

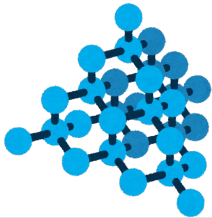
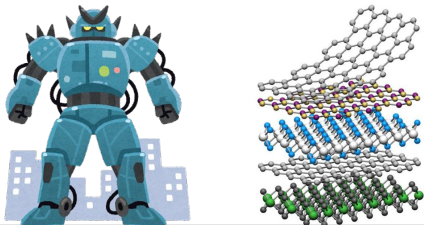
拡張されたHarper模型に対する 非可換トーラスからのアプローチ

格子上の場の理論と連続空間上の場の理論

目次

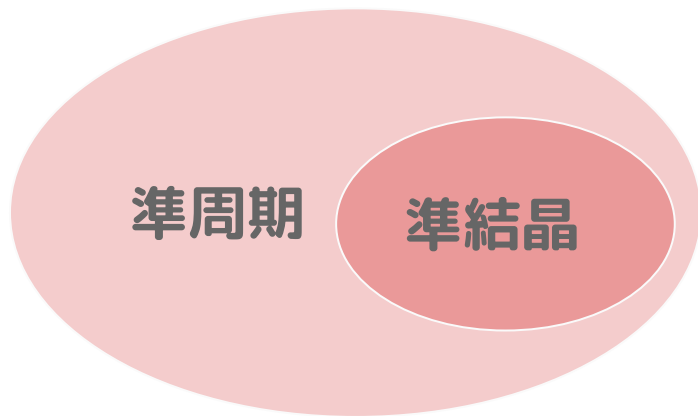
- 導入
 - 準周期系
 - 薄膜積層系
- 薄膜積層系の有効模型
- 薄膜積層系のGap labelling定理

空間構造の大まかな分類

	周期系	準周期系	乱雑系
長距離秩序	◎	○	×
波	広がる	?	局在
物質系	結晶 	合金・薄膜積層系… 	ガラス 

準周期系の物理とは？

周期系とランダム系の間状態



準周期系

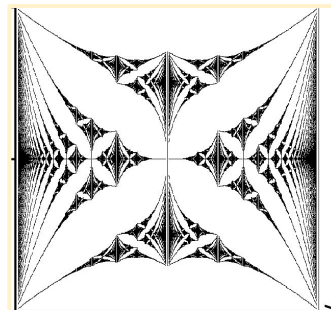
周期性はないが長距離秩序はある系
厳密な定義はない

20世紀まで

格子と外場の非整合系など

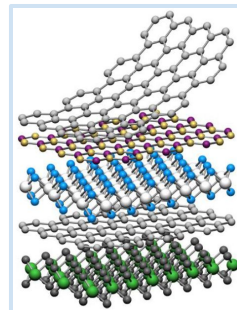
21世紀から

薄膜積層系



Harper
(2014)

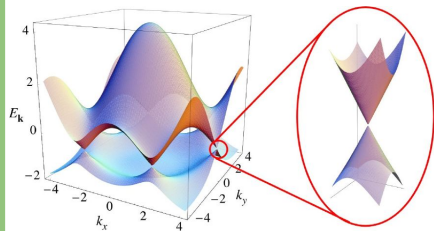
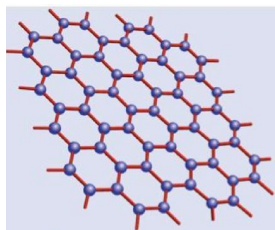
Geim(2013)



2次元薄膜の種類

今世紀に入ってから多彩な性質を持つ2次元薄膜が作成されている

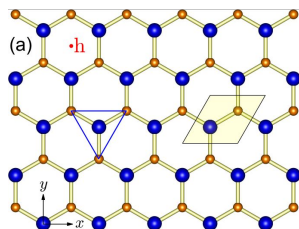
グラフェン



Castero (2009)

TMD

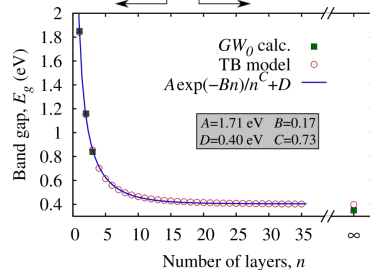
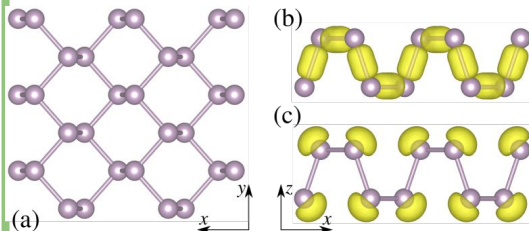
(遷移金属ダイカルコゲナイド)



**Breaks
Inversion
Symmetry**

Liu (2015)

黒リン

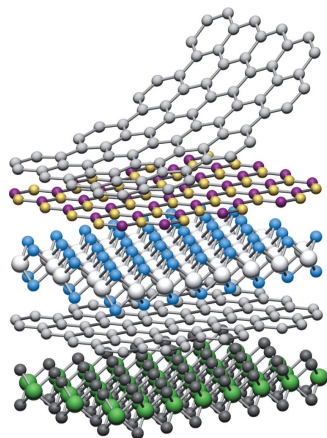


Rudenko (2014)

2次元薄膜系の構造制御

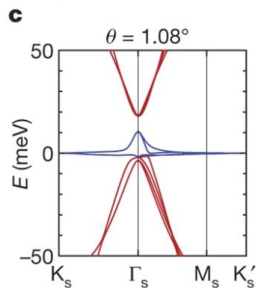
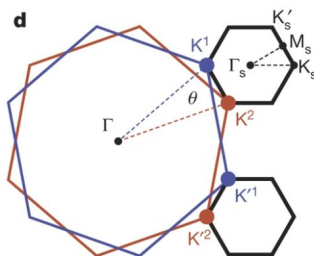
2次元薄膜は構造を制御することで物性を変化させることが可能

積層



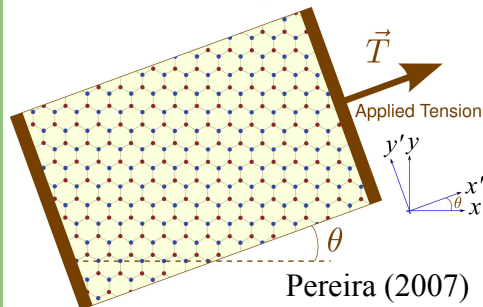
Geim (2013)

積層配置

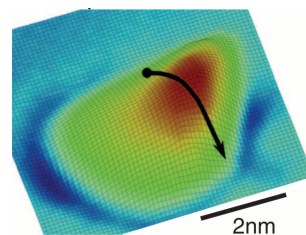


Cao (2013)

変形



Pereira (2007)



Levy (2010)

薄膜系の魅力

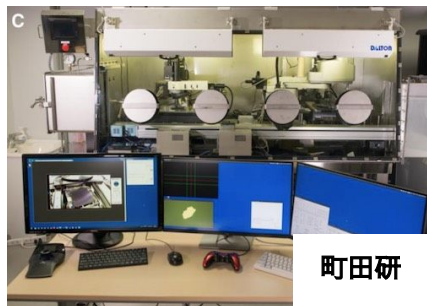
多彩な薄膜系

×

弱い層間結合 薄膜を自由に積める

||

合金などでは作成できない新たな物性系
新たな量子シミュレータとしても期待大

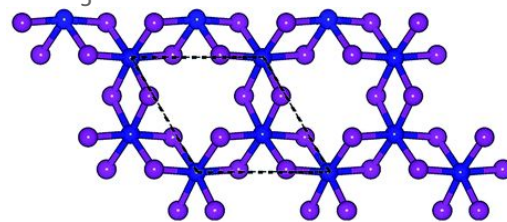


町田研

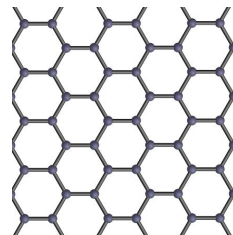


Moiré heterostructures as a condensed-matter quantum simulator

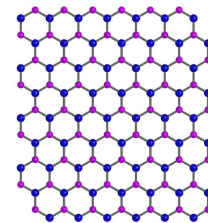
CrI_3 (面直磁化)



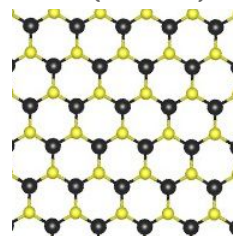
Graphene(Dirac cone)



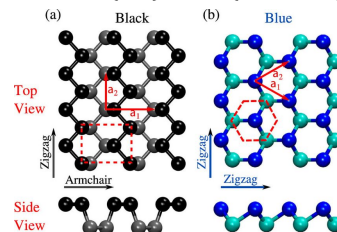
hBN(絶縁体)



TMD(超伝導)



黒(青)燐 (半導体)



準周期系の物理へのアプローチ法

実空間から

利点

実空間での従来の手法が適用可能

欠点

高い計算コスト、高度な数学

バルクの物理と相性が悪い

波数空間から

利点

低い計算コスト

欠点

Brillouin zoneの定義が出来ない

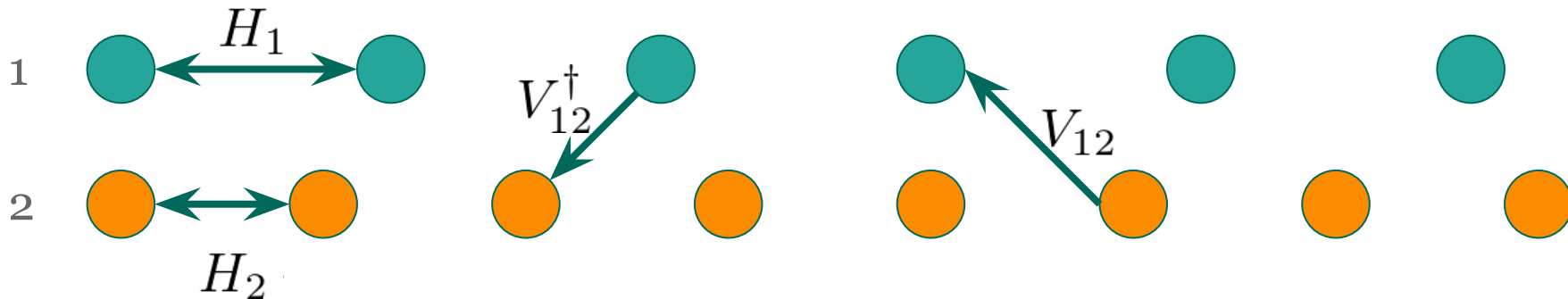
薄膜積層系の有効模型

薄膜 2 層積層系の模型

通常、薄膜積層系では以下のような模型を考える

$$\tilde{H}_{bi} = H_1 + H_2 + V_{12} + V_{12}^\dagger$$

H_i : 層 i の単層模型, V_{12} : 層2から層1へ遷移する項(薄膜間結合)



以上のハミルトニアンをそのまま扱うのは困難



有効模型を作成する

有効模型の作成

有効模型の作り方の1つとしてBrillouin-Wignerの摂動論がある

$$E \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & V_{12} \\ V_{12}^\dagger & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix}$$



有効potential

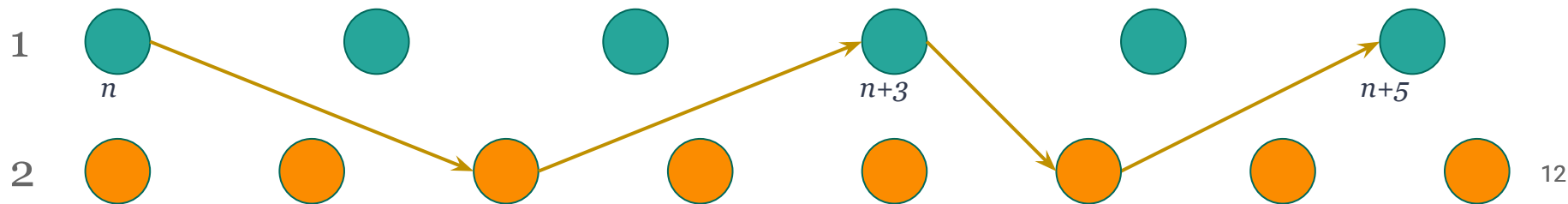
$$E \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 + \boxed{V_{12} \frac{1}{E - H_2} V_{12}^\dagger} & 0 \\ 0 & H_2 + \boxed{V_{12}^\dagger \frac{1}{E - H_1} V_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix}$$

有効模型の作成

$$E \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 + V_{12} \frac{1}{E - H_2} V_{12}^\dagger & 0 \\ 0 & H_2 + V_{12}^\dagger \frac{1}{E - H_1} V_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix}$$

👉 薄膜間結合が単層薄膜内のホッピング（有効ポテンシャル）になった

$$V_1 = V_{12} \frac{1}{E - H_2} V_{12}^\dagger, \quad V_2 = V_{12}^\dagger \frac{1}{E - H_1} V_{12}$$

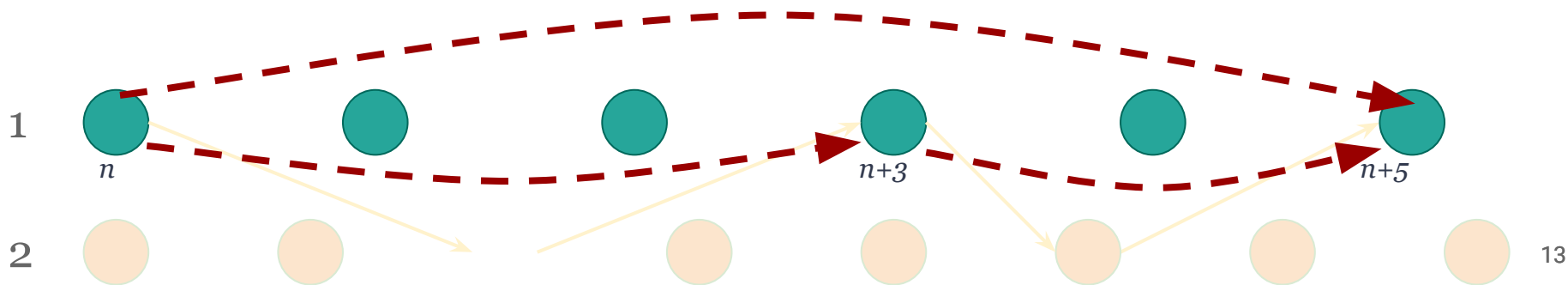


有効模型の作成

$$E \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 + V_{12} \frac{1}{E - H_2} V_{12}^\dagger & 0 \\ 0 & H_2 + V_{12}^\dagger \frac{1}{E - H_1} V_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix}$$

👉 薄膜間結合が単層薄膜内のホッピング（有効ポテンシャル）になった

$$V_1 = V_{12} \frac{1}{E - H_2} V_{12}^\dagger, \quad V_2 = V_{12}^\dagger \frac{1}{E - H_1} V_{12}$$

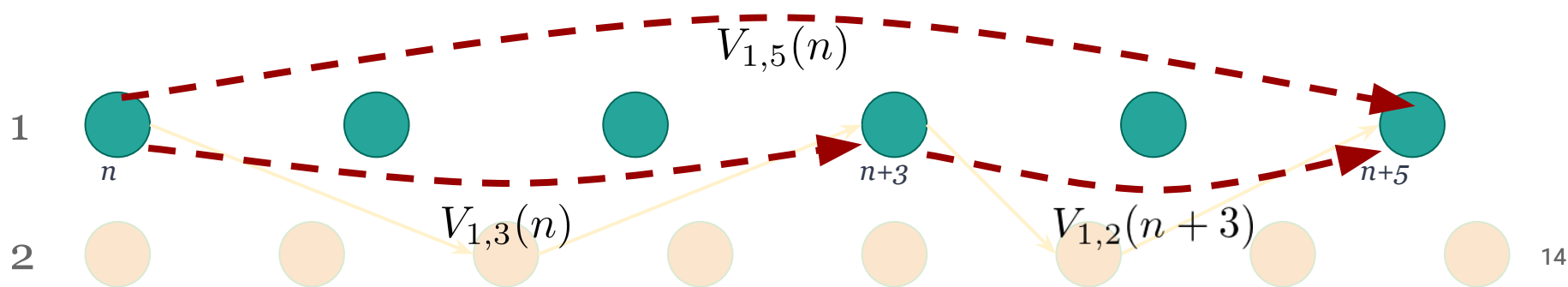


有効ポテンシャルの具体形

V_1, V_2 を格子の基底で展開してみると、

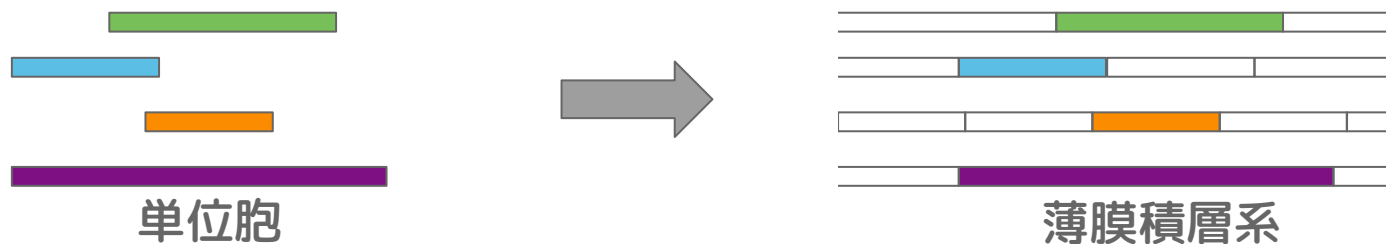
$$V_i = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_{i,m}(n) |m+n\rangle \langle n|$$

となり、 $V_{i,m}$ の値は n さえ指定すれば決まる。



薄膜積層系のパラメーター空間

薄膜積層系の構造は単位胞の配置を指定すれば決まる

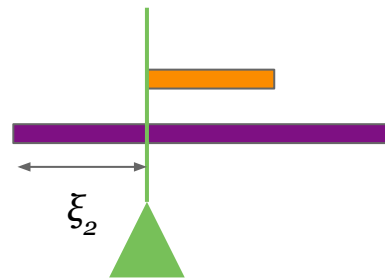


薄膜積層系上の位置は各層の単位胞上の座標で指定出来る

2 層系のTight-binding模型

層 1 の電子 : 層 2 の単位胞上の座標で指定出来る

層 2 の電子 : 層 1 の単位胞上の座標で指定出来る



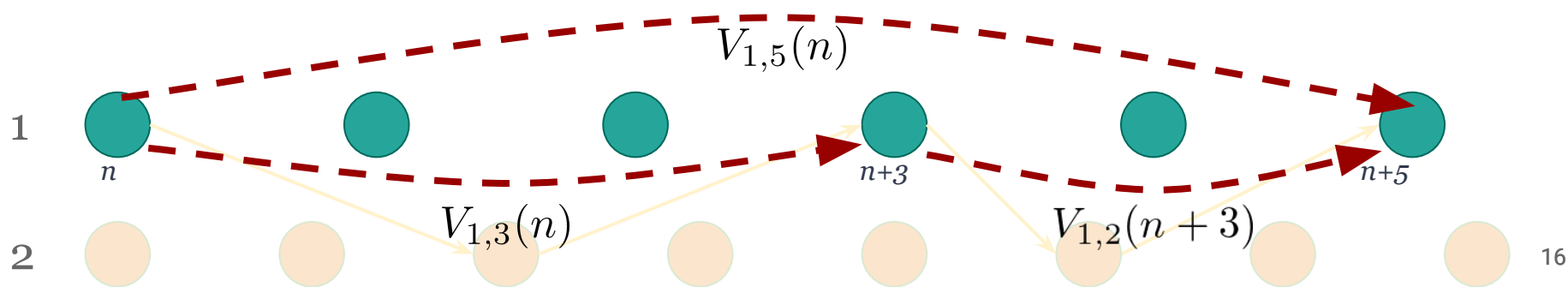
有効ポテンシャルの周期性

格子 n の座標を対応する単位胞での 座標 $\varphi_i(n)$ で書くと

$$V_i = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{i,m}(\varphi_i(n)) |n+m\rangle \langle n| \quad (\varphi_1(n) = n\theta_1 \bmod \theta_2)$$

のように定義しなおす事が可能

👉 $V_{i,m}$ は層 i でない方の層の周期に依存する周期関数



有効ポテンシャルの代数

$V_{i,m}$ の周期性を利用して V_i をFourier展開する事が可能

実際、 $i = 1$ とすると、

$$V_{1,m}(\varphi_1(n)) = \sum_q v_{1,m,q} e^{2\pi i q \frac{n\theta_1}{\theta_2}}$$

のように展開出来、

$$V_1 = \sum_m S_1^m \sum_q v_{1,m,q} U_1^q$$

$$U_1 = \sum_n e^{2\pi i \frac{n\theta_1}{\theta_2}} |n\rangle \langle n|, \quad S_1 = \sum_n |n+1\rangle \langle n|$$



$V_1 = S_1$ と U_1 の多項式

有効ポテンシャルの代数

単層のハミルトニアン¹の運動項は S を使えば

$$H_1 = \sum_n t |n+1\rangle \langle n| + h.c. = tS_1 + h.c.$$

と書く事が出来るので、

$$H_1 + V_{12} \frac{1}{E - H_2} V_{12}^\dagger = tS_1 + \bar{t}S_1^\dagger + \sum_m S_1^m \sum_q v_{1,m,q} U_1^q$$

👉 ハミルトニアンも S_1 と U_1 の多項式であり、

$$U_1 S_1 = e^{2\pi i \frac{\theta_1}{\theta_2}} S_1 U_1$$

有効模型ポテンシャルの代数

単層のハミルトニアン¹の運動項は S を使えば

$$H_1 = \sum_n t |n+1\rangle \langle n| + h.c. = tS_1 + h.c.$$

と書く事が出来るので、

$$H_1 + V_{12} \frac{1}{E - H_2} V_{12}^\dagger = tS_1 + \bar{t}S_1^\dagger + \sum_m S_1^m \sum_q v_{1,m,q} U_1^q$$

👉 ハミルトニアンも S_1 と U_1 の多項式であり、

$$U_1 S_1 = e^{2\pi i \frac{\theta_1}{\theta_2}} S_1 U_1$$

非可換トーラス

(パラメータ θ_1 / θ_2)

薄膜積層系の有効模型

ハミルトニアンの変換は

2層系のハミルトニアン

$$H_1 + H_2 + V_{12} + V_{12}^\dagger$$

有効模型

$$H_1 + V_{12} \frac{1}{E - H_2} V_{12}^\dagger$$

拡張されたHarper模型

非可換トーラス

$$U_1 S_1 = e^{2\pi i \frac{\theta_1}{\theta_2}} S_1 U_1$$

非可換トーラスのパラメーターは

1次元 : 格子定数 / 格子定数

2次元 : 単位胞の大きさの比

薄膜を変形させる事で異なる非可換トーラス間を移り変わる事が可能

薄膜積層系の有効模型

各層の非可換トーラスの関係

$$\text{層1 : } U_1 S_1 = e^{2\pi i \frac{\theta_1}{\theta_2}} S_1 U_1$$

$$\text{層2 : } U_2 S_2 = e^{2\pi i \frac{\theta_2}{\theta_1}} S_2 U_2$$

層1と層2の非可換トーラスのパラメーターの関係は

1次元 $\Rightarrow$ 逆数の関係, 2次元 $\Rightarrow$ Modular変換で移り変わる

$\Rightarrow$ 互いに森田同値

- 異なる層の S, U は可換 ($[U_1, U_2] = 0, [S_1, S_2] = 0, [U_1, S_2] = 0, [S_1, U_2] = 0$)
- 2つの非可換トーラスはトポロジカルな性質が同じ

薄膜積層系の Gap labelling定理

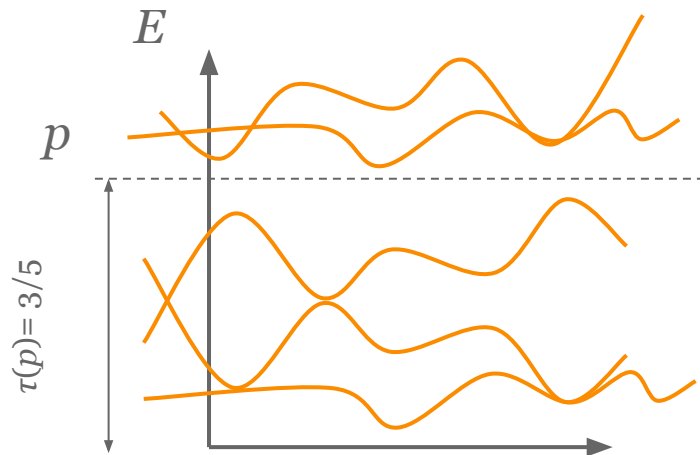
非可換トーラスの性質

非可換トーラス (パラメーター θ) では

射影演算子 ($p^2 = p, p^\dagger = p$) とトレース ($\tau(1) = 1, \tau(AB) = \tau(BA) \in \mathbb{R}$) を定義すると

$$\tau(p) = n_0 + \theta n_1 \quad (n_0, n_1 \in \mathbb{Z})$$

あるギャップ以下に詰まっている
状態数(Integrated density of states)
が θ と2つの整数で表される



薄膜積層系のGap labelling定理

薄膜積層系のハミルトニアンにも同様の性質がみつき、

薄膜2層系の射影演算子 (p) に対し、

$$\tau(p) \in \frac{\theta_1 n_1 + \theta_2 n_2}{\theta_1 + \theta_2} \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z})$$

N層系では

$$\tau(p) \in \frac{\sum_{i=1}^N \theta_i n_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$



準周期性に起因するエネルギーギャップを

N個の整数係数でラベルでラベル出来る

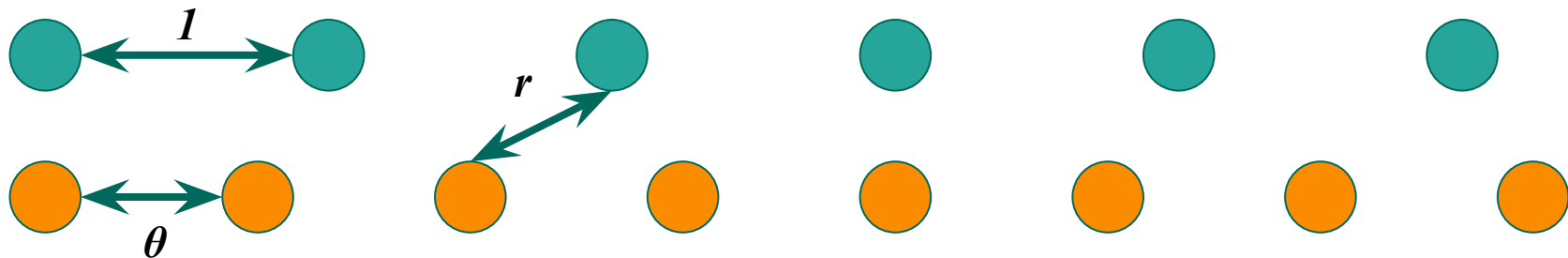
数値計算(2層系)

最近接ホッピングのみの1次元薄膜2層系 (格子定数は l と θ)

薄膜間の結合強度は e^{-r} (r : 距離)

$$H = t_1 \sum_{\langle i_1, j_1 \rangle} c_{i_1}^\dagger c_{j_1} + t_2 \sum_{\langle i_2, j_2 \rangle} c_{i_2}^\dagger c_{j_2} + e^{-r_{i_1 i_2}} \sum_{i_1, i_2} (c_{i_1}^\dagger c_{i_2} + c.c.)$$

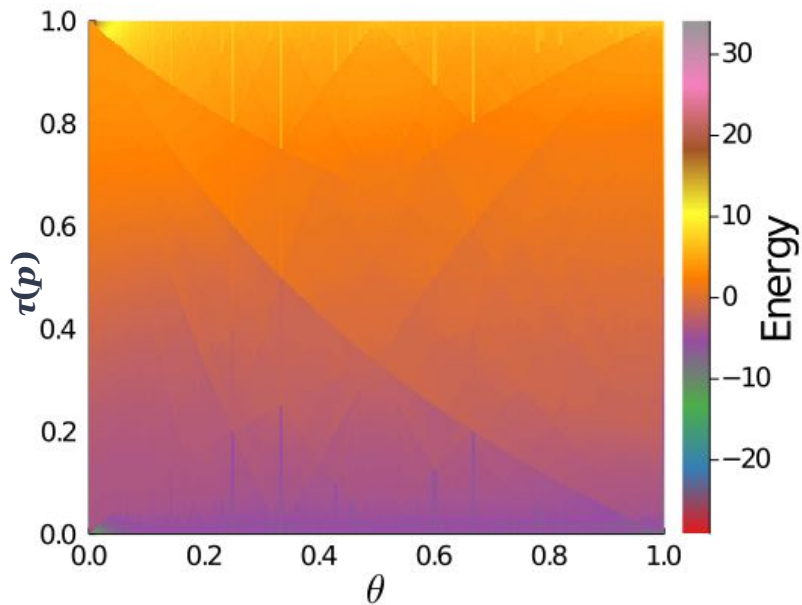
i_a : 薄膜 a のサイト i , $\langle \rangle$: 最近接の対, r_{ij} : サイト i と j の間の距離



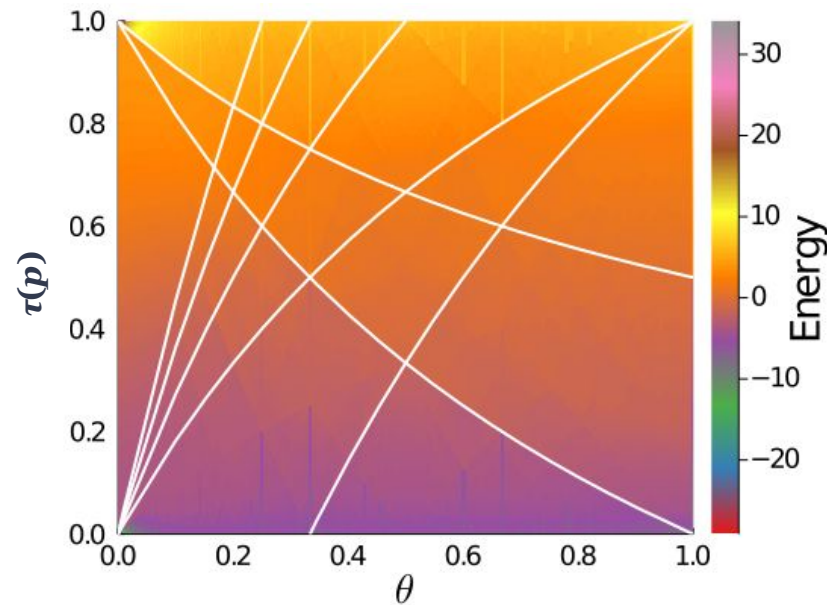
数値計算(2層系)

色がエネルギーによって変化 (横軸は格子定数の比)

Before fitting

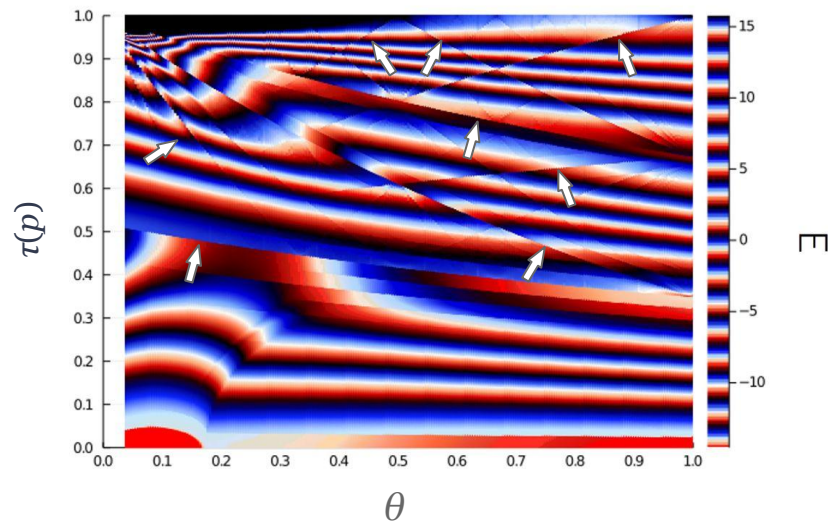
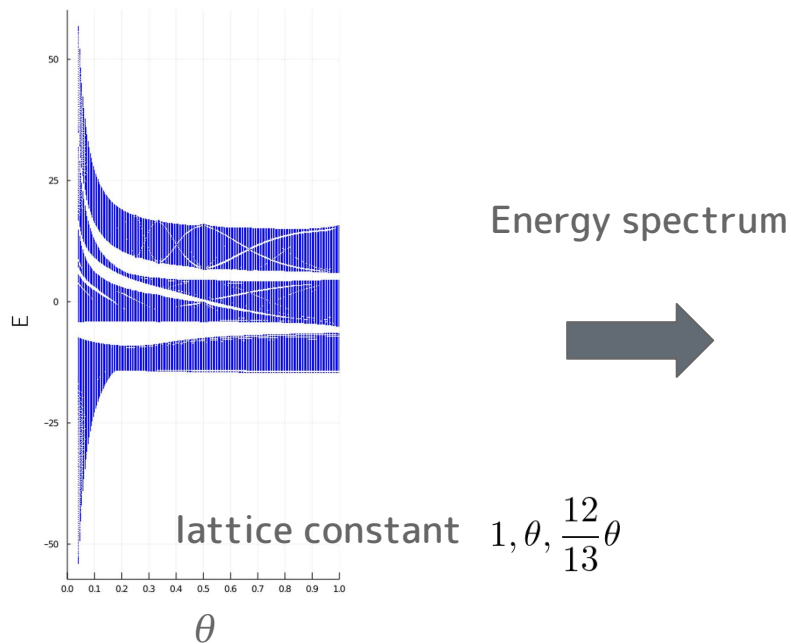


Fitted with $\text{IDoS} = n_{\emptyset} + n_1 \frac{\theta}{1 + \theta}$



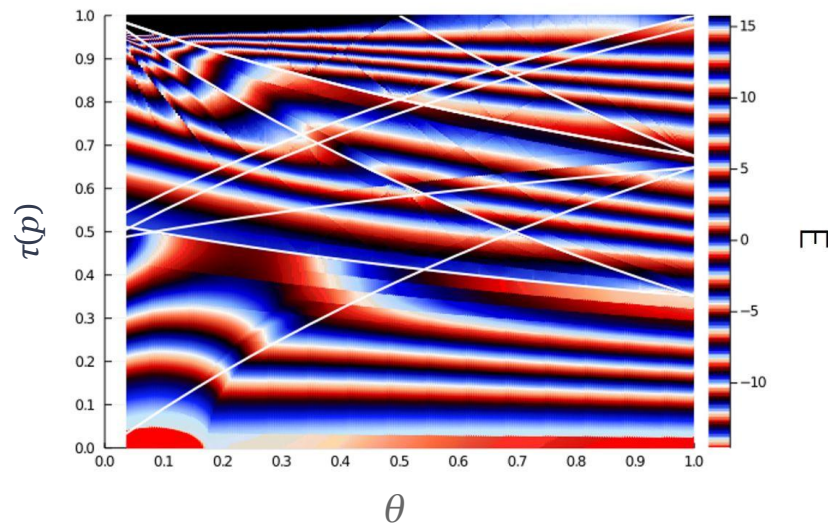
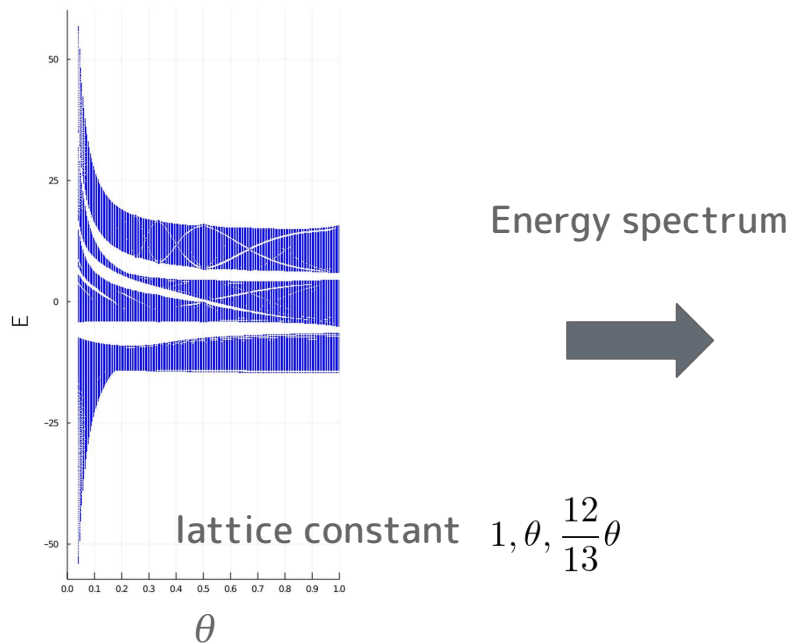
数値計算(3層系)

3層系でも同様の計算が可能。各層の格子定数を $1, \theta, 12\theta/13$ とし、 θ を変える



数値計算(3層系)

3層系でも同様の計算が可能。各層の格子定数を $1, \theta, 12\theta/13$ とし、 θ を変える



まとめと展望

薄膜積層系に対する非可換トーラスからのアプローチの1つとして

Gap labelling定理を定式化した

今後の研究

- 光学応答などを計算できるか？
 - ダイアグラムを用いた計算を非可換トーラス上で行うには？
- 波動関数を Jacobi のテータ関数で書き下せるか？
 - Flat band との関係は？ Landau 準位での flat band との対応

応答の計算 (非可換トーラスの基本公式)

非可換トーラスの代数

$$U = \exp(ix_1), S = \exp(ix_2), [x_1, x_2] = -2\pi\theta$$

と表現する事が可能、

$U_{mn} = \exp(2\pi i (mx_1 + nx_2))$ と表記すると、

$$[U_{ab}, U_{cd}] = 2i \sin(\pi(ad - bc)\theta) U_{a+c, b+d}$$

トレース

$$\tau(U_{ab}) = \delta_{a=0, b=0}$$

電流

電場を印加したハミルトニアン: $H = H_0 + \lambda ex E e^{-i\omega t}$

とすると、電流の線形応答は

$$\langle j(t) \rangle = \text{Tr}(j \rho^{(1)}(t))$$

$$\rho(t) = \sum_n \rho^{(n)}(t) \lambda^n$$

しかし、 $j(t)$ を計算するのは大変なので

$$j(\omega) = -ieE(\omega) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i}{\omega^{p+1}} \left(\left(\underbrace{[H, [\cdots [H, j]]]}_{p \text{ times}}, X \right) \rho_0 \right)$$

を計算してみる。

応答などを計算するには

電流演算子は $j = S - S^\dagger$ なので2次までだと、

$$\begin{aligned} i[H, j] &= 2 \sin(\pi\theta) \left(e^{i(x_1+x_2)} - e^{i(-x_1+x_2)} - e^{i(x_1-x_2)} + e^{i(-x_1-x_2)} \right) \\ i[H, [H, j]] &= 4i \sin(\pi\theta)^2 \left\{ \left(-e^{i(x_1+2x_2)} - e^{i(-x_1+2x_2)} + 2e^{ix_1} + 2e^{-ix_1} - e^{i(x_1-2x_2)} - e^{i(-x_1-2x_2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(e^{i(2x_1+x_2)} - 2e^{ix_2} + e^{i(2x_1-x_2)} - 2e^{-ix_2} + e^{i(-2x_1+x_2)} + e^{i(-2x_1-x_2)} \right) \right\} \end{aligned}$$

⇒ スカラー係数の計算

p次では項の数は $< 4^p$, θ が $1+\varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) とすると、 $\sin(\pi\theta)^p \sim \varepsilon^p$

系の大きさによらない近似方法 ⇒ 新たな計算手法？

補助スライド

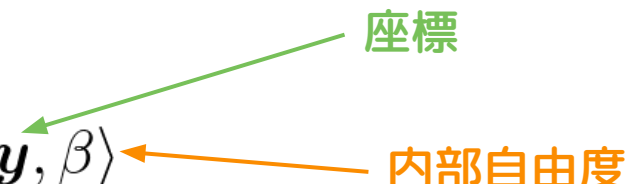
Vの変換

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{1,m}(\varphi_1(n)) |n+m\rangle \langle n| \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{1,m}(\varphi_1(n)) S^m |n\rangle \langle n| \quad (S_1 |n\rangle = |n+1\rangle) \\ &= \sum_m S_1^m \sum_q v_{1,m,q} \sum_n e^{2\pi i q \frac{n\theta_1}{\theta_2}} |n\rangle \langle n| \\ &= \sum_m S_1^m \sum_q v_{1,m,q} U_1^q \quad (U_1 = \sum_n e^{2\pi i \frac{n\theta_1}{\theta_2}} |n\rangle \langle n|) \end{aligned}$$

準周期性と非可換性

非周期系の演算子

系が非周期的なパターン $\mathcal{P}$ に依っているとすると

$$\langle \boldsymbol{x}, \alpha | \hat{A}(\mathcal{P}) | \boldsymbol{y}, \beta \rangle$$


座標

内部自由度

系とパターンの両方を $-a$ だけ並進させても値は変わらないとすると

$$\langle \boldsymbol{x}, \alpha | \hat{A}(\mathcal{P}) | \boldsymbol{y}, \beta \rangle = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \alpha | \hat{A}(\tau_{\boldsymbol{a}}(\mathcal{P})) | \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}, \beta \rangle.$$

τ_a : パターンの並進演算子

$a = x$ となるように取ると、

$$A_{\alpha, \beta}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \tau_{\boldsymbol{y}}(\mathcal{P})) \equiv \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \alpha | \hat{A}(\tau_{\boldsymbol{y}}(\mathcal{P})) | \mathbf{0}, \beta \rangle.$$

非周期系の演算子の積

先ほど定義した

$$\langle \boldsymbol{x}, \alpha | \hat{A}(\mathcal{P}) | \boldsymbol{y}, \beta \rangle = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \alpha | \hat{A}(\tau_{\boldsymbol{a}}(\mathcal{P})) | \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}, \beta \rangle.$$

の積を考える。

$$\langle \boldsymbol{x}, \alpha | \widehat{AB}(\mathcal{P}) | \boldsymbol{z}, \gamma \rangle = \sum_{\boldsymbol{y}, \beta} \langle \boldsymbol{x}, \alpha | \hat{A}(\mathcal{P}) | \boldsymbol{y}, \beta \rangle \langle \boldsymbol{y}, \beta | \hat{B}(\mathcal{P}) | \boldsymbol{z}, \gamma \rangle.$$

を満たすように積を定義すると

$$AB_{\alpha, \gamma}(\boldsymbol{x}, \mathcal{P}) = \sum_{\boldsymbol{y}, \beta} A_{\alpha, \beta}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \tau_{\boldsymbol{y}}(\mathcal{P})) B_{\beta, \gamma}(\boldsymbol{y}, \mathcal{P})$$

非周期系の演算子の積

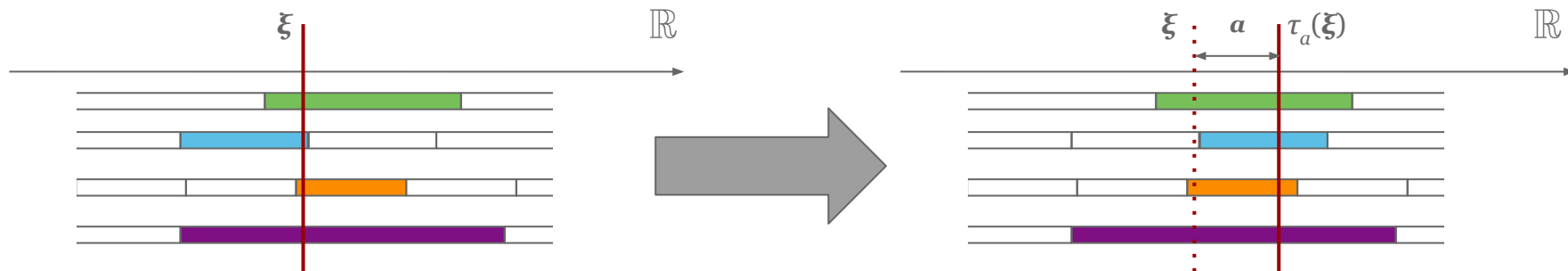
薄膜積層系では τ を単位胞の座標を用いて行う事が可能

系の埋め込まれている $\mathbb{R}$ 空間の原点が単位胞の座標で

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

のように書かれているとする。系全体を $-a$ 動かすと、

$$\tau_a(\xi) = (\xi_1 + a \bmod \theta_1, \xi_2 + a \bmod \theta_2, \xi_3 + a \bmod \theta_3, \xi_4 + a \bmod \theta_4)$$



非周期系の演算子の積

Moireハミルトニアン

$$\langle l, s, \mathbf{k} | \hat{V} | l', s', \mathbf{k}' \rangle = - \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} v_{s, s'}(\mathbf{k} + \mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\tau}_s} e^{-i\mathbf{G}' \cdot \boldsymbol{\tau}_{s'}} \delta_{\mathbf{G} + \mathbf{k}, \mathbf{G}' + \mathbf{k}'}.$$

$$H = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & H_1(\mathbf{k} - \mathbf{b}'_2) & 0 & v(\mathbf{k} - \mathbf{b}'_2) & \\ & 0 & H_1(\mathbf{k} - \mathbf{b}_2) & v(\mathbf{k} - \mathbf{b}_2) & \\ & v(\mathbf{k} - \mathbf{b}'_2)^\dagger & v(\mathbf{k} - \mathbf{b}_2)^\dagger & H_2(\mathbf{k}) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

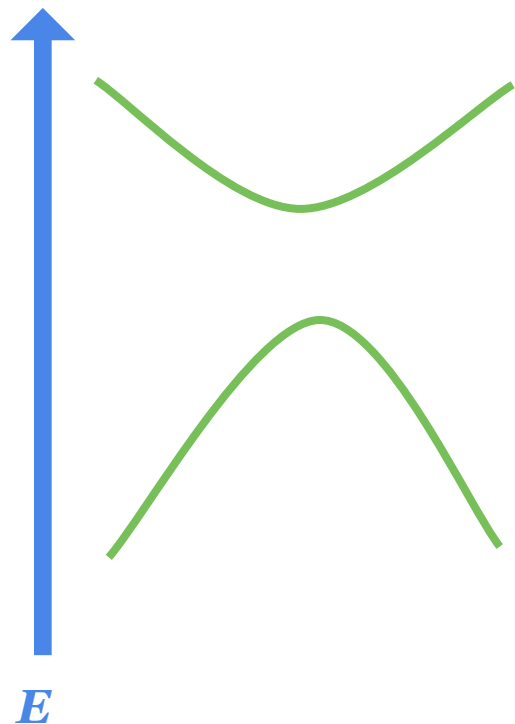
$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}'_2$ は層2の逆格子ベクトル

層を移り変わる度に畳み込みをうける ➡ 非可換性として表現される

エネルギーギャップ

Energy gap

We consider energy gap from band crossing

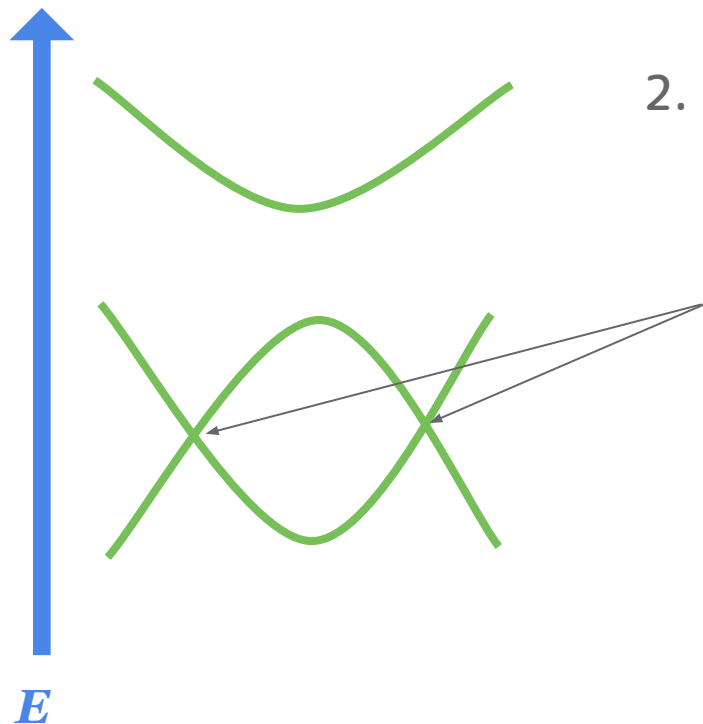


1.

When we consider two bands,
energy gap does not depend on interaction.
Energy gap exists just because,
there are two bands.

Energy gap

We consider energy gap from band crossing

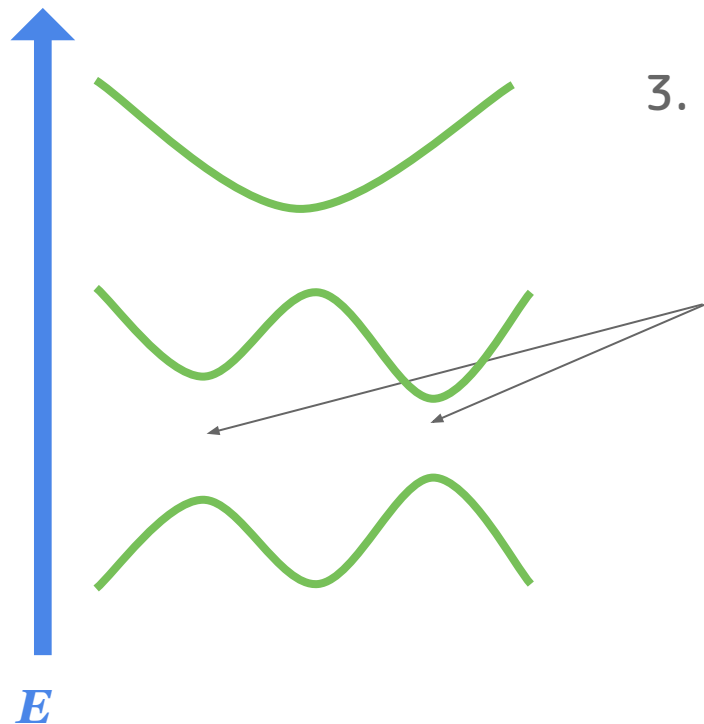


Next, we add another band.

Additional band has band crossing with the existing band.

Energy gap

We consider energy gap from band crossing

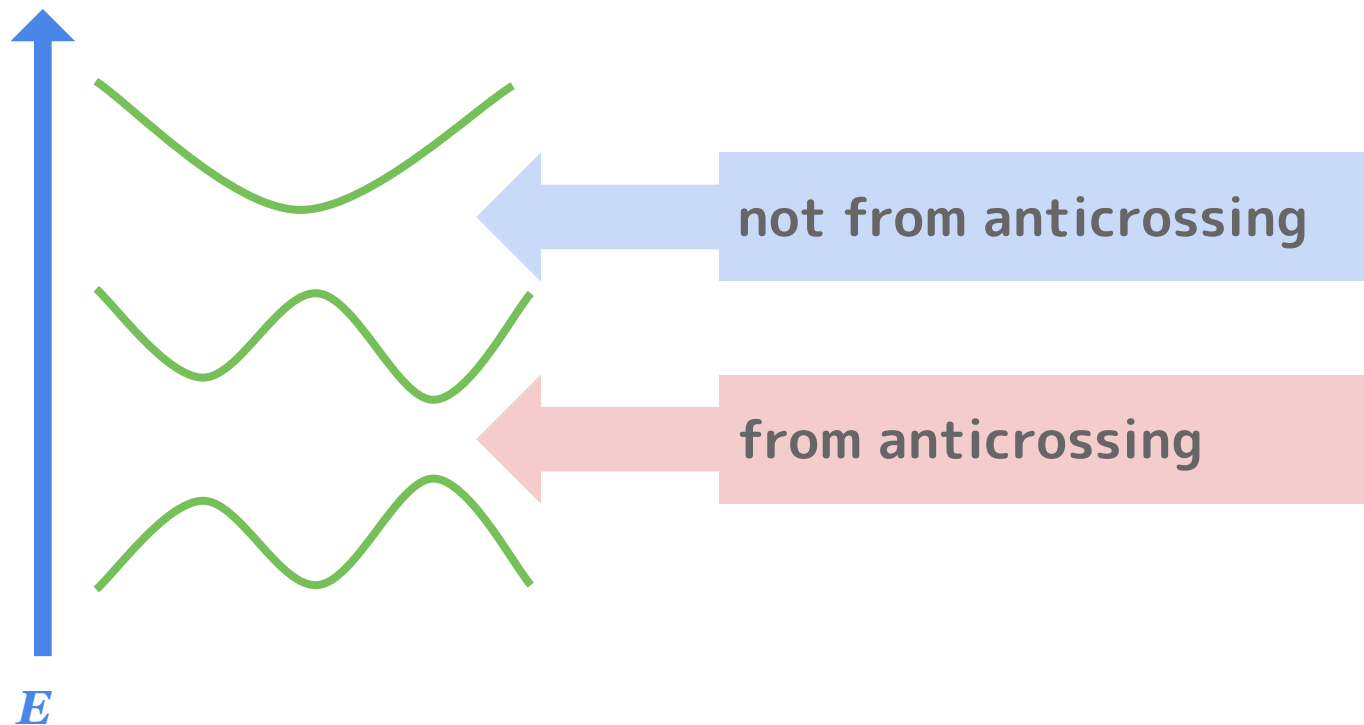


3.

When there is no reason, s.a. symmetry,
energy gap open from interaction
(anticrossing)

Energy gap

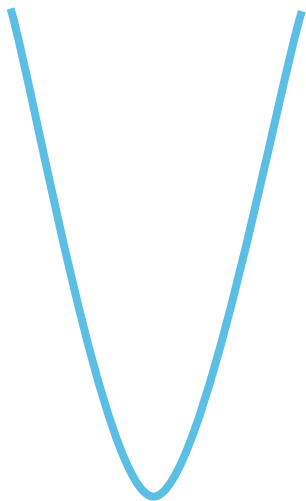
We consider energy gap from band crossing



Energy gap from anti-crossing

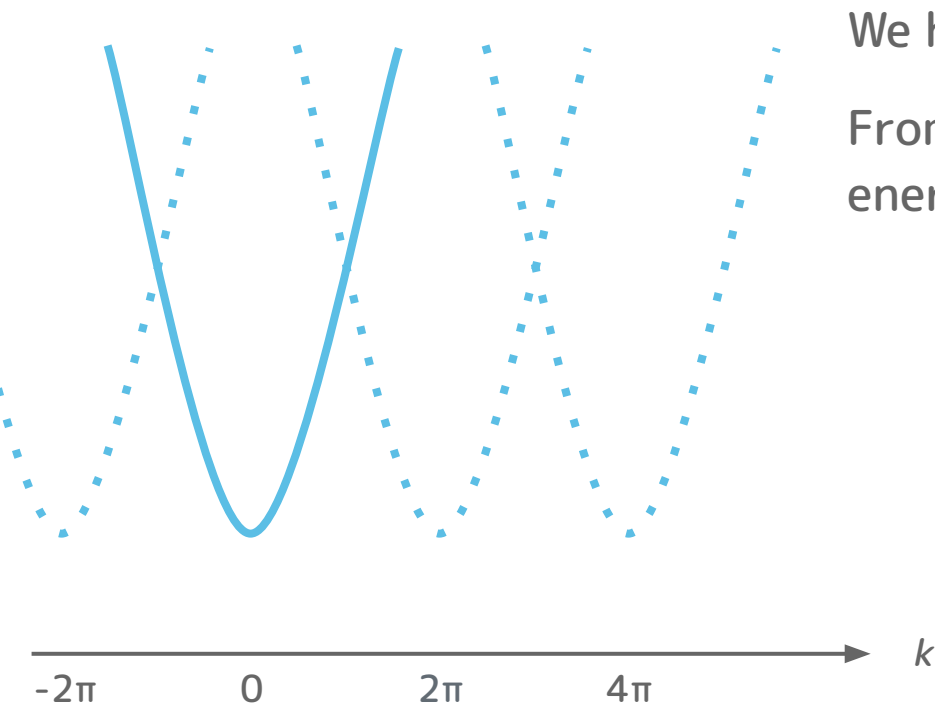
Among energy gap from anti-crossing, there is special class

We have energy band in parameter space.



Energy gap from anti-crossing

Among energy gap from anti-crossing, there is special class

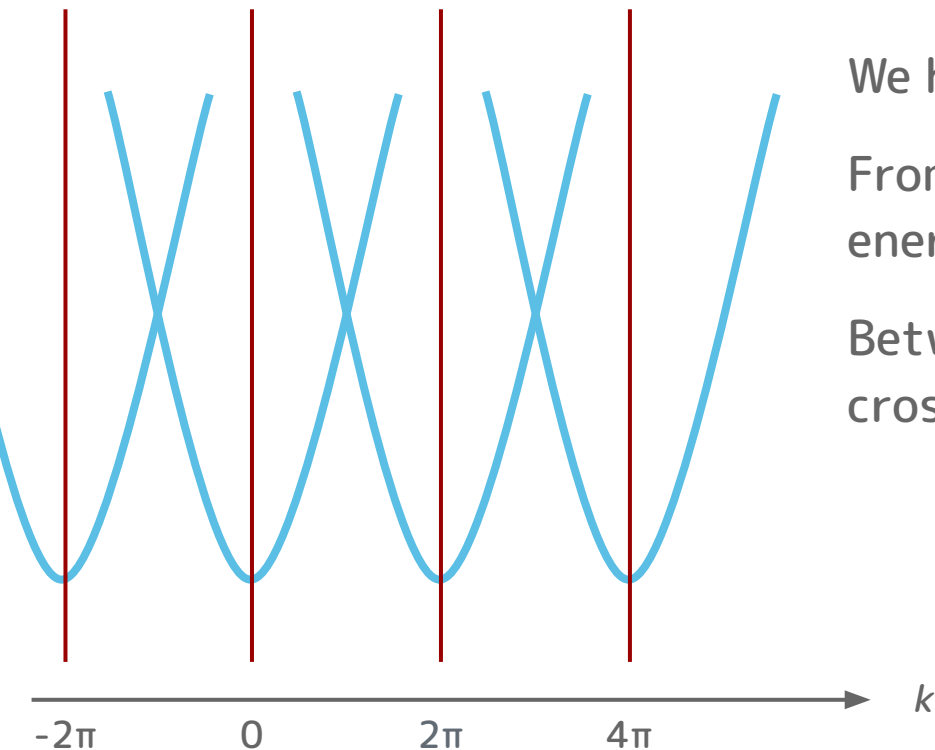


We have energy band in parameter space.

From symmetry, we have replicas of energy band.

Energy gap from anti-crossing

Among energy gap from anti-crossing, there is special class



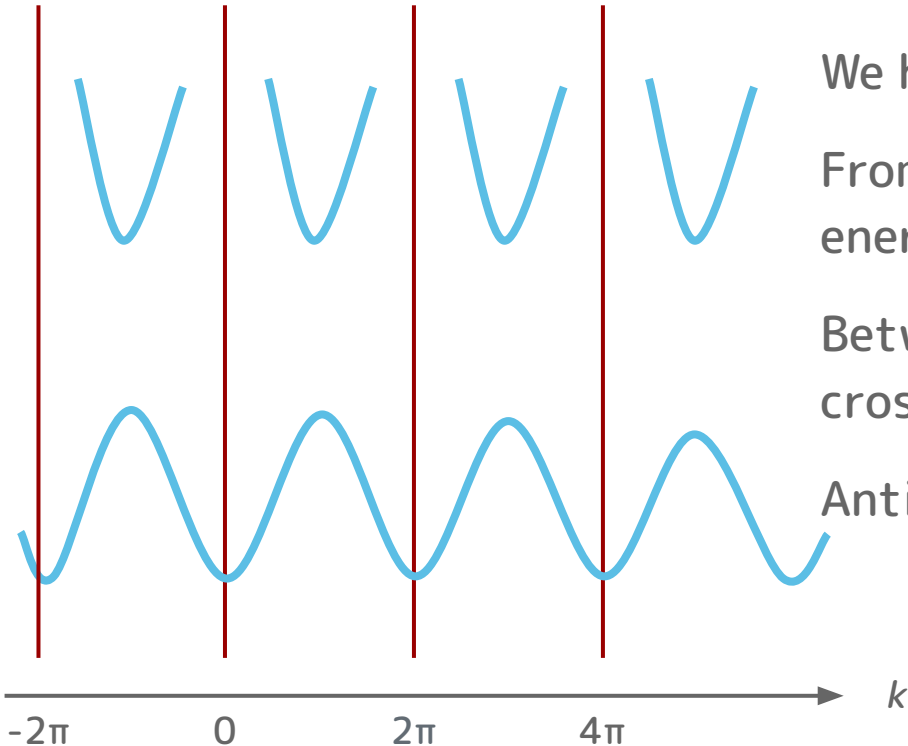
We have energy band in parameter space.

From symmetry, we have replicas of energy band.

Between energy bands, there are band crossings.

Energy gap from anti-crossing

Among energy gap from anti-crossing, there is special class



We have energy band in parameter space.

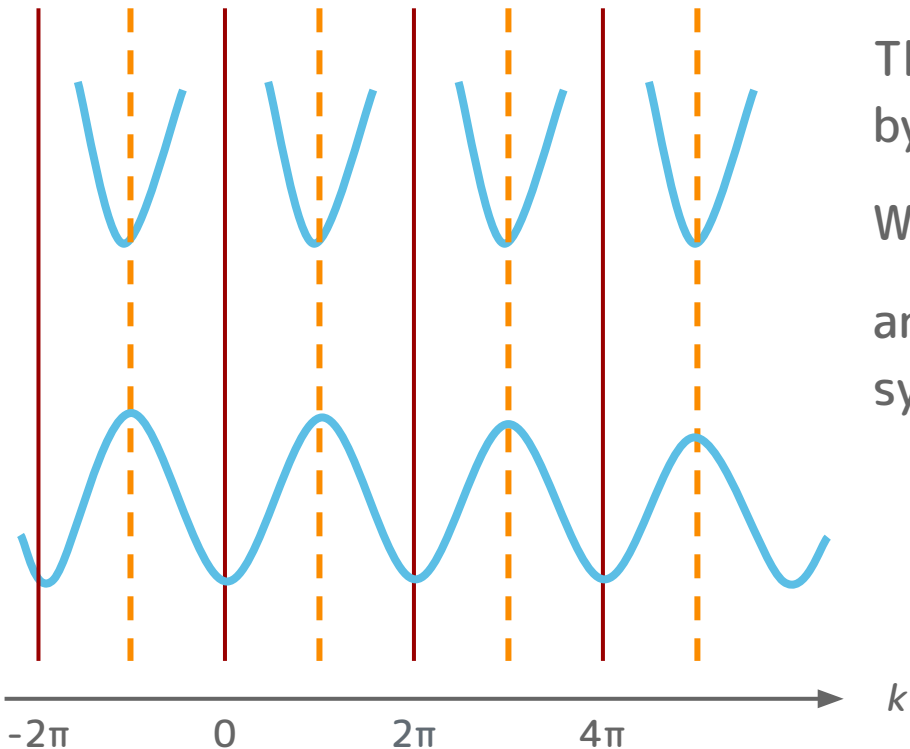
From symmetry, we have replica of energy band.

Between energy bands, there are band crossings.

Anticrossing opens energy gap.

Energy gap from anti-crossing

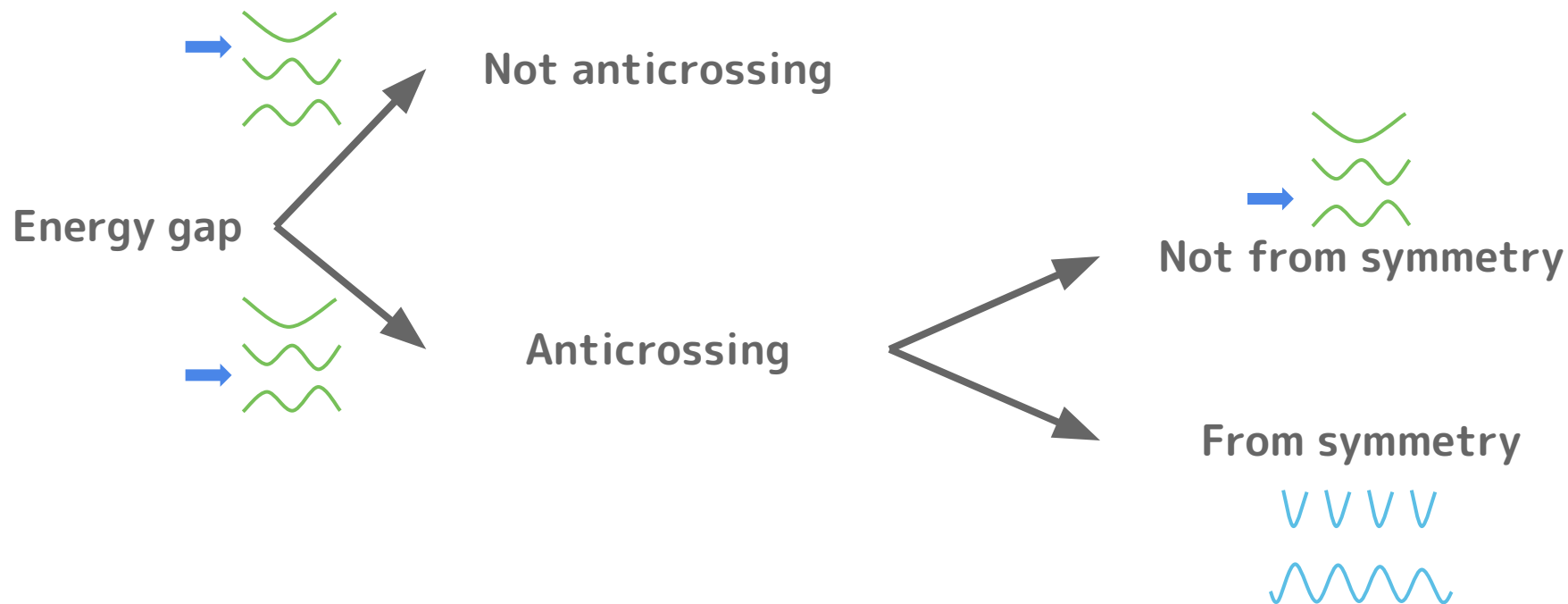
Among energy gap from anti-crossing, there is special class



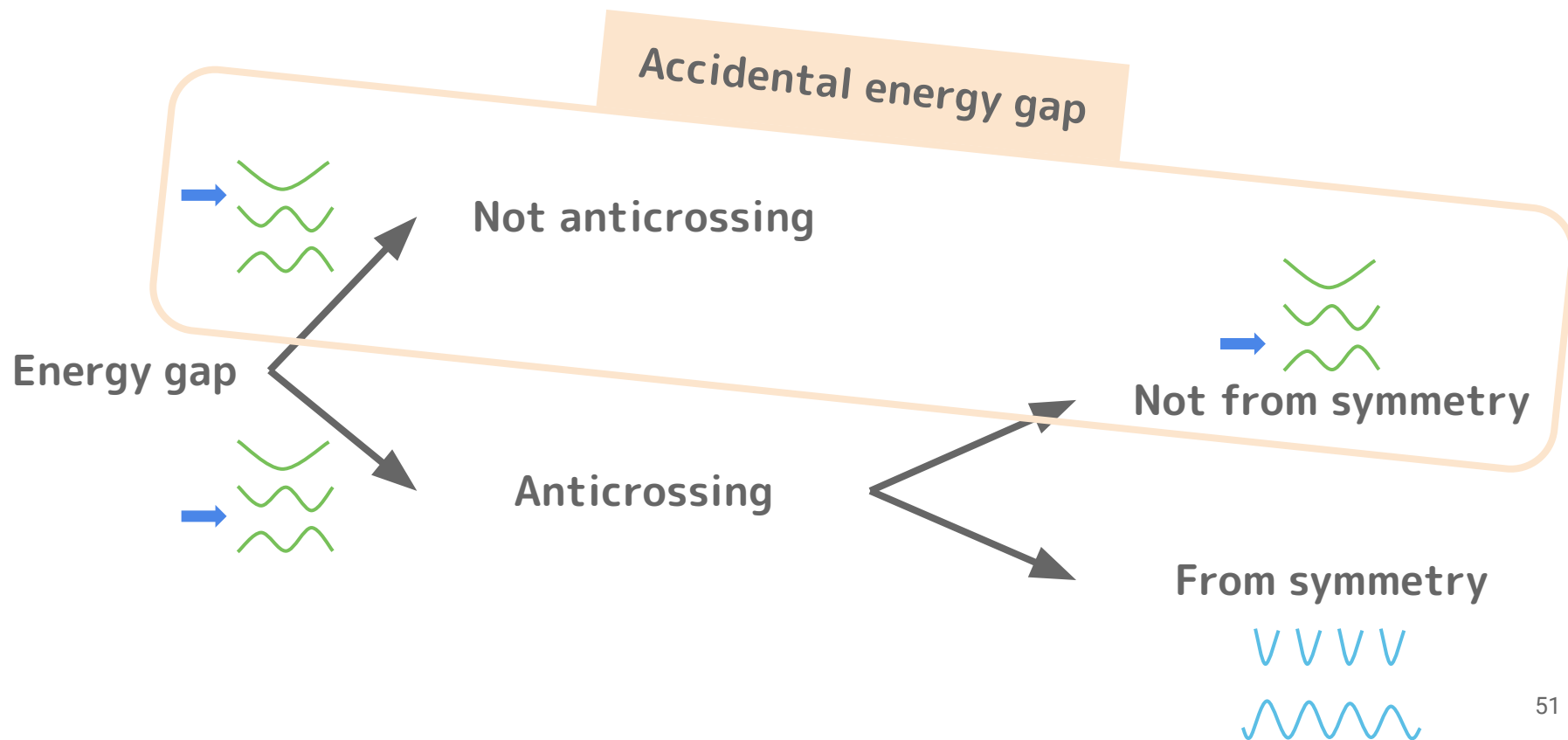
The position of crossing is determined by the symmetry.

When parameter space is momentum, and symmetry is translational symmetry, this is **Bragg lines**.

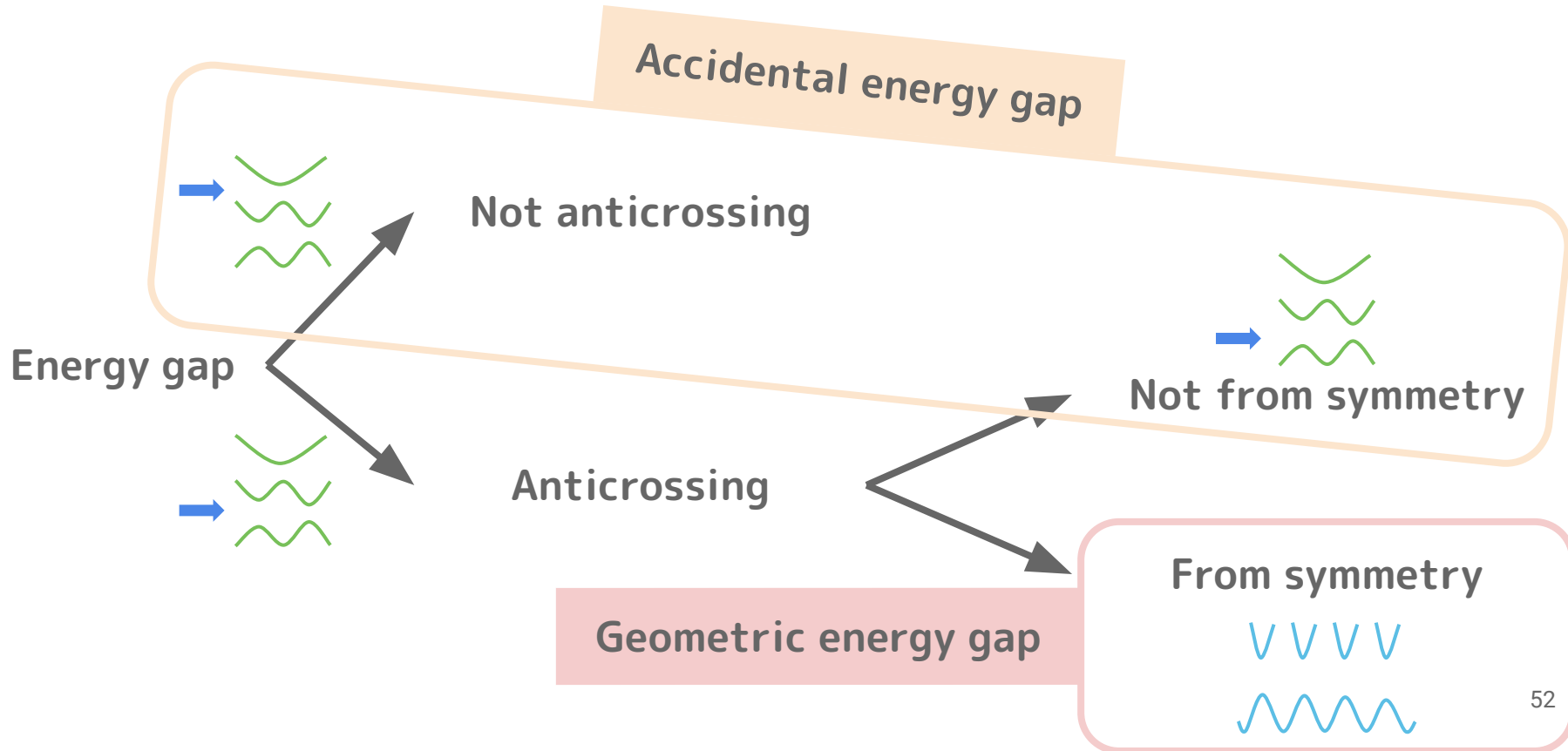
Classification of energy gap



Classification of energy gap



Classification of energy gap



Energy gap from anti-crossing

Accidental (Interband)

- Between different energy bands 🖱 interband effect
- Position of energy gap depends on the detail of energy bands (unstable).

Geometric (intraband)

- Between replicas of energy band 🖱 intraband
- Position of energy gap is determined by the symmetry.
 - 🖱 Does not depend on the detail of Hamiltonian (stable)

We consider the **geometric gap** of **multilayer thin films**

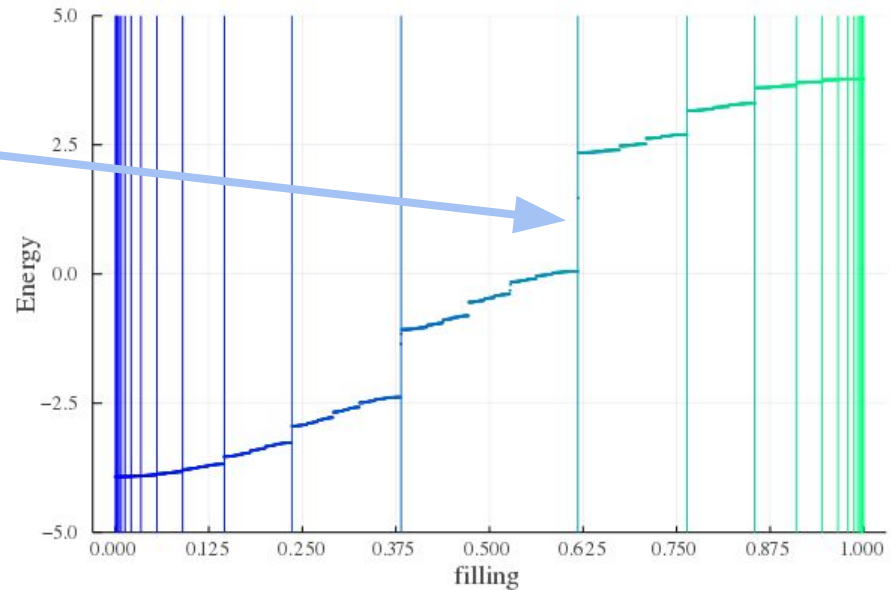
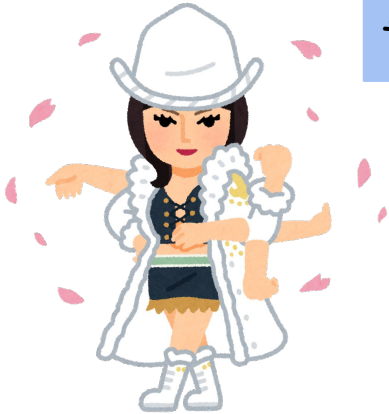
Gap labelling theorem (GLT)

Importance of GLT in the QP system

In the quasiperiodic system, the energy spectrum is complicated

Physicist

Uhm..,
this region is a gap

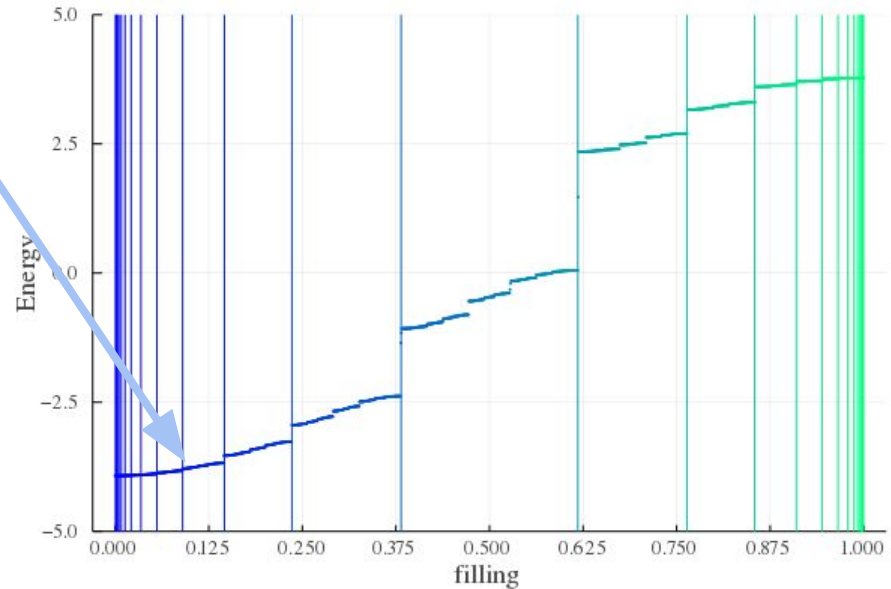


Importance of GLT in the QP system

In the quasiperiodic system, the energy spectrum is complicated

Physicist

But, how about here?
Is it gapped in the TDL?



Importance of GLT in the QP system

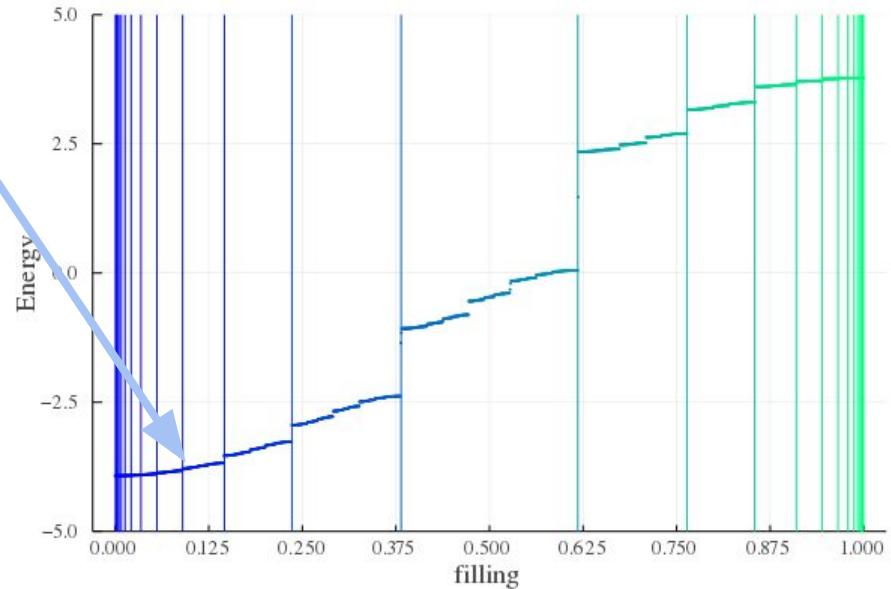
In the quasiperiodic system, the energy spectrum is complicated

Physicist

But, how about here?
Is it gapped in the TDL?

Gap!!

GLT



GLT and energy gap

Accidental (Interband)

- Between different energy bands 🖐 interband effect
- Position of energy gap depends on the detail of energy bands (unstable).

Geometric

- Between replicas of energy band 🖐 intraband
- Position of energy gap is determined by the symmetry.
 - 🖐 Does not depend on the detail of Hamiltonian (stable)

Gap labelling theorem treats geometric energy gap

GLT and energy gap

Energy gap in the QP system

Geometric

Accidental

GLT and energy gap

Energy gap in the QP system

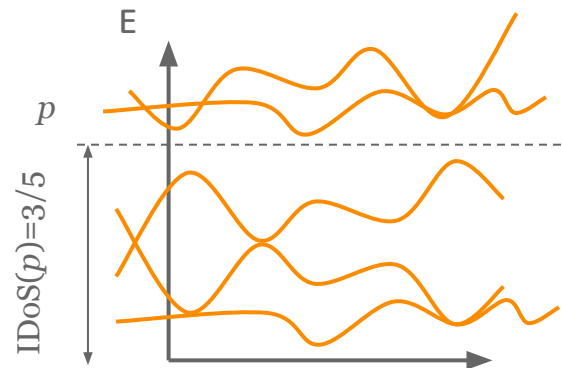
Geometric

Accidental

GLT



$$\text{IDoS}(p) = \frac{\text{num. of states below energy gap } p}{\text{num. of all states}}$$



GLT and energy gap

Energy gap in the QP system

Geometric

Accidental

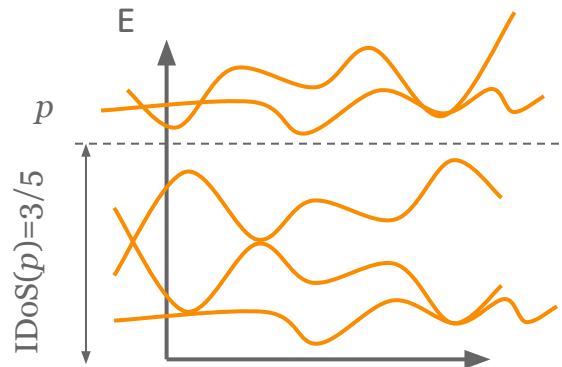
GLT



$$\text{IDoS}(p) = \frac{\text{num. of states below energy gap } p}{\text{num. of all states}}$$

Ex.

Harper model : $\text{IDoS}(p) \in \mathbb{Z} \oplus \theta\mathbb{Z}$ 🖐 label is two integers



GLT of Harper model

Parameter space of aperiodic system

Harper model = lattice + incommensurate periodic potential

In Harper model ($V(x+\theta) = V(x)$), we can label the Hamiltonian by φ

$$H_{\varphi} = \sum_n \left[|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1| + V(n+\varphi) |n\rangle \langle n| \right]$$

Redefining $n' = n-1$

$$H_{\varphi+1} = \sum_{n'} \left[|n'+1\rangle \langle n'| + |n'\rangle \langle n'+1| + V(n'+\varphi+1) |n'\rangle \langle n'| \right]$$

Clearly, H_{φ} and $H_{\varphi+1}$ describes the same model of different basepoint.

From the periodicity, $\varphi \sim \varphi+\theta$ and $\varphi \in S^1$.



Parameter space of the Harper model is S^1

Fourier expansion of potential

We expand potential term V

$$H_\varphi = \sum_n \left[|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1| + V(n+\varphi) |n\rangle \langle n| \right]$$

$$V(x+\theta) = V(x) \Rightarrow V(x) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} v_q e^{2\pi q i \frac{x}{\theta}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} V(n+\varphi) |n\rangle \langle n| &= \sum_{n, q \in \mathbb{Z}} v_q e^{2\pi q i \frac{n+\varphi}{\theta}} |n\rangle \langle n| \\ &= \sum_{n, q \in \mathbb{Z}} v_q e^{2\pi q i \frac{\varphi}{\theta}} U^q \quad \left(U = \sum_n e^{2\pi i \frac{n}{\theta}} |n\rangle \langle n| \right) \end{aligned}$$

After this transformation,

$$V = \text{sum of (scalar } \times U)$$

Algebra of Harper model

Defining $S = \sum_n |n+1\rangle \langle n|$

We can rewrite the Hamiltonian of Harper model as below

$$H_\varphi = \sum_n \left[|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1| + V(n+\varphi) |n\rangle \langle n| \right]$$



$$H_\varphi = S + S^\dagger + \sum_q v_q U^q$$

$$US = e^{2\pi i \frac{1}{\theta}} SU$$

phase factor is renormalized to v_q

H_φ is a polynomial of U and S , which commutes with a phase factor.

IDoS

There are two approaches to calculate IDoS

Eig. val.

$$H |\psi_i\rangle = E_i |\psi_i\rangle$$

Eig. vec.

E_F : energy inside gap p

$$D(E) = \sum_{E_i} \delta(E - E_F)$$

Density

$$\int_{-\infty}^{E_F} dE D(E)$$

IDoS(p)

we also write projector below the energy gap p as p

$$p = \sum_{E_i \leq E_F} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

Projector

$$\frac{1}{N} \text{Tr}(p) = \tau(p)$$

IDoS

There are two approaches to calculate IDoS



$$H |\psi_i\rangle = E_i |\psi_i\rangle$$

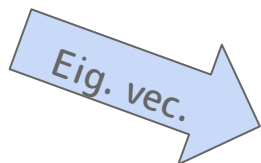
E_F : energy inside gap p

$$D(E) = \sum_{E_i} \delta(E - E_F)$$

Density

$$\int_{-\infty}^{E_F} dE D(E)$$

IDoS(p)



we also write projector below the energy gap p as p

$$p = \sum_{E_i \leq E_F} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

Projector

$$\frac{1}{N} \text{Tr}(p) = \tau(p)$$

Noncommutative torus

For noncommutative torus $US = e^{2\pi i \frac{1}{\theta}} SU$ we can define

Projector $(p = p^2, p^\dagger = p)$

$$p = f(U)S + g(U) + S^\dagger f(U)^\dagger$$

Normalized trace (τ)

$$\tau : T_{1/\theta} \rightarrow \mathbb{R}, \tau(AB) = \tau(BA), \tau(1) = 1$$

From it, following relation between projector and trace is known.

$$\tau(p) \in \mathbb{Z} \oplus \frac{1}{\theta} \mathbb{Z}$$

Noncommutative torus

For noncommutative torus $US = e^{2\pi i \frac{1}{\theta}} SU$ we can define

Projector $(p = p^2, p^\dagger = p)$

$$p = f(U)S + g(U) + S^\dagger f(U)^\dagger$$

Normalized trace (τ)

$$\tau : T_{1/\theta} \rightarrow \mathbb{R}, \tau(AB) = \tau(BA), \tau(1) = 1$$

From it, following relation between projector and trace is known.

$$\tau(p) \in \mathbb{Z} \oplus \frac{1}{\theta} \mathbb{Z} \quad \text{GLT of Harper model}$$