

## 数値相対論の進展

柴田 大 (東京大学大学院総合文化研究科 e-mail: shibata@provence.c.u-tokyo.ac.jp)

一般相対論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式は、非線形連立偏微分方程式である。よって、ブラックホールの形成のように興味ある動的現象に対してその解析解を得るのは不可能である。しかしながら、一般相対論的天体現象に対する観測手段が飛躍的に発展する中、これを解いて理論的に天体現象を明らかにすることが要求されるようになってきた。そこで、数値計算を利用した研究が進められている。このような研究分野は数値相対論と呼ばれる。本稿では、数値相対論が必要とされる理由及びその概要について説明した後、最近の飛躍的進展を、2005年度に発表された結果を紹介しながら解説する。

### 1. 一般相対論的天体の観測

過去40年ほどの天体観測の結果、宇宙には極めて強い一般相対論的重力の影響下にあるコンパクトな天体が、多数存在することが明らかになってきた。中性子星、連星中性子星、ブラックホール、銀河中心に存在する巨大ブラックホールなどである。中性子星やブラックホールの周りには、光速の数%で周回する高温の降着円盤が存在する場合がある。これらは、高エネルギー天文学における最も興味深い観測対象の1つである。中性子星やブラックホールが近接連星になった場合には、重力波と呼ばれる時空の揺らぎが光速で周りに伝播する。そして、連星系からエネルギーと角運動量が奪われる。連星中性子星は、これまで少なくとも4つは存在が確認されている。<sup>1)</sup> そのうちの1つである PSRB1913+16 は、30年間にわたって観測され、その質量や軌道パラメータ、および軌道周期の変化などが詳しく測定されている。<sup>2)</sup> その結果、重力波の存在が、間接的にはあるが高精度で証明された。

それでは、一般相対論的天体現象は十分に理解されたかといえば、もちろんそうではない。一般相対論は、ブラックホール近傍のように重力が大変強いところ(時空がひどく歪んでいるところ)でその特徴を顕著に示すが、強重力場での一般相対論的效果の検証はまだなされていない。これまでの検証は、太陽近傍のような弱い重力場においてしかなされていない。また、これまでに観測された中性子星やブラックホールは、形成後十分に時間が経過したもののみである。ブラックホールが誕生する瞬間や、中性子星やブラックホールからなる連星が合体する瞬間は、観測されたことがない。これらこそが、一般相対論的な強重力場自体が激しく変動する、宇宙で最もダイナミックかつ非線形な強重力現象である。一般相対論の特質はその非線形性にあり、それは時間変動の激しい現象において現れ得る。よって、ここで挙げたような現象を観測することによって、強重力場における一般相対論の検証も可能となる。

強重力場が激しく変化する様子は、近々観測できると期待される。重力波による天体観測が始まったからである。<sup>3)</sup> 重力波は、強重力場が激しく時間変動したときに大量に放射される。また透過性が極めて強い(電磁波よりもはるかに強く、またニュートリノよりも強い)ので、高密

度の物質が重力波源の周りに取り巻いていても、散乱なしに伝播してくる。よって、強重力場の時間変動を直接観測するには最も強力な観測手段である。

近年、X線や $\gamma$ 線などを利用した高エネルギー天文学も発展してきた。たとえば1990年代以降注目されている謎の現象として $\gamma$ 線バーストがある。<sup>4)</sup> これは $\gamma$ 線を主に放射する突発的な天体現象であるが、 $\gamma$ 線強度の時間変動がミリ秒程度と変化が大変速く、また発生するエネルギーの総量は太陽が一生かけて生成する量にも匹敵する(そのため遠宇宙で発生しても観測できる)。このように特異な高エネルギー現象なので、その発生源は強重力天体、具体的には、質量が太陽の数倍程度のブラックホールと降着円盤からなるもの、と推測されている。同じ場所で2度は繰り返さないで、その発生源は何らかの現象の結果形成され、やがてすぐに定常ブラックホールへと落ち着く、と考えられる。その現象の候補とされているのが、大質量星の重力崩壊や連星中性子星の合体である。つまり、 $\gamma$ 線バーストの観測によって、強重力天体の形成に肉薄している。

### 2. 数値相対論はなぜ必要か

強重力場が激しく時間変動する一般相対論的現象を理論的に解明するには、アインシュタイン方程式を解くことが必要である。しかしこれは大変複雑な方程式であり、その解を見つけるのは容易ではない。特に、時間変動する現象に対して解析解を見つけるのは不可能である。そこで、数値計算によって、解を求める方法が研究されるようになった。これがいわゆる、数値相対論である。

数値相対論は、1990年以降とりわけ活発に研究されるようになった。それは、観測技術の向上により、一般相対論的天体現象の理論的解明に対してより高度なものが要求されるようになったからである。まず、レーザー干渉計を用いた重力波の直接検出実験が、2000年頃から始まった。これまで直接検出されていないことから分かるように、重力波の検出は容易ではない。透過性が極めて強いからである。それでも、実験技術が着実に向上しているため、近々観測が可能になると期待される。<sup>3)</sup> ただし、精密な装置を用いても、信号の振幅は典型的には検出器の雑音の高々10倍程度にしかならないと予想される。そういった状況において、

重力波を直接検出し、またその発生源を特定するには、精度の良い理論波形をあらかじめ用意する必要がある。<sup>5)</sup> 具体的には、合体する連星中性子星や連星ブラックホール、大質量星の重力崩壊などが有力な重力波源である。これらは、光速の数十%で運動する天体が、強重力場の時間変動を引き起こす現象である。その運動状態を解き明かし、さらに重力波の波形を理論的に求めるには、数値相対論を適用する以外方法がない。これが、この研究分野が必要とされる理由の1つである。

高エネルギー天文学も発展を遂げた。たとえば先に述べたように、 $\gamma$ 線バーストはブラックホールの誕生と密接に関わった現象であることがほぼ確実である。つまり、 $\gamma$ 線によってブラックホールの形成現場周辺を観測していることになる。残念ながら、電磁波は透過性が低いので形成現場の中心は直接観測できず、その外縁部だけが観測される。外縁部の観測結果から内部を推定し、ブラックホールが誕生しているのだろう、と推測しているのである。ここで、その推測を強固にするには、ブラックホールの誕生と観測結果を結び付けるような理論が必要である。それには、数値相対論が重要な役割を担う。つまり、数値計算によってブラックホールを作ってみせ、観測されそうな物理状態を明らかにするのである。それによって、観測結果が矛盾なく説明されるなら、ブラックホールの誕生の証拠となる。つまり数値相対論が、観測からは得ることのできない情報と観測結果との橋渡しを担うのである。

### 3. 数値相対論のための定式化

まずは、数値相対論で用いられるアインシュタイン方程式の定式化の基礎について概観する。

ニュートン重力理論と一般相対論との大きな違いの1つとして、時間が絶対的な概念か、そうでないかという点がある。ニュートン理論では時間は絶対的な概念であり、空間とは互いに独立なものである。したがって時間発展とは、絶対時間の方向への発展を意味する。一方、一般相対論では、絶対時間は存在しないため、時間や空間の方向が一意的に決まらない。そのため、アインシュタイン方程式を工夫なしに書き下すと、時間微分と空間微分が入り交じった形の方程式になり、こういった型の方程式が明確でなくなる。天体や重力場の時間進化を調べるには、時間と空間の方向を決定し、空間上の物質分布や曲率分布を時間発展させる形に、方程式を書き直す必要がある。この目的のためには、3+1形式という定式化が通常採用される。<sup>6)</sup>

この定式化ではまず、空間的な3次元超曲面 $\Sigma$ を用意する。ここで $\Sigma$ は、空間的かつ滑らかであれば、どんな超曲面でも構わない。次に、 $\Sigma$ に垂直な時間的な単位ベクトル $n^\mu \equiv (1/\alpha, -\beta^k/\alpha)$ を定義する。ここで、 $\alpha$ 及び $\beta^k$ はラプス関数、シフトベクトルと呼ばれる量で、それぞれ時間、空間の座標変換の自由度に対応する(図1参照)。したがって、各超曲面ごとに各点で自由に選ぶことのできる量である。

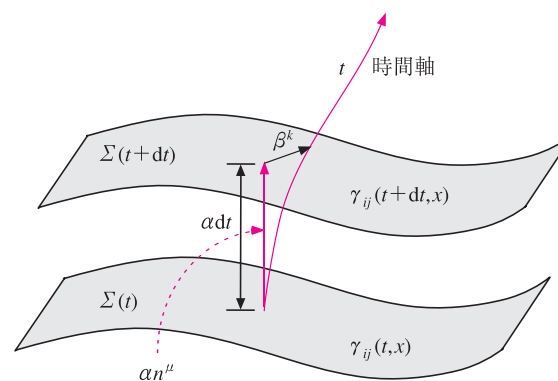


図1 空間的3次元超曲面 $\Sigma$ と $n^\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta^k$ 及び時間軸との関係に関する概念図。 $\Sigma$ 上の各点で $\beta^k$ を適当に決めることによって、時間軸は自由に選択できる。また2超曲面間の4次元距離は、 $\alpha dt$ と定義される。したがって、 $\alpha$ を選ぶことによって、新しい超曲面 $\Sigma(t+dt)$ も自由に選ぶことができる。

次に、4次元時空の計量 $g_{\mu\nu}$ から $\Sigma$ 上の空間的な計量を

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (1)$$

と定義する。 $\gamma_{\mu\nu} n^\nu = 0$ なので、\*1  $\gamma_{\mu\nu}$ は自由度6成分の空間的計量であることが分かる。これで10成分の計量 $g_{\mu\nu}$ は、 $\alpha$ ,  $\beta^k$ ,  $\gamma_{ij}$ の計10成分の量に置換された。

次に $n^\mu$ ,  $\gamma_{ij}$ を使って、アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ を次のように3つの方向へと射影する。

$$G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \kappa T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \quad (2)$$

$$G_{\mu\nu} n^\mu \gamma_k^\nu = \kappa T_{\mu\nu} n^\mu \gamma_k^\nu, \quad (3)$$

$$G_{\mu\nu} \gamma_j^\mu \gamma_k^\nu = \kappa T_{\mu\nu} \gamma_j^\mu \gamma_k^\nu. \quad (4)$$

ここで、 $G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソルを、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー-運動量テンソルを表す。また、 $G$ を万有引力定数、 $c$ を光速とし、 $\kappa \equiv 8\pi G c^{-4}$ を定義した。(2)-(4)式はそれぞれ、1成分、3成分、6成分の式である。

(2), (3)式には $\gamma_{ij}$ 及びその1階時間微分の項は含まれるが、2階時間微分の項が含まれないことが知られている。したがって、 $\gamma_{ij}$ の発展を記述する式ではなく(つまり波動方程式ではなく)、拘束条件である。これらは電磁気学におけるガウスの法則に類似している。一方(4)式から、 $\gamma_{ij}$ に対する波動方程式が導出される。よってこれが、時間発展を決める。

拘束条件は、初期に満たされていれば、発展方程式を正確に解き続ける限り、常に満たされることが、ビアンキ恒等式 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ により保証されている。 $(\nabla_\mu$ は $g_{\mu\nu}$ に対する共変微分を表す。)そのため、拘束条件は通常、初期条件を与えるときのみ解かれる。その後は、発展方程式を解くことによって系の進化が得られる。つまり、初期条件を与えて、3次元空間計量の発展を追うという形に、方程式が書き換えられる。

ただし、 $\gamma_{ij}$ (及び外的曲率 $K_{ij}$ <sup>6)</sup>)に対してのみ発展を解く標準的な3+1形式は、数値相対論には適さないことが分かっている。この理由と対処法の1つを5.1節で述べる。

\*1 上付きと下付きの添字が繰り返し現れた場合、それらは和を取ることとする。ただし、ギリシャ文字の場合には時空の全成分に対して、ラテン文字の場合には空間成分に対して和を取る。

#### 4. 数値相対論の概要

数値相対論の中心課題は計量に対する発展方程式を解くことだが、それ以外にも様々な要素がある。数値相対論の概要を図2に示す。

具体的な中心作業は、0) 現実的初期条件を設定し、1) 3次元計量の実験方程式を解き、2) 座標条件を決め、それに対する式を解き、3) 物質場に対する運動方程式を解く、である。1)-3)が図2におけるメインループを構成する。計量の発展は、3節、5.1節のテーマなので、ここではそれ以外の要素について解説する。

まず初期条件についてだが、これを与える上で注意すべき点は、アインシュタイン方程式には拘束条件(2),(3)が存在することである。つまり、それを満たす初期条件を与える必要がある。しかも、現実性を加味した物理的な仮定の下で拘束条件を解かなくてはならない。ただし物理的な仮定は問題によるので、問題ごとに異なる定式化が必要になる。それらについては、文献7で詳しく論じられている。

次に座標条件の決定だが、これは一般相対論が座標に依存しない(つまり絶対的な時間・空間座標は存在しない)ことを要求して構築された理論であるため必要となる。絶対時間が存在しないので、自分で時間軸を決めたり、時間一定となる空間面を張ったりしなければならない(図1参照)。もちろん何でも良いわけではなく、良質な座標の選択が必要となる。下手な座標を選ぶと、ある時刻から先の進化を追えなくなったり、得られた計算結果の物理的意味が理解不能になったりするからである。この選択法については、過去10年以上紆余曲折があったが、現在までにほぼ解決している。

物質が存在する場合には、それに対する運動方程式を解く必要がある。具体的には、一般相対論的流体方程式、場合によっては磁気流体方程式を解く必要がある。しかしこれは一般相対論だからといって特に困難があるわけではな

い。非相対論の場合と本質的には同じである。(数値解法に関しては、たとえば文献8を参照。)ただし、今のところニュートリノの輸送を考慮する、といった難問には手が付けられていない。これは今後の課題である。

主要な要素以外にも、重要な要素がある。まず、重力波の波形を計算することが要求される。このためには、計量から重力波を抽出するための定式化やその数値コードが必要となる。また、重力波は波動帯(重力波の波長よりもその源から離れた領域)で抽出されねばならないので、これを覆うような大きな計算領域を確保しての数値計算が要求される。つまり、大規模スーパーコンピュータが不可欠である。これについては5.3節で説明する。

ブラックホールの形成やその進化を追うのも、数値相対論における中心課題である。ブラックホールの存在を知るには、事象の地平線の存在の有無を決定する必要がある。また、ブラックホールの性質を知るには、事象の地平線の面積や形状などを調べることも必要となる。しかし、これらについてはすでに問題はほぼ解決しており、困難はない。むしろ、ブラックホールが存在する時空の時間発展を長時間追うことが難しい。その理由は、ブラックホール誕生後ある程度時間が経過した後に特異点が発生するからである。特異点では計量が発散するので、数値計算では取り扱えない。つまり、ブラックホール時空の時間発展を追うには、特異点を回避する手法が必要となる。これについては5.2節で説明する。

#### 5. 課題とその克服

##### 5.1 拡張された3+1形式

3節の最後で、「拘束条件は、初期に満たされていれば、発展方程式を正確に解き続ける限り、常に満たされる」と書いた。しかし数値計算では、誤差ゼロで方程式を解くことは不可能なので、拘束条件は必ず破れる。もっとも、その破れが目標とする精度に比べて小さければ問題とはならない。しかし、標準的3+1形式を採用すると、一般に拘束条件の破れが単調増加し、やがては数値計算を破綻させてしまう。拘束条件の保存が数値的に保証されるように定式化されていないからである。つまり、再定式化が必要となる。

最初にこの問題に気づいて、再定式化を行ったのが中村である。<sup>11)</sup>ここでは、その提案に沿った再定式化を紹介しよう。彼は、3+1形式が拘束条件付きの方程式系であることに着目し、さらに補助変数と拘束条件を増やすという定式化を1987年に発表した。具体的には、たとえば

$$F_i \equiv \delta^{jk} \partial_k \gamma_{ij}, \quad \Gamma \equiv \delta^{ij} \gamma_{ij}, \quad K \equiv K_{ij} \gamma^{ij} \quad (5)$$

の計5成分、新変数を定義する。そして、それを独立変数とみなし、発展方程式を導出する。また、 $\delta^{jk} \partial_k \gamma_{ij}$ や $\delta^{ij} \gamma_{ij}$ といった項は、発展方程式中に現れるが、それらを $F_i$ や $\Gamma$ を使って書き換える。この書き換えによって方程式の構造が変わり、拘束条件の破れが押さえられる。

中村は定式化後、線形重力波の伝播の数値計算を実行し、

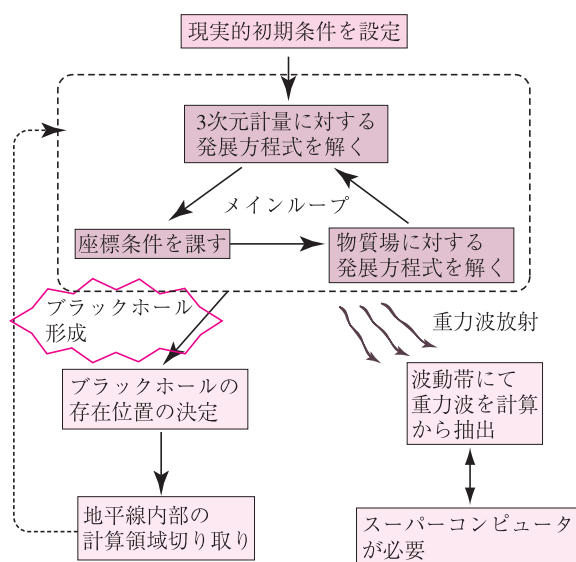


図2 数値相対論における流れ作業と必要な要素。



線形レベルではこの種の定式化が強力であることを世界で初めて示した。しかしその後研究が進み、ブラックホールの形成のような非線形性が重要になる問題への取り組みがなされるにつれ、その不十分さも判明した。それは以下の事情による。この再定式化では変数は増えるが、それと同数だけ拘束条件が増える。たとえば、 $\gamma_{ij}$  と  $\Gamma$  を独立に発展させるが、これらは新しい拘束条件  $\Gamma = \delta^{ij}\gamma_{ij}$  を満たさなくてはならない。つまり、元の拘束条件 (2), (3) の破れを防ぐために新たに 5 つ拘束条件を導入したが、その破れが今度は問題になる。これを防ぐにはさらなる再定式化が必要である。具体的には、計 9 つの拘束条件を用いて基礎方程式を書き換える作業が必要となる。この種の改良は、筆者、バウムガルテ (T. W. Baumgarte), アルクビエーレ (M. Alcubierre), ブリュグマン (B. Brügmann), 真貝らによってなされた。<sup>12)</sup>

これらの研究の結果、数値計算が長時間安定に実行できるような定式化が確立された。この種の新しい定式化は、BSSN (Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura) 形式と呼ばれ、現在世界で広く採用されている。

## 5.2 ブラックホールを切り取る

図 3 に、星の重力崩壊によって特異点 (波線) と見かけの地平線 (点線) が形成される時空の概念図を示した。<sup>\*2</sup> 実線が空間的超曲面を表し、その選び方は座標条件に依存する。左の図は、特異点を回避しない座標条件を用いた場合の空間的超曲面  $\Sigma$  の時間発展を表している。この場合、 $\Sigma$  上での曲率は至る所小さいが、真の特異点に衝突して計算が破綻する。一方、右の図では、 $\Sigma$  が特異点を回避するような条件を用いている。この場合、特異点は回避できるが、 $\Sigma$  上の曲率が特異点近傍で大きくなり、やがて座標特

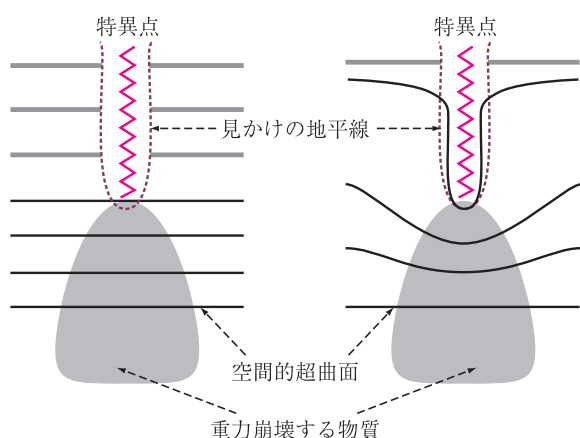


図 3 星の重力崩壊によって特異点 (波線) と見かけの地平線 (点線) が形成される時空の概念図。実線が空間的超曲面を表し、この配置は座標条件で決まる。(左) 特異点を回避しない座標条件を用いた場合。(右) 特異点を回避する条件を用いた場合。

<sup>\*2</sup> 事象の地平線の代わりとなる概念として、見かけの地平線があり、数値相対論では重用されている。その理由は、「見かけの地平線が存在すれば必ずその外側に事象の地平線が存在する」という定理が証明されているからである (ホーキング, 1971)。つまり、見かけの地平線が発見されれば、事象の地平線が存在していることになり、ブラックホールの存在が確認される。

異点が発生する。つまり、ブラックホールが存在する場合に、時空の全領域を数値計算で求めることを要求すると、物理的特異点か座標特異点のいずれかが現れ、数値計算は必ず破綻する。よって、何らかの処置が必要になる。

そこで、「ブラックホールの事象の地平線の外側には物理的な情報は伝わらない」という性質を利用する。つまり、事象の地平線の外側にだけ興味がある場合には、内側を切り取っても気にすることはない。切り取ってしまうと、物理的特異点も座標特異点も考慮せずに、数値計算を継続して実行できる。このアイデアは、1984年頃にアンルー (W. Unruh) によって提唱され、切り取り技法と呼ばれている。具体的には、見かけの地平線内のある面で切り取りを実行する。見かけの地平線の同定は事象の地平線よりも容易だし、また必ず事象の地平線の内側に存在するので、<sup>9)</sup> 事象の地平線の外側にだけ興味がある場合には、この取り扱いで許される。<sup>10)</sup> こういった技法が開発された結果、ブラックホールが存在する時空を継続的に追跡する数値計算が可能になりつつある (6 節参照)。

## 5.3 必要なコンピュータの性能

数値相対論における最重要課題は、連星系の合体過程を明らかにし、重力波の波形を求めることである。この問題では、大きく異なる 2 つの特徴的長さが存在する。1 つは重力波の波長、もう 1 つが星の半径である。重力波の伝播を波動帯まで追跡するには、十分に遠方まで格子を張る必要がある。一方、ブラックホールや中性子星に対して精度良い数値計算を実行するには、その半径当たりに十分な数の格子を張る必要がある。

では、必要な格子数を見積ろう。まず、ブラックホールや中性子星を分解するのに必要最小限の格子数を、半径当たりおよそ 15 としよう。ブラックホールの地平線の半径は、その質量を  $m$  とすれば、おおまかに  $2Gm/c^2$  程度である。よって格子幅は、約  $0.14Gm/c^2$  以下にする必要がある。中性子星の場合、半径が約  $5Gm/c^2$  なので、多少条件が緩やかになる。一方、格子は波動帯まで張らなくてはならない。連星系の合体の場合には、軌道半径が大きいほど重力波の波長や軌道周期は長くなるので、計算時間の節約上、数値計算は合体の直前から始める。その場合でも、連星の合計質量を  $M$  とすれば、波長は約  $50 \sim 70GM/c^2$  となる。よって最低でも、この程度の領域までは格子点を取らなくてはならない。簡単のため連星は等質量とし、 $M=2m$  としよう。正規直交座標を用いるとすれば、連星中性子星の場合に最低でも 1 方向当たり正負合わせて 600、3 方向では合計  $600^3$  の格子点が必要となる。同様にブラックホールの場合には約  $1,500^3$  の格子点が必要となる。数値相対論ではテンソル量の時間発展を計算するので、格子数だけでなく解くべき変数も多い。通常、定義すべき変数が約 200 にも及ぶ。1 変数当たりに必要なメモリが倍精度を要求すれば 8 バイトなので、連星中性子星の合体には、容量として 300 ギガバイト以上の、連星ブラックホールの場合には約 4 テラバイト以

上のメモリが必要である。また、1モデル当たり1カ月以内に計算が完了することが望まれる。ゆえに、演算速度が最低でも数百（連星ブラックホールには数千）ギガフリップス程度のスーパーコンピュータを要求しなくてはならない。

過去数年日本の宇宙物理学者の多くは、国立天文台所有の FACOM-VPP5000 を使用してきた。この計算機を用いれば、最大で 720 ギガバイトのメモリが使用できる。また演算速度も最速で 460 ギガフリップスである。つまり、現状でも連星中性子星の合体の数値計算を必要最小限度の精度で実行することは可能である。しかし、連星ブラックホールの合体を行うには不十分である。このためには一層強力なコンピュータが必要となる。

## 6. 数値相対論 2005

前節で述べたように、いくつかあった課題がここ数年でほぼ解決した。その結果、様々な数値計算が実行可能になった。特に 2005 年度に興味深い結果がいくつか発表されたので、この節ではそれらを紹介する。

### 6.1 連星中性子星の合体

連星中性子星は、2回の超新星爆発の結果、形成される。その後、重力波を放射しながら軌道半径をゆっくりと縮めていき、やがて合体に至る。<sup>5)</sup>そして、ブラックホールか中性子星が形成される。連星中性子星の合体は良質の重力波源と考えられている。それは、1) 十分な数の合体を検出可能と予想できること、<sup>\*3</sup> 及び 2) 重力波の波形が、他の重力波源に比べて格段に予想しやすいこと、の 2つの理由による。ただし、検出のためには波形の全貌を理論的に予想することが求められている。特に合体時の波形を明らかにするには、如何なる近似も適用できないため、数値相対論によるシミュレーションが必要となる。

また、連星中性子星合体後にブラックホールと降着円盤からなる系が形成されるならば、それは $\gamma$ 線バーストの発生源になるのではないかと推測されている。その推測を強固なものにするには、数値シミュレーションによって仮説を実証する必要がある。したがって、数値相対論によるシミュレーションがここでも必要となる。

連星中性子星の合体の一般相対論の数値計算は、我々によって初めてなされた。<sup>14)</sup>ここではその最新の結果を紹介しよう。<sup>15)</sup>

数値計算を行うには、次のような手順を踏む。まず中性子星をモデル化するのにふさわしい適切な状態方程式を決める。標準的には、原子核理論に基づいた現実的とされる状態方程式を採用する。<sup>16)</sup>初期条件としては、35 km 程度の軌道半径を選んで、(回転系で見て)平衡状態にある連星

<sup>\*3</sup> 連星中性子星の合体は、1つの銀河内でおよそ1万~10万年に1回起こると推定される。<sup>13)</sup> LIGO に代表される地上重力波検出器<sup>3)</sup>の最終目標感度が達成されれば、我々から約300 Mpc 以内の距離にある連星中性子星の合体は検出可能である。よって、その半径内にあるすべての銀河を考慮すれば、年間10~100回程度、合体が検出可能と予想される。<sup>13)</sup>

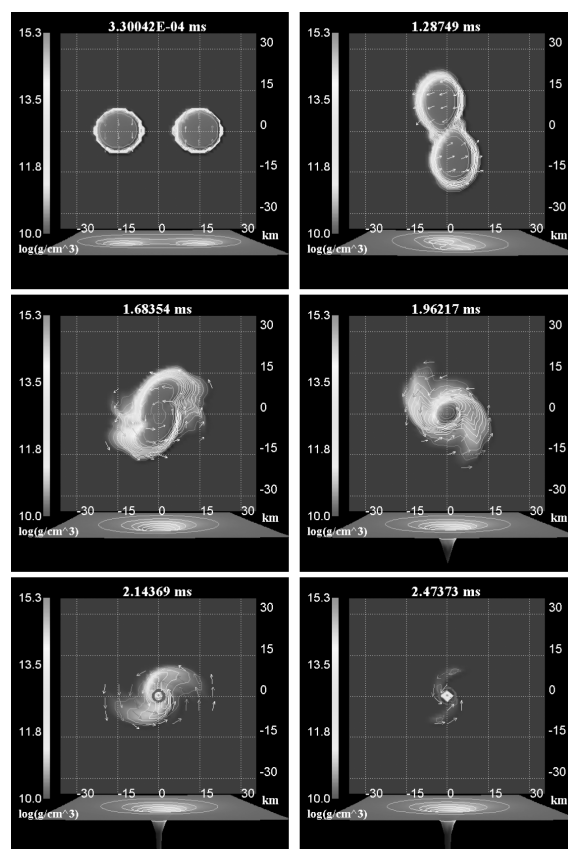


図4 共に質量が  $1.5M_{\odot}$  の連星中性子星が合体しブラックホールを形成する様子。密度等高線(上段)とラプス関数 ( $\log \alpha$ ) の鳥瞰図(下段)を描いている。経過時間はミリ秒 (ms) 単位で示されている。なお、合体直前の連星の軌道周期は 1.84 ms である。最初のパネルが初期の形状を表す。最終的にブラックホールが形成されるが、最後の2枚のパネルの中心の円が見かけの地平線を表す。(図は関口雄一郎氏によって作成された。表紙にカラーの図が掲載。)

中性子星を初期条件として与える。なお、平衡状態の数値計算法は瓜生、ググニョン (E. Gourgoulhon)、谷口らによって確立された。<sup>17)</sup>

軌道半径 35 km 程度の初期条件を与えると、連星は計算開始後1周して合体へと至る。図4, 5に、そのような設定で実行した最新の計算結果を示す。<sup>15)</sup>共に、軌道面上での密度分布(表紙カラー図における赤色が、密度が高い部分を表す)とラプス関数 ( $\ln \alpha$ ; この値が小さいほど重力が強い)の鳥瞰図を表示している。図4は、共に  $1.5M_{\odot}$  ( $M_{\odot}$  は太陽質量を表す)の中性子星からなる連星の、図5は、共に  $1.3M_{\odot}$  の場合の結果である。この例では、パンダリパンデ (Pandharipande) らによって導出された状態方程式を用いて、中性子星をモデル化している。<sup>16)</sup>この状態方程式では、球対称の中性子星の最大質量は約  $2.18M_{\odot}$  である。

$1.5M_{\odot}$  同士の合体では、計算開始約1周後に合体が始まり、その約 0.2 ms 後 ( $t=2.04$  ms) にブラックホールが形成される。合体で形成された天体が重力崩壊していく様子、及び中心でラプス関数が速やかにゼロに近づく様子が分かる。最後の2枚のパネルの中心に描かれた円が、見かけの地平線を表す。最終的にはこの中に、全質量の 99.9% 以上が飲み込まれる。その結果、ブラックホール周りに形成さ

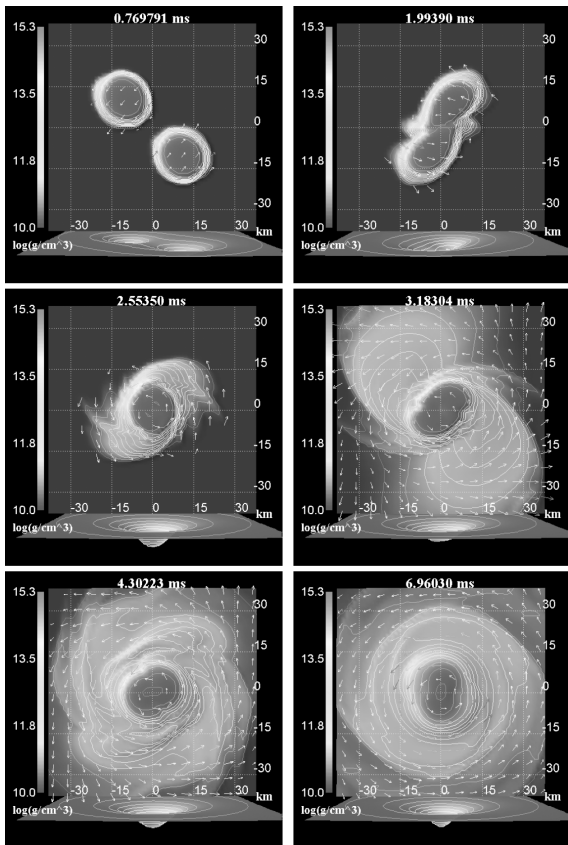


図5 図4と同様。ただし共に質量が $1.3M_{\odot}$ の場合。大質量の中性子星が誕生する。この場合、合体直前の連星の軌道周期は2.06 msである。

れる降着円盤の質量は微小 ( $0.0005M_{\odot}$ ) である。また、形成されたカーブラックホールの質量はおよそ  $2.9M_{\odot}$ 、スピンパラメータ  $a$  (質量  $M$  と角運動量  $J$  から  $cJ/GM^2$  と定義される無次元量) はおよそ 0.75 である。なお、見かけの地平線誕生後は、切り取り技法 (5.2 節参照) を採用し、計算を行った。このおかげで、ブラックホール誕生後も計算が継続され、物質が飲み込まれ尽くす様子が明らかにできる。

$1.3M_{\odot}$  同士の合体では、ブラックホールではなく大質量の中性子星 (Hypermassive neutron star; 以後 HMNS) が形成される。これは  $1.5M_{\odot}$  同士の場合に比べて、全質量がやや小さいためである。それでも全質量はおよそ  $2.6M_{\odot}$  である。球対称中性子星の最大質量が  $2.18M_{\odot}$  なので、そのような重い HMNS が存在できるのか、と疑問に思うかもしれないが、可能なのである。なぜならば、合体前に存在した軌道角運動量がそのまま自転角運動量となるため、大きな遠心力が働くからである。

誕生した HMNS は楕円体の形状を持つ。これは、大きな回転角運動量を持つため、回転運動エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーの比  $|T/W|$  が大きいからである (この比が 0.14 を超えるような回転星は非軸対称形状を持ち得ることが知られている<sup>18)</sup>)。楕円体形状は 4 ms 以降保たれる。すなわち、このモデルでは、準定常状態にある回転楕円体形中性子星が形成される。以下で述べるように、これは強力な準周期的重力波源になる。

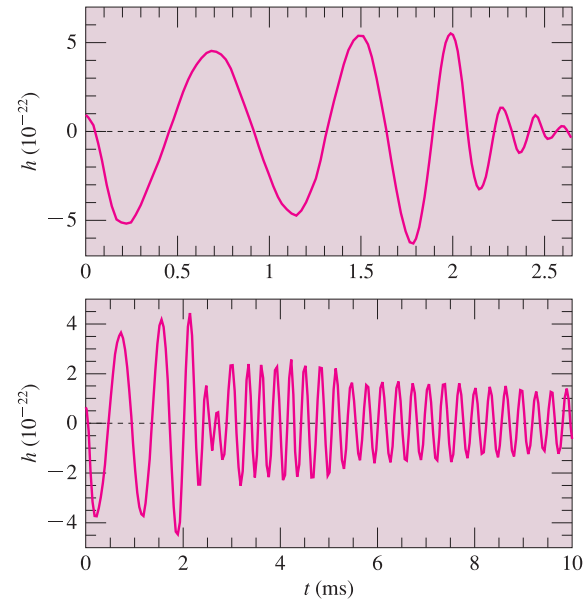


図6 (上) 連星中性子星が合体し、ブラックホールが誕生する場合の重力波の波形。(下) 連星中性子星が合体し、大質量の中性子星が誕生する場合の重力波の波形。共に重力波源までの距離を 50 Mpc として、プラスモードのみを示した。クロスモードの場合、45度位相がプラス方向にずれる。

## 6.2 合体における重力波放射

図6(上)に、ブラックホールが誕生する場合の波形を、図6(下)に中性子星が誕生する場合の波形を示す。両図とも約2 ms以前の波形が、連星中性子星の軌道運動による波形の一部を、それ以後が合体時の波形を表す。図4, 5から分かるように、合体が始まると2つの中性子星は融合し、非軸対称性の度合いが小さくなる。その結果、重力波の振幅は小さくなる。また半径が縮むため、自転角速度が増大する。この効果のために、重力波の周波数が急激に高くなる。ブラックホールが誕生する場合には、合体後、ブラックホールの準固有振動に付随した重力波が放射される。これは、 $A$  を振幅、 $\tau$  を減衰時間、 $f$  を周波数、 $\delta$  を位相の自由度として  $A \exp(-t/\tau) \sin(2\pi ft + \delta)$  の形で表すことのできる減衰振動波だが、図5の最後 (この例では  $t \geq 2.35$  ms) に見られる。この場合、 $f \approx 6.5$  kHz、 $\tau \approx 0.18$  ms である。これらの値は、 $M \approx 2.9M_{\odot}$ 、 $a = 0.75$  とした場合の理論値に一致する。<sup>19)</sup>

HMNS が誕生する場合、それは高速回転している上に、非軸対称形状を持つ。そのため、合体後、大きな振幅を持った準周期的重力波が、放射される (図6下図)。 $t \approx 3$  ms 以降長時間にわたり、約 3~3.5 kHz の周波数を持つ重力波が放射されるのが特徴である。この例では  $t \approx 10$  ms 程度で計算を打ち切ったが、その時点でも重力波は減衰していない。つまり、10 ms 以上連続的に放射される。

放射が続くので、HMNSの回転角運動量は徐々に失われる。十分な散逸後に回転による遠心力が弱まり、HMNSはやがてブラックホールに重力崩壊すると予想される。重力崩壊までにかかる時間は、回転エネルギーを重力波放射光度で割ることによって、大雑把に評価できる。このモデルでは、それは約 50 ms である。つまり、数十 ms 後に重力崩



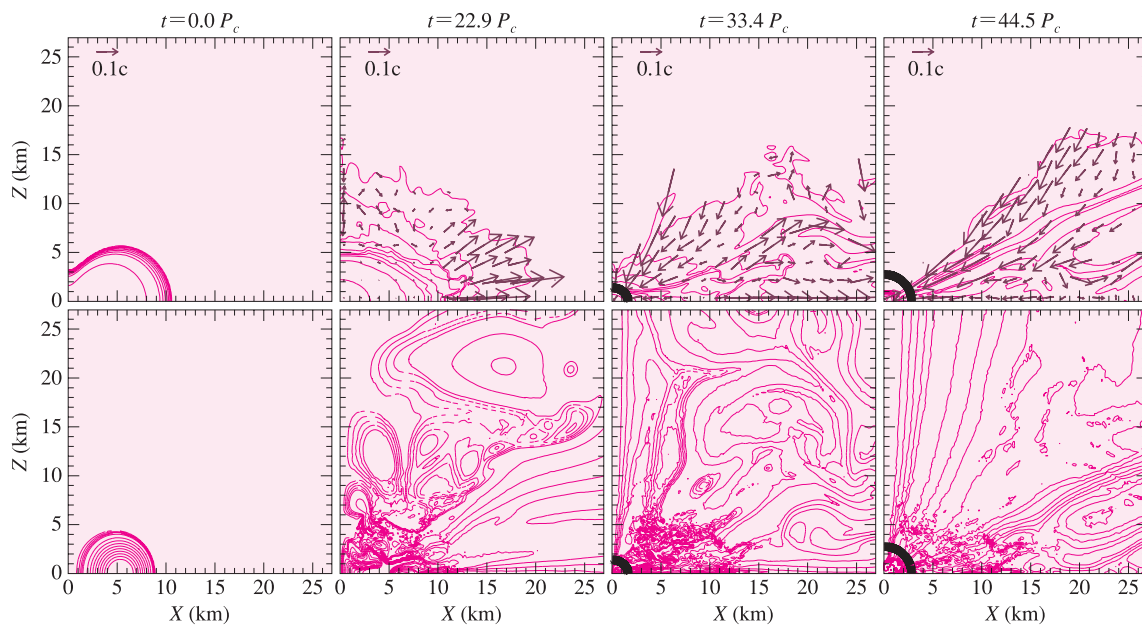


図7 差動回転する大質量中性子星 (HMNS) が、磁気流体効果によってブラックホールへと重力崩壊する様子.  $x$ - $z$  面の密度等高線 (上段) と磁力線 (下段) の進化を描いている. 時間の単位は初期に与えた HMNS の中心での回転周期  $P_c$  で、今の場合  $P_c=0.2$  ms である. 最後の2つの時間ステップにおける中心付近の円が、見かけの地平線を表す.

壊が起こり、同時に準周期的重力波の放射もやむと予想される. したがって、周波数が約 3 kHz の重力波が、およそ 100~200 サイクル放射される. そのためフーリエ変換を実行すれば、高い特徴的ピークが約 3 kHz に現れる. その実効振幅は、重力波源までの距離を  $D$  として

$$h_{\text{eff}} \sim 5 \times 10^{-21} \left( \frac{50 \text{ Mpc}}{D} \right) \quad (6)$$

と近似的に書ける. このような振幅の重力波は次期 LIGO で検出可能かもしれない. もしもこれが検出されれば、HMNS 誕生の証拠が得られるであろう.<sup>20)</sup>

### 6.3 強磁場大質量中性子星の運命

中性子星は、一般的に強磁場を持つ. したがって、連星中性子星の合体後に誕生する HMNS も強磁場を持つはずである. 仮にその磁場強度が極めて大きい場合、重力波で角運動量散逸が起きなくても、磁場の影響でブラックホールへと重力崩壊する可能性がある. それは、1) 合体後に誕生する HMNS は、剛体回転ではなく差動回転することが分かっていること、また 2) 差動回転している場合、HMNS の内部で内側から外側へと角運動量輸送が磁場を介して起こり、中心部の遠心力が弱められること、による. ここで、角運動量輸送の特徴的時間スケールは、磁場の大きさにだいたい反比例する. よって、初期に磁場が強く、その時間スケールが 50 ms 以下の場合には、十分な重力波放射が起こる前にブラックホールへと重力崩壊すると予想される.

この過程を明らかにするには、一般相対論的磁気流体計算が必要であるが、最近それも可能になった.<sup>21)</sup> 図7に、HMNS が磁気流体効果で、ブラックホールへと重力崩壊する様子を示す. 図には、HMNS の  $x$ - $z$  平面での密度分布 (上段) と磁力線 (下段) の進化を与えている. この例では、初期に約  $5 \times 10^{12}$  テスラの強磁場の存在を仮定している.

ただしこのような強磁場でも、磁気圧力は中性子星の縮退圧に比べればはるかに小さい.

この場合、角運動量輸送の時間スケールは約 10 ms である. それゆえ、最初の数ミリ秒で、角運動量輸送は徐々に進む (図7の2枚目のパネル). その結果星から物質が少しずつ放出される. またそれに伴い、最初に局在していた磁場が外に広がる. 角運動量輸送の結果、中心付近の角運動量が減少し、遠心力が弱められ、HMNS は重力崩壊する (3枚目のパネル). この場合、重力崩壊は 7 ms 程度で起こる.

角運動量輸送が起こるので、外側に存在する物質に角運動量が運ばれ、誕生したブラックホール周りに降着円盤が形成される (3, 4枚目のパネル). 降着円盤内にも磁場が存在するので、角運動量輸送は継続的に起こる. その結果、降着円盤からブラックホールへと物質が落下し続ける. また降着円盤内で角運動量輸送が起こるのに付随して、衝撃波が発生し、降着円盤は熱せられ、1,000 億度 K を超えるような高温になる. こういった降着円盤からは、ニュートリノ ( $\nu$ ) や反ニュートリノ ( $\bar{\nu}$ ) が大量に放射されると考えられる. またその放射は、降着円盤の形状のせいで、回転軸方向に重点的に起こると推測される. すると回転軸近傍では、 $\nu\bar{\nu}$  の対消滅が起こり、大量の電子・陽電子対、及び  $\gamma$  線が生成されると推測できる. また重力崩壊後、回転軸方向に絞られた形状の磁場が形成される. こうした磁場は、絞られたジェットを発生させるのに都合が良いとされている. よって、強磁場の HMNS が重力崩壊して誕生したブラックホールと降着円盤からなる系は、継続時間の短い  $\gamma$  線バースト源になっているかもしれない.<sup>22)</sup>

### 6.4 連星ブラックホールの合体

連星ブラックホールは、連星中性子星と並んで、最も有望な重力波源の1つである. 特に合体時に放射される重力

波が検出可能と予想される。この重力波には、ブラックホール同士の相互作用の過程や合体で新たに形成されるブラックホールに関する情報が豊富に含まれているであろう。したがって、重力波を捕らえることによってブラックホールの存在の直接的証拠を得たり、また曲がった時空の直接的観測がなされると期待できる。

重力波を捕らえるには理論的に波形を計算しておかなければならない。これには、数値相対論によるシミュレーションが要求される。ところが、連星ブラックホールに対する数値計算は易しくない。なぜならば、5.2節で述べた切り取り技法は、高速で動くブラックホールに対しては完全には確立しておらず、また連星ブラックホールの合体の数値計算に必要なコンピュータ資源がまだ十分でない(5.3節参照)からである。

しかし昨年夏に、連星ブラックホールの合体の計算を成功させた、という報告がプレトリアス(F. Pretorius)によってなされた。<sup>23)</sup> 彼は、合体に伴って放射される重力波の波形を、世界で初めて計算した(図8)。その後複数のグループからも、数値計算を成功させたという報告がなされたが、<sup>24, 25)</sup> 最初に成功させた事実とより優れたその数値コードに敬意を払って、彼の研究内容のみを紹介する。

彼はまず、標準的3+1形式に一般化されたハーモニク条件を座標条件として課す定式化を考案した。つまり、3+1形式の発展方程式を改良する手段を取らず、座標条件を改良して、拘束条件の破れの問題を独自に解決した。またこれによって、ブラックホール切り取り境界近くにこれまでよりも優れた境界条件を課すことを可能にした。その結果、高速で動くブラックホールに対しても切り取り技法が適用できるようになったようである。また、多層格子法と呼ばれる計算技術を用いて、ブラックホール近傍における計算精度を向上させるとともに、波動帯まで格子を張ることを可能にした。

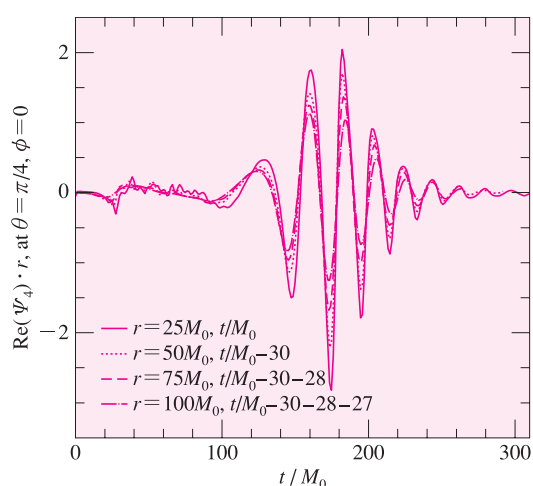


図8 等質量の連星ブラックホールの合体による重力波。プレトリアスによる。<sup>23)</sup>  $M_0$  は連星ブラックホール時空の全質量の初期値を表す。横軸の時間は、 $GM_0/c^3$  を単位に示されている。 $\Psi_4$  は重力波の時間2階微分に相当する。 $t/(GM_0/c^3) \geq 200$  の波形は、ブラックホールの準固有振動の励起による減衰振動を表す。各曲線は、異なる半径で抽出された重力波の波形を表す。

現段階では、現実的ではない初期条件を用意した点において計算は不満足ではあるが、合体前の軌道運動から合体後ブラックホールが定常状態に落ち着くまで、長時間にわたって見事に計算がなされている。今後現実的な初期条件から始めることによって、より現実的な合体の様子を明らかにするものと期待される。特に今後は、スピンが存在するブラックホールの合体を明らかにすることが期待される。ブラックホールは一般的には、スピンを持つと考えるのが自然である。さらに連星ブラックホールにおいて、スピンや軌道角運動量の方向は一致しないと考えるのも自然である。その場合、軌道面の複雑な歳差運動が起きる。こういった現象は一般相対論の非線形性ゆえに現れる特徴的な現象なので、数値計算でその様子を明らかにすることが望まれている。

現段階では計算機資源に限界があるため、彼の数値計算は十分な分解能で行われていないことを指摘しておかねばならない。これは図8において、異なる半径で得られた重力波の振幅が完全に一致していないことから分かる。しかし、精度が十分でないこの計算を行うのにも、数カ月の計算時間を要したと聞く。これでは、考え得る多数のパラメータに対して系統的に計算を実行することは不可能である。特に重力波検出器で重力波を捕らえるときに必要とされるテンプレート(波形のカタログ)<sup>9)</sup>を作成するには、系統的なパラメータサーベイが必要である。そのためには、コンピュータの性能の向上を待つ必要がある。

## 7. 今後の課題

本稿で紹介したように、一般相対論的な数値計算を実行して様々な天体現象を理論的に明らかにすることが可能になりつつある。これまでは定式化や数値コードの開発に重点が置かれていたが、今後は現実的計算を行い、天体現象を予言したり、重力波の波形を求めたりすることが主たる研究テーマになる。ただ残された課題もある。たとえば、1) より精度の高い計算を実行可能にし、質の良い重力波のテンプレートを作成可能にすること、2) 中性子星とブラックホールの合体のようにまだ手つかずの課題に取り組むこと、3) ニュートリノの輻射輸送など重要なことが分かっているが考慮できていない効果を取り入れること、などである。

日本に限って言えば、この分野の研究者を増やすことも重要な課題の1つである。日本でも重力波検出器は稼働しているし、また高エネルギー天文学は最も活発な分野の1つである。よって数値相対論の役割は増しているのだが、アメリカやヨーロッパに比べてその研究者の数は1桁以上少ない。(数え方にもよるが、現在日本人の数値相対論研究者は実質的には2名である。)面白い題材がたくさん存在する状況なので、今後大学院生やポスドクが、この分野に積極的に参入してくれることを願っている。



## 参考文献

- 1) I. H. Stairs: *Science* **304** (2004) 547.
- 2) たとえば, J. H. Taylor: *Phil. Trans. R. Soc. London* **341** (1992) 117.
- 3) 重力波検出器, アメリカの LIGO, 日本の TAMA300, ドイツ・イギリス共同の GEO600, フランス・イタリア共同の VIRGO に関しては, それぞれ, <http://www.ligo.caltech.edu/>, <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/>, <http://www.geo600.uni-hannover.de/>, <http://www.virgo.infn.it/> を参照して欲しい.
- 4) 中村卓史, 山崎 了: *日本物理学会誌* **60** (2005) 271.
- 5) たとえば, 柴田 大: *日本物理学会誌* **53** (1998) 581.
- 6) J. W. York, Jr.: in *Sources of Gravitational Radiation*, ed. L. Smarr (Cambridge Univ. Press, 1979) p. 83.
- 7) G. B. Cook: *Living Reviews in Relativity* **3** (2000) 5, <http://relativity.livingreviews.org/Articles/>.
- 8) J. A. Font: *Living Review Relativity* **3** (2000) 2, <http://relativity.livingreviews.org/Articles/>.
- 9) S. W. Hawking and G. F. R. Ellis: *Large Scale Structure of Spacetimes* (Cambridge Univ. Press, 1973).
- 10) M. Alcubierre and B. Brügmann: *Phys. Rev. D* **63** (2001) 104006.
- 11) T. Nakamura, K. Oohara and Y. Kojima: *Prog. Theor. Phys. Supplement* **90** (1987) 1.
- 12) M. Shibata and T. Nakamura: *Phys. Rev. D* **52** (1995) 5428; M. Shibata: *Prog. Theor. Phys.* **101** (1999) 251; T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro: *Phys. Rev. D* **59** (1999) 024007; M. Alcubierre, *et al.*: *Phys. Rev. D* **61** (2000) 041501; H. Shinkai and G. Yoneda: *Phys. Rev. D* **66** (2002) 124003.
- 13) V. Kalogera, *et al.*: *Astrophys. J.* **601** (2004) L179; **614** (2004) L137.
- 14) M. Shibata and K. Uryū: *Phys. Rev. D* **61** (2001) 064001; *Prog. Theor. Phys.* **107** (2002) 265; M. Shibata, K. Taniguchi and K. Uryū: *Phys. Rev. D* **68** (2003) 084020; **71** (2005) 084021.
- 15) M. Shibata and K. Taniguchi: *Phys. Rev. D* **73** (2006) 064027.
- 16) たとえば, A. Akmal, V. R. Pandharipande and D. G. Ravenhall: *Phys. Rev. C* **58** (1998) 1804; F. Douchin and P. Haensel: *Astron. Astrophys.* **380** (2001) 151.
- 17) K. Uryū, M. Shibata and Y. Eriguchi: *Phys. Rev. D* **62** (2000) 104015; K. Taniguchi and E. Gourgoulhon: *Phys. Rev. D* **66** (2002) 104019.
- 18) S. Chandrasekhar: *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Yale Univ. Press, New Haven, 1969).
- 19) E. W. Leaver: *Proc. R. Soc. London A* **402** (1985) 285.
- 20) M. Shibata: *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 201101.
- 21) M. D. Duez, Y. T. Liu, S. L. Shapiro and B. C. Stephens: *Phys. Rev. D* **72** (2005) 024028; M. Shibata and Y.-I. Sekiguchi: *Phys. Rev. D* **72** (2005) 044014; M. D. Duez, *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 031101.
- 22) M. Shibata, *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 031102.
- 23) F. Pretorius: *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 121101.
- 24) M. Campanelli, *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 111101. J. G. Baker, *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 111102. F. Herrmann, *et al.*: gr-qc/0601026: これらの論文で紹介された数値コードは, ブラックホールの切り取りを回避できるような限定された問題設定でのみ使用可能である. 一方, プレトリアスのコードは如何なる問題設定に対しても適用可能である点で優れている.
- 25) P. Diener, *et al.*: gr-qc/0512108.

## 著者紹介



柴田 大氏: 専門は宇宙物理学理論。特に, 数値相対論, 連星中性子星の合体, 原始ブラックホールから超巨大ブラックホールまでに至る様々な質量のブラックホールの形成, 重力波の放射などに関する研究を行っている。

(2006年2月13日原稿受付)

## Latest Progress in Numerical Relativity

### Masaru Shibata

abstract: Einstein's equations are nonlinear, partial differential, and simultaneous. It is impossible to derive an analytic solution which describes a dynamical phenomenon in nature. However, it has been required to develop a method for the solutions to clarify general relativistic astrophysical phenomena which can be observed by large telescopes and detectors. The field which develops methods for numerically solving Einstein's equations is referred to as "Numerical relativity." In this article, I first explain the reason that the numerical relativity is needed and its outline. Then, the latest progress is reviewed focusing particularly on the results obtained in 2005.