

テンソルくりこみ群による 3次元SU(2)ゲージ理論の解析

桑原孝明

共同研究者：土屋麻人

arXiv:2205.08883 に基づく (PTEP に掲載決定済)

2022年7月20日 基研研究会 格子上の場の理論と連続空間上の場の理論

静岡大学

- 試行作用を導入した新たなテンソルネットワーク構成法を提案
- この手法を 3次元 SU(2) pure ゲージ理論に適用

⇒ テンソルくりこみ群により弱結合/強結合展開と整合する結果を得た

テンソルくりこみ群により 3次元以上の非可換ゲージ理論を解析するのは初

序論

テンソルネットワーク構成法

3次元 pure SU(2) ゲージ理論への適用結果

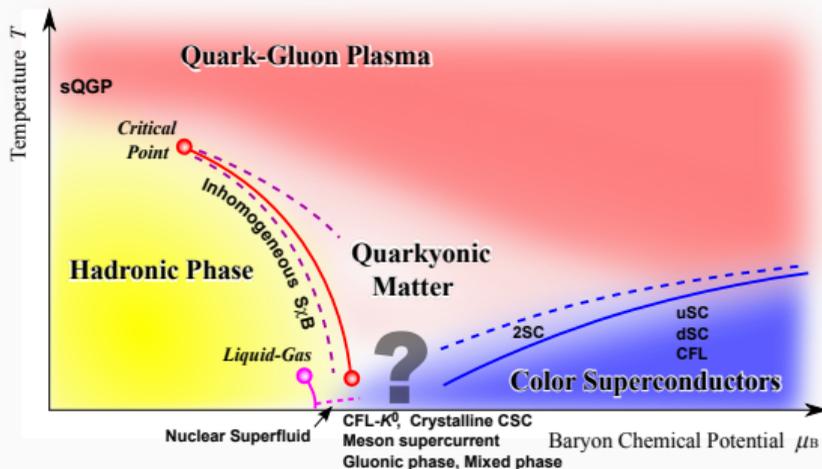
結論

序論

テンソルネットワーク構成法

3次元 pure SU(2) ゲージ理論への適用結果

結論



QCD 相予想図 [Fukushima and Hatsuda, 2011]

有限密度 QCD は未解析部分が多い

複素作用により生じる符号問題のためモンテカルロ法の適用は困難

⇒ テンソル繰り込み群による解析

テンソル繰り込み群 [Levin and Nave, 2007] (Tensor Renormalization Group, TRG)

分配関数をテンソルネットワーク表示し、適当な情報圧縮により物理量を計算する
決定論的な数値解析手法

長所

- 符号問題が一切起きない
- 容易に熱力学的極限がとれる
計算コスト $\propto \log(\text{Lattice size})$

短所

- 高次元解析の計算コストが高い ($\propto D^{a \cdot \text{dim} + b}$) 例: $D^7 \rightarrow D$ を 2 倍すると計算時間 128 倍
- うまく work するかはモデルや TRG scheme、初期テンソル依存
trial & error の必要あり

テンソル繰り込み群の流れ

テンソル繰り込み群のアルゴリズム

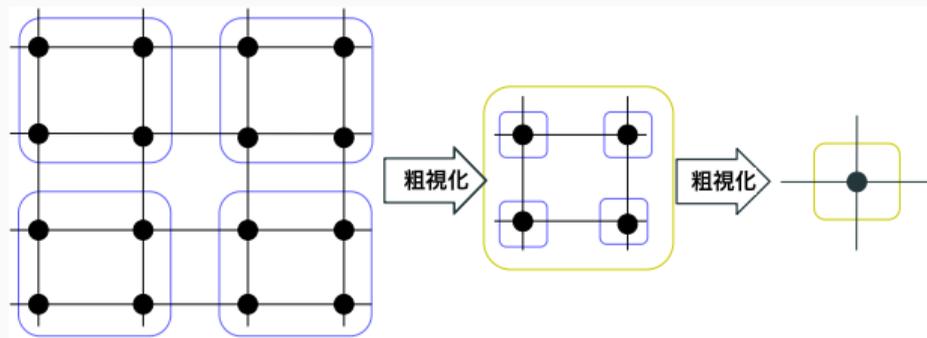
1. 分配関数 Z をテンソルネットワーク表示

$$Z = \sum_{\dots, i, \dots} \dots T_{ijkl} T_{mnio} \dots$$

2. テンソルの粗視化：特異値分解による (行列の) 低ランク近似

$S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq 0$: 特異値

$$T_{ijkl} = M_{(ij),(kl)} = \sum_m U_{(ij),m} \cdot S_m \cdot V_{m,(kl)}^\dagger \sim \sum_{m=1}^D U_{(ij),m} \cdot S_m \cdot V_{m,(kl)}^\dagger$$



場の理論へのテンソルくりこみ群の適用

場の理論にテンソルくりこみ群を適用するには、
連続的な場の配位をテンソルにする必要がある

スカラー場の場合 [Kadoh et al., 2019]

Gauss-Hermite quadrature

$$\int dx e^{-x^2} g(x) \sim \sum_{\alpha=1}^K \omega_{\alpha} g(y_{\alpha})$$

場の理論へのテンソルくりこみ群の適用

場の理論にテンソルくりこみ群を適用するには、
連続的な場の配位をテンソルにする必要がある

スカラー場の場合 [Kadoh et al., 2019]

Gauss-Hermite quadrature

$$\int dx e^{-x^2} g(x) \sim \sum_{\alpha=1}^K \omega_{\alpha} g(y_{\alpha})$$

2次元 Yang-Mills の場合 [Fukuma et al., 2021]

群多様体から一様に場の配位を生成し、積分を近似

$$\int dU f(U) \sim \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K f(U_i)$$

場の理論へのテンソルくりこみ群の適用例

スカラー場

- 4D スカラー場 [Akiyama et al., 2021b]

フェルミオン場

- Nambu-Jona-Lasinio 模型 [Akiyama et al., 2021a]

場の理論へのテンソルくりこみ群の適用例

スカラー場

- 4D スカラー場 [Akiyama et al., 2021b]

フェルミオン場

- Nambu-Jona-Lasinio 模型 [Akiyama et al., 2021a]

ゲージ場

- 2D $U(1) + \theta$ term [Kuramashi and Yoshimura, 2020]
- 2D non-Abelian Higgs [Bazavov et al., 2019]
- 3D Z_2 [Kuramashi and Yoshimura, 2019]
- 2D Yang-Mills [Fukuma et al., 2021]
- 2D $U(N)$, $SU(N)$ [Hirasawa et al., 2021]
- (3+1)D Z_2 -Higgs [Akiyama and Kuramashi, 2022]
- 3D pure $SU(2)$ [Kuwahara and Tsuchiya, 2022] arxiv:2205.08883 (PTEP に掲載決定済)

序論

テンソルネットワーク構成法

3次元 pure SU(2) ゲージ理論への適用結果

結論

3次元 SU(N) ゲージ理論でのテンソルネットワーク構成： 試行作用の導入

分配関数

$$Z = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} e^{-S}$$

$$S = \frac{\beta}{N} \sum_{n,\mu > \nu} \text{ReTr}(1 - U_{\mu\nu}(n)), \quad U_{\mu\nu}(n) = U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger$$

original action から試行作用 S_v を足し引き

$$Z = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} e^{-(S-S_v)-S_v}$$

$$S_v = \sum_{n,\mu} \tilde{S}_v(U_{n,\mu}), \quad \tilde{S}_v: \text{single link action}$$

$$= \sum_{n,\mu} \left(-\frac{H}{N} \text{ReTr} U_{n,\mu} \right)$$

試行作用に重み付けされた配位を用いたテンソルネットワーク構成

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} e^{-(S-S_v)-S_v} \\ &= Z_v^{3V} \langle e^{-(S-S_v)} \rangle_v, \quad \left(Z_v = \int dU e^{-\tilde{S}_v(U(n,\mu))} \right) \end{aligned}$$

$$\langle \cdots \rangle_v = \frac{1}{Z_v^{3V}} \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \cdots e^{-\sum n,\mu \tilde{S}(U_{n,\mu})}$$

試行作用の weight の下での統計平均 (cf.[Fukuma et al., 2021])

$$\int dU_{n,\mu} g(U_{n,\mu}, U_{n',\mu'}, \dots) \approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g(U_i, U_{n',\mu'}, \dots)$$

試行作用に含まれるパラメータ H が 0 のとき、一様分布に帰着

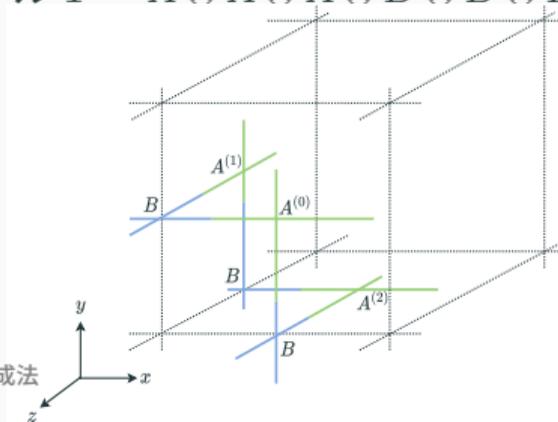
初期テンソル

試行作用の下の weight $e^{-\tilde{S}_v(U)}$ を用いて、
モンテカルロ法により場の配位 $\{U_1, U_2, \dots, U_K\}$ を生成
初期テンソル

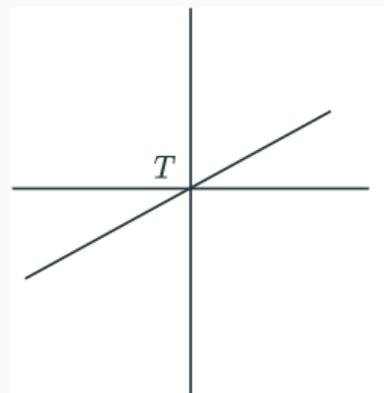
$$A_{ijkl} = \exp \left[\frac{\beta}{N} \text{Tr} \left(U_i U_j U_k^\dagger U_l^\dagger \right) - \frac{1}{4} \left(\tilde{S}_v(U_i) + \tilde{S}_v(U_j) + \tilde{S}_v(U_k) + \tilde{S}_v(U_l) \right) \right]$$

正方格子状にテンソルを構築するため、
クロネッカーデルタ $B_{ijkl} = \delta_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{kl} \delta_{li}$ を挿入 (cf.Exact blocking formula[Xie et al., 2012])

初期テンソル $T = A \otimes A \otimes A \otimes B \otimes B \otimes B$



テンソルネットワーク構成法



$$T = A \otimes A \otimes A \otimes B \otimes B \otimes B$$

$$\Rightarrow Z(K) = \left(e^{-\beta \frac{Z_v}{K}} \right)^{3V} \text{tTr} \otimes_n T$$

試行作用により重み付けされた配位を用いて、テンソルネットワーク表現された。
統計的に独立な配位の集合から構成される初期テンソルを用いて TRG を行い、
統計平均を取ることで分配関数を評価する。

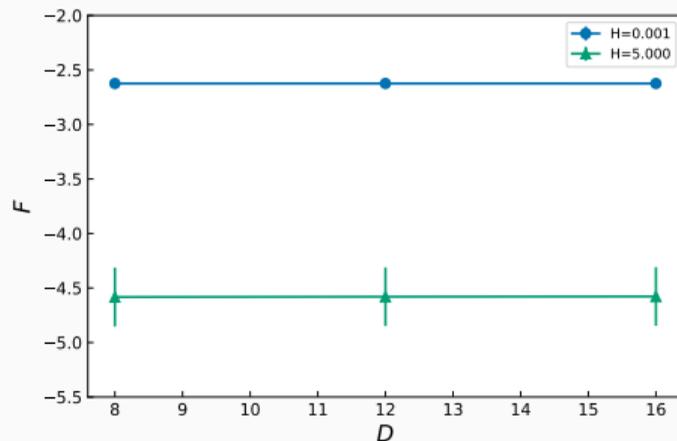
序論

テンソルネットワーク構成法

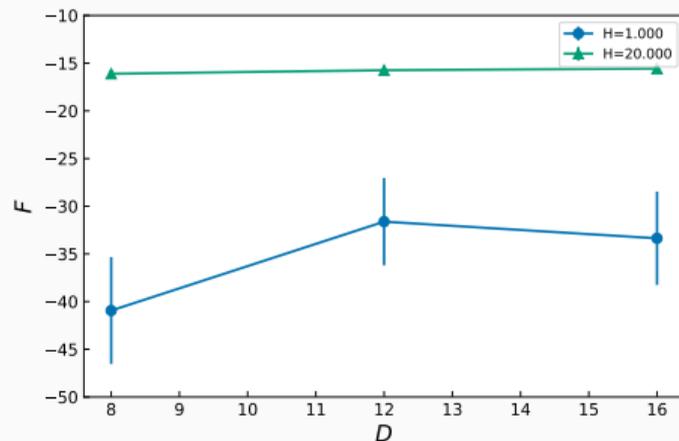
3次元 pure SU(2) ゲージ理論への適用結果

結論

D dependence (L=1024, K=12)



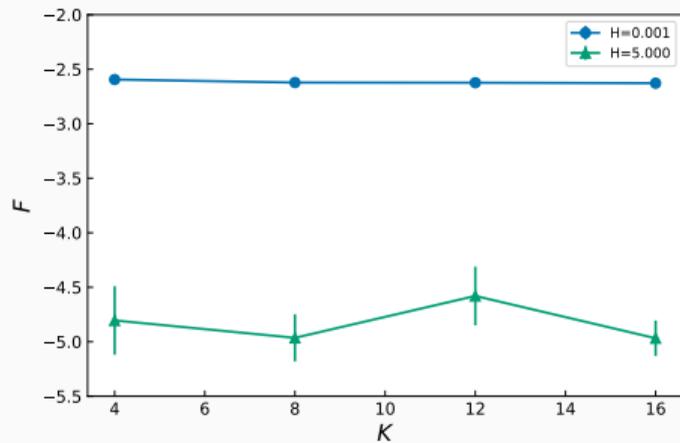
(a) $\beta = 1$



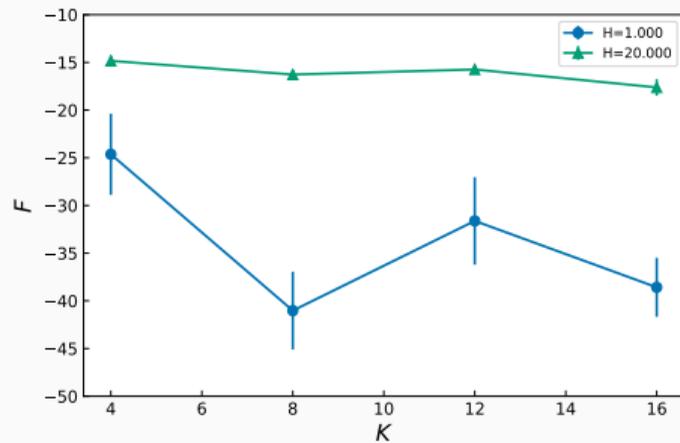
(b) $\beta = 50$

small β では small H が効率良し \Rightarrow 強結合領域では一様分布 [Fukuma et al., 2021] が有効
large β では large H が効率良し \Rightarrow 弱結合領域では試行作用を導入して変分パラメータを調整するのが有効

K dependence (L=1024, D=12)



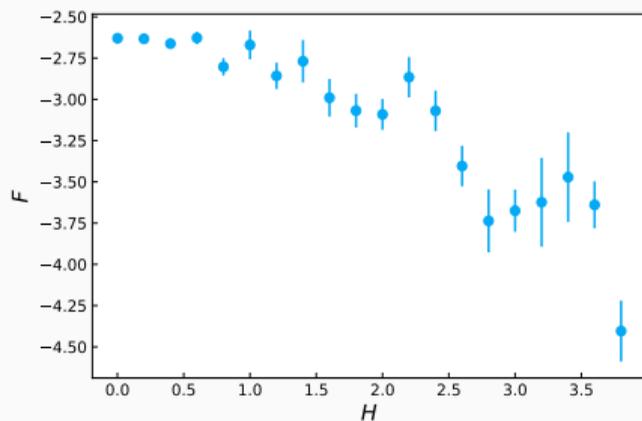
(a) $\beta = 1$



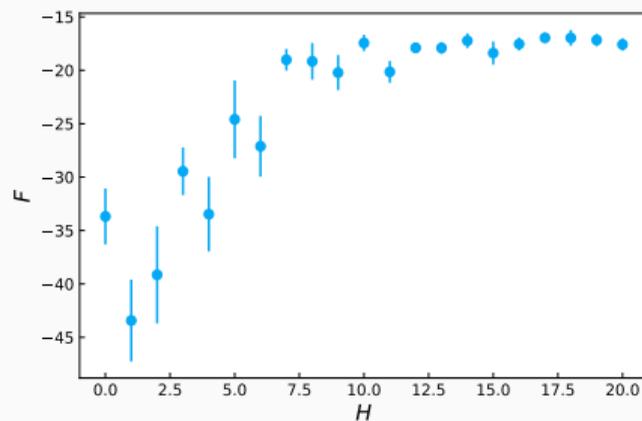
(b) $\beta = 50$

変分パラメータ H の最適化

本来分配関数は補助的に導入したパラメータ H に依存しないはず
→ プラトーから最適な H を読み取る

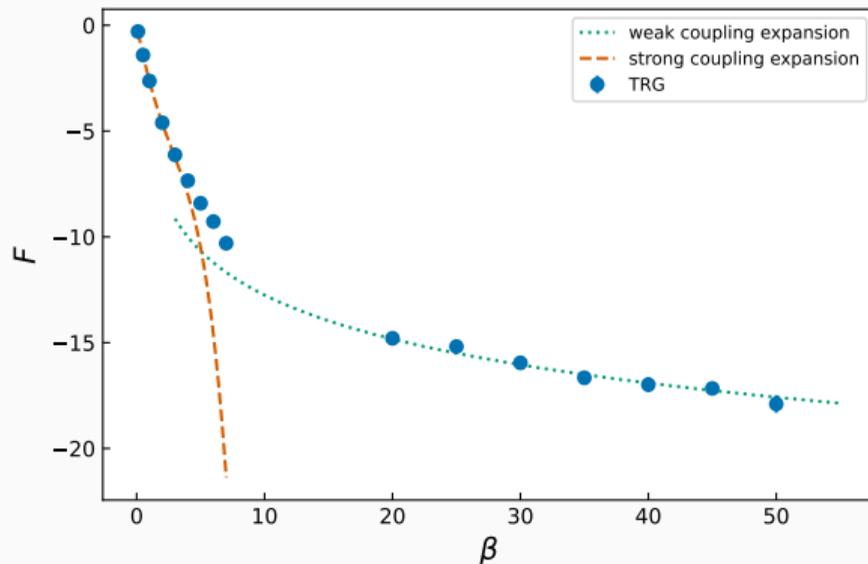


(a) $\beta = 1$



(b) $\beta = 50$

free energy



強結合展開 (small β) : $F(\beta) = -3\beta + \frac{3}{8}\beta^2 - \frac{3}{384}\beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6)$

弱結合展開 (large β) : $F(\beta) = -3 \log \beta + C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta}\right)$

⇒ 強結合展開、弱結合展開双方と整合

序論

テンソルネットワーク構成法

3次元 pure SU(2) ゲージ理論への適用結果

結論

まとめ

- 補助作用に重み付けされた場の配位を用いた、新たなテンソルネットワーク構成法を提案
- 3次元 $SU(2)$ ゲージ理論に適用し、弱/強結合展開と整合する結果を得た

展望

- large K の計算
- 補助作用の最適化
- 中間領域の計算
- $SU(2)$ の物理の探索
- θ term
- 4次元への拡張

-  Akiyama, S. and Kuramashi, Y. (2022).
Tensor renormalization group study of (3+1)-dimensional Z_2 gauge-Higgs model at finite density.
-  Akiyama, S., Kuramashi, Y., Yamashita, T., and Yoshimura, Y. (2021a).
Restoration of chiral symmetry in cold and dense Nambu–Jona-Lasinio model with tensor renormalization group.
JHEP, 01:121.
-  Akiyama, S., Kuramashi, Y., and Yoshimura, Y. (2021b).
Phase transition of four-dimensional lattice ϕ^4 theory with tensor renormalization group.
Phys. Rev. D, 104(3):034507.

-  Bazavov, A., Catterall, S., Jha, R. G., and Unmuth-Yockey, J. (2019).
Tensor renormalization group study of the non-Abelian Higgs model in two dimensions.
Phys. Rev. D, 99(11):114507.
-  Fukuma, M., Kadoh, D., and Matsumoto, N. (2021).
Tensor network approach to 2D Yang-Mills theories.
-  Fukushima, K. and Hatsuda, T. (2011).
The phase diagram of dense QCD.
Rept. Prog. Phys., 74:014001.

-  Hirasawa, M., Matsumoto, A., Nishimura, J., and Yosprakob, A. (2021).
Tensor renormalization group and the volume independence in 2D U(N) and SU(N) gauge theories.
JHEP, 12:011.
-  Kadoh, D., Kuramashi, Y., Nakamura, Y., Sakai, R., Takeda, S., and Yoshimura, Y. (2019).
Tensor network analysis of critical coupling in two dimensional ϕ^4 theory.
JHEP, 05:184.

-  Kuramashi, Y. and Yoshimura, Y. (2019).
Three-dimensional finite temperature Z_2 gauge theory with tensor network scheme.
JHEP, 08:023.
-  Kuramashi, Y. and Yoshimura, Y. (2020).
Tensor renormalization group study of two-dimensional $U(1)$ lattice gauge theory with a θ term.
JHEP, 04:089.
-  Kuwahara, T. and Tsuchiya, A. (2022).
Tensor renormalization group study of three-dimensional $su(2)$ gauge theory.

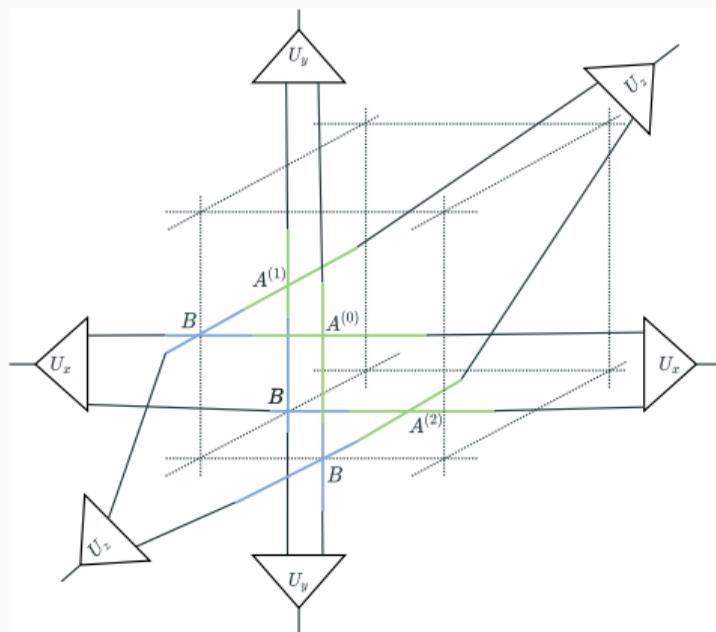
-  Levin, M. and Nave, C. P. (2007).
Tensor renormalization group approach to 2D classical lattice models.
Phys. Rev. Lett., 99(12):120601.
-  Xie, Z. Y., Chen, J., Qin, M. P., Zhu, J. W., Yang, L. P., and Xiang, T. (2012).
Coarse-graining renormalization by higher-order singular value decomposition.
Physical Review B, 86(4).

初期テンソル構成法

$$T = A^{(0)} \otimes A^{(1)} \otimes A^{(2)} \otimes B \otimes B \otimes B$$

exact に構成すると、 $O((K^2)^6)$ のメモリが必要

⇒ isometry の導入 [Xie et al., 2012] により、bond dimension を K^2 から D に落とす

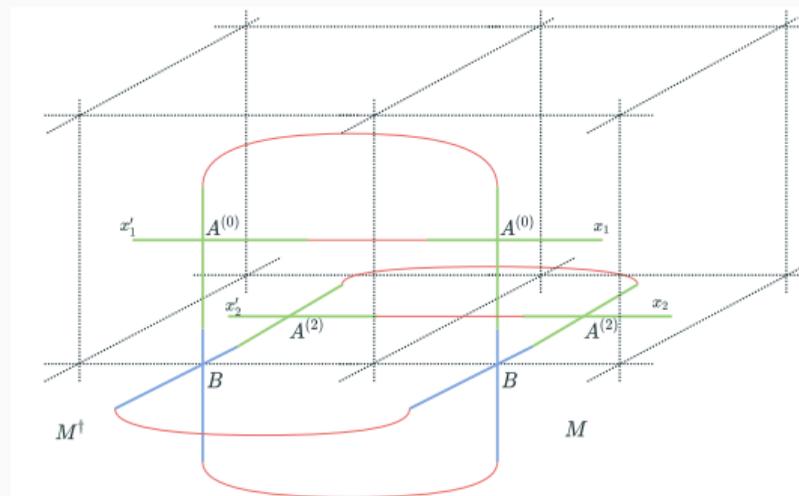


isometry の決定

x 方向の足 x_1, x_2 を行列 M の行とみなす

MM^\dagger の固有値分解から、 x 方向の isometry U_x を得る

$$MM^\dagger = U\Lambda(U)^\dagger$$



y, z 方向も同様にして得られる