

# Kazakov-Migdal模型と グラフゼータ関数

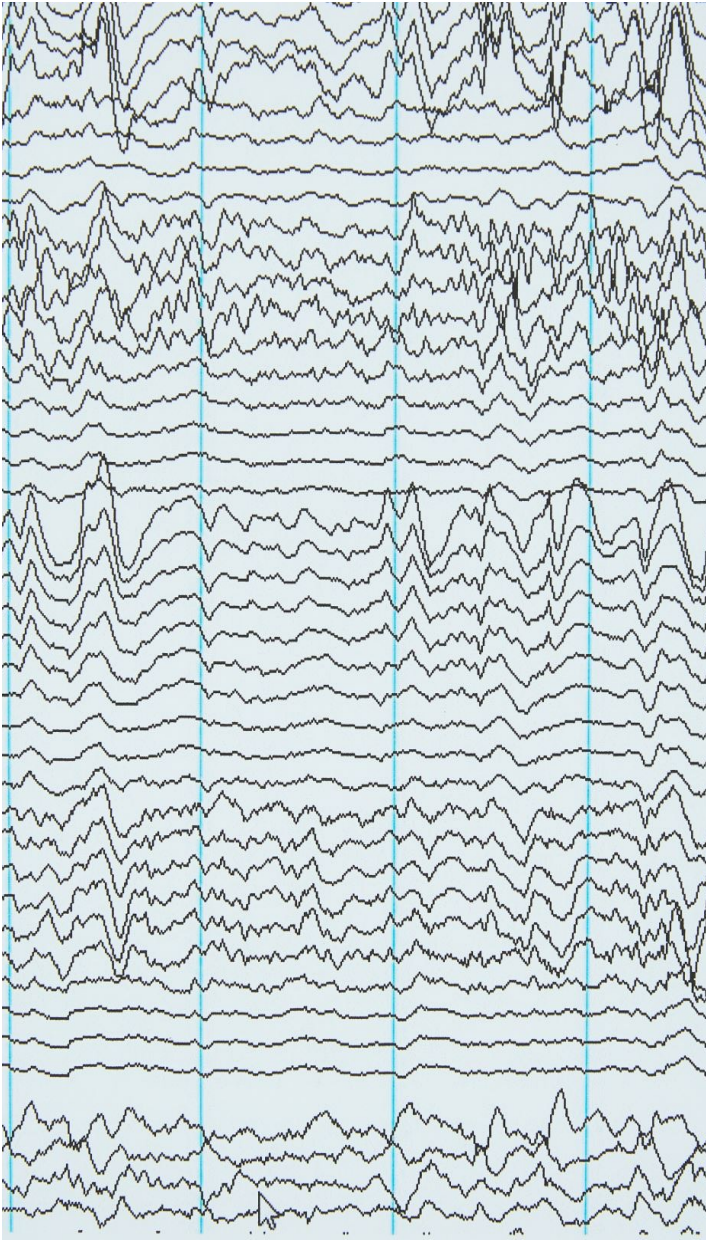
So Matsuura

(Department of Physics Hiyoshi, Keio University)

Based on work with K. Ohta

arXiv:2204.06424

arXiv:2208.\*\*\*\*\*



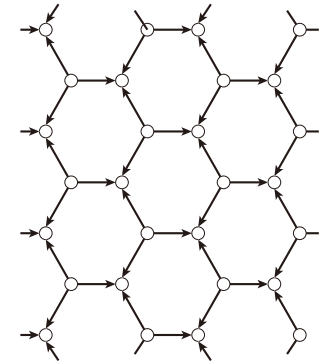
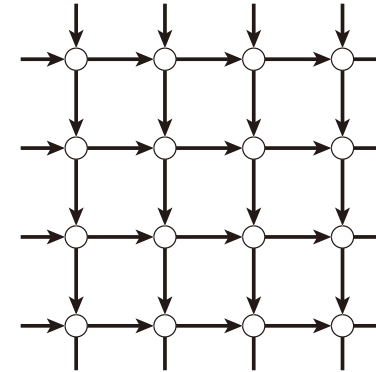
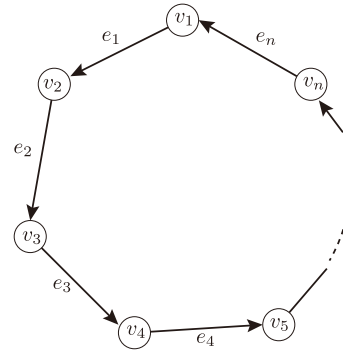
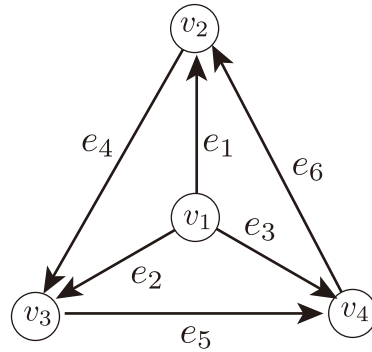
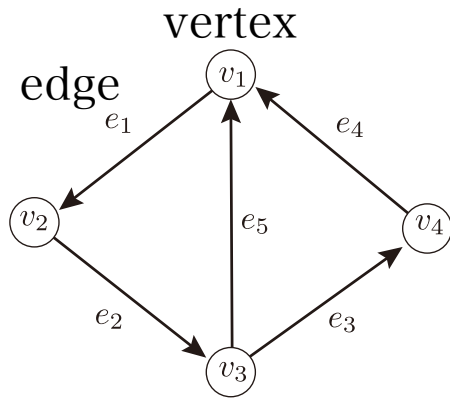
# Plan of the talk

---

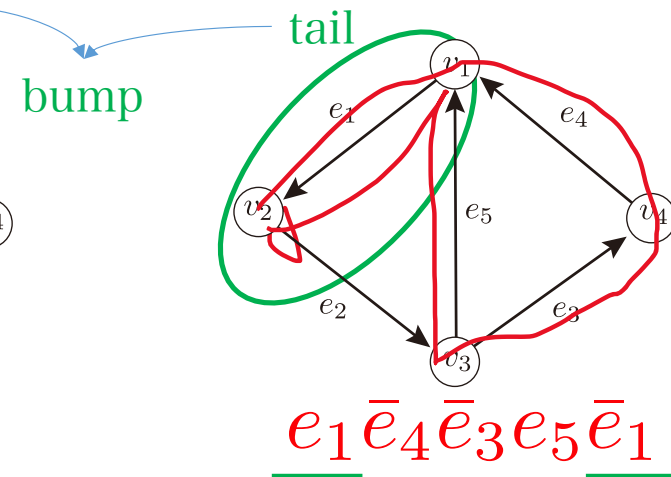
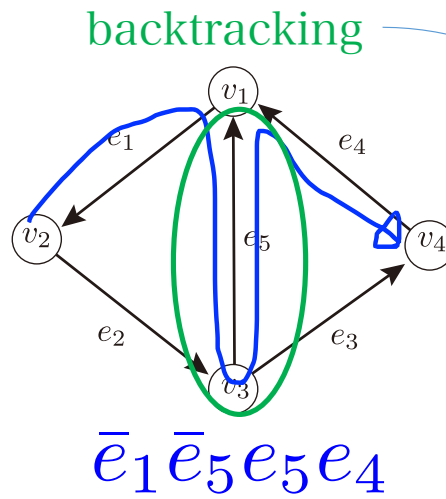
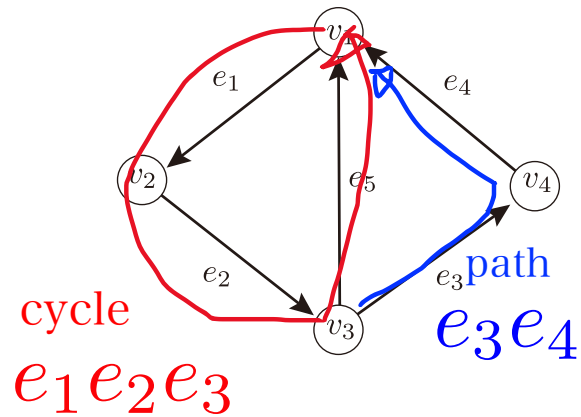
- グラフ上のゼータ関数
- グラフ上のKazakov-Migdal模型と双対性
- finite  $N$ での厳密評価とユニタリー行列積分
- large  $N$ における分配関数の厳密評価
- 結論と展望

# グラフとサイクル

cf) Misumi-san's talk  
Yumoto-san's talk



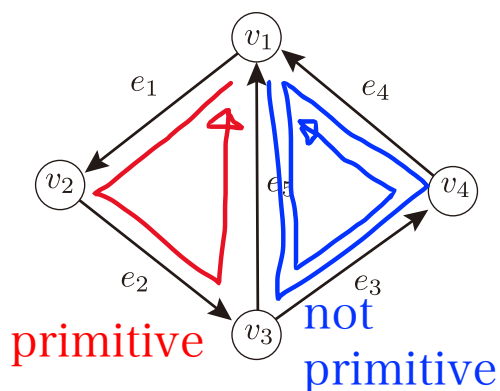
## 基本的な用語



# cycleの分類と伊原ゼータ関数

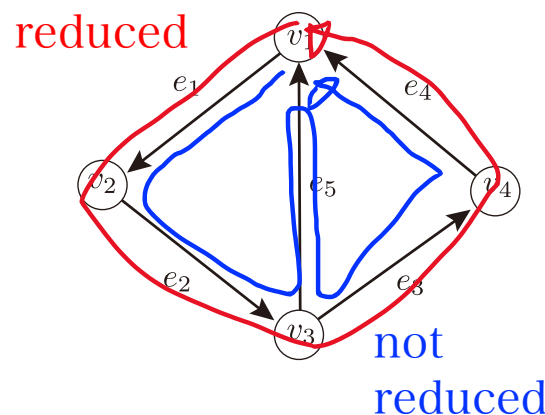
primitive cycle

$$C \neq B^n$$



reduced cycle

bumpを持たないcycle



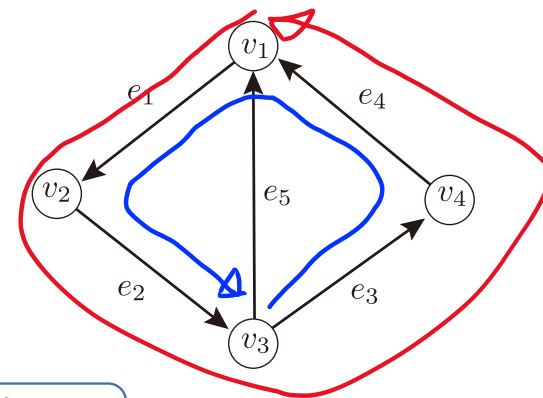
同値なcycle

$$C_1 \sim C_2$$

$$C_1 = e_1 \cdots e_l$$

$$C_2 = e'_1 \cdots e'_l$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } e'_i = e_{n+i} \text{ for } \forall i$$



伊原ゼータ関数

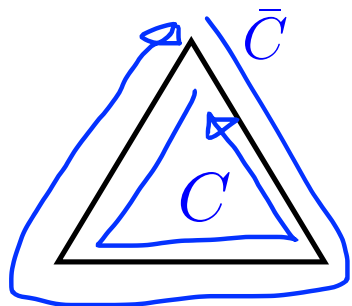
$$\zeta_G(q) \equiv \prod_{[C]: \text{primitive reduced}} \frac{1}{1 - q^{|C|}} = \sum_{n=1}^{\infty} N_n q^n$$

primitive reduced cycleの組み合わせ  
で作られる長さnのcycleの数

cf) リーマンゼータ関数

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

primitive cycleは  
Triangle ふたつ

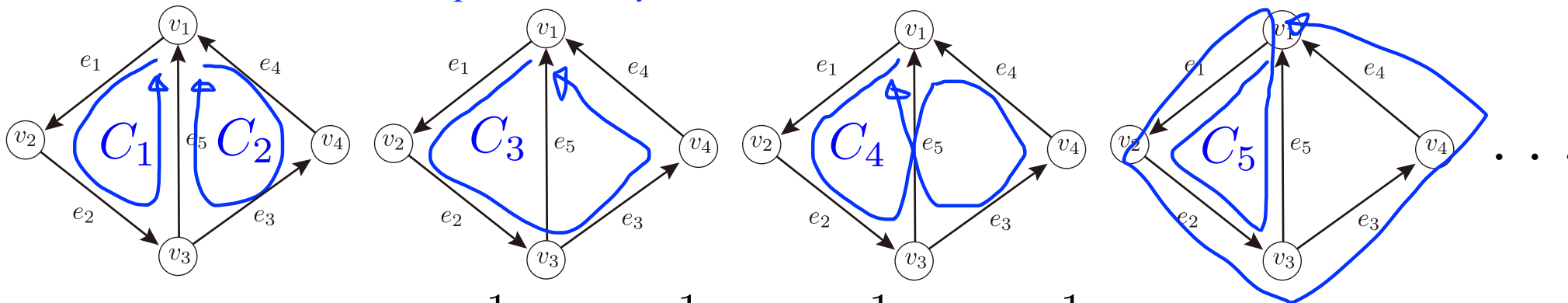


# 伊原ゼータ関数の例

$$\zeta_{C_3}(q) = \frac{1}{(1 - q^3)^2} = 1 + 2q^3 + 3q^6 + 4q^9 + 5q^{12} + \dots$$

|                       |              |                            |                                          |                                                        |     |
|-----------------------|--------------|----------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----|
| power of $q$ (length) | 3            | 6                          | 9                                        | 12                                                     | ... |
| coeff                 | 2            | 3                          | 4                                        | 5                                                      | ... |
| cycles                | $C, \bar{C}$ | $C^2, C\bar{C}, \bar{C}^2$ | $C^3, C^2\bar{C}, C\bar{C}^2, \bar{C}^3$ | $C^4, C^3\bar{C}, C^2\bar{C}^2, C\bar{C}^3, \bar{C}^4$ | ... |

Double Triangle 一般には、primitive cycleは無数にあるため、素朴には閉じた形に書けない



$$\zeta_{DT}(q) = \frac{1}{(1 - q^3)^4} \frac{1}{(1 - q^4)^2} \frac{1}{(1 - q^6)^2} \frac{1}{(1 - q^7)^4} \dots$$

# 伊原の定理

伊原ゼータ関数は多項式の逆数で書ける

Ihara 1966

$$\zeta_G(q) = \frac{1}{(1 - q^2)^{n_E - n_V} \det(I - qA + q^2(D - I))}$$

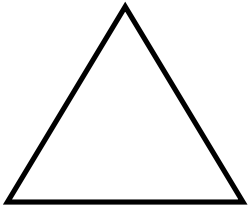
$n_V$ : number of vertices

$n_E$ : number of edges

$D$ : degree matrix

$A$ : adjacency matrix

## Triangle



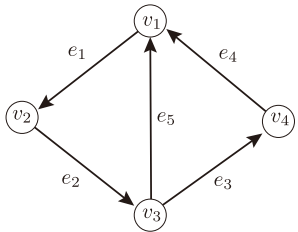
$$n_V = n_E = 3$$

$$D = \text{diag}(2, 2, 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{C_3}(q) &= \frac{1}{\det(I - qA + q^2(D - I))} \\ &= \frac{1}{(1 - q^3)^2} \end{aligned}$$

## Double Triangle



$$n_V = 4, n_E = 5$$

$$D = \text{diag}(3, 2, 3, 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{DT}}(q) &= \frac{1}{(1 - q^2) \det(I - qA + q^2(D - I))} \\ &= \frac{1}{(1 - q^4)(1 + q^2 - 2q^3)(1 - q^2 - 2q^3)} \\ &= 1 + 4q^3 + 2q^4 + 12q^6 + 12q^7 + 3q^8 + \dots \end{aligned}$$

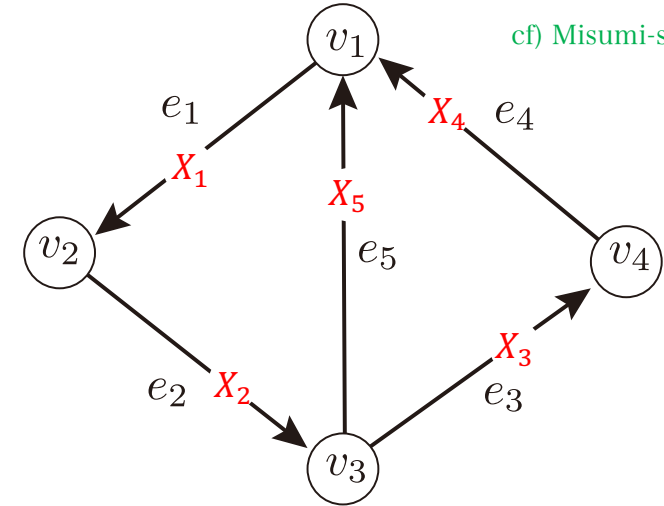
| length | 3                                | 4                | 6                                                                                                                | 7                                                                                                                                                | ... |
|--------|----------------------------------|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| coeff  | 4                                | 2                | 12                                                                                                               | 12                                                                                                                                               | ... |
| cycles | $C_1, \bar{C}_1, C_2, \bar{C}_2$ | $C_3, \bar{C}_3$ | $C_1^2, \bar{C}_1^2, C_2^2, \bar{C}_2^2, C_1\bar{C}_1, C_2\bar{C}_2, C_1C_2, \bar{C}_1\bar{C}_2, C_4, \bar{C}_4$ | $C_1C_3, \bar{C}_1\bar{C}_3, C_2C_3, \bar{C}_2\bar{C}_3, C_1\bar{C}_3, \bar{C}_1C_3, C_2\bar{C}_3, \bar{C}_2C_3, C_5, \bar{C}_5, C_6, \bar{C}_6$ | ... |

# Matrix weighted Ihara zeta function

Ohta-S.M. 2022  
cf) Misumi-san's talk

- それぞれの辺 $e$ に行列 $X_e$  (サイズ $K$ ) を配置する
- $X_{e^{-1}} = X_e^{-1}$  とする
- $C = e_{i_1} \cdots e_{i_n}$  に対し  $X_C \equiv X_{e_{i_1}} \cdots X_{e_{i_n}}$
- matrix weighted adjacency matrix

$$A(X)_{vv'} = \begin{cases} X_e & \langle v, v' \rangle = e \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$



## 行列重み伊原ゼータ関数

$$\zeta_G(q; X) \equiv \prod_{[C]: \text{primitive reduced}} \det(\mathbf{1}_K - q^{|C|} X_C)^{-1}$$

通常伊原ゼータ関数と同じ行列式表示を持つ

$$= (1 - q^2)^{-K(n_E - n_V)} \det(\mathbf{1}_{Kv_N} - qA_X + q^2(D - \mathbf{1}_{Kv_N}))$$

# グラフ上のKazakov-Migdal模型と伊原表示

Kazakov-Migdal model (on the D-dimensional square lattice)

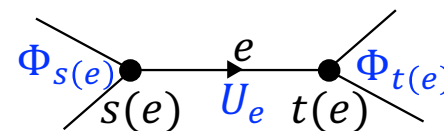
Kazakov-Migdal 1993

$$S_{\text{KM}} = \sum_x \text{Tr} \left( m_0^2 \Phi^2(x) - \sum_{\mu=1}^D \Phi(x) U_\mu(x) \Phi(x + \mu) U_\mu^\dagger(x) \right),$$

Graph Kazakov-Migdal model (on a general graph)

Ohta-S.M. 2022

$$S_{\text{gKM}} = \text{Tr} \left( \sum_{v \in V} \frac{1}{2} m_v^2 \Phi_v^2 - q \sum_{e \in E} \Phi_{s(e)} U_e \Phi_{t(e)} U_e^\dagger \right),$$



$$Z_{\text{gKM}} = \int \prod_{v \in V} d\Phi_v \prod_{e \in E} dU_e e^{-\beta S_{\text{gKM}}} = \int \prod_{v \in V} d\Phi_v \prod_{e \in E} dU_e e^{-\frac{\beta}{2} \Phi_v (m_v^2 \delta_{vv'} - q A(U)_{vv'}) \Phi_{v'}}$$

(※ 一般のパラメータではBartholdiゼータ関数になる)

$$A(U)_{vv'} = \begin{cases} U_e \otimes U_e^\dagger & \langle v, v' \rangle = e \\ 0 & \text{others} \end{cases} : \text{matrix weighted adjacency matrix}$$

このパラメータ調整で  
gKM模型の分配関数は  
伊原ゼータ関数で表せる

$$m_v^2 \equiv 1 + (\deg v - 1)q^2 \quad \longrightarrow$$

$$Z_{\text{gKM}} = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N^2}{2} n_V} \int \prod_{e \in E} dU_e \det (1 - q A_U + q^2 (D - 1))^{-\frac{1}{2}} \propto \int \prod_{e \in E} dU_e \zeta_G(q; U)^{\frac{1}{2}}$$

# Itzykson-Zuber 表示

$\Phi$ 積分ではなく、 $U$ 積分を先に実行する

HCIZ integration formula

$$\int dU e^{t \text{Tr} AUBU^\dagger} = \frac{G(N+1)}{t^{\frac{N^2-N}{2}}} \frac{\det_{i,j}(e^{ta_i b_j})}{\Delta(a)\Delta(b)} \quad \left( G(N+1) \equiv \prod_{n=1}^{N-1} n! \right)$$

$$Z_{\text{gKM}} = \mathcal{N} \int \prod_{v \in V} \prod_{i=1}^N d\phi_{v,i} \prod_{v' \in V} \Delta(\phi_{v'})^{2-\deg v'} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{n_E} \in S_N} \text{sgn}(\sigma_1 \cdots \sigma_{n_E}) e^{-\frac{1}{2} \phi_{v,i} (D_\sigma)_{vi;v'j} \phi_{v',j}},$$

observation

ユニタリー拡張した伊原ゼータ関数と被覆グラフの関連が示唆される

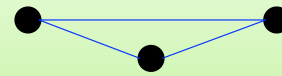
$$\left( \mathcal{N} \equiv \frac{G(N+1)^{n_E-n_V}}{(N!)^{n_V}} \frac{(2\pi)^{\frac{N(N-1)}{2}n_V}}{\beta^{\frac{N^2}{2}n_V} q^{\frac{N(N-1)}{2}n_E}} \right)$$

$$(D_\sigma)_{vi;v'j} \equiv \left( 1 + q^2(\deg v - 1) \right) \delta_{vv'} \delta_{ij} - q A_{vv'} \left( \delta_{i, \sigma_{\langle vv' \rangle}^{-1}(j)} + \delta_{j, \sigma_{\langle vv' \rangle}(i)} \right),$$



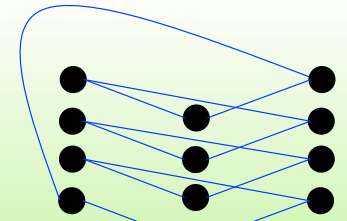
$$\zeta_{G_\sigma}(q) = (1 - q^2)^{N(n_E - n_V)} (\det D_\sigma)^{-1}$$

被覆グラフの伊原ゼータ関数



$G$

被覆グラフの例



$G_\sigma$

$\sigma = (2, 3, 4, 1) \in S_4$

# サイクルグラフのfinite Nでの厳密評価

$$Z_{\text{gKM}}^{C_n} = \mathcal{N} \int \prod_{v=1}^n \prod_{i=1}^N d\phi_{v,i} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) e^{-\frac{1}{2} \phi_{v,i} (D_\sigma)_{vi;v'j} \phi_{v',j}}$$

$$= \frac{1}{N!} \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N^2}{2}n} \frac{(-1)^N}{q^{\frac{N(N-1)}{2}n}} \sum_{\lambda \vdash N} \prod_{i=1}^r \frac{N!}{z_\lambda} \left( \frac{1}{q^{nl_i} - 1} \right)^{m_i}$$

$$= \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N^2}{2}n} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - q^{nk}} = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N^2}{2}n} \prod_{k=1}^N \zeta_{C_n}(q^k)^{\frac{1}{2}}$$

伊原ゼータ関数の積

伊原表示との比較 ( $n = 1$ )

$$Z_{gKM}^{C_1} = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N^2}{2}} \int dU e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \text{Tr } U^k \text{Tr } U^{\dagger k}} = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N^2}{2}} \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - q^i},$$



(おそらく) これまで知られていなかった積分公式

$$\int dU e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \text{Tr } U^k \text{Tr } U^{\dagger k}} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - q^i}$$

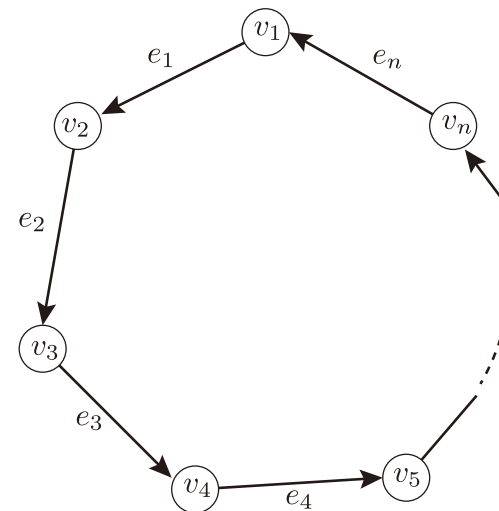
$$\lambda = (l_1^{m_1} \dots l_r^{m_r})$$

$$z_\lambda \equiv \prod_{i=1}^r m_i! l_i^{m_i}$$

$(6^1 4^3 2^2 1^1)$

formula

$$\sum_{\lambda \vdash N} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^r \frac{1}{q^{\lambda_i} - 1} = q^{N(N-1)/2} \prod_{i=1}^N \frac{1}{q^i - 1}$$



# large Nでは任意のグラフで分配関数が決まる

## large N decomposition

1) 異なるprimitive cycleに対して

$$\left\langle |\text{Tr } P_{C_1}(U) \text{Tr } P_{C_2}(U)|^2 \right\rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \left\langle |\text{Tr } P_{C_1}(U)|^2 \right\rangle \left\langle |\text{Tr } P_{C_2}(U)|^2 \right\rangle.$$

2) primitive cycleのWilson loopの積に対して

$$\left\langle |\text{Tr } P_C(U)|^{2m} \right\rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} l^m m!,$$

## notation

$$|\text{Tr } f(U)|^2 \equiv \text{Tr } f(U) \text{Tr } f(U)^\dagger$$

$$\langle g(U) \rangle \equiv \int \prod_{e \in E} dU_e g(U)$$

$P_C(U)$ :  $C$ に沿ったWilson loop

$$\begin{aligned} Z_G(q) &= \int \prod_{e \in E} dU_e e^{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \sum_{C \in R_n} |\text{Tr } P_C(U)|^2} \\ &= \left\langle \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{C \in \Pi_k^+} \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{km}}{m} |\text{Tr } P_C(U)|^{2m} \right) \right\rangle \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{C \in \Pi_k^+} \left\langle \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{km}}{m} |\text{Tr } P_C(U)|^{2m} \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\langle \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{km}}{m} |\text{Tr } P_C(U)|^{2m} \right) \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{kn} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \left\langle |(\text{Tr } P_C(U)^{l_1})^{m_1} \cdots (\text{Tr } P_C(U)^{l_r})^{m_r}|^2 \right\rangle \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} q^{kn} p(n) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{ik}}, \quad (\text{分割数の母関数}) \end{aligned}$$

分割の数

$$Z_G \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{ik})^{\ell_k}} = \prod_{i=1}^{\infty} \zeta_G(q^i)^{\frac{1}{2}}.$$

large Nでは、gKM模型の分配関数は伊原ゼータ関数の無限積で書ける

# 結論

- Kazakov-Migdal模型を任意のグラフ上に一般化した (gKM model)
- 行列重み付き伊原ゼータ関数が定義された
- gKM模型の分配関数がユニタリ一行列で重み付けされた伊原ゼータ関数の積分で表されることを示した
- HCIZ積分公式を通じて得られた双対表示 (IZ表示) から、被覆グラフの伊原ゼータ関数との関連が示唆された
- サイクルグラフのgKM模型の双対性を用いて、新しいユニタリ一行列積分を導いた
- large  $N$ において、任意のグラフ上のgKM模型の分配関数が伊原ゼータ関数の無限積で表されることを示した

# 展望

- gKM模型のパラメータを一般化すると、伊原ゼータ関数ではなく、Bartholdiゼータ関数が生じる（論文を準備中）
- 元々、KM模型は任意次元のQCDをinduceする可能性のある模型として作られた。large  $N$ での分配関数から新しい示唆が得られる可能性がある。
- オリジナルのKM模型では、large  $N$ におけるスカラー場の固有値分布の厳密解が知られている。その解との対応関係をはっきりさせたい。
- large  $N$ で相転移があるだろうか？
- 行列で重み付けされたグラフゼータ関数は数学でもまだ未開拓の分野。新しい知見が得られる可能性がある。特に、L関数とは親和性が高いと思われる。
- セルバーグゼータ関数、スペクトルゼータ関数とは必ず何かしらの関係があると思われる。
- ランダム行列理論、数論、ユニタリー行列積分の間の橋渡しになる？