

くりこみ群とcMERA

静岡大理

田中豪太

共同研究者: 桑原孝明 土屋麻人 山代和志

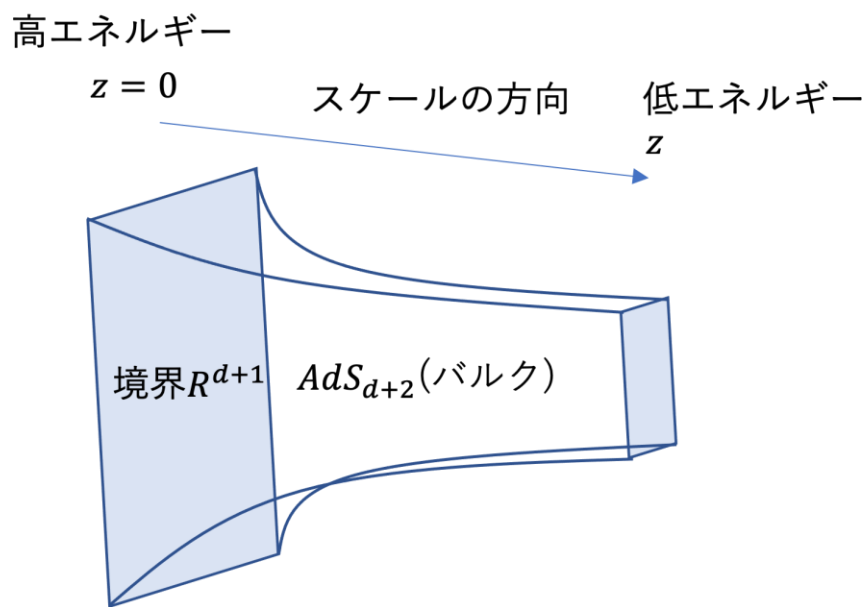
2022.7.20

格子上の場の理論と連続空間上の場の理論

0. 研究の背景と動機

AdS/CFT対応

- AdS/CFT対応: $d + 2$ 次元のAdS時空上の重力理論と $d + 1$ 次元の共形場理論が等価になる、という主張 [Maldacena, 1997]



- AdS_{d+2} 時空の計量: $ds^2 = \frac{dz^2 - dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_d^2}{z^2}$
- AdS_{d+2} 時空における $z = 0$ の境界 R^{d+1} 上のCFT
 $\longleftrightarrow$ AdS_{d+2} 上の重力理論

AdS/CFT対応の具体例:

ラーゼン結合ゲージ理論 $\longleftrightarrow$ 古典重力

強結合ゲージ理論(CFT)の計算を、
より簡単な一般相対論(AdS)の計算で行える

0. 研究の背景と動機

AdS/CFT対応

- 反対に、境界の場の理論から重力の量子論を構築したい
 ➡ まずは、場の理論からバルクの幾何を導きたい

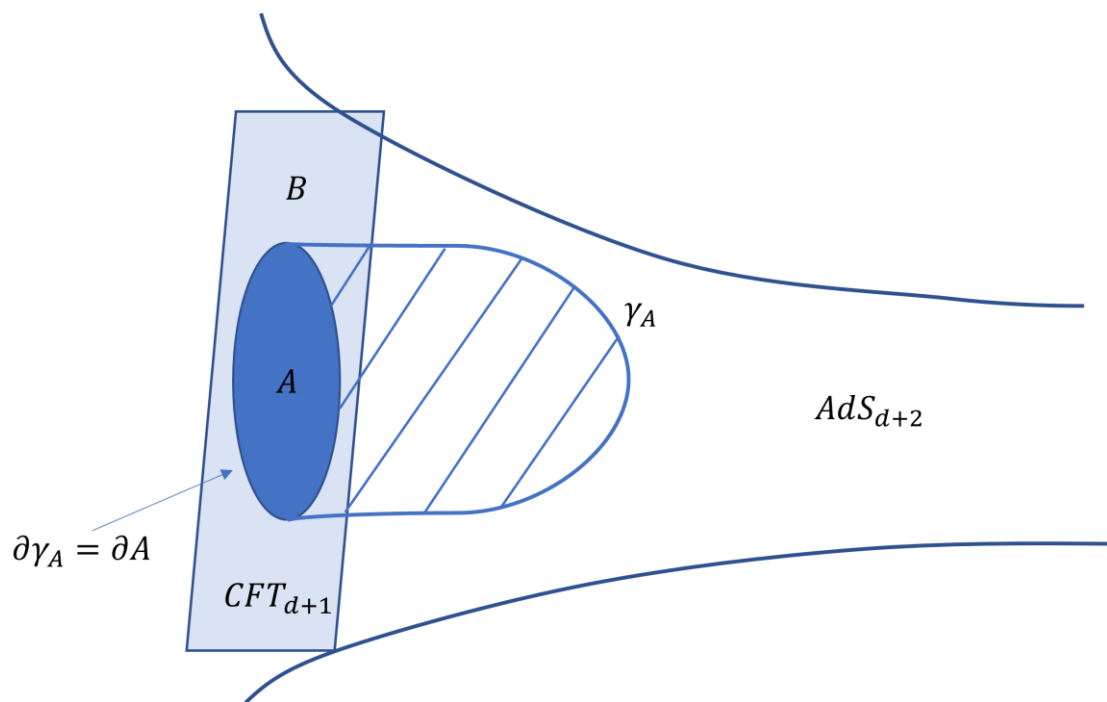
0. 研究の背景と動機

AdS/CFT対応

[Ryu-Takayanagi, 2006]

- 反対に、境界の場の理論から重力の量子論を構築したい

➡ まずは、場の理論からバルクの幾何を導きたい



笠-高柳の公式の概念図

➡ エンタングルメントエントロピー(EE)が
バルクの幾何と関係する

$$S_A = \frac{\text{Area}[\gamma_A]}{4G_N}$$

S_A : AdS_{d+2} の境界 R^{d+1} において、系を A に制限して得られる EE

γ_A : AdS_{d+2} における面積最小の曲面
境界は A の境界に一致 ($\partial A = \partial \gamma_A$)

G_N : AdS_{d+2} の重力定数

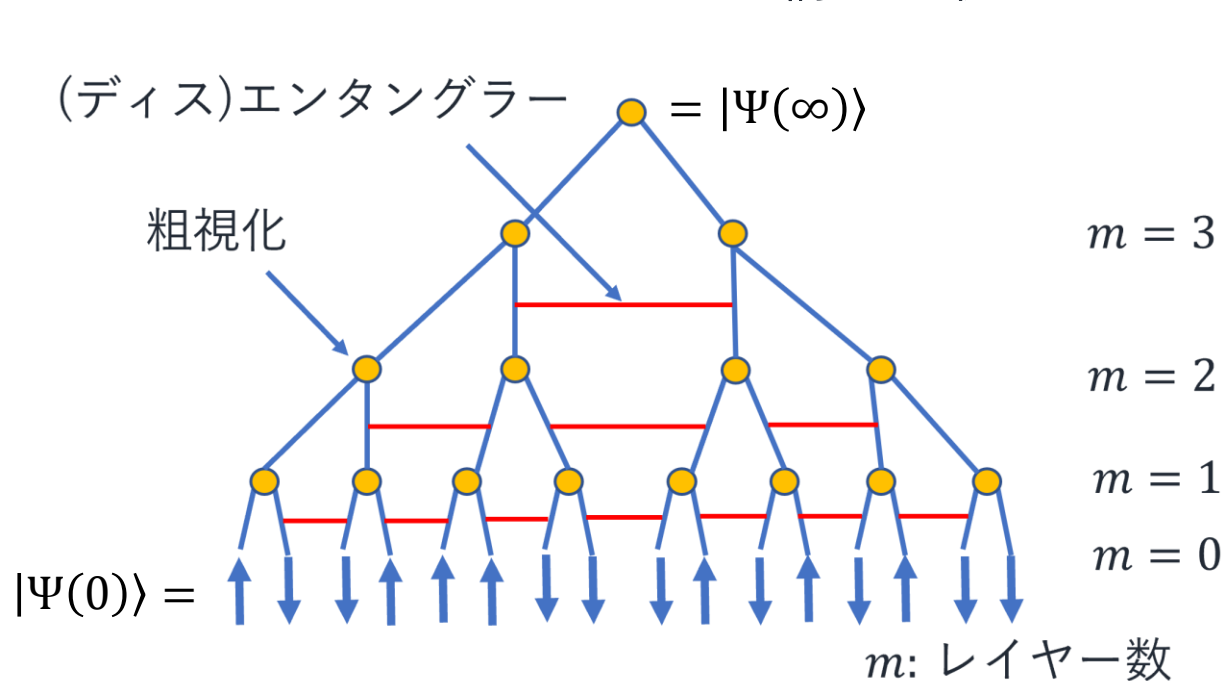
➡ 境界の場の理論でエンタングルメントの
構造を調べることで、バルクの幾何が得られる

0. 研究の背景と動機

Multiscale Entanglement Renormalization Ansatz (MERA)

[Vidal, 2007]

- MERA: 系の基底状態をテンソル積として表し、**テンソルの変分**を通じエンタングルメント構造を取り入れつつ粗視化された基底状態を数値的に求める手法



1次元スピン系に対するMERAのテンソルネットワーク

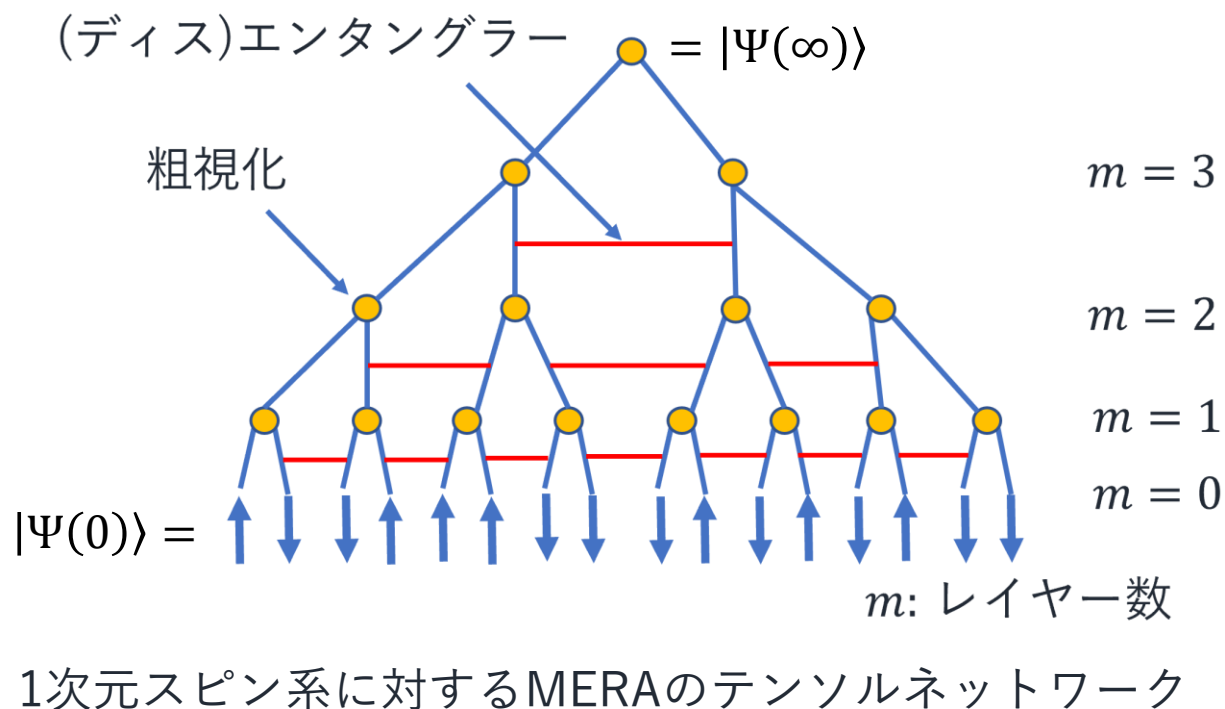
- 粗視化(アイソメトリー):  ふたつのスピンをひとつのスピンに粗視化する
- (ディス)エンタングラー:  エンタングルメントを取り入れる(除去する)ように基底を変換する
- 系の粗視化を行うためには、系のエネルギーを最小化するように、エンタングラーとアイソメトリーを**変分法**で求めればよい

エンタングラーを求めることで、理論のエンタングルメント構造を明らかにし、バルクの幾何を得ることが出来る

0. 研究の背景と動機

MERAとくりこみ群

- MERAによる自由度の粗視化は、実空間くりこみ群の操作に見える



- 粗視化を行い、 m が増えるごとにリスケーリングによりスピン間の距離は半分になる
- レイヤー数 m はくりこみ群の長さスケールとみなすことができる



- MERAの構造はAdS/CFTと等価[Swingle, 2012]
- レイヤー数 m の方向がバルク方向 z と対応

0. 研究の背景と動機

MERAのとcMERA

- MERA: エンタングラーを求めることで、ある離散的なスケール m におけるエンタングルメント構造を知ることが出来る
- 問題点: スケール m が離散的であるため、連続的なバルクの幾何を得られない
- 連続的なバルクの幾何を得るためには、MERAのスケール m を連続変数に拡張する必要がある

➡ continuous MERA(cMERA)

0. 研究の背景と動機

continuous MERA(cMERA)の構成

- MERAの離散的なスケールのラベル m を連続的なスケールに拡張する

$$|\Psi(m)\rangle, m = 0, 1, 2, \dots \longrightarrow |\Psi(u)\rangle, -\infty \leq u \leq 0$$

- 基底状態 $|\Psi(u)\rangle$ は運動量カットオフ $\Lambda = \Lambda_0 e^u$ により正則化されているとする。
(Λ_0 :紫外カットオフ, Λ :有効カットオフ)
- 任意のスケールの基底状態 $|\Psi(u)\rangle, |\Psi(u_0)\rangle$ はユニタリ変換 $\hat{U}(u, u_0)$ で変換できる

$$|\Psi(u)\rangle = \hat{U}(u, u_0)|\Psi(u_0)\rangle = \mathcal{P} \exp \left[-i \int_{u_0}^u du' (\textcolor{red}{K}(u') + \textcolor{red}{L}) \right] |\Psi(u_0)\rangle$$

$\textcolor{red}{K}(u')$:連続の場合のエンタングラー

有効カットオフ $\Lambda = \Lambda_0 e^u$ 以下の運動量のエンタングルメントを生成する

$\textcolor{red}{L}$:連続の場合のアイソメトリーに相当するディラレーション演算子

スケール u を微小に変化させたときの場に対するスケール変換を表す

0. 研究の背景と動機

cMERAのエンタングラー

- cMERAの場合もMERAの場合と同様に、自由場の場合は変分法によりエンタングラー $K(u)$ を求めることが出来る。 [Haegeman et al., 2013, Nozaki et al., 2012]
- しかし、相互作用がある場合の変分法は明らかになっていない。
- cMERAは結局、基底状態のスケール依存性を見ている

$$|\Psi(u)\rangle = \hat{U}(u, u_0)|\Psi(u_0)\rangle = \mathcal{P} \exp \left[-i \int_{u_0}^u du' (K(u') + L) \right] |\Psi(u_0)\rangle$$

→ cMERAと同様に理論のスケール依存性を調べる手法である
くりこみ群を用いて、相互作用がある場合のエンタングラーを
求められるのではないか？

0. 研究の背景と動機

本研究の成果

- 変分法ではなく、くりこみ群によって摂動論的に相互作用がある場合のエンタングラーを求める手法を提案した。

先行研究:

- $O(N)$ の自由場のエンタングラー [Fliss et al, 2016]
- 相互作用があるスカラー場の摂動論的なエンタングラー [Cotler et al, 2018]
- 本研究が提案する手法は、これまでに知られている手法よりも簡便に相互作用がある場合のエンタングラーを(摂動論的にはあるが)導出することが出来る。
- 本研究の結果は、将来的なcMERAの非摂動論的な構築に示唆を与える。

Table of contents

- 0. 研究の背景と動機
- 1. 基底状態の波動関数 - 自由場の場合
- 2. 基底状態の波動関数 - 相互作用のある場合
- 3. 摂動論的エンタングラー
- 4. まとめと展望

Table of contents

- 0. 研究の背景と動機
- 1. 基底状態の波動関数 - 自由場の場合
- 2. 基底状態の波動関数 - 相互作用のある場合
- 3. 摂動論的エンタングラー
- 4. まとめと展望

1. 基底状態の波動関数-自由場の場合

ラグランジアンとハミルトニアンのカットオフ正則化

- $d + 1$ 次元のスカラー場の理論のラグランジアン

$$\hat{L}[\hat{\phi}] = \int_{\vec{x}} \left[\frac{1}{2} \partial_{\mu} \hat{\phi}(t, \vec{x}) \partial_{\mu} \hat{\phi}(t, \vec{x}) - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}(t, \vec{x}) \hat{\phi}(t, \vec{x}) \right]$$

- ラグランジアンの空間方向 d 次元のみをFourier変換する

$$\hat{L}[\hat{\phi}] = \int_{\vec{p}} \left[\frac{1}{2} \partial_t \hat{\phi}(t, \vec{p}) \partial_t \hat{\phi}(t, -\vec{p}) - \frac{1}{2} \hat{\phi}(t, \vec{p}) (\vec{p}^2 + m^2) \hat{\phi}(t, -\vec{p}) \right]$$

1. 基底状態の波動関数-自由場の場合

ラグランジアンとハミルトニアンのカットオフ正則化

- ラグランジアンの空間方向 d 次元のみを運動量カットオフ Λ を用いて正則化する

$$\hat{L}_\Lambda[\hat{\phi}] = \int_{\vec{p}} K^{-1} \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda^2} \right) \left[\frac{1}{2} \partial_t \hat{\phi}(t, \vec{p}) \partial_t \hat{\phi}(t, -\vec{p}) - \frac{1}{2} \hat{\phi}(t, \vec{p}) (\vec{p}^2 + m^2) \hat{\phi}(t, -\vec{p}) \right]$$

ここで、 $K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda^2} \right)$ はカットオフ関数で、 $|\vec{p}| \gg \Lambda$ で $K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda^2} \right) \rightarrow 0$, $\vec{p} \rightarrow 0$ で $K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda^2} \right) \rightarrow 1$

- このときの有効ハミルトニアン:

$$\hat{H}_\Lambda[\hat{\phi}] = \int_{\vec{p}} K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda^2} \right) \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) - \frac{1}{2} \hat{\phi}(\vec{p}) (\vec{p}^2 + m^2) K^{-2} \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda^2} \right) \hat{\phi}(-\vec{p}) \right]$$

$\hat{\pi}(\vec{p})$: $\hat{\phi}(\vec{p})$ の共役運動量 次の交換関係を満たす

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\vec{p}_1), \hat{\pi}(\vec{p}_2)] &= i \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ [\hat{\phi}(\vec{p}_1), \hat{\phi}(\vec{p}_2)] &= [\hat{\pi}(\vec{p}_1), \hat{\pi}(\vec{p}_2)] = 0 \end{aligned}$$

1. 基底状態の波動関数-自由場の場合

相対論的スケール変換

$$\hat{H}_\Lambda[\hat{\phi}] = \int_{\vec{p}} K\left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda^2}\right) \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) - \frac{1}{2} \hat{\phi}(\vec{p}) (\vec{p}^2 + m^2) K^{-2}\left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda^2}\right) \hat{\phi}(-\vec{p}) \right]$$

- 上のハミルトニアンに対し、変数変換 $\Lambda \rightarrow \Lambda_0 e^u$, $p \rightarrow p e^u$ と、相対論的なスケール変換 L

$$\begin{aligned} e^{-iuL} \hat{\phi}(\vec{p}) e^{iuL} &= e^{-\frac{d}{2}u} \hat{\phi}(e^{-u}\vec{p}) \\ e^{-iuL} \hat{\pi}(\vec{p}) e^{iuL} &= e^{-\frac{d-2}{2}u} \hat{\pi}(e^{-u}\vec{p}) \end{aligned}$$

を行う

u : cMERAの連続的なスケール $u = -\infty (\Lambda = 0)$ がIR極限で、 $u = 0 (\Lambda = \Lambda_0)$ がUV極限
 Λ : 有効カットオフ, Λ_0 : UVカットオフ

1. 基底状態の波動関数-自由場の場合

相対論的スケール変換

- 先の変数変換の結果、cMERAのスケール u における有効ハミルトニアンが得られる

$$\hat{H}_u[\hat{\varphi}] = \int_{\vec{p}} K_{\vec{p}} \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) - \frac{1}{2} \hat{\varphi}(\vec{p}) \omega_{\vec{p}}^2 K_{\vec{p}}^{-2} \hat{\varphi}(-\vec{p}) \right]$$

ただし、 $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + e^{-2u} m^2}, K_{\vec{p}} = K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda_0^2} \right)$

1. 基底状態の波動関数-自由場の場合

波動関数 $\Psi_0[\phi](u)$

- 先に求めた有効ハミルトニアン $H_u[\hat{\phi}]$ から、あるcMERAのスケール u における基底状態の波動関数 $\Psi_0[\phi](u)$ が得られる

$$\begin{aligned}\Psi_0[\phi](u) &= \langle \phi | \Psi_0(u) \rangle \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\vec{p}} \phi(\vec{p}) \omega_{\vec{p}} K_{\vec{p}}^{-1} \phi(-\vec{p}) + \frac{V}{4} \ln 2 \omega_{\vec{p}} K_{\vec{p}}^{-1} \right]\end{aligned}$$

ただし、 $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + e^{-2u} m^2}$, $K_{\vec{p}} = K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda_0^2} \right)$ $|\Psi_0(u)\rangle$: 基底状態

- $\phi(\vec{p})$ は場の演算子 $\hat{\phi}(p)$ の固有状態 $|\phi\rangle$ の固有値



$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\vec{p})|\phi\rangle &= \phi(\vec{p})|\phi\rangle \\ \hat{\pi}(\vec{p})|\phi\rangle &= -i \frac{\delta}{\delta \phi(-\vec{p})} |\phi\rangle\end{aligned}$$

1. 基底状態の波動関数-自由場の場合

生成消滅演算子

- 基底状態 $|\Psi_0(u)\rangle$ に対して作用する生成消滅演算子 $a^\dagger(k), a(k)$ を、次のように定義する

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\omega_{\vec{k}} K_{\vec{k}}^{-1}} \phi(\vec{k}) + i \sqrt{\frac{K_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}} \pi(\vec{k}) \right\}$$
$$a^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\omega_{\vec{k}} K_{\vec{k}}^{-1}} \phi(-\vec{k}) - i \sqrt{\frac{K_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}} \pi(-\vec{k}) \right\}$$
$$[a(p), a^\dagger(q)] = \tilde{\delta}(p - q)$$

Table of contents

- 0. 研究の背景と動機
- 1. 基底状態の波動関数 - 自由場の場合
- 2. 基底状態の波動関数 - 相互作用のある場合
- 3. 摂動論的エンタングラー
- 4. まとめと展望

2. 基底状態の波動関数-相互作用のある場合

相互作用ハミルトニアン

- 次のような相互作用ハミルトニアンを考える

$$\hat{H} = \hat{H}_0(u) + \alpha \hat{H}_{\text{int}}$$

$$\hat{H}_0[\hat{\phi}](u) = \int_{\vec{p}} K_{\vec{p}} \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) - \frac{1}{2} \hat{\phi}(\vec{p}) \omega_{\vec{p}}^2 K_{\vec{p}}^{-2} \hat{\phi}(-\vec{p}) \right]$$

$$\hat{H}_{\text{int}}[\hat{\phi}](u) = \frac{\delta m^2}{2} \int_{\vec{p}} \hat{\phi}(\vec{p}) \hat{\phi}(-\vec{p}) + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \hat{\phi}^4(\vec{p}_i) \delta(\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4)$$

ただし、 $\alpha \ll 1$

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + e^{-2u} m^2}, K_{\vec{p}} = K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda_0^2} \right)$$

δm^2 は α の1次のcounter termで
 u に依存する $\longrightarrow \delta m^2 = \delta m^2(u)$

- このときのシュレディンガー方程式

$$(\hat{H}_0(u) + \alpha \hat{H}_{\text{int}}(u)) |\Psi_0(u)\rangle = E_0(u) |\Psi_0(u)\rangle$$

2. 基底状態の波動関数-相互作用のある場合

波動関数の摂動展開

- 基底状態とエネルギー固有値を次のように α で展開する

$$\begin{aligned} |\Psi_0(u)\rangle &= |\Psi_0^{(0)}(u)\rangle + \alpha |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle + \dots \\ E_0(u) &= E_0^{(0)}(u) + \alpha E_0^{(1)}(u) + \dots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &(\hat{H}_0(u) + \alpha \hat{H}_{\text{int}}(u)) (|\Psi_0^{(0)}(u)\rangle + \alpha |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle + \dots) \\ &= (E_0^{(0)}(u) + \alpha E_0^{(1)}(u) + \dots) |\Psi_0(u)\rangle \end{aligned}$$

- 摂動の1次の基底状態とエネルギー固有値

$$\begin{aligned} |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle &= \sum_{n=1} \int_{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n} \frac{\langle \Psi_n^{(0)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) | \hat{H}_{\text{int}}(u) | \Psi_0^{(0)} \rangle}{E_0 - E_n(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)} \frac{\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1) \dots \hat{a}^\dagger(\vec{p}_n)}{\sqrt{n!}} |\Psi_0^{(0)}\rangle \\ E_0^{(1)}(u) &= \langle \Psi_0^{(0)} | \hat{H}_{\text{int}}(u) | \Psi_0^{(0)} \rangle \end{aligned}$$

➡ これらはスケール u に依存している

Table of contents

- 0. 研究の背景と動機
- 1. 基底状態の波動関数 - 自由場の場合
- 2. 基底状態の波動関数 - 相互作用のある場合
- 3. 摂動論的エンタングラー
- 4. まとめと展望

3. 摂動論的エンタングラー

cMERAにおけるエンタングラー

- cMERAでは、あるスケール u, u_0 の基底状態 $|\Psi_0(u)\rangle, |\Psi_0(u_0)\rangle$ は、次のようにユニタリ変換 $\hat{U}(u, u_0)$ によって変換されるとしていた

$$|\Psi_0(u)\rangle = \hat{U}(u, u_0)|\Psi_0(u_0)\rangle = \mathcal{P} \exp \left[-i \int_{u_0}^u du' (\textcolor{red}{K}(u') + \textcolor{red}{L}) \right] |\Psi_0(u_0)\rangle$$

- cMERAにおけるエンタングラーである $\hat{K}(u)$ を求めたい...
変分法によってではなく、くりこみ群から直接 $\hat{K}(u)$ を求められないか？

3. 摂動論的エンタングラー

cMERAにおけるエンタングラー

$$|\Psi_0(u)\rangle = \hat{U}(u, u_0)|\Psi_0(u_0)\rangle = \mathcal{P} \exp \left[-i \int_{u_0}^u du' (\mathbf{K}(u') + \mathbf{L}) \right] |\Psi_0(u_0)\rangle$$

- この式は基底状態 $|\Psi_0(u)\rangle$ のスケール依存性を見ている

➡ 微小なスケールの変化 $u \rightarrow u + \delta u$ に対する基底状態 $|\Psi_0(u)\rangle$ の応答を調べるため、両辺を u で微分してみる

$$\partial_u |\Psi_0(u)\rangle = -i(\hat{K}(u) + \hat{L})|\Psi_0(u)\rangle$$

$\hat{K}(u) + \hat{L}$ の具体形が得られる

➡ $\hat{K}(u) + \hat{L}$ の具体形が分かれば、あとはアイソメトリーに相当するディラレーション演算子 $\hat{L}$ を差し引くことで、エンタングラー $\hat{K}(u)$ の具体形がわかる

- $-i(\hat{K}(u) + \hat{L})$ に関する条件: 反エルミート演算子であること
($\hat{U}(u, u_0)$ はユニタリ演算子なので)

3. 摂動論的エンタングラー

摂動展開

- $-i(\hat{K}(u) + \hat{L}) = \hat{X}$ を摂動展開する

$$\partial_u |\Psi_0(u)\rangle = -i(\hat{K}(u) + \hat{L}) |\Psi_0(u)\rangle = \hat{X} |\Psi_0(u)\rangle$$



$$\partial_u \left(|\Psi_0^{(0)}(u)\rangle + \alpha |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle \right) = (\hat{X}^{(0)} + \alpha \hat{X}^{(1)}) \left(|\Psi_0^{(0)}(u)\rangle + \alpha |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle \right)$$



$$\begin{aligned} \partial_u |\Psi_0^{(0)}(u)\rangle &= \hat{X}^{(0)} |\Psi_0^{(0)}(u)\rangle \\ \partial_u |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle &= \hat{X}^{(1)} |\Psi_0^{(0)}(u)\rangle + \hat{X}^{(0)} |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle \end{aligned}$$

3. 摂動論的エンタングラー

摂動の0次

- 次の式から $\hat{X}^{(0)}$ を求める

$$\partial_u |\Psi_0^{(0)}(u)\rangle = \hat{X}^{(0)} |\Psi_0^{(0)}(u)\rangle$$

- これは、波動関数 $\Psi_0^{(0)} = \langle \phi | \Psi_0^{(0)}(u) \rangle$ の具体形から計算出来る

$$\langle \phi | \partial_u | \Psi_0^{(0)}(u) \rangle = \partial_u \Psi_0^{(0)} = \partial_u \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\vec{p}} \phi(\vec{p}) \omega_{\vec{p}} K_{\vec{p}}^{-1} \phi(-\vec{p}) + \frac{V}{4} \ln 2 \omega_{\vec{p}} K_{\vec{p}}^{-1} \right]$$

→ これは反エルミートではない



$$\begin{aligned} \hat{X}^{(0)}(u) &= m^2 e^{-2u} \int_{\vec{p}} \frac{1}{4\omega_{\vec{p}}^2} \{ \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \hat{a}^\dagger(-\vec{p}) - \hat{a}(\vec{p}) \hat{a}(-\vec{p}) \} \\ &= -im^2 e^{-2u} \int_{\vec{p}} \frac{1}{4\omega_{\vec{p}}^2} \{ \hat{\phi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) + \hat{\pi}(\vec{p}) \phi(-\vec{p}) \} \end{aligned}$$



これは反エルミート

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + e^{-2u} m^2}, K_{\vec{p}} = K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda_0^2} \right)$$

3.摂動論的エンタングラー

摂動の1次

- 次の式から $X^{(1)}$ を求める

$$\partial_u |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle = \hat{X}^{(1)} |\Psi_0^{(0)}(u)\rangle + \hat{X}^{(0)} |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle$$

- $\partial_u |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle, \hat{X}^{(0)} |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle$ は、 $|\Psi_0^{(1)}(u)\rangle$ の具体形から計算出来る

$$\begin{aligned} \partial_u |\Psi_0^{(1)}\rangle &= \partial_u \sum_{n=1} \int_{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n} \frac{\langle \Psi_n^{(0)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) | \hat{H}_{\text{int}}(u) | \Psi_0^{(0)} \rangle}{E_0 - E_n(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, u)} \frac{\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1) \dots \hat{a}^\dagger(\vec{p}_n)}{\sqrt{n!}} |\Psi_0^{(0)}\rangle \\ \hat{X}^{(0)} |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle &= -im^2 e^{-2u} \int_{\vec{p}} \frac{1}{4\omega_{\vec{p}}^2} \{ \hat{\phi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) + \hat{\pi}(\vec{p}) \phi(-\vec{p}) \} \sum_{n=1} \int_{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n} \frac{\langle \Psi_n^{(0)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) | \hat{H}_{\text{int}}(u) | \Psi_0^{(0)} \rangle}{E_0 - E_n(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, u)} \frac{\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1) \dots \hat{a}^\dagger(\vec{p}_n)}{\sqrt{n!}} |\Psi_0^{(0)}\rangle \end{aligned}$$

➡ $|\Psi_0^{(1)}(u)\rangle$ の具体形が $\hat{a}^\dagger(\vec{p})$ で書けているのが実は重要

3.摂動論的エンタングラー

摂動の1次

- これらの計算から、次の結果が得られる

$$\begin{aligned}
 & \hat{X}^{(1)} \\
 &= -im^2 e^{-2u} \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4} \left\{ \left(\frac{1}{\omega_{\vec{k}_1} + \dots + \omega_{\vec{k}_4}} \right)^2 \left(\frac{1}{\omega_{\vec{k}_1}} + \dots + \frac{1}{\omega_{\vec{k}_4}} \right) + \frac{1}{\omega_{\vec{k}_1} + \dots + \omega_{\vec{k}_4}} \left(\frac{1}{2\omega_{\vec{k}_1}^2} + \dots + \frac{1}{2\omega_{\vec{k}_4}^2} \right) \right\} \\
 &\times \delta(\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4) \frac{1}{4} \sum_{i=1} \left\{ \left(-\phi(\vec{k}_1) \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_3) \frac{\pi(\vec{k}_4)}{2\omega_{\vec{k}_4}} K_{\vec{k}_4} + \frac{\pi(\vec{k}_1)}{2\omega_{\vec{k}_1}} K_{\vec{k}_1} \frac{\pi(\vec{k}_2)}{2\omega_{\vec{k}_2}} K_{\vec{k}_2} \frac{\pi(\vec{k}_3)}{2\omega_{\vec{k}_3}} K_{\vec{k}_3} 2\phi(\vec{k}_4) \right) + \left(\text{3 terms } 1,2,3,4 \text{ の入れ替え} \right) \right\} \\
 &+ 2im^2 e^{-2u} \left[\left\{ \frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6K_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \right\} \int_k \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}^3} \frac{K_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}} + \left\{ \frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6m^2 K_{\vec{p}} e^{-2u}}{2\omega_{\vec{p}}^3} \right\} \int_k \frac{K_{\vec{k}}}{4\omega_{\vec{k}}^2} \right] \{ \hat{\phi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) + \hat{\pi}(\vec{p}) \phi(-\vec{p}) \}
 \end{aligned}$$

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + e^{-2u} m^2}, K_{\vec{p}} = K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda_0^2} \right)$$

3.摂動論的エンタングラー

ユニタリ変換 $U(u_1, u_2)$

- これまでの結果から、 $(\hat{K}(u) + \hat{L})$ の具体形が摂動の1次まで求まる

$$\begin{aligned} |\Psi_0^{(0)}(u)\rangle + \alpha |\Psi_0^{(1)}(u)\rangle &= \hat{U}(u, u_0) \left(|\Psi_0^{(0)}(u_0)\rangle + \alpha |\Psi_0^{(1)}(u_0)\rangle \right) \\ &= P \exp \left[-i \int_{u_0}^u \{ (\hat{K}(u') + \hat{L})^{(0)} + \alpha (\hat{K}(u') + \hat{L})^{(1)} \} du' \right] \left(|\Psi_0^{(0)}(u_0)\rangle + \alpha |\Psi_0^{(1)}(u_0)\rangle \right) \end{aligned}$$

$$(\hat{K}(u') + \hat{L})^{(0)} = m^2 e^{-2u} \int_{\vec{p}} \frac{1}{4\omega_{\vec{p}}^2} \{ \hat{\phi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) + \hat{\pi}(\vec{p}) \phi(-\vec{p}) \}$$

$$\begin{aligned} \omega_k &= \sqrt{k^2 + e^{-2u} m^2} \\ K_{\vec{p}} &= K \left(\frac{\vec{p}^2}{\Lambda_0^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{K}(u') + \hat{L})^{(1)} \\ &= -im^2 e^{-2u} \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4} \left\{ \left(\frac{1}{\omega_{\vec{k}_1} + \dots + \omega_{\vec{k}_4}} \right)^2 \left(\frac{1}{\omega_{\vec{k}_1}} + \dots + \frac{1}{\omega_{\vec{k}_4}} \right) + \frac{1}{\omega_{\vec{k}_1} + \dots + \omega_{\vec{k}_4}} \left(\frac{1}{2\omega_{\vec{k}_1}^2} + \dots + \frac{1}{2\omega_{\vec{k}_4}^2} \right) \right\} \\ &\times \tilde{\delta}(\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4) \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \left\{ \left(-\phi(\vec{k}_1) \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_3) \frac{\pi(\vec{k}_4)}{2\omega_{\vec{k}_4}} K_{\vec{k}_4} + \frac{\pi(\vec{k}_1)}{2\omega_{\vec{k}_1}} K_{\vec{k}_1} \frac{\pi(\vec{k}_2)}{2\omega_{\vec{k}_2}} K_{\vec{k}_2} \frac{\pi(\vec{k}_3)}{2\omega_{\vec{k}_3}} K_{\vec{k}_3} 2\phi(\vec{k}_4) \right) + \left(\begin{array}{c} \text{3 terms} \\ \text{1,2,3,4の入れ替え} \end{array} \right) \right\} \\ &+ 2im^2 e^{-2u} \left[\left\{ \frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6K_{\vec{p}}}{2\omega_{\vec{p}}} \right\} \int_k \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}^3} \frac{K_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}} + \left\{ \frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!} \int_{\vec{p}} \frac{6m^2 K_{\vec{p}} e^{-2u}}{2\omega_{\vec{p}}^3} \right\} \int_k \frac{K_{\vec{k}}}{4\omega_{\vec{k}}^2} \right] \{ \hat{\phi}(\vec{p}) \hat{\pi}(-\vec{p}) + \hat{\pi}(\vec{p}) \phi(-\vec{p}) \} \end{aligned}$$

Table of contents

- 0. 研究の背景と動機
- 1. 基底状態の波動関数 - 自由場の場合
- 2. 基底状態の波動関数 - 相互作用のある場合
- 3. cMERAのユニタリ変換 $\hat{U}(u_1, u_2)$
- 4. まとめと展望

4.まとめと展望

本研究の結果

- 本研究では、相互作用があるスカラー場の理論に対するcMERAのエンタングラー $\hat{K}(\Lambda)$ を、くりこみ群により摂動論的に求める手法を提案した。
- 具体的には、cMERAが基底状態のスケール依存性を表していることに注目し、直接基底状態のスケール依存性を調べることで、**変分法に依らずに**摂動 n 次のエンタングラーとアイソメトリーに相当するディラレーション演算子の和 $-i(\hat{K}(u) + \hat{L})^{(n)}$ の具体形を直接求めることが出来る、というものの。
- この手法を用いて、摂動のより高次のエンタングラーも逐次的に求めることが可能。

4.まとめと展望

今後の展望-汎関数くりこみ群との類似

- 今回我々は、cMERAが基底状態のスケール依存性をユニタリ変換で表していることに注目し、基底状態のスケール依存性を直接調べることで、摂動論的にエンタングラーを直接求めた。
- しかし、AdS/CFT対応の観点からは、非摂動論的にエンタングラーを求めたい

→ 場の理論のスケール依存性を調べるための非摂動論的な手法である、汎関数くりこみ群を応用できないだろうか？



有効作用のスケール依存性を、非摂動論的な汎関数微分方程式の形で表す

例: スカラー場の理論の場合
[Polchinski, 1984]

$$-\Lambda \partial_\Lambda e^{-S_\Lambda[\phi]} = \frac{1}{2} \int_p \frac{\dot{K}_{p^2}}{p^2 + m^2} \frac{\delta}{\delta \phi(p)} \frac{\delta}{\delta \phi(-p)} e^{-S_\Lambda[\phi]}$$

4.まとめと展望

今後の展望-波動関数のくりこみ群方程式

- 汎関数くりこみ群のように、基底状態の波動関数のスケール依存性を汎関数微分方程式の形で与えられないだろうか？

$$\partial_u |\Psi_0[\phi](u)\rangle = F_u \left[\frac{\delta}{\delta\phi}, \frac{\delta^2}{\delta\phi^2}, \dots \right] |\Psi_0[\phi](u)\rangle \iff |\Psi_0[\phi](u)\rangle = \exp \left[\int_{u_0}^u F(u') du' \right] |\Psi_0[\phi](u_0)\rangle$$

→ F_u がエンタングラーとアイソメトリーに相当するディラレーション演算子の和 $-i(\hat{K}(u) + \hat{L})$ に相当する(今回はこれを摂動論的に求めた)。

4.まとめと展望

今後の展望-波動関数のくりこみ群方程式

- 基底状態の波動関数に対するくりこみ群方程式を少なくとも形式的には求めることが出来る[Kuwahara-Tanaka-Tsuchiya-Yamashiro, working in progress]

$$\partial_u \Psi_u[\phi] = - \int_{\vec{k}} \frac{\dot{K}_{\vec{k}}}{4\omega_{\vec{k}}} \left[\frac{\delta^2 \Psi_u[\phi]}{\delta \phi(\vec{k}) \delta \phi(-\vec{k})} + \frac{1}{\Psi_u[\phi]} \frac{\delta \Psi_u[\phi]}{\delta \phi(\vec{k})} \frac{\delta \Psi_u[\phi]}{\delta \phi(-\vec{k})} \right]$$

- 摂動の1次までがこの方程式の解であることが示せる
より高次の場合は現在検証中
- 非摂動論的に解を見つけることが出来れば、今回提案した手法を用いて、**非摂動論的なエンタングラーを求めることが出来る**と期待される