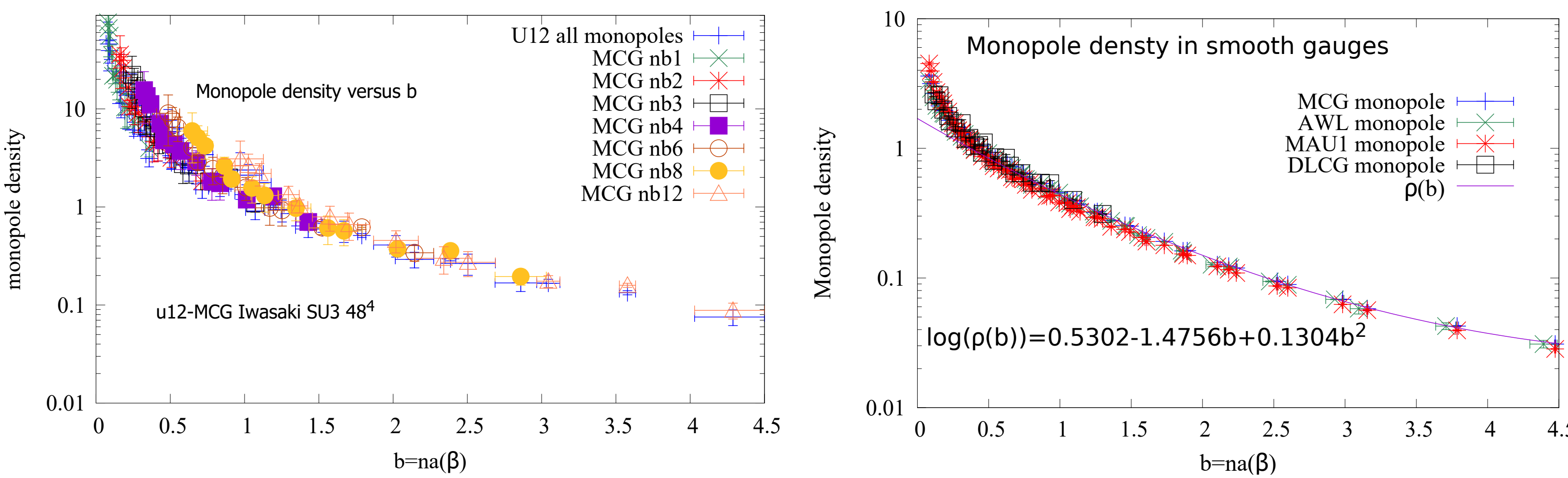
$$k_\mu^{(n)}(s_n) = \sum_{i,j,l=0}^{n-1} k_\mu(ns_n + (n-1)\hat{\mu} + i\hat{\nu} + j\hat{\rho} + l\hat{\sigma})$$

$n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ blockings are adopted on $48^4$ lattice.

## $n$-blocked monopoleの密度の測定:

$$\boldsymbol{\rho}(a(\beta), n) = \frac{\sum_{\mu, s_n} \sqrt{\sum_a (k_\mu^{(n)a}(s_n))^2}}{4\sqrt{3} V_n b^3}$$

Figure 7: $b = na(\beta)$ に対しての SU3での密度: MCG, MAU12 (左) と SU2での密度: MCG, AWL, DLCG and MAU1 (右).



# まとめ

1. 12段階の blockspin 変換と広範囲の$\beta$に対して、非常にきれいな連続極限を示すscaling 則が観測された。(SU2) $\beta = 3.0 \sim 3.9$、(SU3) $\beta = 2.3 \sim 3.5$. 密度$\rho(a(\beta), n)$ は、$b = na(\beta)$のみの関数つまり $\rho(b)$. $n \to \infty$ ととると、一定の$b = na$に対して、$a(\beta) \to 0$を意味する．つまり連続極限の存在

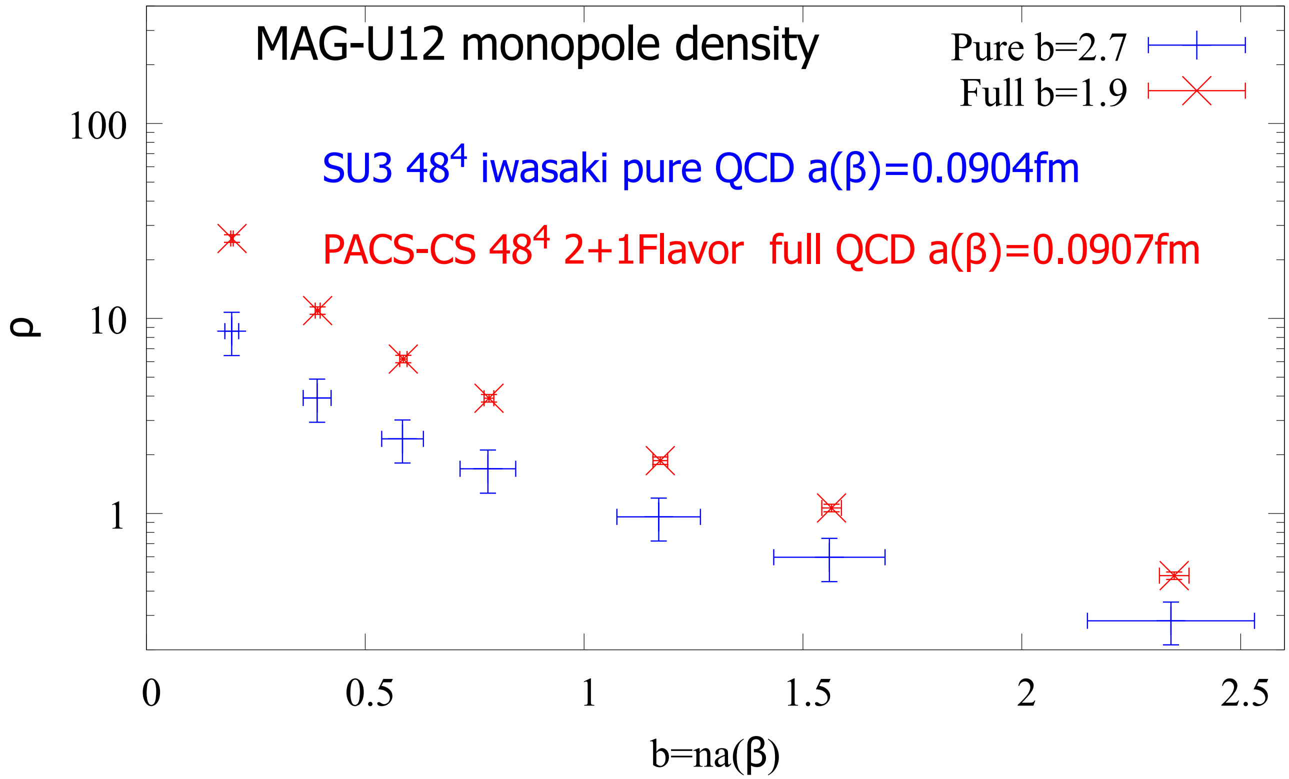
2. 追加的なゲージ固定法に依存しないように見える。(SU2) MCG, DLCG, AWL, MAU1 and in (SU3) MCG, MAU1に対して、同じ$\rho(b)$ が得られた. Gauge independence! 連続極限では、当然である。

3. 同様のきれいなscaling側が、　**モノポール有効作用** $S(k_\mu^{(n)})$ に関して、SU2では得られた。

上記の結果から、このDiarc型の新しいAbelianモノポールは、連続極限を持っているようである。

# 6. 今後の課題

1. この新しいモノポールは、軽いクォークの含まれたfull SU3 QCDでも同様に存在するはずである。現実のfull QCDで調べることがとても重要である。



2. ハドロンなどの質量の重要な部分である質量ギャップを説明できるか？

3. 低エネルギー領域での閉じ込めを含む有効理論は、モノポール場を含む双対のHiggs 模型のかたちでかけるか？

4. カイラル対称性の破れの機構にモノポールは重要な役割をするか？

5. 有限温度相転移機構とモノポール

6. モノポール場に対応する新しい粒子の観測可能性

7. このようなゲージ場に含まれるsingularityがあるとすれば、そもそも、その起源はなにか？

# References

[1]. T. Suzuki et al, P.R. D80, 054504 (2009)

[2]. C. Bonati et al., P.R. D81, 085022 (2019)

[3]. T. Suzuki, K.Ishiguro, V.Bornyakov, P.R. D97, 034501, 099905(erratum) (2018)

[4]. T. Suzuki, P.R. D97, 034509 (2018)

[5]. K.Ishiguro et al., Monopoles of the Dirac type and color confinement in QCD - First results of $SU(3)$ numerical simulations without gauge fixing -, arXiv:2207.04436, to appear in P.R.D

[6]. T. Suzuki, K. Ishiguro and A. Hiraguchi, Talks at LAT2021

[7]. PACS-CS Collaboration: S. Aoki et al., P. R. D79 (2009), 0345503

# Acknowledgements

This work is supported by the JLDG constructed over the SINET5 of NII. The author would like to thank JLDG project in using the full QCD configurations of Ref.[7].