

Wilson 的繰りこみ群による多様体の変形

大阪大学大学院 理学研究科 物理学専攻 素粒子論研究室

伊藤 悦子^{1*}

Abstract

2次元の場の理論に $N=2$ の supersymmetry を課したとき、non-trivial な相互作用をもつ最も簡単な模型は target space が Kähler 多様体になる non-linear σ model である。この論文では、この模型について Wilson 的繰りこみ群による解析を行った。これによって今まで知られていた摂動論や Large N 展開では扱うことの難しかった場合も扱えるようになり、一般的な Einstein Kähler 多様体の、半径の逆数に対応するパラメーターに対して β 関数を求め、理論の漸近的自由性を示した。また、global 対称性の異なる2つの多様体をつなぐ繰りこみ群の flow を得ることに成功した。さらに3次元の場合にも拡張し、non-trivial な相転移点が見られる例をみつけた。

*E-mail: itou@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

目次

1	Introduction	3
2	Wilson 的繰りこみ群と近似法	4
3	2次元 real scalar 場だけの理論	9
3.1	Riemann Normal Coordinate(RNC)	9
3.2	繰りこみ群方程式	13
4	2次元 N=2 の場合	17
4.1	2次元 complex scalar 場だけの理論	17
4.2	Supersymmetric Non-linear σ model(SNL σ M)	18
4.3	SNL σ M の Wilson 的繰りこみ群方程式	20
4.4	応用例 ; CP^{N-1} model と Q^{N-2} model	25
4.5	一般的な Einstein Kähler 多様体	29
5	異なる対称性を持つ多様体間の移り変わり	32
6	3次元の場合	36
6.1	一般的な Einstein Kähler 多様体	36
6.2	4つの相をもつ例	40
7	まとめ	42
A	繰りこみ群方程式の詳しい計算	44
B	CP^{N-1}, Q^{N-2}model の metric & Ricci tensor の導出 (詳しい計算)	52
C	Kähler normal coordinate(KNC)	56

1 Introduction

4次元の場の理論に $N=1$ の supersymmetry を入れることは、統一理論の階層問題が解けるなど、様々な利点がある。このような4次元 $N=1$ の理論は2次元に dimensional reduction すると、 $N=2$ の理論になりこの2つの理論はよく似た性質を示す一方、2次元の方が繰りこみ可能性などから扱いやすいことが多い。

この論文ではこの2次元 $N=2$ の supersymmetry をもつ、non-linear σ model (NL σ M) について考える。この2次元 $N=2$ の NL σ M とは理論に supersymmetry を課したとき non-trivial な相互作用のある最も簡単な模型となっていて、そのとき、scalar 場で張られる空間 (target space) は Kähler 多様体となっている。この model については既に摂動論や Large N 展開によってよく調べられている [1][2][3]。しかし、摂動論では coupling constant が大きい場合は扱えず、また Large N 展開では N の小さいところが扱えないという欠点もある。そこでこの model に対する新しいアプローチとして、この論文では Wilson 的繰りこみ群の方法を用いて解析した。この方法では理論に課す対称性を決めたととき、その対称性の下で許されるすべての相互作用項を含む action に対して厳密な繰りこみ群方程式を得ることができる。この解析を行った結果、摂動論では扱うのが難しい繰りこみ不可能な理論を扱うことができたり、同じ非摂動論的解析である Large N 展開より良い近似解が得られたりすることがわかった。

この論文の構成は次の通りである。まず、2章で Wilson 的繰りこみ群方程式の導出と、そのとき使える近似法について述べる。3章では、4章の2次元 $N=2$ の理論の解析に対する準備として、2次元 real scalar 場の NL σ M について繰りこみ群方程式の具体形を求める。4章では、目的である2次元 $N=2$ の NL σ M について、繰りこみ群方程式を求める。特に §4.4で CP^{N-1} model や Q^{N-2} model について、coupling constant の β 関数を求め、他の方法で知られている結果と比較を行う。また、§4.5ではその繰りこみ群方程式から、一般的な Einstein Kähler 多様体の場合について β 関数を得ることに成功した。5章では新しいモデルをつくり、 CP^N model と Q^N model をつなぐような繰りこみ群の流れを得る。最後に6章では摂動論的に繰りこみ不可能な理論である、3次元の NL σ M についての議論を行う。

2 Wilson 的繰りこみ群と近似法

ここでは Wilson 的繰りこみ群方程式 (Wegner-Houghton equation) を一般的な action を使って導出する [4] [5] [6]。独立な場 Ω^i で作られる D 次元 Euclidean QFT を考える。理論はあるエネルギースケール Λ 以上の運動量の自由度が繰り込まれていて、さらに繰り込んだ Schwinger 関数の生成汎関数 $Z[J]$ はカットオフ Λ に依らないと仮定する。つまり

$$\frac{d}{d\Lambda} Z[J] = 0 \quad (2.1)$$

である。

一般に生成汎関数 $Z[J]$ は経路積分で、

$$Z[J] = \int [d\Omega]_{\Lambda} \exp \left[-S[\Omega; \Lambda] + \int d^D x J_i \Omega_i \right] \quad (2.2)$$

と表現できる。

ここで、最も一般的な作用 $S[\Omega; \Lambda]$ は $\Omega_i = \Omega(p; \Lambda)$ を使って、

$$S[\Omega; \Lambda] = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_n} \hat{\delta}^{(D)}(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) g_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p_1, \dots, p_n; \Lambda) \Omega_{i_1}(p_1; \Lambda) \cdots \Omega_{i_n}(p_n; \Lambda) \quad (2.3)$$

この $g_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p_1, \dots, p_n; \Lambda)$ は coupling constant であり微分を含む相互作用の時はあらわに運動量 p をふくむ。また、場 Ω のフーリエ変換は、

$$\Omega(x) \equiv \int_p \Omega(p) e^{-ipx} \quad (2.4)$$

で定義した。さらに、記号として

$$\int_p = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \quad (2.5)$$

$$\hat{\delta}^{(D)} = (2\pi)^D \delta^{(D)} \quad (2.6)$$

を使う。この運動量 p の積分領域は、大きさが $0 < p < \Lambda$ までの球対称な領域である。

このカットオフ Λ で定義されている場の中で、エネルギースケール $\Lambda(\delta t) = \Lambda e^{-\delta t}$ から Λ までの運動量 (運動量空間の球殻部分に値をもつため Shell momentum と呼ぶ) を持つ場 (Ω_s) の汎関数積分を行う。

$$Z[J] = \int [d\Omega]_{\Lambda(\delta t)} \int [d\Omega_s] e^{-S[\Omega + \Omega_s; \Lambda]} \quad (2.7)$$

$$= \int [d\Omega]_{\Lambda(\delta t)} \int [d\Omega_s] e^{-\left(S[\Omega; \Lambda] + \frac{\delta S}{\delta \Omega_i} \Omega_s^i + \frac{1}{2} \Omega_s^i \frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \Omega_s^j + O(\Omega_s^3) \right)} \quad (2.8)$$

$$= \int [d\Omega]_{\Lambda(\delta t)} e^{-\left(S[\Omega; \Lambda] + \frac{1}{2} \int_{p'} \text{tr} \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \right)} \quad (2.9)$$

ここで p', q' は Shell momentum であり、 $\int_{p'} \sim (\delta t)$ となるので $(\delta t)^3$ 以上になる、 Ω_s^3 以上の項は無視できる。

生成汎関数はカットオフに依らないことから、この式 (2.9) がカットオフ $\Lambda(\delta t)$ で定義されている生成汎関数;

$$Z[J] = \int [d\Omega]_{\Lambda(\delta t)} e^{-S[\Omega; \Lambda(\delta t)]} \quad (2.10)$$

と等しいとおけるので、ここから指数部分を比較し action のエネルギースケールに対する微分方程式を求め。ここで $S[\Omega; \Lambda(\delta t)]$ は場も coupling constant もエネルギースケール $\Lambda(\delta t)$ で定義されている作用；

$$S[\Omega; \Lambda(\delta t)] = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_n} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_n) g(\Lambda(\delta t)) \Omega_{i_1} \cdots \Omega_{i_n} \quad (2.11)$$

である。

すると式 (2.9) の指数部分第 1 項目；

$$S[\Omega; \Lambda] = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_n} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_n) g(p_1, \cdots, p_n; \Lambda) \Omega_{i_1} \cdots \Omega_{i_n} \quad (2.12)$$

と式 (2.10) の差

$$\begin{aligned} S[\Omega; \Lambda(\delta t)] - S[\Omega; \Lambda] &= \sum_n \frac{1}{n!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_n} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_n) [g(\Lambda(\delta t)) - g(\Lambda)] \Omega_{i_1} \cdots \Omega_{i_n} \quad (2.13) \\ &= -\delta t \sum_n \frac{1}{n!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_n} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_n) \left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} g(\Lambda) \right] \Omega_{i_1}(p_1) \cdots \Omega_{i_n}(p_n) \\ &= \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \quad (2.14) \end{aligned}$$

より $\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} g(\Lambda)$ がわかる。この

$$\frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \quad (2.16)$$

の各項は、ダイアグラムでかくと <図 1> <図 2> のように、それぞれ場 Ω_s を内線とした、1 ループダイアグラムとダンベル型ダイアグラムになっている。

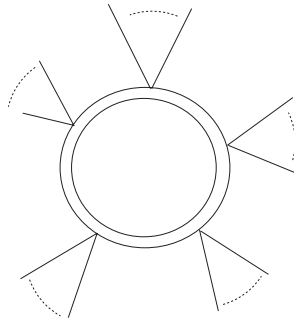


図 1: ループダイアグラム

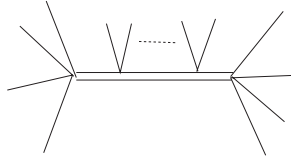


図 2: ダンベル型ダイアグラム

ここで、2重線は高い運動量を持つ Ω_s の場であり、1本線は外線となる低い運動量を持つ Ω の場を表す。

また、coupling constant が運動量にあらわに依っている時は、

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} g(\Lambda) = \Lambda \frac{d}{d\Lambda} g(\Lambda) - \sum_i p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} g(\Lambda) \quad (2.17)$$

となる。しかし、実際にはエネルギースケールを変化させると、このようなループ補正による coupling の変化だけでなく、場の次元が anomalous な次元によって rescale されることによって、coupling constant の次元も変化をうける。具体的にはエネルギースケール $\Lambda(t)$ での coupling constant は、

$$[g(\Lambda(t))] = (\Lambda e^{-t})^{dim[g]} \hat{g} \quad (2.18)$$

とかける。ここで、エネルギースケールを $\Lambda(t)$ に変化させたときの、coupling constant g の次元は $dim[g] = [\text{理論が定義されている次元}(D) - (\text{場の canonical} + \text{anomalous な次元})]$ である。 \hat{g} は無次元化した coupling constant。

するとこの次元の変化も考慮に入れたとき $\Lambda \frac{d}{d\Lambda} g(\Lambda)$ は

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} g = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} g - [D - (\text{場の canonical} + \text{anomalous な次元})] g + \sum_i p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} g(\Lambda) \quad (2.19)$$

となる。

さらにこの rescaling part、

$$[D - (\text{場の canonical} + \text{anomalous な次元})] g \quad (2.20)$$

の部分は場も coupling constant も無次元化した action;

$$\hat{S} = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{p_1} \cdots \int_{p_n} \hat{\delta}(p_1 + \cdots + p_n) \hat{g} \hat{\Omega}_{i_1} \cdots \hat{\Omega}_{i_n} \quad (2.21)$$

を使って

$$\left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) \left(d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S} \quad (2.22)$$

と書ける。これと式(2.14)を使って action に対する微分方程式

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} S &= \frac{-1}{\delta t} [S[\Omega; \Lambda(\delta t)] - S[\Omega; \Lambda]] - \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) \left(d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S} \\ &\equiv \frac{-d}{dt} \hat{S} \end{aligned} \quad (2.23)$$

を得る。さらに式 (2.14)

$$\frac{-1}{\delta t} [S[\Omega; \Lambda(\delta t)] - S[\Omega; \Lambda]] = \frac{-1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) + \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \quad (2.24)$$

を使うことで、最終的に無次元化した action に対する Wilson 的繰りこみ群方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S[\Omega; t] = & \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \\ & + \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) \left(d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S} \end{aligned} \quad (2.25)$$

を得る。

ここからはこの式を使って様々な多様体の変形を見る。ただし、ここで注意することはこの式から得られる coupling constant の t 依存性の式と β 関数の関係は

$$\frac{d}{dt} g = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} g \quad (2.26)$$

$$= -\beta(g) \quad (2.27)$$

と逆符号で得られることである。

同じく、式 (2.22) で導入した anomalous な次元も、

$$\Lambda \rightarrow \Lambda - \delta t \Lambda \quad (2.28)$$

としたとき

$$\Omega \rightarrow (1 + \delta \eta) \Omega \quad (2.29)$$

$$\gamma \equiv \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.30)$$

と定義しているので、普通の定義とは逆符号になっていることに注意する。また、この anomalous dimension (γ_Ω) とはプロパゲーターの係数 (Z factor) のエネルギースケール依存性を示すものであり、はじめの action の中でそれぞれの場合 (Ω) の運動項の係数を 1 に規格化しておくことで、式 (2.25) から計算することができる。

最後に、一般論として求めた Wilson 的繰りこみ群方程式を解くための近似法について議論する [7]。例として、理論は real scalar 場のみの理論と仮定しよう。すると action を微分の次数で展開すると Lorentz invariance を保つために、

$$S[\varphi] = \int d^D x \left[V(\varphi, t) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 K(\varphi, t) + (\partial_\mu \varphi)^4 H_1(\varphi, t) + (\square \varphi)^2 H_2(\varphi, t) + \dots \right] \quad (2.31)$$

と展開できる。

これを繰りこみ群方程式、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S[\varphi; t] = & \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \text{tr} \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^i \delta \varphi^j} \right) - \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \varphi^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^i(p') \delta \varphi^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \varphi^j(q')} \\ & + \left[D - \sum_{\varphi^i} \int_p \hat{\varphi}^i(p) \left(d_{\varphi^i} + \gamma_{\varphi^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^i(p)} \right] \hat{S} \quad (2.32) \end{aligned}$$

に代入して、右辺第一項、第二項も微分の次数のべきで展開し、それぞれの独立な微分相互作用項の係数比較をすることで係数関数 ($K[\varphi], H_1[\varphi]$ など) に対する非線形微分方程式を得る。しかし、このままでは無限個の微分方程式の組が得られこのままでは解けないので、もとの action の展開を適当な微分の次数までとり、右辺もその次数までみるという近似法を使う。この微分の次数で展開することを Derivative expansion といい、よく知られている Local potential approximation(LPA) [4] とはこの展開の lowest order である $V[\varphi]$ までの相互作用までで近似したもののことである。

この論文では、最終的に 2 次元 $N=2$ の non-linear σ model の繰りこみ群方程式を Derivative expansion で 2 次までの近似 (∂^2) をとって考える。このとき、supersymmetry により Derivative expansion の lowest order、 $V[\varphi]$ にあたる、微分を含まない相互作用はあらわれない。よって以下、scalar 場だけの理論を考えるときも、Derivative expansion(∂^2) の近似をとるが、action($S[\varphi]$) には $V[\varphi]$ のような微分を含まない相互作用項はないものとする。

3 2次元 real scalar 場のみ理論

3.1 Riemann Normal Coordinate(RNC)

この章では2章で得た Wilson 的繰りこみ群方程式、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S[\Omega; t] = & \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \\ & + \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) \left(d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S} \end{aligned} \quad (3.1)$$

を、2次元 real scalar 場の non-linear σ model、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \quad (3.2)$$

に用いて、このメトリックの β 関数を求める。ここで、近似として derivative expansion(∂^2) までの近似を使うので実際には、このはじめのラグランジアンに微分の入らない相互作用項 $V[\varphi]$ をいれておかなければならないが、この論文の目的はそのような相互作用のない、2次元 N=2 の理論について調べることなので、そのための準備としてのこの章でも $V[\varphi]$ はないものと仮定する。

繰りこみ群方程式を求めるためには、1ループ diagram からの寄与にあたる、右辺第1項の $\int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right)$ の部分を計算しなければならない。しかし、このまま計算すると target space の共変性が破れることが知られているので、共変性を保つように計算するためのテクニックとして、Riemann normal coordinate(RNC) でラグランジアンを展開するという方法をとる。

そこで、このセクションでは RNC の review をおこなう [8] [9] [10]。

target space のある点 φ^i から $\varphi^i + \pi^i$ まで測地線を引き、その測地線の長さを s とする。RNC 変換とは、この始点 φ^i での長さ s の tangent vector ξ^i と $\varphi^i + \pi^i$ を同一視するという座標変換である。

詳しくかく。

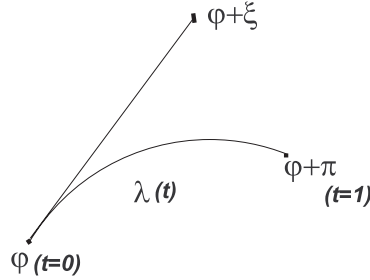


図 3: Riemann normal coordinate の定義

φ^i 、 $\varphi^i + \pi^i$ を通る測地線を $\lambda^i(t)$ とすると、 λ は測地線方程式

$$\ddot{\lambda}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{\lambda}^j \dot{\lambda}^k = 0 \quad (3.3)$$

を満たす。ここで dot はアフィンパラメーター (t) による微分を示す。 $\lambda^i(t)$ を $t=0$ 、つまり φ^i のまわりで展開する。

$$\lambda^i(t) = \lambda^i(0) + \dot{\lambda}^i(0)t + \frac{1}{2!}\ddot{\lambda}^i(0)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3\lambda^i}{dt^3}t^3 + \dots \quad (3.4)$$

測地線方程式 (3.3) を使うことで、

$$\lambda^i(t) = \varphi^i + \xi^i t - \frac{1}{2!}\Gamma^i_{j_1 j_2} \xi^{j_1} \xi^{j_2} t^2 - \frac{1}{3!}\Gamma^i_{j_1 j_2 j_3} \xi^{j_1} \xi^{j_2} \xi^{j_3} t^3 + \dots \quad (3.5)$$

を得る。ここで、

$$\Gamma^i_{j_1 j_2 j_3} = \partial_{j_1} \Gamma^i_{j_2 j_3} - \Gamma^n_{j_1 j_2} \Gamma^i_{n j_3} - \Gamma^n_{j_1 j_2} \Gamma^i_{j_3 n} \quad (3.6)$$

とした。また、 ξ は、

$$\xi^i \equiv \dot{\lambda}^i(0). \quad (3.7)$$

つまり、 ξ は測地線の点 φ での tangent vector である。

$\lambda^i(1) = \varphi^i + \pi^i$ なので、

$$\lambda^i(1) = \varphi^i + \pi^i \quad (3.8)$$

$$= \varphi^i + \xi^i - \frac{1}{2!}\Gamma^i_{j_1 j_2} \xi^{j_1} \xi^{j_2} - \frac{1}{3!}\Gamma^i_{j_1 j_2 j_3} \xi^{j_1} \xi^{j_2} \xi^{j_3} + \dots \quad (3.9)$$

より、もとの座標系 (π 座標系) から normal coordinate (ξ 座標系) への変換式

$$\pi^i = \xi^i - \frac{1}{2!}\Gamma^i_{j_1 j_2} \xi^{j_1} \xi^{j_2} - \frac{1}{3!}\Gamma^i_{j_1 j_2 j_3} \xi^{j_1} \xi^{j_2} \xi^{j_3} + \dots \quad (3.10)$$

を得る。

- ξ 座標系の性質

ここで ξ 座標系の性質をみってみる。まず、測地線上の任意の2つの点 $\varphi^i + \pi^i$ と $\varphi^i + \pi'^i$ に対し、それぞれ式 (3.4) の展開を行い得られる ξ^i と ξ'^i は、

$$\xi'^i = \frac{s'}{s} \xi^i \quad (3.11)$$

の関係がある。つまり、 ξ 座標系での測地線はまっすぐで、 $\zeta(t) = a^i t$ と書ける。よってこの ξ 座標系の測地線 ζ^i を式 (3.4) のように $t=0$ のまわりで展開すると、

$$\bar{\Gamma}^i_{(j_1 j_2 \dots j_n)} = 0 \quad (3.12)$$

$$\partial_{(j_1} \partial_{j_2} \dots \bar{\Gamma}_{j_{n-1} j_n)} = 0 \quad (3.13)$$

という性質をもつ。ここで、 ξ 座標系での量を $\bar{\Gamma}_{(j_1 \dots j_n)}$ のように bar をつけて記述し、また () 中の添え字は対称になっているとする。

さらに、このことから ξ 座標系での Riemann tensor は、

$$\bar{R}^i_{jkl} = \partial_k \bar{\Gamma}^i_{jl} - \partial_l \bar{\Gamma}^i_{jk} + \bar{\Gamma}^n_{jl} \bar{\Gamma}^i_{nk} - \bar{\Gamma}^n_{jk} \bar{\Gamma}^i_{nl} \quad (3.14)$$

$$= \partial_k \bar{\Gamma}^i_{jl} - \partial_l \bar{\Gamma}^i_{jk} \quad (3.15)$$

となる。すると、

$$\bar{R}^i{}_{jkl} + \bar{R}^i{}_{lkj} = \partial_k \bar{\Gamma}^i{}_{jl} - \partial_l \bar{\Gamma}^i{}_{jk} + \partial_k \bar{\Gamma}^i{}_{lj} - \partial_j \bar{\Gamma}^i{}_{lk} \quad (3.16)$$

$$= 2\partial_k \bar{\Gamma}^i{}_{jl} - (\partial_l \bar{\Gamma}^i{}_{jk} + \partial_j \bar{\Gamma}^i{}_{lk}) \quad (3.17)$$

式 (3.13) から

$$\partial_k \bar{\Gamma}^i{}_{jl} + \partial_l \bar{\Gamma}^i{}_{jk} + \partial_j \bar{\Gamma}^i{}_{lk} = 0 \quad (3.18)$$

なので、

$$\bar{R}^i{}_{jkl} + \bar{R}^i{}_{lkj} = 3\partial_k \bar{\Gamma}^i{}_{jl} \quad (3.19)$$

$$\therefore \partial_k \bar{\Gamma}^i{}_{jl} = \frac{1}{3}(\bar{R}^i{}_{jkl} + \bar{R}^i{}_{lkj}). \quad (3.20)$$

を得る。

また、 $\bar{\Gamma}^i{}_{jk}|_{\varphi=0}$ より、一般の 2 階共変対称テンソル \bar{T}_{kl} に対して ξ 座標系では、

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \bar{T}_{kl} = D_i \bar{T}_{kl} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^{i_2}} \bar{T}_{kl} = D_{(i_1} D_{i_2)} \bar{T}_{kl} - \frac{1}{3}(\bar{R}^j{}_{(i_1|k|i_2)} \bar{T}_{jl} + \bar{R}^j{}_{(i_1|l|i_2)} \bar{T}_{kj}) \quad (3.22)$$

と、テンソルの偏微分がすべてテンソル量で書ける。ここで、添え字 $(i_1|k|i_2)$ は i_1, i_2 に対してのみ対称とする。

- π 座標系でのテンソルと ξ 座標系でのテンソルの関係

座標 $\varphi + \pi$ での 2 階対称テンソルを、 φ のまわりで展開すると、もともとの座標系 (π 座標系) では、

$$T_{kl}(\varphi + \pi) = T_{kl}|_{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \pi^i} T_{kl}|_{\varphi} \pi^i + \frac{1}{2!} \frac{\partial}{\partial \pi^i} \frac{\partial}{\partial \pi^j} T_{kl}|_{\varphi} \pi^i \pi^j + \dots \quad (3.23)$$

となる。この 2 階共変テンソルを ξ 座標系に座標変換すると、

$$\begin{aligned} T_{kl}(\varphi + \pi) &\rightarrow \bar{T}_{kl}(\varphi + \xi) \\ &= \frac{\partial \pi^{k'}}{\partial \xi^k} \frac{\partial \pi^{l'}}{\partial \xi^l} T_{k'l'}(\varphi + \pi) \\ &= (\delta_k^{k'} - \Gamma^{k'}{}_{k_1 k} \xi^{k_1} - \frac{1}{2} \Gamma^{k'}{}_{(k k_1 k_2)} \xi^{k_1} \xi^{k_2} + \dots)(\delta_l^{l'} - \Gamma^{l'}{}_{l_1 l} \xi^{l_1} - \frac{1}{2} \Gamma^{l'}{}_{(l l_1 l_2)} \xi^{l_1} \xi^{l_2} + \dots) \\ &\quad \times (T_{k'l'}|_{\varphi} + \partial_i T_{k'l'}|_{\varphi} (\xi^i - \frac{1}{2} \Gamma^i{}_{jk} \xi^j \xi^k + \dots) + \frac{1}{2!} \partial_i \partial_j T_{k'l'}|_{\varphi} \xi^i \xi^j + \dots) \end{aligned} \quad (3.24)$$

と変換し、適当に添え字をつけかえて整理すると、

$$\begin{aligned} \bar{T}_{kl}(\varphi + \pi) &= T_{kl}|_{\varphi} + (\partial_i T_{kl} - \Gamma^{k'}{}_{ik} T_{k'l} - \Gamma^{l'}{}_{il} T_{kl'}) \xi^i \\ &\quad + [\frac{1}{2} \partial_{i_1} \partial_{i_2} T_{kl} - \frac{1}{2} \Gamma^j{}_{i_1 i_2} \partial_j T_{kl} - \Gamma^{k'}{}_{i_1 k} \partial_{i_2} T_{k'l} - \Gamma^{l'}{}_{i_1 l} \partial_{i_2} T_{kl'} + \Gamma^{k'}{}_{i_1 k} \Gamma^{l'}{}_{i_2 l} T_{k'l'} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{k'}{}_{(k i_1 i_2)} T_{k'l} - \frac{1}{2} \Gamma^{l'}{}_{(l i_1 i_2)} T_{kl'}] \xi^{i_1} \xi^{i_2} \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

となり、これが

$$\bar{T}_{kl}(\varphi + \xi) = \bar{T}_{kl}|_{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \bar{T}_{kl}|_{\varphi} \xi^i + \frac{1}{2!} \frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^{i_2}} \bar{T}_{kl}|_{\varphi} \xi^{i_1} \xi^{i_2} \quad (3.26)$$

と一致する。よって、 ξ 1次の項から、

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} \bar{T}_{kl}|_{\varphi} = (\partial_i T_{kl} - \Gamma^{k'}{}_{ik} T_{k'l} - \Gamma^{l'}{}_{il} T_{kl'})|_{\varphi} \quad (3.27)$$

$$= D_i T_{kl}|_{\varphi}. \quad (3.28)$$

さらに、 ξ 2次の項を比較することから

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^{i_2}} \bar{T}_{kl}|_{\varphi} = D_{(i_1} D_{i_2)} T_{kl}|_{\varphi} - \frac{1}{3} R^j{}_{(i_1|k|i_2)} T_{jl}|_{\varphi} - \frac{1}{3} R^j{}_{(i_1|l|i_2)} T_{kj}|_{\varphi} \quad (3.29)$$

を得る。

ここまでの事を、non-linear σ model の1ループ計算に用いる。

non-linear σ model のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \varphi^j \quad (3.30)$$

の場合 φ を background とそのゆらぎ部分 $\varphi + \varphi_s$ にわけ、ラグランジアンは一般座標変換不変性をもっているため、 φ_s を normal coordinate に座標変換してから展開する。

$$g_{ij}[\varphi + \varphi_s] \partial_{\mu}(\varphi + \varphi_s)^i \partial^{\mu}(\varphi + \varphi_s)^j \quad (3.31)$$

$$\xrightarrow{NC} \bar{g}_{ij}[\varphi + \xi] \partial_{\mu}(\varphi^i + \xi^i - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^i{}_{k_1 k_2} \xi^{k_1} \xi^{k_2} + \dots) \partial^{\mu}(\varphi^j + \xi^j - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^j{}_{l_1 l_2} \xi^{l_1} \xi^{l_2} + \dots). \quad (3.32)$$

- $\bar{g}_{ij}[\varphi + \xi]$ の展開 (ξ 2次まで)

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}[\varphi + \xi] &= \bar{g}_{ij}[\varphi] + (\partial_m \bar{g}_{ij}) \xi^m + \frac{1}{2} (\partial_m \partial_n \bar{g}_{ij}) \xi^m \xi^n \\ &= \bar{g}_{ij}[\varphi] + (\mathcal{D}_m \bar{g}_{ij}) \xi^m + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \mathcal{D}_{(m} \mathcal{D}_{n)} \bar{g}_{ij} - \frac{1}{3} (\bar{R}_{imjn} + \bar{R}_{injm}) \right] \xi^m \xi^n \\ &= \bar{g}_{ij}[\varphi] - \frac{1}{3} \bar{R}_{imjn}[\varphi] \xi^m \xi^n. \end{aligned} \quad (3.33)$$

- $\partial_{\mu}(\varphi^i + \xi^i - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^i{}_{k_1 k_2} \xi^{k_1} \xi^{k_2})$ をまとめる。

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}(\varphi^i + \xi^i - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^i{}_{k_1 k_2} \xi^{k_1} \xi^{k_2}) &= \partial_{\mu} \varphi^i + \partial_{\mu} \xi^i - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi^l \partial_l \bar{\Gamma}^i{}_{k_1 k_2}[\varphi] \xi^{k_1} \xi^{k_2} - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^i{}_{k_1 k_2}[\varphi] \partial_{\mu}(\xi^{k_1} \xi^{k_2}) \\ &= \partial_{\mu} \varphi^i + D_{\mu} \xi^i - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi^l \frac{1}{3} (\bar{R}^i{}_{k_1 l k_2}[\varphi] + \bar{R}^i{}_{k_2 l k_1}[\varphi]) \xi^{k_1} \xi^{k_2} \\ &= \partial_{\mu} \varphi^i + D_{\mu} \xi^i - \frac{1}{3} \partial_{\mu} \varphi^l \bar{R}^i{}_{k_1 l k_2}[\varphi] \xi^{k_1} \xi^{k_2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

これらを式 (3.32) に代入すると、 ξ 2次までの展開式は

$$\bar{g}_{ij}[\varphi + \xi] \partial_{\mu}(\varphi^i + \xi^i - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^i{}_{k_1 k_2} \xi^{k_1} \xi^{k_2}) \partial^{\mu}(\varphi^j + \xi^j - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^j{}_{l_1 l_2} \xi^{l_1} \xi^{l_2}) \quad (3.35)$$

$$= \bar{g}_{ij}[\varphi] \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \varphi^j + 2 \bar{g}_{ij}[\varphi] \partial_{\mu} \varphi^i D^{\mu} \xi^j + \bar{g}_{ij}[\varphi] D_{\mu} \xi^i D^{\mu} \xi^j + \bar{R}_{ik_1 k_2 j} \xi^{k_1} \xi^{k_2} \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \varphi^j \quad (3.36)$$

これはすべてテンソル量でかかっているため、もとの座標系に戻って

$$= g_{ij}[\varphi] \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \varphi^j + 2 g_{ij}[\varphi] \partial_{\mu} \varphi^i D^{\mu} \xi^j + g_{ij}[\varphi] D_{\mu} \xi^i D^{\mu} \xi^j + R_{ik_1 k_2 j} \xi^{k_1} \xi^{k_2} \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \varphi^j \quad (3.37)$$

とラグランジアンを展開できる。

3.2 繰りこみ群方程式

前のセクションで normal coordinate に座標変換して展開したラグランジアンを用いて、non-linear σ model の Wilson 的繰りこみ群方程式、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S[\Omega; t] = & \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \\ & + \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) \left(d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \Omega^i(p)} \right] \hat{S} \end{aligned} \quad (3.38)$$

を計算しよう。

- 1 ループ補正部分

式 (3.37) で得た展開式を使って 1 ループ補正部分にあたる、

$$\frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) \quad (3.39)$$

を計算しよう。この式はもともと、2章の導出で、カットオフ Λ で定義されている場の中で、エネルギースケール $\Lambda(\delta t) = \Lambda e^{-\delta t}$ から Λ までの運動量を持つ場 (Ω_s) の汎関数積分を行ったことで得た。今の場合、

$$Z[J] = \int [d\varphi]_{\Lambda(\delta t)} \int [d\varphi_s] e^{-S[\varphi + \varphi_s; \Lambda]} \quad (3.40)$$

$$= \int [d\varphi]_{\Lambda(\delta t)} \int [d\varphi_s] e^{-\left(S[\varphi; \Lambda] + \frac{\delta S}{\delta \varphi^i} \varphi_s^i + \frac{1}{2} \varphi_s^i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^i \delta \varphi^j} \varphi_s^j \right)} \quad (3.41)$$

である。この φ_s を ξ に変換したことで、この式は

$$Z[J] = \int [d\varphi]_{\Lambda(\delta t)} \int [d\xi] e^{-\left(S[\varphi; \Lambda] + \frac{\delta S}{\delta \varphi^i} \xi^i + \frac{1}{2} \xi^i \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^i \delta \varphi^j} \xi^j \right)} \quad (3.42)$$

となる。この式と前セクションで導出した、

$$S[\varphi + \varphi_s] \rightarrow S[\varphi + \xi] \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int d^2 x \left[g_{ij}[\varphi] \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j + 2g_{ij}[\varphi] \partial_\mu \varphi^i D^\mu \xi^j \right. \\ &\quad \left. + g_{ij}[\varphi] D_\mu \xi^i D^\mu \xi^j + R_{ik_1 k_2 j} \xi^{k_1} \xi^{k_2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

から、

$$\frac{1}{2} \int \xi^i(p') \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^i(p') \delta \varphi^j(q')} \xi^j(q') = \int d^2 x \frac{1}{2} \left(g_{ij}[\varphi] D_\mu \xi^i D^\mu \xi^j + R_{k_1 i j k_2} \xi^i \xi^j \partial_\mu \varphi^{k_1} \partial^\mu \varphi^{k_2} \right) \quad (3.45)$$

$$= \frac{1}{2} \langle i, -q' | \hat{M} | j, p' \rangle \quad (3.46)$$

とおく。ここで、状態 $|k, p'\rangle$ は、

$$\text{内積} \quad \langle k, p' | l, q' \rangle = \delta_{kl} \hat{\delta}(q' - p') \quad (3.47)$$

$$\text{完全系} \quad \sum_k |k, p\rangle \langle k, p| = 1 \quad (3.48)$$

と定義できる状態である。すると、オペレーター \hat{M} の行列 (kl) 成分は、

$$\begin{aligned} \langle k|\hat{M}|l \rangle &= \hat{p}_\mu g_{kl} \hat{p}^\mu + g_{al} \Gamma^a{}_{kb} (\partial_\mu \varphi)^b (-i\hat{p}^\mu) + i\hat{p}^\mu g_{ka} \Gamma^a{}_{lb} (\partial_\mu \varphi)^b \\ &\quad + g_{ab} \Gamma^a{}_{kc} \Gamma^b{}_{ld} (\partial_\mu \varphi)^c (\partial^\mu \varphi)^d + R_{aklb} (\partial_\mu \varphi)^a (\partial^\mu \varphi)^b \end{aligned} \quad (3.49)$$

となり、第一項を運動項と相互作用項に

$$g_{kl}[\varphi] = \delta_{kl} + G_{kl}[\varphi] \quad (3.50)$$

とわけて、

$$\begin{aligned} \langle k|\hat{M}|l \rangle &= \hat{p}_\mu \delta_{kl} \hat{p}^\mu + \hat{p}_\mu G_{kl} \hat{p}^\mu + g_{al} \Gamma^a{}_{kb} (\partial_\mu \varphi)^b (-i\hat{p}^\mu) + i\hat{p}^\mu g_{ka} \Gamma^a{}_{lb} (\partial_\mu \varphi)^b \\ &\quad + g_{ab} \Gamma^a{}_{kc} \Gamma^b{}_{ld} (\partial_\mu \varphi)^c (\partial^\mu \varphi)^d + R_{aklb} (\partial_\mu \varphi)^a (\partial^\mu \varphi)^b \end{aligned} \quad (3.51)$$

を得る。オペレーターの運動項の部分を M_0 、相互作用部分を

$$V_1 = \hat{p}_\mu G_{kl} \hat{p}^\mu \quad (3.52)$$

$$V_2 = g_{al} \Gamma^a{}_{kb} (\partial_\mu \varphi)^b (-i\hat{p}^\mu) \quad (3.53)$$

$$V_3 = i\hat{p}^\mu g_{ka} \Gamma^a{}_{lb} (\partial_\mu \varphi)^b \quad (3.54)$$

$$V_4 = g_{ab} \Gamma^a{}_{kc} \Gamma^b{}_{ld} (\partial_\mu \varphi)^c (\partial^\mu \varphi)^d \quad (3.55)$$

$$V_5 = R_{aklb} (\partial_\mu \varphi)^a (\partial^\mu \varphi)^b \quad (3.56)$$

とおく。これを使って、1ループ補正 $tr \ln(M) = tr \ln[M_0(1 + M_0V)] = tr \ln M_0 + tr \ln(1 + M_0V)$ として計算する。ここで $tr \ln M_0$ は運動量積分すると、運動量空間の体積 (定数) ができるだけなので無視する。今、近似として外線微分 2 次までの相互作用項を考えることにすると、この近似で求めたい scalar 場の微分 2 次の相互作用項をだすのは、 $tr \ln(1 + M_0V)$ の \ln を展開したときに、 V が次の場合である。(詳しい計算は Appendix A にある complex scalar 場の理論の計算と同様にできる)

– V_1 のみのとき

$$\int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x \frac{1}{4} g_{a_1 a_2, k} g^{a_2 a_3} g_{a_3 a_4, l} g^{a_4 a_1} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.57)$$

– V_2 2回と残りは V_1 のとき

$$\int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x \frac{1}{4} \Gamma^{a_3}{}_{a_1 k} \Gamma^{a_1}{}_{a_3 l} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.58)$$

– V_3 2回と残りは V_1 のとき

$$\int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x \frac{1}{4} \Gamma^{a_3}{}_{a_1 k} \Gamma^{a_1}{}_{a_3 l} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.59)$$

– V_2 と V_3 が 1 回ずつと残りは V_1 のとき

$$\int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x -\frac{1}{2} g_{a_2 m} \Gamma^m{}_{a_1 k} \Gamma^{a_2}{}_{a_4 l} g^{a_4 a_1} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.60)$$

– V_2 1 回と残りは V_1 のときと、 V_3 1 回と残りは V_1 のとき

$$\int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x \Gamma_{a_1 a_2 k} (g^{a_2 a_1})_{,l} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.61)$$

– V_4 1 回と残りは V_1 のとき

$$\int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x g_{mn} \Gamma^m{}_{a_1 k} \Gamma^n{}_{a_2 l} g^{a_1 a_2} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.62)$$

– V_5 1 回と残りは V_1 のとき

$$\int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x R_{ka_1 a_2 l} g^{a_1 a_2} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.63)$$

以上をまとめて、 $g_{kl} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l$ に対する 1 ループ補正は、

$$\int_{p'} \text{tr} \ln(1 + M_0 V) \sim \int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x R_{ka_1 a_2 l} g^{a_1 a_2} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.64)$$

$$= \int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2x (-1) R_{kl} (\partial_\mu \varphi)^k (\partial^\mu \varphi)^l \quad (3.65)$$

$$(\because R_{ij} \equiv g^{lm} R_{limj}) \quad (3.66)$$

と得られる。

● ダンベル型ダイアグラム

次に、式 (2.25) の第 2 項、

$$\frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \quad (3.67)$$

の部分を考える。

まず、 $\frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')}$ の部分は、今、action に微分が 2 次入っているの、少なくとも、1 次は外線の微分が残る。よって、外線微分 2 次までの近似を使っている今は、残りの $\left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1}$ 部分からは、外線運動量の微分はでてはいけない。

そのようなダイアグラムで考えられるのは、図 4 のようにかかる。

しかし実際にこのダイアグラムを計算すると、

$$\sim \int_{p'} g_{ik}(k_1) (q_{1\mu} \varphi(q_1))^i \frac{p'^\mu \delta^{kl} p'^\nu}{p'^2} g_{lj}(k_2) (q_{2\nu} \varphi(q_2))^j \hat{\delta}(k_1 - p' + q_1) \hat{\delta}(k_2 + p' + q_2) \quad (3.68)$$

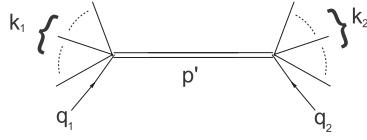


図 4: 微分最低次のダンベル型ダイアグラム

となり、既に外線微分 2 次が入っているため、今の近似のオーダーでは δ 関数の中の外線運動量 (k_1, k_2, q_1, q_2) はゼロとする。すると、この積分は

$$\sim \int_{p'} \frac{p'^{\mu} p'^{\nu}}{p'^4} \hat{\delta}(p') \quad (3.69)$$

となり、 p' は $\Lambda(\delta t)$ から Λ までの運動量しか持たない Shell momentum なので、ゼロになる。

つまり、derivative expansion (∂^2) の近似では、ダンベル型ダイアグラムの寄与はない。このことはこの先、complex scalar 場の理論でも同じことが言える。

- rescaling part

最後に式 (2.25) の rescaling part を考える。2次元では scalar 場の canonical な次元 (d_φ) はゼロなので、

$$\left[2 - \sum_{\varphi^i} \int_p \hat{\varphi}^i(p) \left(\gamma_{\varphi^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^i(p)} \right] \hat{S} = -\gamma \int d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi)^j [\varphi^k g_{ij,k} + 2g_{ij}] \quad (3.70)$$

以上をまとめて、2次元 non-linear σ model の action が従う Wilson 的繰りこみ群方程式は、

$$\frac{d}{dt} \int d^2x \frac{1}{2} g_{ij} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi)^j = -\frac{1}{4\pi} \int d^2x (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi)^j R_{ij} - \gamma \int d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi)^j [\varphi^k g_{ij,k} + 2g_{ij}] \quad (3.71)$$

となり、 $(\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi)^j$ の係数を比較することで、メトリック g_{ij} の β 関数、

$$\therefore \frac{d}{dt} g_{ij} = -\frac{1}{2\pi} R_{ij} - \gamma [\varphi^k g_{ij,k} + 2g_{ij}] \quad (3.72)$$

$$= -\beta(g_{ij}) \quad (3.73)$$

を得る。

4 2次元 N=2 の場合

4.1 2次元 complex scalar 場だけの理論

前章で行った real scalar 場の理論を target space が Kähler 多様体であると仮定した complex scalar 場の理論にして考え直してみる。この complex scalar 場の理論は次のセクションでみるように、2次元 N=2 の理論の scalar part になっている。

ラグランジアン

$$\mathcal{L} = g_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (4.1)$$

から始めよう。

このときの Wilson 的繰りこみ群方程式、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S[\Omega; t] &= \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \\ &\quad + \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) \left(d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S} \end{aligned} \quad (4.2)$$

を計算し、メトリック $g_{i\bar{j}}$ の β 関数をだそう。

まず、1ループ補正部分にあたる、右辺第1項は、Appendix A の計算から、

$$\frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) = \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \frac{1}{p'^2} \int d^2 x (-2) R_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (4.3)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int d^2 x R_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (4.4)$$

となる。

次にダンベル型 diagram にあたる右辺第2項は、real scalar 場の理論と同じく、derivative expansion (d^2) の近似ではゼロになる。

最後に rescaling part は、2次元では scalar 場の canonical な次元 (d_φ) がゼロであることから、

$$\begin{aligned} &\left[2 - \sum_{\varphi^i} \int_p \hat{\varphi}^i(p) \left(\gamma_{\varphi^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^i(p)} - \sum_{\varphi^{*\bar{i}}} \int_p \hat{\varphi}^{*\bar{i}}(p) \left(\gamma_{\varphi^{*\bar{i}}} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^{*\bar{i}}(p)} \right] \hat{S} \\ &= -\gamma \int d^2 x \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}} \right] \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。以上をまとめて Wilson 的繰りこみ群方程式は、

$$\frac{d}{dt} \int d^2 x g_{i\bar{j}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} = -\frac{1}{2\pi} \int d^2 x R_{i\bar{j}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} - \gamma \int d^2 x \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}} \right] \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (4.7)$$

と得られる。

さらに、この式の $\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}}$ の係数比較をすることで、メトリックの β 関数、

$$\frac{d}{dt} g_{i\bar{j}} = -\frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}} - \gamma \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}} \right] \quad (4.8)$$

$$= -\beta(g_{i\bar{j}}) \quad (4.9)$$

$$\beta(g_{i\bar{j}}) = \frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}} + \gamma \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}} \right] \quad (4.10)$$

を得る。

この式から実際に様々なモデルに対してどのようなことをみることができるかは、supersymmetry を入れた理論での β 関数がこれと同じ式になることを §4.3 で示した後、§4.4、§4.5 でみる。

4.2 Supersymmetric Non-linear σ model(SNL σ M)

前のセクションで考えた scalar 場の理論に N=2 の supersymmetry を課した supersymmetric non-linear σ model(SNL σ M) のラグランジアンを導出を行う [11]。

出発点は一般的な Kähler ポテンシャルを用いて、ラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \Phi^\dagger) \quad (4.11)$$

とかけることである。

ここで Φ はカイラル超場、 Φ^\dagger は反カイラル超場である。このカイラル超場、反カイラル超場は成分場を用いてかくと

$$\Phi^i(y) = \varphi^i(y) + \sqrt{2}\theta\psi^i(y) + \theta\theta F^i(y) \quad (4.12)$$

$$= \varphi^i(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi^i(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square\varphi^i(x) + \sqrt{2}\theta\psi^i(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi^i(x)\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\theta F^i(x) \quad (4.13)$$

$$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (4.14)$$

$$\Phi^{\dagger\bar{i}}(y^*) = \varphi^{*\bar{i}}(y^*) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^{\bar{i}}(y^*) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}^{\bar{i}}(y^*) \quad (4.15)$$

$$= \varphi^{*\bar{i}}(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi^{*\bar{i}}(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square\varphi^{*\bar{i}}(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^{\bar{i}}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\bar{i}} + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}^{\bar{i}}(x) \quad (4.16)$$

$$y^{*\mu} = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (4.17)$$

と書ける。

そこで、これらを、

$$\Phi^i(x) = \varphi^i(x) + \delta\Phi^i(x) \quad (4.18)$$

$$\Phi^{\dagger\bar{i}}(x) = \varphi^{*\bar{i}}(x) + \delta\Phi^{\dagger\bar{i}}(x) \quad (4.19)$$

とスカラー場のまわりで展開する。すると、action は、

$$S = \int d^2x \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta} K(\varphi(x) + \delta\Phi(x), \varphi^*(x) + \delta\Phi^\dagger) \quad (4.20)$$

$$= \int d^2x \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta} \left[K(\varphi, \varphi^*) + \delta\Phi^n K_{,n} + \delta\Phi^{dag\bar{n}} K_{,\bar{n}} + \frac{1}{2}\delta\Phi^n \delta\Phi^m K_{,nm} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\delta\Phi^{\dagger\bar{n}} \delta\Phi^{\dagger\bar{m}} K_{,\bar{n}\bar{m}} + \delta\Phi^n \delta\Phi^{\dagger\bar{m}} K_{,n\bar{m}} + \frac{1}{2}\delta\Phi^n \delta\Phi^m \delta\Phi^{\dagger\bar{l}} K_{,nm\bar{l}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\delta\Phi^n \delta\Phi^{\dagger\bar{m}} \delta\Phi^{\dagger\bar{l}} K_{,n\bar{m}\bar{l}} + \frac{1}{4}\delta\Phi^n \delta\Phi^m \delta\Phi^{\dagger\bar{k}} \delta\Phi^{\dagger\bar{l}} K_{,nm\bar{k}\bar{l}} \right] \quad (4.21)$$

となる。ここで、

$$K_{,n} = \frac{\partial K}{\partial \varphi^n} \quad (4.22)$$

$$K_{,\bar{n}} = \frac{\partial K}{\partial \varphi^{\bar{n}}} \quad (4.23)$$

を表す。Grassmann 数の積分を、

$$\int d^2\theta \frac{1}{2}\theta^2 = 1 \quad (4.24)$$

$$\int d^2\bar{\theta} \frac{1}{2}\bar{\theta}^2 = 1 \quad (4.25)$$

で定義すると、式 (4.21) で残るのは、

$$\begin{aligned} S = \int d^2x \frac{1}{4} \left[& -K_{,n} \square \varphi^n - K_{,\bar{n}} \square \varphi^{\bar{n}} + 4K_{,\bar{m}n} (\bar{F}^{\bar{m}} F^n + \frac{i}{2} \bar{\psi}^{\bar{m}} \partial_\mu \sigma^\mu \psi^n + \frac{i}{2} \psi^m \partial_\mu \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi}^{\bar{n}} + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^{*\bar{m}} \partial^\mu \varphi^n) \right. \\ & - 2K_{,nml} \bar{F}^{\bar{l}} \psi^n \psi^m - 2K_{,n\bar{m}\bar{l}} \bar{F}^{\bar{n}} \psi^{\bar{m}} \psi^{\bar{l}} + K_{,nml} \bar{\psi}^{\bar{l}} i \sigma^\mu (\psi^n \partial_\mu \varphi^m + \psi^m \partial_\mu \varphi^n) \\ & + K_{,n\bar{m}\bar{l}} \psi^n i \bar{\sigma}^\mu (\bar{\psi}^{\bar{m}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{l}} + \bar{\psi}^{*\bar{m}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{l}}) + K_{,nm\bar{k}\bar{l}} (\bar{\psi}^{\bar{k}} \bar{\psi}^{\bar{l}}) (\psi^n \psi^m) \\ & \left. - K_{,nm} \partial^\mu \varphi^n \partial_\mu \varphi^m - K_{,\bar{n}\bar{m}} \partial^\mu \varphi^{*\bar{n}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{m}} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

となる。この scalar 場の部分に部分積分を行って、

$$\begin{aligned} S = \int d^2x \left[g_{n\bar{m}} \left(\partial^\mu \varphi^n \partial_\mu \varphi^{*\bar{m}} + \frac{i}{2} \bar{\psi}^{\bar{m}} \sigma^\mu (D_\mu \psi)^n + \frac{i}{2} \psi^n \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \bar{\psi})^{\bar{m}} + \bar{F}^{\bar{m}} F^n \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} K_{,nml} \bar{F}^{\bar{l}} \psi^n \psi^m - \frac{1}{2} K_{,n\bar{m}\bar{l}} \bar{F}^{\bar{n}} \psi^{\bar{m}} \psi^{\bar{l}} + \frac{1}{4} K_{,nm\bar{k}\bar{l}} (\bar{\psi}^{\bar{k}} \bar{\psi}^{\bar{l}}) (\psi^n \psi^m) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

ただしここで、

$$g_{n\bar{m}} \equiv K_{,n\bar{m}} \quad (4.28)$$

$$(D_\mu \psi)^n \equiv \partial_\mu \psi^n + \Gamma^n_{lm} (\partial_\mu \varphi)^l \psi^m \quad (4.29)$$

$$(D_\mu \bar{\psi})^{\bar{n}} \equiv \partial_\mu \bar{\psi}^{\bar{n}} + \Gamma^{\bar{n}}_{\bar{l}\bar{m}} (\partial_\mu \varphi)^{*\bar{l}} \bar{\psi}^{\bar{m}} \quad (4.30)$$

$$\Gamma^n_{lm} \equiv g^{n\bar{k}} K_{,m\bar{k}l} \quad (4.31)$$

$$\Gamma^{\bar{n}}_{\bar{l}\bar{m}} \equiv g^{\bar{n}k} K_{,\bar{m}k\bar{l}} \quad (4.32)$$

を使った [12]。

この action から補助場 F, \bar{F} についての運動方程式から、

$$g_{\bar{m}n} F^n = \frac{1}{2} K_{,kl\bar{m}} \psi^k \psi^l \quad (4.33)$$

$$F^n = \frac{1}{2} \Gamma^n_{lm} \psi^l \psi^m \quad (4.34)$$

同様に

$$\bar{F}^{\bar{n}} = \frac{1}{2} \Gamma^{\bar{n}}_{\bar{l}\bar{m}} \bar{\psi}^{\bar{l}} \bar{\psi}^{\bar{m}} \quad (4.35)$$

と補助場を消去すると、最終的に成分場で書いたラグランジアン、

$$\mathcal{L} = g_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + i g_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \psi)^i + \frac{1}{4} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \psi^i \psi^k \bar{\psi}^{\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{l}} \quad (4.36)$$

を得る。

4.3 SNL σ M の Wilson 的繰りこみ群方程式

それでは §4.1 で求めた scalar 場のみの理論に補正を加える形で、SNL σ M の繰りこみ群方程式を求めよう。

2章で一般論として求めた Wilson 的繰りこみ群方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S[\Omega; t] = & \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \\ & + \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) (d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu}) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S} \end{aligned} \quad (4.37)$$

は、理論に boson と fermion が入っている場合、2章と同じ方法で導出すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S[\Omega; t] = & \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} str \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} (-1)^F \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \\ & + \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) (d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu}) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S} \end{aligned} \quad (4.38)$$

と修正される [13] [14]。ここで

$$\begin{aligned} str \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) &= str \ln M_{i\bar{j}} \\ &= str \ln \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BF} \\ M_{FB} & M_{FF} \end{pmatrix} \\ &= \ln sdet M \\ &= \ln \frac{\det M_{BB}}{\det N_{FF}} \\ &= tr \ln M_{BB} - tr \ln N_{FF} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$N_{FF} = M_{FF} - M_{FB} M_{BB}^{-1} M_{BF} \quad (4.40)$$

となる。

今 SNL σ M のラグランジアン、

$$\mathcal{L} = g_{ij^*} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} + i g_{ij^*} \bar{\psi}^j \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \psi)^i + \frac{1}{4} R_{ij^*kl^*} \psi^i \psi^k \bar{\psi}^j \bar{\psi}^l \quad (4.41)$$

の場合を考えよう。ここでとる方法は、まず fermion を入れたことによって bosonic part [$\sim (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}}$] に対して新しく補正が加わるかどうかを調べ、fermion からの寄与も加えた bosonic part の繰りこみ群方程式を求める。次にそのような bosonic part をだす Kähler potential をもとめることで、fermion part の繰りこみ群方程式も求めるという方法をとる。

ではまず、fermion part が入ったことで 1 ループ補正部分から bosonic part への補正がどうなるかを見よう。

scalar 場、fermion 場をそれぞれ

$$\varphi \rightarrow \varphi + \varphi_s \quad (4.42)$$

$$\psi \rightarrow \psi + \psi_s \quad (4.43)$$

と、低エネルギー部分 (background field) とそのゆらぎ部分にわけ、ラグランジアンを展開する。すると、上の行列 M で書くと、展開の 2 次の部分は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[\varphi + \varphi_s, \varphi^* + \varphi_s^*, \psi + \psi_s, \bar{\psi} + \bar{\psi}_s] \\ & \sim \begin{pmatrix} \varphi_s^{*\bar{l}} & \varphi_s^l & \bar{\psi}_s^{\bar{l}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{B(\bar{l})B(k)} & M_{B(\bar{l})B(\bar{k})} & M_{B(\bar{l})F(k)} \\ M_{B(l)B(k)} & M_{B(l)B(\bar{k})} & M_{B(l)F(k)} \\ M_{F(\bar{l})B(k)} & M_{F(\bar{l})B(\bar{k})} & M_{F(\bar{l})F(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_s^k \\ \varphi_s^{*\bar{k}} \\ \psi_s^k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.44)$$

となる。行列 M の具体形を考えよう。

M_{BB} の部分は §4.1 で計算した式 (4.4) にラグランジアン fermion が入っている部分からの寄与がある。しかし今、外線に fermion が入らない bosonic part への補正を考えているので、その部分のみを見るために background fermion(ψ)=0 とおく。すると新たに加わった fermion 部分からの寄与は消え、結果、 $tr \ln M_{BB}$ は §4.1 の計算結果、式 (4.4) と同じである。

次に $M_{F(\bar{l})B(k)}$ を考えよう。この行列要素の具体形は、

$$\begin{aligned} M_{F(\bar{l})B(k)} &= \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}^{\bar{l}}(q') \delta \varphi^k(p')} \\ &\equiv \langle \bar{l}, -q' | \hat{M} | k, p' \rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\hat{M}_{k\bar{l}} = ig_{i\bar{l},k} \sigma^\mu \partial_\mu \psi^i + ig_{m\bar{l},nk} \sigma^\mu \partial_\mu \varphi^m \psi^n + ig_{k\bar{l},n} \sigma^\mu (-i\hat{p}_\mu) \psi^n \quad (4.46)$$

となる。ここで、background fermion(ψ) = 0 とすると、

$$M_{F(\bar{l})B(k)} = 0 \quad (4.47)$$

を得る。同様に、background fermion をゼロとすることで、式 (4.44) のすべての $M_{FB}, M_{BF} = 0$ となる。これによって、式 (4.40) の

$$tr \ln N_{FF} = tr \ln M_{FF} \quad (4.48)$$

となる。

それでは、 $tr \ln M_{FF}$ を考えよう。ここでも、background fermion(ψ) をゼロとすることで、ラグランジアンの Riemann curvature を係数とする部分は消える。よって、

$$\begin{aligned} M_{F(\bar{l})F(k)} &= \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}^{\bar{l}}(q') \delta \psi^k(p')} \\ &\equiv \langle \bar{l}, -q' | \hat{M}_{FF} | k, p' \rangle \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\hat{M}_{FF} = ig_{k\bar{l}} \sigma^\mu (-i\hat{p}_\mu) + ig_{k\bar{l},m} \sigma^\mu \partial_\mu \varphi^m \quad (4.50)$$

となる。オペレーター \hat{M} の第一項を

$$g_{k\bar{l}}[\varphi] = \delta_{k\bar{l}} + G_{k\bar{l}}[\varphi] \quad (4.51)$$

と、運動項と相互作用項にわけ、§4.1 で bosonic part について行ったように、

$$M_0 \equiv \delta_{k\bar{l}} \sigma^\mu \hat{p}_\mu \quad (4.52)$$

$$V_1 \equiv G_{k\bar{l}} \sigma^\mu \hat{p}_\mu \quad (4.53)$$

$$V_2 \equiv ig_{k\bar{l},m} \sigma^\mu \partial_\mu \varphi^m \quad (4.54)$$

とおき、

$$\text{tr} \ln M_{FF} = \text{tr} \ln M_0 + \text{tr} \ln(1 + M_0 V_{FF}) \quad (4.55)$$

として計算する。ここで、 $\text{tr} \ln M_0$ は、運動量積分をすると運動量 p の奇関数になっているのでゼロとなる。

求めたい scalar 場の 2 次までの微分の補正をだす可能性があるのは、 V が次の場合である。

- V_1 のみの場合 $\text{tr} \ln(1 + M_0 V_1)$ の \ln の展開第 n 次は、

$$(-1)^n \frac{1}{n} \int_{p'_1 \dots p'_n} \text{tr} \left[\frac{1}{p'_{1\mu} \sigma^\mu} p'_{2\mu} \sigma^\mu \frac{1}{p'_{2\mu} \sigma^\mu} p'_{3\mu} \sigma^\mu \dots \frac{1}{p'_{n\mu} \sigma^\mu} p'_{1\mu} \sigma^\mu \right] G(K_1) \dots G(k_n) \\ \hat{\delta}(p'_2 - p'_1 + k_1)(p'_3 - p'_2 + k_2) \dots (p'_1 - p'_n + k_n) \quad (4.56)$$

となる。するとこれは、分子分母の p' が次々キャンセルし、その結果この場合 scalar 場の外線微分はでない。

- V_2 が 1 回と残りは V_1 の場合

$\text{tr} \ln(1 + M_0 V_1)$ の \ln の展開第 n 次は、

$$(-1)^n \frac{1}{n} \int_{p'_1 \dots p'_n} \text{tr} \left[\frac{1}{p'_{1\mu} \sigma^\mu} q_\mu \sigma^\mu \frac{1}{p'_{2\mu} \sigma^\mu} p'_{3\mu} \sigma^\mu \dots \frac{1}{p'_{n\mu} \sigma^\mu} p'_{1\mu} \sigma^\mu \right] g_{k\bar{l},i}(k) \varphi^i(q) G(K_1) \dots G(k_{n-1}) \\ \hat{\delta}(p'_2 - p'_1 + k + q)(p'_3 - p'_2 + k_1) \dots (p'_1 - p'_n + k_{n-1}) \quad (4.57)$$

となり、これは運動量積分すると p の奇関数になるのでゼロ。

- V_2 が 2 回と残りは V_1 の場合

V_2 に $(\partial_\mu \varphi)^i$ が入っているので、これを 2 回入れたとき、 $(\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}}$ となる項はでない。

以上より、 $\text{tr} \ln M_{FF}$ から bosonic part に対する補正はないことがわかった。

次に、ダンベル型ダイアグラムによる寄与、

$$\frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} (-1)^F \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^{\bar{j}}(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^{\bar{j}}(q')} \quad (4.58)$$

の部分を考える。上の式の場合 Ω と書いた部分がすべて scalar 場の場合は §4.1 の complex scalar 場の理論と同じ議論から、この部分の寄与は今の近似ではゼロとなる。場 Ω が fermion 場の場合、 $\frac{\delta S}{\delta \psi^i}$ は外線として $\bar{\psi}$ を、逆に $\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}^i}$ は外線として ψ を残す。よって、今求めたい bosonic part への寄与はない。

以上より、fermion を入れたことで、ももとのラグランジアン scalar part $[g_{i\bar{j}}(\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}}]$ に対する補正は boson のみの理論と同じで 1 ループ補正部分のみからあらわれ、それは、

$$-\frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \quad (4.59)$$

であることがわかった。次に、この補正が supersymmetry を保つように、このような bosonic part をだす Kähler ポテンシャルの形を考えてみる。すると、Kähler 多様体の性質、

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_{\bar{j}} \partial_i [\ln \det g_{k\bar{l}}] \quad (4.60)$$

$$g_{i\bar{j}} = \partial_{\bar{j}} \partial_i [K(\Phi, \Phi^\dagger)] \quad (4.61)$$

から、1ループ補正部分のケーラーポテンシャルは、

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \det g_{k\bar{l}} \quad (4.62)$$

とわかる。

これを成分場で書いてみよう。1ループ補正を加えたラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}_1 \quad (4.63)$$

$$= \int d\theta^2 d\bar{\theta}^2 [K(\Phi, \Phi^\dagger) + \Delta K_1(\Phi, \Phi^\dagger)] \quad (4.64)$$

$$= \int d\theta^2 d\bar{\theta}^2 [K(\Phi, \Phi^\dagger) + \frac{1}{2\pi} \ln \det K_{,k\bar{l}}(\Phi, \Phi^\dagger)] \quad (4.65)$$

となるので、§4.2と同じ方法で展開すると、

$$\begin{aligned} S_1 = & \int d^2x \frac{1}{4} [-(K + \Delta K_1)_{,n} \square \varphi^n - (K + \Delta K_1)_{,\bar{n}} \square \varphi^{\bar{n}} \\ & + 4(K + \Delta K_1)_{,\bar{m}n} (\bar{F}^{\bar{m}} F^n + \frac{i}{2} \bar{\psi}^{\bar{m}} \sigma^\mu \partial_\mu \psi^n + \frac{i}{2} \psi^m \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \bar{\psi}^{\bar{n}} + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^{*\bar{m}} \partial^\mu \varphi^n) \\ & - 2(K + \Delta K_1)_{,n\bar{m}\bar{l}} \bar{F}^{\bar{l}} \psi^n \psi^m - 2(K + \Delta K_1)_{,n\bar{m}\bar{l}} \bar{F}^{\bar{n}} \psi^{\bar{m}} \psi^{\bar{l}} \\ & + (K + \Delta K_1)_{,n\bar{m}\bar{l}} \bar{\psi}^{\bar{l}} i \sigma^\mu (\psi^n \partial_\mu \varphi^m + \psi^m \partial_\mu \varphi^n) + (K + \Delta K_1)_{,n\bar{m}\bar{l}} \psi^n i \bar{\sigma}^\mu (\bar{\psi}^{\bar{m}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{l}} + \bar{\psi}^{*\bar{m}} \partial_\mu \varphi^{\bar{l}}) \\ & + (K + \Delta K_1)_{,nm\bar{k}\bar{l}} (\bar{\psi}^{\bar{k}} \bar{\psi}^{\bar{l}}) (\psi^n \psi^m) - (K + \Delta K_1)_{,nm} \partial^\mu \varphi^n \partial_\mu \varphi^m - (K + \Delta K_1)_{,\bar{n}\bar{m}} \partial^\mu \varphi^{*\bar{n}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{m}}] \end{aligned} \quad (4.66)$$

となる。すると、式(4.28)から式(4.32)までと、

$$-R_{i\bar{j}} = (\Delta K_1)_{,i\bar{j}} \quad (4.67)$$

$$\partial_k R_{i\bar{j}} = \nabla_k R_{i\bar{j}} + \Gamma^n_{ik} R_{n\bar{j}} \quad (4.68)$$

と使って、

$$\begin{aligned} S_1 = & \int d^2x \mathcal{L} \\ = & \int d^2x \left[(g_{i\bar{j}} - \frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}}) (\partial_\mu \varphi^n \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + i \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu D_\mu \psi^n) \right. \\ & + \frac{i}{4\pi} [(\nabla_l R_{k\bar{m}}) \bar{\psi}^{\bar{m}} \sigma^\mu \psi^k \partial_\mu \varphi^l + (\nabla_{\bar{l}} R_{k\bar{m}}) \psi^k \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi}^{\bar{m}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{l}}] \\ & + (g_{i\bar{j}} - \frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}}) \bar{F}^{\bar{j}} F^i - \frac{1}{2} (g_{n\bar{l}} - \frac{1}{2\pi} R_{n\bar{l}})_{,m} \bar{F}^{\bar{l}} \psi^n \psi^m \\ & \left. - \frac{1}{2} (g_{n\bar{m}} - \frac{1}{2\pi} R_{n\bar{m}})_{,\bar{l}} \bar{F}^{\bar{n}} \psi^{\bar{m}} \psi^{\bar{l}} + (g_{n\bar{k}} - \frac{1}{2\pi} R_{n\bar{k}})_{,m\bar{l}} (\bar{\psi}^{\bar{k}} \bar{\psi}^{\bar{l}}) (\psi^n \psi^m) \right] \end{aligned} \quad (4.70)$$

を得る。

ここまですとまとめると、SNLσMのactionが従う繰りこみ群方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S = & \frac{d}{dt} \int d^2x \left[g_{i\bar{j}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} + i g_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu (D_\mu \psi)^i + g_{i\bar{j}} \bar{F}^{\bar{j}} F^i - \frac{1}{2} g_{n\bar{l},m} \bar{F}^{\bar{l}} \psi^n \psi^m \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_{n\bar{m}\bar{l}} \bar{F}^{\bar{n}} \psi^{\bar{m}} \psi^{\bar{l}} + g_{n\bar{k}m\bar{l}} (\bar{\psi}^{\bar{k}} \bar{\psi}^{\bar{l}}) (\psi^n \psi^m) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left[R_{i\bar{j}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} + i R_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu (D_\mu \psi)^i \right. \\
&\quad + \frac{i}{2} [(\nabla_l R_{k\bar{m}}) \bar{\psi}^{\bar{m}} \sigma^\mu \psi^k \partial_\mu \varphi^l + (\nabla_{\bar{l}} R_{k\bar{m}}) \psi^k \bar{\sigma}^\mu \bar{\psi}^{\bar{m}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{l}}] \\
&\quad + R_{i\bar{j}} \bar{F}^{\bar{j}} F^i - \frac{1}{2} R_{n\bar{l},m} \bar{F}^{\bar{l}} \psi^n \psi^m - \frac{1}{2} R_{n\bar{m}\bar{l}} \bar{F}^{\bar{l}} \psi^{\bar{m}} \psi^{\bar{l}} + R_{n\bar{k}m\bar{l}} (\bar{\psi}^{\bar{k}} \bar{\psi}^{\bar{l}}) (\psi^n \psi^m) \left. \right] \\
&\quad + \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) (d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu}) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

となった。

各項の係数を比較しよう。

1. $\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^*$ の係数。

繰りこみ群方程式の bosonic part から、rescaling part を §4.1 と同じように計算して

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int g_{i\bar{j}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2x R_{i\bar{j}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \\
&\quad - \gamma \int d^2x \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}} \right] \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

となるので、メトリックの β 関数

$$\frac{d}{dt} g_{i\bar{j}} = -\frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}} - \gamma \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}} \right] \tag{4.73}$$

$$\equiv -\beta(g_{i\bar{j}}) \tag{4.74}$$

を得る。

2. $\bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu (D_\mu \psi)^i$ の係数

fermionic part の action を 1 ループ補正項の形にあわせて、

$$g_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu (D_\mu \psi)^i = \frac{1}{2} \left[g_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu (D_\mu \psi)^i + g_{i\bar{j}} \psi^i \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \bar{\psi})^{\bar{j}} \right] \tag{4.75}$$

と対称な形にしておこう。すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int d^2x g_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu (D_\mu \psi)^i &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2x R_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu (D_\mu \psi)^i + (\nabla_l R_{k\bar{m}}) \bar{\psi}^{\bar{m}} \sigma^\mu \psi^k \partial_\mu \varphi^l \\
&\quad - \gamma \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}} \right] \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu \partial_\mu \psi^i \\
&\quad - \gamma \left[\varphi^k g_{i\bar{j},kl} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}l} + 3g_{i\bar{j},l} \right] \bar{\psi}^{\bar{j}} \sigma^\mu \psi^i \partial_\mu \varphi^l
\end{aligned} \tag{4.76}$$

となり、 $g_{i\bar{j}}, g_{i\bar{j},l}$ の β 関数、

$$\frac{d}{dt} g_{i\bar{j}} = -\frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}} - \gamma \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}} \right] \tag{4.77}$$

$$\equiv -\beta(g_{i\bar{j}}) \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g_{i\bar{j},l} &= -\frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j},l} \\
&\quad - \gamma \left[\varphi^k g_{i\bar{j},kl} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}l} + 3g_{i\bar{j},l} \right]
\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\equiv -\beta(g_{i\bar{j},l}) \tag{4.80}$$

を得る。この式(4.77)は、bosonic part から得られた式(4.8)と同じであり、式(4.79)は式(4.77)の両辺を場 φ^l で微分したものになっている。

同様に $g_{i\bar{j}}\psi^i\bar{\sigma}^\mu(D_\mu\bar{\psi})^{\bar{j}}$ から得られる $g_{i\bar{j},\bar{l}}$ の β 関数は

$$\frac{d}{dt}g_{i\bar{j},\bar{l}} = -\frac{1}{2\pi}R_{i\bar{j},\bar{l}} - \gamma \left[\varphi^k g_{i\bar{j},k\bar{l}} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}l} + 3g_{i\bar{j},\bar{l}} \right] \quad (4.81)$$

$$\equiv -\beta(g_{i\bar{j},\bar{l}}) \quad (4.82)$$

となり、これは式(4.77)の両辺を $\varphi^{*\bar{l}}$ で微分したものになる。

このように各相互作用項の係数を比較して得られる β 関数はすべて式(4.77)から得られるものと同じになるので、独立な式は式(4.77)のみである。よって、次のセクションから target space のエネルギースケールよる変化をみるとき、メトリックの β 関数である、式(4.77)のみを考える。

4.4 応用例； CP^{N-1} model と Q^{N-2} model

ここまで得られたメトリックに対する β 関数によって、 CP^{N-1} 、 Q^{N-2} モデルについて実際に多様体がどのように変化するように見えるのか調べよう。

前のセクションで得られた繰りこみ群方程式、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int g_{i\bar{j}}(\partial_\mu\varphi)^i(\partial^\mu\varphi^*)^{\bar{j}} &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2x R_{i\bar{j}}(\partial_\mu\varphi)^i(\partial^\mu\varphi^*)^{\bar{j}} \\ &\quad - \gamma \int d^2x [\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}}] \partial_\mu\varphi^i \partial^\mu\varphi^{*\bar{j}} \end{aligned} \quad (4.83)$$

を使う。

1. CP^{N-1} model; $SU(N)/[SU(N-1) \otimes U(1)]$

このモデルのケーラーポテンシャルは、もともと $SU(N)$ 対称性を持つ理論のケーラーポテンシャル

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(|\Phi^1|^2 + |\Phi^2|^2 + \dots + |\Phi^N|^2) \quad (4.84)$$

に対して、

$$\Phi^i \sim a\Phi^i \quad (4.85)$$

という constraint を課す。ここで a は複素数の定数。すると、一般に第 Φ_N 成分が 1 になるような

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \vdots \\ \Phi^{N-1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

という座標系をとることができ、これによって global に $SU(N)$ の対称性を持つ CP^{N-1} model のケーラーポテンシャル、

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(1 + \Phi\Phi^\dagger) \quad (4.87)$$

が与えられる。ここの、 $\Phi^i, \Phi^{i\dagger}$ は、 $i=1, \dots, N-1$ 。

<メトリックとリッチテンソルの導出> (詳しい計算は Appendix B)
 すると、このケーラーポテンシャルから、

$$g_{i\bar{j}} \equiv K_{,i\bar{j}} \quad (4.88)$$

$$= c(t) \left[\frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \varphi^* \varphi} - \frac{\varphi_i^* \varphi_{\bar{j}}}{(1 + \varphi^* \varphi)^2} \right] \quad (4.89)$$

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_{\bar{j}} \partial_i (\ln \det g_{k\bar{l}}) \quad (4.90)$$

$$= \frac{N}{c(t)} g_{i\bar{j}} \quad (4.91)$$

を得る。このメトリックとリッチテンソルに $\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}}$ をつけることで、もともとのラグランジアンと、1ループ補正部分のラグランジアンを得ることができる。しかし、繰りこみ群方程式 (2.25) に代入するときは運動項の係数を 1 にしておかないと正しい anomalous dimension を出すことができないので、場 φ, φ^* を

$$\sqrt{c} \varphi \rightarrow \tilde{\varphi} \quad (4.92)$$

$$\sqrt{c} \varphi^* \rightarrow \tilde{\varphi}^* \quad (4.93)$$

と rescale する。(ここからは $\tilde{\varphi}$ を φ と書く。) さらに、摂動論との対応を見やすくするため、パラメーター $c(t)$ を coupling constant λ を使って

$$c(t) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4.94)$$

とおきなおす。

すると、メトリックとリッチテンソルは、

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi} - \frac{\lambda^2 \varphi_i^* \varphi_{\bar{j}}}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi)^2} \quad (4.95)$$

$$R_{i\bar{j}} = N \lambda^2 g_{i\bar{j}} \quad (4.96)$$

となる。これを式 (4.83) に入れ、 $\delta_{i\bar{j}}$ に比例する項に注目すると、

$$\frac{-2\lambda \dot{\lambda}}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi)^2} = -\frac{N \lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi} - 2\gamma \frac{1}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi)^2} \quad (4.97)$$

となるので、両辺、 $(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi)^2$ をかけて、定数項と $\varphi^* \varphi$ の項の係数を比較すると

$$\gamma = -\frac{N \lambda^2}{4\pi} \quad (4.98)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{N \lambda^3}{4\pi} \quad (4.99)$$

$$= -\beta(\lambda) \quad (4.100)$$

$$\beta(\lambda) = -\frac{N \lambda^3}{4\pi} \quad (4.101)$$

を得る。また、式 (4.83) の $\varphi_i^* \varphi_{\bar{j}}$ に比例する項からもこれらと同じ結果を得る。

つまり、この理論は高エネルギーで coupling constant が小さくなる、漸近的自由な理論となっている。この結果は、摂動論的 1ループの計算にインスタントンの効果を加えることで計算された、

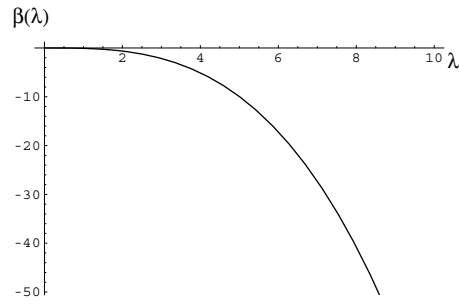


図 5: $N=1$ としたときの β 関数

Morozov らの結果 [1] [2] と一致する。また、 $N\lambda^2$ を有限にするように $N \rightarrow \infty$ とすることで、非摂動的解析の Large N 展開の結果 [3] の結果と一致させることもできる。さらに、今の近似法は有限な N に対して使うことができるので、Large N 展開 leading ではみることのできない、 CP^N model の β 関数、

$$\beta(\lambda) = -\frac{(N+1)\lambda^3}{4\pi} \quad (4.102)$$

$$= -\frac{N(1+\frac{1}{N})\lambda^3}{4\pi} \quad (4.103)$$

の $\frac{1}{N}$ のような寄与もみることができることから、同じ非摂動的解析でも Large N 展開よりは精度の良い近似法であるといえる。

2. Q^{N-2} model; $SO(N)/[SO(N-2) \otimes U(1)]$

このモデルのケーラーポテンシャルは、 CP^{N-1} model にさらに $\Phi^2=0$ という constraint をつけることによって得られる。

<証明> CP^{N-1} のときと同じ、 $SU(N)$ 対称性を持つ理論のケーラーポテンシャル

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(|\Phi^1|^2 + |\Phi^2|^2 + \dots + |\Phi^N|^2) \quad (4.104)$$

からはじめる。場 Φ の座標の取り方を

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \vdots \\ \Phi^{N-2} \\ \Phi^{N-1} \\ \Phi^N \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \vec{\Phi} \\ \Phi^{N-1} \\ \Phi^N \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

と取る。すると constraint $\Phi^2 = 0$ は、

$$(\Phi^{N-1})^2 + (\Phi^N)^2 + \vec{\Phi}^2 = 0 \quad (4.107)$$

$$(\Phi^N + i\Phi^{N-1})(\Phi^N - i\Phi^{N-1}) + \vec{\Phi}^2 = 0 \quad (4.108)$$

$$\Phi^N - i\Phi^{N-1} = \frac{-\vec{\Phi}^2}{\Phi^N + i\Phi^{N-1}} \quad (4.109)$$

$$= -\frac{1}{a}\vec{\Phi}^2 \quad (4.110)$$

とできる。ここで、 CP^{N-1} で $\Phi^N = 1$ となる座標系を選んだように、 $\Phi^N + i\Phi^{N-1} = a$ (a は任意の定数で複素数) となる座標を選んだ。

すると、ケーラーポテンシャルは、

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(|\Phi^1|^2 + \dots + |\Phi^{N-2}|^2 + |\Phi^{N-1}|^2 + |\Phi^N|^2) \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} &= c(t) \ln(|\vec{\Phi}|^2 + \frac{1}{2}[(\Phi^{\dagger\bar{N}} - i\Phi^{\dagger\bar{N}-1})(\Phi^N - i\Phi^{N-1}) + (\Phi^{\dagger\bar{N}} + i\Phi^{\dagger\bar{N}-1})(\Phi^N + i\Phi^{N-1})]) \\ &= c(t) \ln(|\vec{\Phi}|^2 + \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2|a|^2}\vec{\Phi}^2\vec{\Phi}^{\dagger 2}) \end{aligned} \quad (4.112)$$

となる。 $|a|^2 = 2$ とすれば Q^N model のケーラーポテンシャル、

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(1 + \Phi\Phi^\dagger + \frac{1}{4}\Phi^2\Phi^{\dagger 2}) \quad (4.113)$$

が与えられる。ただし、 $\Phi^i, \Phi^{\bar{i}}$ は、 $i=1, \dots, N-2$ 。(証明おわり)

<メトリックとリッチテンソルの導出> (詳しい計算は Appendix B)

するとこのケーラーポテンシャル (4.113) から、

$$g_{i\bar{j}} \equiv K_{,i\bar{j}} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} &= c(t) \left[\frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \varphi^*\varphi + \frac{1}{4}\varphi^2\varphi^{*2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi^i\varphi^{*\bar{j}}(1 + \varphi^*\varphi) - (\varphi_i^*\varphi_{\bar{j}} + \frac{1}{2}\varphi^2\varphi_i^*\varphi^{*\bar{j}} + \frac{1}{2}\varphi^{*2}\varphi^i\varphi_{\bar{j}})}{(1 + \varphi^*\varphi + \frac{1}{4}\varphi^2\varphi^{*2})^2} \right] \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_{\bar{j}}\partial_i \ln \det g_{k\bar{l}} \quad (4.116)$$

$$= \frac{(N-2)}{c(t)} g_{i\bar{j}} \quad (4.117)$$

を得る。これらを CP^{N-1} model のときと同じく運動項の係数を 1 にするため、場を rescale し、パラメーター $c(t)$ を coupling constant λ を使って

$$c(t) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4.118)$$

とおきなおすと、

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \lambda^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda^4}{4}\varphi^2\varphi^{*2}} + \frac{\lambda^2\varphi^i\varphi^{*\bar{j}}(1 + \lambda^2\varphi^*\varphi) - (\lambda^2\varphi_i^*\varphi_{\bar{j}} + \frac{\lambda^4}{2}\varphi^2\varphi_i^*\varphi^{*\bar{j}} + \frac{\lambda^4}{2}\varphi^{*2}\varphi^i\varphi_{\bar{j}})}{(1 + \lambda^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda^4}{4}\varphi^2\varphi^{*2})^2} \quad (4.119)$$

$$R_{i\bar{j}} = (N-2)\lambda^2 g_{i\bar{j}} \quad (4.120)$$

これを式 (4.83) に代入し、 $\delta_{i\bar{j}}$ に比例する項を比較すると、

$$\gamma = -\frac{(N-2)\lambda^2}{4\pi} \quad (4.121)$$

$$\lambda = \frac{(N-2)\lambda^3}{4\pi} \quad (4.122)$$

$$= -\beta(\lambda) \quad (4.123)$$

$$\beta(\lambda) = -\frac{(N-2)\lambda^3}{4\pi} \quad (4.124)$$

を得る。

これも、 CP^{N-1} model と同じく漸近自由な理論であり、このことは [2] [3] と一致する。

4.5 一般的な Einstein Kähler 多様体

ここまでみた、 CP^{N-1} model や Q^{N-2} model は $g_{i\bar{j}} \sim R_{i\bar{j}}$ という性質をもつ Einstein Kähler 多様体であった。ここでは、一般的な Einstein Kähler 多様体に対して、カイラルスーパーフィールドの anomalous dimension や多様体の半径にあたるパラメーターの β 関数をもとめよう。

半径 a の Einstein Kähler 多様体は、

$$R_{i\bar{j}} = \frac{h}{a^2} g_{i\bar{j}} \quad (4.125)$$

という性質をもつ。

ここで、エルミート対称空間 (G/H) の場合 h は、 G の adjoint 表現での 2 次のカシミア演算子の固有値 $C_2(G)$ を使って、

$$h = C_2(G) \quad (4.126)$$

$$(4.127)$$

になることが知られていて [15]、それは以下の通りである。ただし、ここで、文献 [15] とは異なり規格化を

$$tr(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (4.128)$$

ととった。

G/H	次元	h
$SU(N)/[SU(N-1) \otimes U(1)]$	N-1	N
$SU(N)/[SU(N-M) \otimes U(M)]$	M(N-M)	N
$SO(N)/[SO(N-2) \otimes U(1)]$	N-2	N-2
$Sp(N)/U(N)$	$\frac{1}{2}N(N+1)$	N+1
$SO(2N)/U(N)$	$\frac{1}{2}N(N+1)$	N-1
$E_6/[SO(10) \otimes U(1)]$	16	12
$E_7/[E_6 \otimes U(1)]$	27	18

すると σ model のラグランジアン

$$\mathcal{L} = g_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + i g_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \psi)^i + \frac{1}{4} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \psi^i \psi^k \bar{\psi}^{\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{l}} \quad (4.129)$$

$$\xrightarrow{\phi, \phi^* \approx 0} a^2 \delta_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + \dots \quad (4.130)$$

となるので、kinetic term の係数を 1 に規格化するために、場を $a\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ と rescale する。すると、

$$\mathcal{L} = g_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + \dots \quad (4.131)$$

$$= \tilde{g}_{i\bar{j}} \partial_\mu \tilde{\varphi}^i \partial^\mu \tilde{\varphi}^{*\bar{j}} + \dots \quad (4.132)$$

とかける。

ただしここで、

$$\tilde{g}_{i\bar{j}}|_{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^*=0} = \delta_{i\bar{j}} \quad (4.133)$$

となる、半径 1 のときのメトリック。

1 ループ補正部分のラグランジアンは

$$\Delta \mathcal{L}_1 = R_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + \dots \quad (4.134)$$

$$= \frac{h}{a^2} g_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + \dots \quad (4.135)$$

$$= \frac{h}{a^2} \tilde{g}_{i\bar{j}} \partial_\mu \tilde{\varphi}^i \partial^\mu \tilde{\varphi}^{*\bar{j}} + \dots \quad (4.136)$$

$$\equiv \tilde{R}_{i\bar{j}} \partial_\mu \tilde{\varphi}^i \partial^\mu \tilde{\varphi}^{*\bar{j}} + \dots \quad (4.137)$$

となる。

ここからは、前のセクションの結果を比べやすいように半径 a を coupling constant λ を使って、

$$a = \frac{1}{\lambda} \quad (4.138)$$

として計算を続ける。

rescaling part のラグランジアンは、

$$[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}}] \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} = [\lambda \tilde{\varphi}^k \frac{\partial \tilde{g}_{i\bar{j}}}{\partial(\lambda \tilde{\varphi}^k)} + \lambda \tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \frac{\partial \tilde{g}_{i\bar{j}}}{\partial(\lambda \tilde{\varphi}^{*\bar{k}})} + 2\tilde{g}_{i\bar{j}}] \partial_\mu \tilde{\varphi}^i \partial^\mu \tilde{\varphi}^{*\bar{j}} \quad (4.139)$$

$$= [\tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k} + \tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}} + 2\tilde{g}_{i\bar{j}}] \partial_\mu \tilde{\varphi}^i \partial^\mu \tilde{\varphi}^{*\bar{j}} \quad (4.140)$$

以上のことをもともとの繰りこみ群方程式 (4.83) に代入すると、 $\partial_\mu \tilde{\varphi}^i \partial^\mu \tilde{\varphi}^{*\bar{j}}$ の係数から

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_{i\bar{j}}(\lambda \tilde{\varphi}^*, \lambda \tilde{\varphi}^*) = -\frac{1}{2\pi} \tilde{R}_{i\bar{j}} - \gamma [\tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k} + \tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}} + 2\tilde{g}_{i\bar{j}}] \quad (4.141)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\lambda \tilde{\varphi}^k)}{\partial t} \frac{\partial \tilde{g}_{i\bar{j}}}{\partial(\lambda \tilde{\varphi}^k)} + \frac{\partial(\lambda \tilde{\varphi}^{*\bar{k}})}{\partial t} \frac{\partial \tilde{g}_{i\bar{j}}}{\partial(\lambda \tilde{\varphi}^{*\bar{k}})} = -\frac{h\lambda^2}{2\pi} \tilde{g}_{i\bar{j}} - \gamma [\tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k} + \tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}} + 2\tilde{g}_{i\bar{j}}] \quad (4.142)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}} = -\left(\frac{h\lambda^2}{2\pi} + 2\gamma\right) \tilde{g}_{i\bar{j}} - \gamma [\tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k} + \tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}}] \quad (4.143)$$

となるので、この式の両辺 $\tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k}$ 、 $\tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}}$ 、 $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ の係数をそれぞれ比べると、

$$\gamma = -\frac{h\lambda^2}{4\pi} \quad (4.144)$$

$$\dot{\lambda} = -\lambda\gamma \quad (4.145)$$

$$= \frac{h}{4\pi} \lambda^3 \quad (4.146)$$

$$\beta(\lambda) = -\frac{h}{4\pi} \lambda^3 \quad (4.147)$$

と、一般的な Einstein Kähler 多様体に対して、カイラルスーパーフィールドの anomalous dimension と coupling constant の β 関数を求めることができる。

この β 関数から、 $\beta = 0$ となる fixed point は $\lambda = 0$ (半径 $a \rightarrow \infty$) のときで、この時多様体は scalar curvature(R)=0 の flat な多様体になっている。また β 関数のグラフの fixed point の位置から non-trivial な相転移点は現れず 1 つの相しかないことがわかる。

5 異なる対称性を持つ多様体間の移り変わり

この章では、前の章でみた CP^N model と Q^N model をつなぐ繰りこみ群の flow を導く。この2つの多様体はどちらも Einstein Kähler 多様体ではあるが、その空間の持つ対称性は CP^N は global に $SU(N+1)$ の対称性をもつのにに対し、 Q^N は $SO(N+2)$ の対称性をもつので、この flow は対称性の異なる多様体をつなぐことになる。

出発点は、ケーラーポテンシャル

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(1 + \Phi^\dagger \Phi + g(t) \Phi^2 \Phi^{\dagger 2}) \quad (5.1)$$

からはじめる。ここで Φ, Φ^\dagger は N 成分とする。

このケーラーポテンシャルから得られる多様体のメトリックは、

$$g_{i\bar{j}} \equiv K_{,i\bar{j}} \quad (5.2)$$

$$= c(t) \left[\frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \varphi^* \varphi + g(t) \varphi^2 \varphi^{*2}} + \frac{4g(t) \varphi^i \varphi^{*\bar{j}} (1 + \varphi^* \varphi) - (\varphi_i^* \varphi_{\bar{j}} + 2g \varphi^2 \varphi_i^* \varphi^{*\bar{j}} + 2g \varphi^{*2} \varphi^i \varphi_{\bar{j}})}{(1 + \varphi^* \varphi + g \varphi^2 \varphi^{*2})} \right] \quad (5.3)$$

Ricci tensor は、 Q^N model で求めた方法と同じように $SO(N)$ 群の generator 行列で場 φ, φ^* の座標系のとり方をうまくとることで $\det g_{i\bar{j}}$ を計算でき、(詳しくは Appendix B)

$$R_{i\bar{j}} = (N+1) \frac{1}{c(t)} g_{i\bar{j}} - \left[\frac{4g \delta_{i\bar{j}}}{1 + 4g \varphi \varphi^* + g \varphi^2 \varphi^{*2}} + \frac{16g^2 \varphi^i \varphi^{*\bar{j}} \varphi \varphi^* - 16g^2 \varphi_i^* \varphi_{\bar{j}} - 8g^2 (\varphi^2 \varphi_i^* \varphi^{*\bar{j}} + \varphi^{*2} \varphi^i \varphi_{\bar{j}})}{(1 + 4g \varphi \varphi^* + g \varphi^2 \varphi^{*2})^2} \right] \quad (5.4)$$

ここで注目しておくことは、一般の $g(t)$ に対して、これは Einstein Kähler 多様体になっていない。anomalous dimension をだすため、もとのラグランジアン of 運動項の係数を 1 にしておかなければならないので、場を

$$\sqrt{c} \varphi \rightarrow \tilde{\varphi} \quad (5.5)$$

と rescale して、さらに

$$\frac{1}{c} = \lambda^2 \quad (5.6)$$

とおきなおす。(ここからは rescale した場 $\tilde{\varphi}$ を φ と記述する。)

これらを、4章で求めた β 関数;

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = \frac{-1}{2\pi} R_{i\bar{j}} - \gamma [\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}}] \quad (5.7)$$

に代入し、 $\delta_{i\bar{j}}$ の項をみると、

$$\begin{aligned} & \frac{-2\lambda \dot{\lambda} \varphi^* \varphi - (g\lambda^4 + 4g\lambda^3 \dot{\lambda}) \varphi^2 \varphi^{*2}}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g\lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})^2} \\ = & -\frac{1}{2\pi} \left[(N+1) \lambda^2 \frac{1}{1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g\lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2}} - \frac{4g\lambda^2}{1 + 4g\lambda^2 \varphi^* \varphi + g\lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2}} \right] - 2\gamma \frac{1 - g\lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2}}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g\lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

この両辺に $(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})^2 (1 + 4g \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})$ をかけて、それぞれの項の係数を比較をする。

すると、定数項から、

$$0 = -\frac{1}{2\pi}[(N+1)\lambda^2 - 4g\lambda^2] - 2\gamma \quad (5.9)$$

$$\gamma = \frac{-\lambda^2}{4\pi}[(N+1) - 4g]. \quad (5.10)$$

$\varphi^* \varphi$ の係数比較から、

$$-2\lambda\dot{\lambda} = -\frac{1}{2\pi}[(N+1)\lambda^2(\lambda^2 + 4g\lambda^2) - 8g\lambda^4] - 2\gamma \cdot 4g\lambda^2 \quad (5.11)$$

$$= -\frac{\lambda^4}{2\pi}[(N+1) - 8g(1-2g)] \quad (5.12)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\lambda^3}{4\pi}[(N+1) + 8g(2g-1)] \quad (5.13)$$

$$\equiv -\beta(\lambda) \quad (5.14)$$

より、

$$\beta(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{4\pi}[(N+1) + 8g(2g-1)]. \quad (5.15)$$

$\varphi^2 \varphi^{*2}$ の係数比較から

$$-(\dot{g}\lambda^4 + 4g\lambda^3\dot{\lambda}) = -\frac{1}{2\pi}[(N+1)\lambda^2(2g\lambda^4) - 4g\lambda^2 \cdot 2g\lambda^4] \quad (5.16)$$

$$= -\frac{\lambda^6}{2\pi}[2g(N+1) - 8g^2] \quad (5.17)$$

$\dot{\lambda}$ に式 (5.15) を代入してまとめると、

$$-\dot{g}\lambda^4 = -\frac{\lambda^6}{2\pi}[8(-4g^3 + g^2)] \quad (5.18)$$

$$\dot{g} = \frac{4\lambda^2}{\pi}g^2(1-4g) \quad (5.19)$$

$$\equiv -\beta(g) \quad (5.20)$$

より、

$$\beta(g) = -\frac{4\lambda^2}{\pi}g^2(1-4g) \quad (5.21)$$

が求まる。

すると、式 (5.21) からこの β 関数がゼロとなるのは、

$$g = 0, \frac{1}{4} \quad (5.22)$$

のところであり、

- $g=0$ のとき

$$\gamma = -\frac{\lambda^2}{4\pi}(N+1). \quad (5.23)$$

$$\beta(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{4\pi}(N+1). \quad (5.24)$$

これは4章の CP^N model に一致。

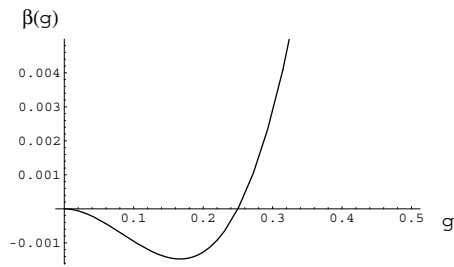


図 6: $\lambda = \text{const.}$ としたときの $\beta(g)$

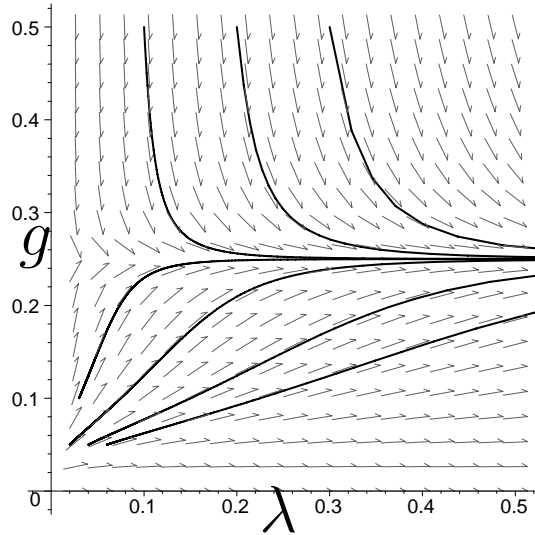


図 7: 繰り込み群の流れ (矢印は赤外方向)

- $g = \frac{1}{4}$ のとき

$$\gamma = -\frac{\lambda^2}{4\pi}N. \quad (5.25)$$

$$\beta(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{4\pi}N. \quad (5.26)$$

これは Q^N model の結果に一致する。

以上よりパラメーター g によって Einstein Kähler である CP^N model と、対称性の異なる別の Einstein Kähler 多様体である Q^N model とをつなぐ flow をえた。この式 (5.15) 式 (5.21) の微分方程式をとき、その flow の様子を図にすると図 7 のようになる。

この図から理論の紫外領域の fixed point は $\lambda = 0, g = 0$ の CP^N model、赤外領域の fixed point は Q^N model になっていることがわかる。つまり、はじめの理論を $g > \frac{1}{4}$ となるところからはじめると、赤外側での fixed point、 $g = \frac{1}{4}$ となる Q^N model に固定され、 $g < \frac{1}{4}$ からはじめると、紫外側で $g = 0$ となる CP^N model に、赤外側で $g = \frac{1}{4}$ となる Q^N model に固定される。

また、このことを対称性の観点からみる。 CP^N model が global に $SU(N+1)$ の対称性を、 Q^N model

は $SO(N+2)$ の対称性を持っていることから、それぞれの独立な生成子の数は

$$CP^N \quad ; \quad N(N+2) \text{ 個} \quad (5.27)$$

$$Q^N \quad ; \quad \frac{(N+2)(N+1)}{2} \text{ 個} \quad (5.28)$$

である。するとその差をとると、

$$N(N+2) - \frac{(N+2)(N+1)}{2} = \frac{1}{2}(N+2)(N-1), (N; \text{自然数}) \quad (5.29)$$

となり、 $N=1$ で CP^N model と Q^N model は同じで、このとき両方とも S^2 となっている。 $N > 1$ では CP^N model の方が独立な生成子の数が多く、対称性が高い。つまり、図7で得られた結果は、紫外領域でより対称性の高い CP^N が fixed point となり、赤外領域ではより対称性が低い Q^N model が fixed point となることを示す。また、一般的な g の値に対して Einstein Kähler 多様体になっていなかった多様体が、繰りこみ群変換をしていく最終的に Einstein Kähler 多様体に固定されるという結果を得た。このことをケーラーポテンシャルの具体形を使わず示す、ということはこれからの課題の一つである。

6 3次元の場合

6.1 一般的な Einstein Kähler 多様体

今までの議論はすべて2次元の理論であったが、ここで coupling constant の mass dimension が負になり摂動論では繰りこみ不可能な理論となる、3次元 N=2 の NL σ M の場合を考えよう。ラグランジアンは2次元の場合と同じ、

$$\mathcal{L} = g_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + i g_{i\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{j}} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \psi)^i + \frac{1}{4} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \psi^i \psi^k \bar{\psi}^{\bar{j}} \bar{\psi}^{\bar{l}} \quad (6.1)$$

である。これを使って Wilson 的繰りこみ群方程式、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S[\Omega; t] &= \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) - \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} \int_{q'} \frac{\delta S}{\delta \Omega^i(p')} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i(p') \delta \Omega^j(q')} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta \Omega^j(q')} \\ &\quad + \left[D - \sum_{\Omega^i} \int_p \hat{\Omega}^i(p) (d_{\Omega^i} + \gamma_{\Omega^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu}) \frac{\delta}{\delta \hat{\Omega}^i(p)} \right] \hat{S} \end{aligned} \quad (6.2)$$

の具体形を求めよう。

まず、1ループ補正部分、

$$\frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^j} \right) \quad (6.3)$$

を考えよう。

このとき2次元のようにそのまま計算すると (Appendix A) 共変性が破れる。そのため Kähler normal coordinate(KNC) [18] を使ってラグランジアンを展開し、1ループ補正部分を計算しよう。これは一般的な D次元で使える方法である。

まず、2次元の場合と同じく scalar 場のみの理論を考えよう。

Appendix C で導出した、Kähler normal coordinate(KNC) を使ってラグランジアンを展開すると、式 (C.10) から ξ 2次までで

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= g_{i\bar{j}} |_\varphi \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + g_{i\bar{j}} |_\varphi (D_\mu \xi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} + \partial^\mu \varphi^i D_\mu \xi^{*j}) + g_{ij^*} |_\varphi D_\mu \xi^i D_\mu \xi^{*j} \\ &\quad + R_{ij^*kl^*} |_\varphi \left(\xi^k \xi^{*l} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} - \frac{1}{2} \xi^i \xi^k \partial_\mu \varphi^{*j} \partial^\mu \varphi^{*l} - \frac{1}{2} \xi^{*j} \xi^{*l} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^k \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

となる。

この展開式を使って Appendix A と同様に、1ループ補正部分にあたる、

$$\int_{p'} tr \ln \frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^j(q' = -p') \delta \Omega^i(q')} = \int_{p'} tr \ln M_{ij}(-p', p') \quad (6.5)$$

を計算する。complex scalar 場のフーリエ変換は、

$$\varphi(x) \equiv \int_p \varphi(p) e^{-ipx} \quad (6.6)$$

$$\varphi^*(x) \equiv \int_p \varphi^*(p) e^{-ipx} \quad (6.7)$$

で定義する。

ここで、

$$M(q', p') = \begin{pmatrix} M_{k\bar{l}} & M_{\bar{k}l} \\ M_{kl} & M_{\bar{k}\bar{l}} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

と置く。具体的にこの行列成分をオペレーターで書くと、

$$M_{k\bar{l}} = \hat{p}_\mu \tilde{g}_{k\bar{l}} \hat{p}^\mu + \tilde{g}_{i\bar{j}, k\bar{l}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \quad (6.9)$$

$$= \langle \bar{l} | \hat{M}_1 | k \rangle \quad (6.10)$$

$$M_{\bar{k}l} = -\frac{1}{2} \tilde{g}_{i\bar{k}, j\bar{l}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi)^{\bar{j}} \quad (6.11)$$

$$= \langle \bar{l} | \hat{M}_2 | \bar{k} \rangle \quad (6.12)$$

$$M_{kl} = -\frac{1}{2} \tilde{g}_{k\bar{i}, l\bar{j}} (\partial_\mu \varphi^*)^{\bar{i}} (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \quad (6.13)$$

$$= \langle l | \hat{M}_3 | k \rangle \quad (6.14)$$

$$M_{\bar{k}\bar{l}} = \hat{p}_\mu \tilde{g}_{\bar{l}k} \hat{p}^\mu + \tilde{g}_{i\bar{j}, l\bar{k}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \quad (6.15)$$

$$= \langle l | \hat{M}_4 | \bar{k} \rangle \quad (6.16)$$

ここでも M_2, M_3 は既に外線微分の次数がそれぞれ2次であり、 \hat{M}_2 をいれると必ず \hat{M}_3 が入ってくるので今の近似では、これらは考えなくてよい。

すると、 $\int_{p'} \text{tr} \ln M_{ij}(-p', p')$ は、対角成分のみを考えればよく、

$$\int_{p'} \text{tr} \ln M_{ij} = \int_{p'} \text{tr} \ln M_{1i\bar{j}} + \int_{p'} \text{tr} \ln M_{4\bar{i}j} \quad (6.17)$$

と分解できる。

ここでも、 \hat{M}_1, \hat{M}_4 の第一項を、

$$\hat{p}_\mu \tilde{g}_{k\bar{l}} \hat{p}^\mu = \hat{p}_\mu \delta_{k\bar{l}} \hat{p}^\mu + \hat{p}_\mu \tilde{G}_{k\bar{l}} \hat{p}^\mu \quad (6.18)$$

と運動項と相互作用項にわけ、

$$\int_{p'} \text{tr} \ln M = \int_{p'} \text{tr} \ln M_0 + \int_{p'} \text{tr} \ln(1 + M_0^{-1} V) \quad (6.19)$$

として、 $\int_{p'} \text{tr} \ln(1 + M_0^{-1} V)$ を計算する。

まず、 \hat{M}_1 を考える。相互作用項は2つで、

$$V_1 = \hat{p}_\mu \tilde{G}_{k\bar{l}} \hat{p}^\mu \quad (6.20)$$

$$V_2 = \tilde{g}_{i\bar{j}, k\bar{l}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \quad (6.21)$$

外線微分2次の項をだすのは $\int_{p'} \text{tr} \ln(1 + M_0^{-1} V)$ の \ln を展開したとき、 V が V_1 のみの場合と V_2 が1回と残りが V_1 の場合。

- V_1 のみの場合

AppendixA の場合わけ (a) と同様にして、

$$\frac{1}{4} \int_{p'_1} \frac{1}{p'_1{}^2} \int d^D x (\partial_\mu \partial^\mu \tilde{G}_{k\bar{l}}) \tilde{g}^{k\bar{l}} \quad (6.22)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{p'_1} \frac{1}{p'_1{}^2} \int d^D x \left[\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{\bar{j}} \tilde{g}_{k\bar{l}, i} \tilde{g}^{k\bar{m}} \tilde{g}_{\bar{m}n, j} \tilde{g}^{n\bar{l}} \right. \\ \left. + \partial_\mu \varphi^{*i} \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \tilde{g}_{k\bar{l}, i} \tilde{g}^{k\bar{m}} \tilde{g}_{\bar{m}n, j} \tilde{g}^{n\bar{l}} + 2 \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \tilde{g}_{k\bar{l}, i} \tilde{g}^{k\bar{m}} \tilde{g}_{\bar{m}n, j} \tilde{g}^{n\bar{l}} \right] \quad (6.23)$$

今、 $\tilde{g}_{k\bar{l},i}, \tilde{g}_{k\bar{l},\bar{i}}$ は KNC の性質からゼロ。よって、この寄与はない。

- V_2 が 1 回と残りが V_1 の場合

AppendixA の場合わけ (g) と同様にして

$$\int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^D x \tilde{g}_{i\bar{j},k\bar{l}} \tilde{g}^{k\bar{l}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (6.24)$$

と計算できる。これは、一般的な座標系にもどすと、

$$- \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^D x R_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (6.25)$$

となる。

次に \hat{M}_4 についてだが、これも \hat{M}_1 の場合と同様に計算でき、結果も同じ。よって、微分の次数 2 次をだす 1 ループ補正項は、

$$\int_{p'} tr \ln M \sim -2 \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^D x R_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (6.26)$$

次に、ダンベル型ダイアグラムによる寄与は 2 次元の場合とラグランジアンのは同じなので derivative expansion の微分の次数 2 次までの近似では現れない。また、fermion 場を入れても scalar 場に対する新しい寄与が現れないということも、2 次元の場合と同じ議論からわかる。

以上より、SNL σ M の bosonic part に対する 1 ループ補正とダンベル型ダイアグラムによる補正は、derivative expansion で微分の次数が 2 次までの近似をとる限り任意の D 次元で、

$$\int_{p'} tr \ln M \sim -2 \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^D x R_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (6.27)$$

$$= \Omega_D (-2\delta t) \int d^D x R_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (6.28)$$

ここで、 Ω_D は $(D-1)$ 次元の立体角を $(2\pi)^D$ で割った、

$$\Omega_D = \frac{2}{\Gamma(D/2)(4\pi)^{D/2}} \quad (6.29)$$

である。

これを使って 3 次元の場合のループ補正部分は、

$$\frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_{p'} tr \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^i \delta \Omega^{\bar{j}}} \right) \sim -\frac{1}{2\pi^2} \int d^3 x R_{i\bar{j}} (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \quad (6.30)$$

とできる。

また、rescaling part は D=3 と、scalar 場の次元 $d_\varphi = \frac{1}{2}$ を使って、

$$\begin{aligned} & \left[3 - \sum_{\varphi^i} \int_p \hat{\varphi}^i(p) \left(\frac{1}{2} + \gamma_{\varphi^i} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^i(p)} - \sum_{\varphi^{*\bar{i}}} \int_p \hat{\varphi}^{*\bar{i}}(p) \left(\frac{1}{2} + \gamma_{\varphi^{*\bar{i}}} + \hat{p}^\mu \frac{\partial}{\partial \hat{p}^\mu} \right) \frac{\delta}{\delta \hat{\varphi}^{*\bar{i}}(p)} \right] \hat{S} \\ & = \int d^3 x \left[-\gamma [\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}}] (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} - \frac{1}{2} [\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}}] (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

となる。以上をまとめて3次元 NL σ M の繰りこみ群方程式は、

$$\frac{d}{dt}S = \int d^3x \left[-\frac{1}{2\pi^2}R_{i\bar{j}} - \gamma[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}}] - \frac{1}{2}[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}}] \right] (\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}} \quad (6.32)$$

となり、 $(\partial_\mu \varphi)^i (\partial^\mu \varphi^*)^{\bar{j}}$ の係数を比較することで、時空が3次元の時の target space のメトリックに対して

$$\frac{d}{dt}g_{i\bar{j}} = -\frac{1}{2\pi^2}R_{i\bar{j}} - \gamma[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}}] - \frac{1}{2}[\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}}] \quad (6.33)$$

$$= -\beta(g_{i\bar{j}}) \quad (6.34)$$

と β 関数を得る。

これを §4.5 で考えた一般的な Einstein Kähler 多様体について考えよう。このとき、式 (4.137) から、

$$\tilde{R}_{i\bar{j}} = h\lambda^2 \tilde{g}_{i\bar{j}} \quad (6.35)$$

なので、式 (4.143) までの議論と同様にして、

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}} = -\left(\frac{h\lambda^2}{2\pi} + 2\gamma\right) \tilde{g}_{i\bar{j}} - \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) [\tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k} + \tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}}] \quad (6.36)$$

を得る。この式の両辺 $\tilde{\varphi}^k \tilde{g}_{i\bar{j},k}$ 、 $\tilde{\varphi}^{*\bar{k}} \tilde{g}_{i\bar{j},\bar{k}}$ 、 $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ の係数をそれぞれ比べると、

$$\gamma = -\frac{h\lambda^2}{4\pi} \quad (6.37)$$

$$\dot{\lambda} = -\lambda\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \quad (6.38)$$

$$= \frac{h}{4\pi} \lambda^3 - \frac{1}{2} \lambda \quad (6.39)$$

$$\beta(\lambda) = -\frac{h}{4\pi} \lambda^3 + \frac{1}{2} \lambda \quad (6.40)$$

となり、これを図にすると、図8のようになる。このことから、3次元の場合2次元にはみられなかつ

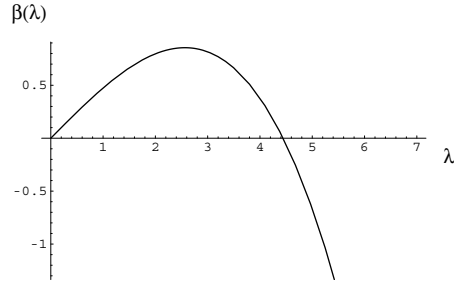


図 8: $h=1$ のときの β 関数

た、non-trivial な相転移点が存在する。今まで知られている結果から、 λ の大きい方では2次元と同じ、global 対称性の破れによる NG boson が mass を獲得するような相で、 λ が小さい方では NG boson が massless のまま存在するような相になっていると考えられるが、これを示すのはこれからの研究課題である。

6.2 4つの相をもつ例

ここでは、5章で考えたケーラーポテンシャル

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(1 + \Phi^\dagger \Phi + g(t) \Phi^2 \Phi^{\dagger 2}) \quad (6.41)$$

を考えよう。ここで Φ, Φ^\dagger は N 成分とする。このとき2次元ではパラメーター g の値によって2つの相が存在していた。これを3次元時空の場合に行うと、前のセクションでみたようにパラメーター λ にも non-trivial な fixed point があるので、4つの相が存在することがわかる。

5章と同じく、このケーラーポテンシャルから得られる多様体のメトリックは、

$$g_{i\bar{j}} = c(t) \left[\frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \varphi^* \varphi + g(t) \varphi^2 \varphi^{*2}} + \frac{4g(t) \varphi^i \varphi^{*\bar{j}} (1 + \varphi^* \varphi) - (\varphi_i^* \varphi_{\bar{j}} + 2g \varphi^2 \varphi_i^* \varphi^{*\bar{j}} + 2g \varphi^{*2} \varphi^i \varphi_{\bar{j}})}{(1 + \varphi^* \varphi + g \varphi^2 \varphi^{*2})} \right] \quad (6.42)$$

Ricci tensor は、

$$R_{i\bar{j}} = (N+1) \frac{1}{c(t)} g_{i\bar{j}} - \left[\frac{4g \delta_{i\bar{j}}}{1 + 4g \varphi \varphi^* + g \varphi^2 \varphi^{*2}} + \frac{16g^2 \varphi^i \varphi^{*\bar{j}} \varphi \varphi^* - 16g^2 \varphi_i^* \varphi_{\bar{j}} - 8g^2 (\varphi^2 \varphi_i^* \varphi^{*\bar{j}} + \varphi^{*2} \varphi^i \varphi_{\bar{j}})}{(1 + 4g \varphi \varphi^* + g \varphi^2 \varphi^{*2})^2} \right] \quad (6.43)$$

である。

これを、

$$\frac{1}{c(t)} = \lambda^2 \quad (6.44)$$

$$\lambda \varphi \rightarrow \tilde{\varphi} \quad (6.45)$$

と rescale して (ここから $\tilde{\varphi}$ を φ と書く) 前のセクションで得た、時空が3次元の時の、target space のメトリックに対する β 関数、

$$\frac{d}{dt} g_{i\bar{j}} = -\frac{1}{2\pi^2} R_{i\bar{j}} - \gamma [\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}} + 2g_{i\bar{j}}] - \frac{1}{2} [\varphi^k g_{i\bar{j},k} + \varphi^{*\bar{k}} g_{i\bar{j},\bar{k}}] \quad (6.46)$$

$$= -\beta(g_{i\bar{j}}) \quad (6.47)$$

に代入することで、 $\delta_{i\bar{j}}$ の項の係数比較から、

$$\begin{aligned} & \frac{-2\lambda \dot{\lambda} \varphi^* \varphi - (\dot{g} \lambda^4 + 4g \lambda^3 \dot{\lambda}) \varphi^2 \varphi^{*2}}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[(N+1) \lambda^2 \frac{1}{1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2}} - \frac{4g \lambda^2}{1 + 4g \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2}} \right] \\ & \quad - 2\gamma \frac{1 - g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2}}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})^2} + \frac{\lambda^2 \varphi^* \varphi + 2g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2}}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})^2} \end{aligned} \quad (6.48)$$

を得る。この両辺に $(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})^2 (1 + 4g \lambda^2 \varphi^* \varphi + g \lambda^4 \varphi^2 \varphi^{*2})$ をかけて、それぞれの相互作用項の係数を比較をする。

すると、定数項から、

$$0 = -\frac{1}{2\pi}[(N+1)\lambda^2 - 4g\lambda^2] - 2\gamma \quad (6.49)$$

$$\gamma = \frac{-\lambda^2}{4\pi}[(N+1) - 4g]. \quad (6.50)$$

$\varphi^*\varphi$ の係数比較から、

$$-2\lambda\dot{\lambda} = -\frac{1}{2\pi}[(N+1)\lambda^2(\lambda^2 + 4g\lambda^2) - 8g\lambda^4] - 2\gamma \cdot 4g\lambda^2 + \lambda^2 \quad (6.51)$$

$$= -\frac{\lambda^4}{2\pi}[(N+1) - 8g(1-2g)] + \lambda^2 \quad (6.52)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\lambda^3}{4\pi}[(N+1) + 8g(2g-1)] - \frac{\lambda}{2} \quad (6.53)$$

$$\equiv -\beta(\lambda) \quad (6.54)$$

より、

$$\beta(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{4\pi}[(N+1) + 8g(2g-1)] + \frac{\lambda}{2}. \quad (6.55)$$

$\varphi^2\varphi^{*2}$ の係数比較から

$$-(\dot{g}\lambda^4 + 4g\lambda^3\dot{\lambda}) = -\frac{1}{2\pi}[(N+1)\lambda^2(2g\lambda^4) - 4g\lambda^2 \cdot 2g\lambda^4] + 2g\lambda^4 \quad (6.56)$$

$$= -\frac{\lambda^6}{2\pi}[2g(N+1) - 8g^2] + 2g\lambda^4 \quad (6.57)$$

$\dot{\lambda}$ に式 (6.54) を代入してまとめると、

$$-\dot{g}\lambda^4 = -\frac{\lambda^6}{2\pi}[8(-4g^3 + g^2)] \quad (6.58)$$

$$\dot{g} = \frac{4\lambda^2}{\pi}g^2(1-4g) \quad (6.59)$$

$$\equiv -\beta(g) \quad (6.60)$$

より、

$$\beta(g) = -\frac{4\lambda^2}{\pi}g^2(1-4g) \quad (6.61)$$

が求まる。

この式 (6.55) (6.61) の β 関数がゼロとなる点をつなぐと < 図 9 > のようになる。この図は、 λ, g の値によって、理論が 4 つの相をもつことを示す。それぞれの相がどのような状態であるかは、これからの研究課題である。

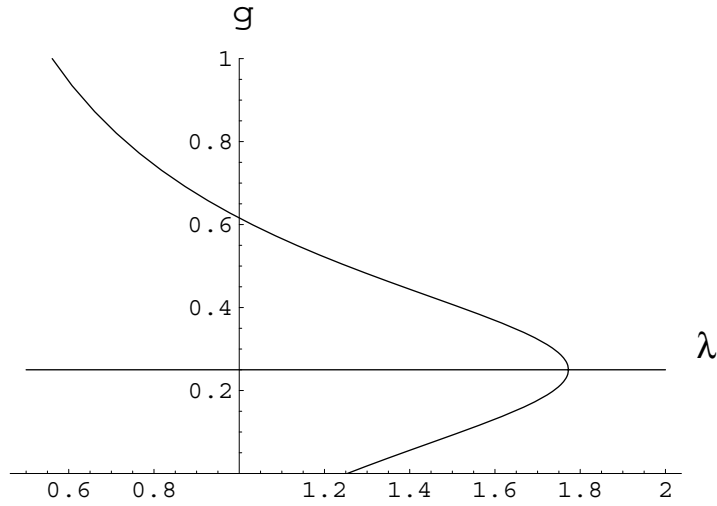


図 9: $N=1$ の場合 (相図)

7 まとめ

この論文は、主に 2次元 $N=2$ の $NL\sigma M$ を使い、Wilson 的繰りこみ群によってその effective theory の target space がどのように変化していくのかを調べた。それによる主な成果は次の通りである。

- §4.5

一般的な Einstein Kähler 多様体について、その半径の逆数に対応する coupling constant の β 関数を求め、理論の漸近的自由性を示した。

- 5章

途中、Einstein Kähler 多様体ではない多様体を経由して、 CP^N model と Q^N model をつなぐような繰りこみ群の flow を得た。このとき fixed point は紫外側と赤外側と 2つの点があり、どちらの fixed point も多様体が対称性の高い Einstein Kähler 多様体になっていることがわかった。また、紫外側がより対称性の高い CP^N model に、赤外側が CP^N より対称性の低い Q^N model になっていることも示すことができた。

- 6章

5章まで 2次元でおこなっていたことを、摂動論では繰りこみ不可能な理論である 3次元 $NL\sigma M$ に拡張し、繰りこみ群方程式を得た。これを target space が一般的な Einstein Kähler 多様体の場合を使うことで、2次元の理論にはみられなかった non-trivial な相転移点があることがわかった。

これからの課題としては、

- 3章の real scalar 場だけの理論で、微分を含まない相互作用項 $V[\varphi]$ を入れた時どのような結果が得られるか、ということ調べる。
- 5章で示した Einstein Kähler 多様体ではない多様体が Einstein Kähler 多様体に flow するという結果から、このことが model によらず一般的に示せるのではないか、という仮定を示す。

- 6章での得られた相転移点で実際理論にどのような変化が見られるのか調べる。
- 3次元の場合、2つ以上 fixed point のある場合それぞれの fixed point で実現されている conformal field theory について調べる。

などがあげられる。

謝辞

この論文を書くにあたり、東島清先生、新田宗土さんには議論のために多くの時間を割いて頂き、さらにいくつかの重要な指摘を頂き感謝しています。

三浦隆裕さん、進藤哲央さんにはコンピューターについて様々なことを教えていただきました。また、いくつかコメントを下された、佐藤松夫さん、江本大輝さん、西原康介さん、木村哲士さんにも感謝しています。最後に研究面、精神面で支えてくださった、秘書の松原章子さん、境淑江さんをはじめ、研究室のスタッフ、学生のみなさんにも感謝します。

A 繰りこみ群方程式の詳しい計算

ここでは、4章の Kähler metric の繰りこみ群方程式導出の詳しい計算を書く。
Action;

$$S = \int d^2x g_{i\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (\text{A.1})$$

を使ってまず、1ループ補正部分にあたる、

$$\int_{p'} \text{tr} \ln \frac{\delta^2 S}{\delta \Omega^{\bar{j}}(q' = -p') \delta \Omega^i(q')} = \int_{p'} \text{tr} \ln M_{ij}(-p', p') \quad (\text{A.2})$$

を計算する。complex scalar 場のフーリエ変換は、

$$\varphi(x) \equiv \int_p \varphi(p) e^{-ipx} \quad (\text{A.3})$$

$$\varphi^*(x) \equiv \int_p \varphi^*(p) e^{-ipx} \quad (\text{A.4})$$

で定義する。

ここで、

$$M(q', p') = \begin{pmatrix} M_{k\bar{l}} & M_{\bar{k}l} \\ M_{kl} & M_{\bar{k}\bar{l}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

と置く。具体的にこの行列成分を書くと、

$$M_{k\bar{l}} \equiv \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^{*\bar{l}}(q') \delta \varphi^k(p')} \quad (\text{A.6})$$

$$= \int (-p' \cdot q') g_{k\bar{l}} - (p' \cdot q) g_{k\bar{j}, \bar{l}} \varphi^{*\bar{j}}(q) - (p \cdot q') g_{i\bar{l}, k} \varphi^i(p) - (p \cdot q) g_{i\bar{j}, k\bar{l}} \varphi^i(p) \varphi^{*\bar{j}}(q) \quad (\text{A.7})$$

であり、これを

$$\equiv \langle \bar{l}, -q' | \hat{M}_1 | k, p' \rangle \quad (\text{A.8})$$

とオペレーター \hat{M}_1 の行列成分とみなす。同様に

$$M_{\bar{k}l} \equiv \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^{*l}(q') \delta \varphi^{*\bar{k}}(p')} \quad (\text{A.9})$$

$$= \int g_{i\bar{l}, \bar{k}j} (-p \cdot p') \varphi^i(p) + g_{i\bar{l}, \bar{k}} (-p \cdot q') \varphi^i(p) + g_{i\bar{j}, \bar{k}l} (-p \cdot q) \varphi^i(p) \varphi^{*\bar{j}} \quad (\text{A.10})$$

$$\equiv \langle \bar{l}, -q' | \hat{M}_2 | \bar{k}, p' \rangle \quad (\text{A.11})$$

$$M_{kl} \equiv \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^l(q') \delta \varphi^k(p')} \quad (\text{A.12})$$

$$\equiv \langle l, -q' | \hat{M}_3 | k, p' \rangle \quad (\text{A.13})$$

$$M_{\bar{k}\bar{l}} \equiv \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^l(q') \delta \varphi^{*\bar{k}}(p')} \quad (\text{A.14})$$

$$\equiv \langle l, -q' | \hat{M}_4 | \bar{k}, p' \rangle \quad (\text{A.15})$$

と $\hat{M}_2, \hat{M}_3, \hat{M}_4$ 定義する。また、状態 $|k, p_1\rangle$ は、

$$\text{内積} \tag{A.16}$$

$$\langle k, p | \bar{l}, q \rangle = \langle \bar{l}, p | k, q \rangle = \hat{\delta}(q-p)\delta_{k\bar{l}} \tag{A.17}$$

$$\text{完全系} \tag{A.18}$$

$$\sum_{k, \bar{l}} [|k\rangle \delta^{\bar{l}k} \langle \bar{l}| + |\bar{l}\rangle \delta^{\bar{l}k} \langle k|] = 1 \tag{A.19}$$

で定義する。

オペレーター $\hat{M}_1 \cdots \hat{M}_4$ の具体形は、

$$(\hat{M}_1)_{k\bar{l}} = \hat{p}_\mu g_{k\bar{l}} \hat{p}^\mu + \hat{p}^\mu g_{\bar{l},k} (i\partial_\mu \varphi^i) - g_{k\bar{j},\bar{l}} (i\partial_\mu \varphi^{*\bar{j}}) \hat{p}^\mu + g_{i\bar{j},k\bar{l}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \tag{A.20}$$

$$(\hat{M}_2)_{\bar{k}\bar{l}} = -g_{\bar{l},\bar{k}j} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j - g_{\bar{l},\bar{k}\bar{j}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} - g_{\bar{l},\bar{k}} (\partial_\mu \partial^\mu \varphi^i) + g_{i\bar{j},\bar{k}\bar{l}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \tag{A.21}$$

$$(\hat{M}_3)_{kl} = -g_{\bar{j}l,ki} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} - g_{\bar{j}l,k\bar{i}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{i}} \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} - g_{\bar{j}l,k} (\partial_\mu \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}}) + g_{i\bar{j},kl} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \tag{A.22}$$

$$(\hat{M}_4)_{\bar{k}\bar{l}} = \hat{p}_\mu g_{\bar{k}\bar{l}} \hat{p}^\mu + \hat{p}^\mu g_{\bar{l},k} (i\partial_\mu \varphi^{*\bar{j}}) - g_{i\bar{k},l} (i\partial_\mu \varphi^i) \hat{p}^\mu + g_{i\bar{j},\bar{k}\bar{l}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \tag{A.23}$$

ここで、 \hat{M}_2, \hat{M}_3 は外線の微分の次数がそれぞれ2次であることに注意する。

\hat{M}_1, \hat{M}_4 の第一項を

$$\hat{p} g_{k\bar{l}} \hat{p} = \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu + \hat{p}_\mu G_{k\bar{l}} \hat{p}^\mu \tag{A.24}$$

と、運動項と相互作用項にわけ、

$$M(q', p') = \begin{pmatrix} \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu & 0 \\ 0 & \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{k\bar{l}} - \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu & M_{\bar{k}\bar{l}} \\ M_{kl} & M_{\bar{k}\bar{l}} - \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \end{pmatrix} \tag{A.25}$$

$$= \begin{pmatrix} M_0 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V \\ \end{pmatrix} \tag{A.26}$$

と運動項と相互作用項にわけ、 $tr \ln M = tr \ln M_0 + tr \ln(1 + M_0^{-1}V)$ として計算する。ここで $tr \ln M_0$ は運動量積分すると積分する運動量空間の体積(定数)ができるだけなのでこれは無視して、 $tr \ln(1 + M_0^{-1}V)$ の部分だけ考える。

今、 \hat{M}_2, \hat{M}_3 は外線微分の次数がそれぞれ2次であり、 \hat{M}_2 をいれると必ず \hat{M}_3 が入ってくるので今の近似では、これらは考えなくてよい。

すると、 $\int_{p'} tr \ln M_{ij}(-p', p')$ は、対角成分のみを考えればよく、

$$\int_{p'} tr \ln M_{ij} = \int_{p'} tr \ln M_{1i\bar{j}} + \int_{p'} tr \ln M_{4\bar{i}j} \tag{A.27}$$

と分解できる。

1. \hat{M}_1 を使った時

相互作用部分のオペレーターを

$$V_1 = \hat{p}_\mu G_{k\bar{l}} \hat{p}^\mu \quad (\text{A.28})$$

$$V_2 = \hat{p}^\mu g_{i\bar{l},k} (i\partial_\mu \varphi^i) \quad (\text{A.29})$$

$$V_3 = -g_{k\bar{j},\bar{l}} (i\partial_\mu \varphi^{*\bar{j}}) \hat{p}^\mu \quad (\text{A.30})$$

$$V_4 = g_{i\bar{j},k\bar{l}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (\text{A.31})$$

と置く。

外線微分 2 次を持つループ補正をだすのは、 $\text{tr} \ln(1 + M_0^{-1}V)$ で \ln の展開 n 次で、 V が次の 7 つの場合である。

(a) V が V_1 のみのとき

\ln 展開第 n 次は、

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n} \int_{p'_1 \dots p'_n} \frac{(p'_1 \cdot p'_2) \dots (p'_n \cdot p'_1)}{p_1'^2 \dots p_n'^2} G(k_1) \dots G(k_n) \hat{\delta}(k_1 + p'_2 - p'_1) \hat{\delta}(k_2 + p'_3 - p'_2) \dots \hat{\delta}(k_n + p'_1 - p'_n) \quad (\text{A.32})$$

p'_2 から p'_n 積分で δ 関数を次々使うと

$$p'_n = p'_1 + k_n \equiv p'_1 - \hat{k}_{n-1}$$

$$p'_{n-1} = p'_1 + k_{n-1} + k_n \equiv p'_1 - \hat{k}_{n-2}$$

\vdots

$$p'_2 = p'_1 + k_2 + \dots + k_n \equiv p'_1 - \hat{k}_1 \quad (\text{A.33})$$

ここで、

$$\hat{k}_1 = k_1 \quad (\text{A.34})$$

$$\hat{k}_2 = k_1 + k_2 \quad (\text{A.35})$$

\vdots

$$\hat{k}_{n-1} = k_1 + \dots + k_{n-1} \quad (\text{A.37})$$

$$\hat{k}_n = k_1 + \dots + k_n = 0 (\because \text{最後に残る運動量保存則から}) \quad (\text{A.38})$$

とおいた。すると、式 (A.33) は

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n} \int_{p'_1} \frac{\prod_i^n (p'_1 - \hat{k}_i)(p'_1 - \hat{k}_{i+1})}{\prod_i (p_1 - \hat{k}_i)^2} G(k_1) \dots G(k_n) \hat{\delta}(k_1 + \dots + k_n) \quad (\text{A.39})$$

外線運動量 (k_1, \dots, k_n) が 2 次までになるように分子分母を展開して

$$= \int_{p'} \left[1 + \frac{\sum_i \hat{k}_i (\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i)}{p_1'^2} + \frac{1}{p_1'} \frac{1}{2} \sum_{i < j} [(\hat{k}_i + \hat{k}_{i+1})(\hat{k}_j + \hat{k}_{j+1}) - 4\hat{k}_i \hat{k}_j] \right] G(k_1) \dots G(k_n) \hat{\delta}(k_1 + \dots + k_n)$$

第一項は微分相互作用ではないので今は必要ない。

$$\begin{aligned}
&= \int_{p'} \frac{1}{p_1'^2} \left[\sum_i \hat{k}_i k_{i+1} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i<j} k_{i+1} \hat{k}_j + \sum_{j<i} \hat{k}_j k_{i+1} \right] \right] G(k_1) \cdots G(k_n) \hat{\delta}(k_1 + \cdots + k_n) \\
&= \int_p' \frac{1}{p_1'^2} \left[\sum_i \hat{k}_i k_{i+1} + \frac{1}{2} \left[\sum_i k_{i+1} \sum_j \hat{k}_j - \sum_i \hat{k}_i k_{i+1} \right] \right] G(k_1) \cdots G(k_n) \hat{\delta}(k_1 + \cdots + k_n) \\
&= \int_{p_1'} \left(\frac{1}{2} \right) \sum_i \hat{k}_i k_{i+1} G(k_1) \cdots G(k_n) \hat{\delta}(k_1 + \cdots + k_n) \\
&= (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \int_{p_1'} \frac{1}{p_1'^2} \left(-\frac{1}{4} \right) \sum_i (k_i)^2 G(k_1) \cdots G(k_n) \hat{\delta}(k_1 + \cdots + k_n) \\
&= (-1)^{n-1} \int_{p_1'} \frac{1}{p_1'^2} \frac{1}{4} \int d^D x (\partial_\mu \partial^\mu G) G^{n-1} \tag{A.40}
\end{aligned}$$

となるので、 n について無限級数和をとると、

$$\frac{1}{4} \int_{p_1'} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2 x (\partial_\mu \partial^\mu G_{k\bar{l}}) g^{k\bar{l}} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int_{p_1'} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2 x \left[\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j g_{k\bar{l},i} g^{k\bar{m}} g_{m\bar{n},j} g^{n\bar{l}} \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu \varphi^{*i} \partial^\mu \varphi^{*j} g_{k\bar{l},i} g^{k\bar{m}} g_{m\bar{n},j} g^{n\bar{l}} + 2 \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} g_{k\bar{l},i} g^{k\bar{m}} g_{m\bar{n},j} g^{n\bar{l}} \right] \tag{A.42}
\end{aligned}$$

を得る。ここで、途中、 p' 積分は球対称な積分領域をもつので、対称性から $p'^\mu p'^\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p'^2$ とできることを使った。

(b) V_2 が2回と残りは V_1 のとき

(V_2 が3回以上入ると外線微分の次数が3次以上になるので2次まで考えればよい) V_2 が2回入るという条件のもとで、 $\ln(1+M_0^{-1}V)$ を展開すると、

$$\begin{aligned}
&tr \ln(1 + M_0^{-1}V) \\
&= -\frac{1}{2} tr \left[(M_0^{-1}V_2)(1 - (M_0^{-1}V_1) + (M_0^{-1}V_1)^2 - \cdots)(M_0^{-1}V_2)(1 - (M_0^{-1}V_1) + (M_0^{-1}V_1)^2 - \cdots) \right] \tag{A.43}
\end{aligned}$$

となり、 $(1 - (M_0^{-1}V_1) + (M_0^{-1}V_1)^2 - \cdots)$ の部分は g^{-1} になることを使うと、 V_2 が2回入るとき、 $\ln(1+M_0^{-1}V)$ は、

$$\frac{1}{2} \int_{p_1'} \frac{p_1'^\mu p_1'^\mu}{(p_1'^2)^2} \int d^2 x g_{i\bar{l},k} g^{k\bar{m}} g_{j\bar{m},n} g^{n\bar{l}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \tag{A.44}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{p_1'} \frac{1}{(p_1'^2)} \int d^2 x g_{i\bar{l},k} g^{k\bar{m}} g_{j\bar{m},n} g^{n\bar{l}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \tag{A.45}$$

を得る。

(c) V_3 が 2 回と残りは V_1 のとき

(b) の場合と全く同じ議論から、すぐに

$$\frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{p'_1{}^\mu p'_1{}^\mu}{(p'_1{}^2)^2} \int d^2x g_{k\bar{j},\bar{l}} g^{k\bar{m}} g_{n\bar{i},\bar{m}} g^{n\bar{l}} \partial_\mu \varphi^{*i} \partial^\mu \varphi^{*j} \quad (\text{A.46})$$

$$= \frac{1}{4} \int_{p'_1} \frac{1}{(p'_1{}^2)} \int d^2x g_{k\bar{j},\bar{l}} g^{k\bar{m}} g_{n\bar{i},\bar{m}} g^{n\bar{l}} \partial_\mu \varphi^{*i} \partial^\mu \varphi^{*j} \quad (\text{A.47})$$

を得る。

(d) V_2, V_3 が 1 回ずつ入り、残りは V_1 のとき

(b),(c) と比べて $V_2 \leftrightarrow V_3$ の自由度があるので、

$$-\frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{(p'_1{}^2)} \int d^2x g_{i\bar{k},l} g^{l\bar{m}} g_{n\bar{j},\bar{m}} g^{n\bar{k}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} \quad (\text{A.48})$$

となる。

(e) V_2 が 1 回と残りは V_1 のとき

$\text{tr} \ln(1+M_0^{-1}V)$ の展開第 n 次は、

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n} \int_{p'_1 \dots p'_n} \frac{(p'_1 \cdot q)(p'_2 \cdot p'_3) \dots (p'_n \cdot p'_1)}{p_1'^2 \dots p_n'^2} g_{i\bar{l},k}(k) \cdot G(k_1) \dots G(k_{n-1}) \varphi^i(q) \delta(p'_2 - p'_1 + q + k) \delta(p'_3 - p'_2 + k_1) \dots \delta(p'_1 - p'_n + k_{n-1}) \quad (\text{A.49})$$

p'_2 から p'_n 積分で δ 関数を次々使うと

$$p'_n = p'_1 + k_{n-1}$$

$$p'_{n-1} = p'_1 + k_{n-2} + k_{n-1}$$

\vdots

$$p'_2 = p'_1 + k_1 + \dots + k_{n-1} \quad (\text{A.50})$$

となるので、これを代入し、分子分母を外線運動量 2 次まで展開すると

$$= (-1)^{n-1} \int_{p'_1} \left(\frac{p'_1 \cdot q}{p_1'^2} - \frac{(p'_1 \cdot q)[p'_1(k_1 + \dots + k_{n-1})]}{p_1'^4} \right) g_{i\bar{l},k}(k) \cdot G(k_1) \dots G(k_{n-1}) \varphi^i(q) \delta(q + k + k_1 + \dots + k_{n-1}) \quad (\text{A.51})$$

第 1 項は p' に関して奇関数なので運動量積分で消えるから、残るのは

$$= (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x g_{i\bar{l},k} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu (G^{n-1}) \quad (\text{A.52})$$

となるので、 n について無限級数和をとって、

$$\frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x g_{i\bar{l},k} (\partial_\mu g^{k\bar{l}}) (\partial^\mu \varphi^i) \quad (\text{A.53})$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x \left[\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j g_{i\bar{l},k} g^{k\bar{m}} g_{\bar{m}n,j} g^{n\bar{l}} + \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} g_{i\bar{l},k} g^{k\bar{m}} g_{\bar{m}n,\bar{j}} g^{n\bar{l}} \right] \quad (\text{A.54})$$

を得る。

- (f) V_3 が 1 回と残りは V_1 のとき
方針としては (e) と同じように行う。

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n} n (-1) \int_{p'_1 \dots p'_n} \frac{(p'_2 \cdot q)(p'_2 \cdot p'_3) \cdots (p'_n \cdot p'_1)}{p_1'^2 \cdots p_n'^2} g_{k\bar{j}, \bar{l}}(k) \cdot G(k_1) \cdots G(k_{n-1}) \varphi^{*\bar{j}}(q) \hat{\delta}(p'_2 - p'_1 + q + k) \hat{\delta}(p'_3 - p'_2 + k_1) \cdots \hat{\delta}(p'_n - p'_{n-1} + k_{n-1}) \quad (\text{A.55})$$

$$= (-1)^{n-1} (-1) \int_{p'_1} \left(\frac{p'_1 \cdot q}{p_1'^2} - \frac{(p'_1 \cdot q)[p'_1(k_1 + \cdots + k_{n-1})]}{p_1'^4} + \frac{q(k_1 + \cdots + k_{n-1})}{p_1'^2} \right) g_{k\bar{j}, \bar{l}}(k) \cdot G(k_1) \cdots G(k_{n-1}) \varphi^{*\bar{j}}(q) \hat{\delta}(q + k + k_1 + \cdots + k_{n-1}) \quad (\text{A.56})$$

第 1 項は p' に関して奇関数なので運動量積分で消えるから、残るのは

$$= (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2 x g_{k\bar{j}, \bar{l}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{j}} \partial^\mu (G^{n-1}) \quad (\text{A.57})$$

となるので、 n について無限級数和をとって、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2 x g_{k\bar{j}, \bar{l}} (\partial_\mu g^{k\bar{l}}) (\partial^\mu \varphi^{*\bar{j}}) \quad (\text{A.58}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2 x \left[\partial_\mu \varphi^{*\bar{i}} \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} g_{k\bar{i}, \bar{l}} g^{k\bar{m}} g_{\bar{m}n, \bar{j}} g^{n\bar{l}} + \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} g_{k\bar{j}, \bar{l}} g^{k\bar{m}} g_{\bar{m}n, i} g^{n\bar{l}} \right] \quad (\text{A.59}) \end{aligned}$$

を得る。

- (g) V_4 が 1 回と残りは V_1 のとき
 $\text{tr} \ln(1 + M_0^{-1} V)$ の展開第 n 次は、

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n} n \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} g_{i\bar{j}, k\bar{l}}(k) \cdot G(k_1) \cdots G(k_{n-1}) (-p \cdot q) \varphi^i(p) \varphi^{*\bar{j}}(q)$$

となるので、 n について無限級数和をとって、

$$\int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2 x g_{i\bar{j}, k\bar{l}} g^{k\bar{l}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (\text{A.60})$$

を得る。

以上をまとめて、 \hat{M}_1 からでる外線微分 2 次の寄与は、

$$\int_{p'} \text{tr} \ln M_{1i\bar{j}} = \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2 x \left[\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} (g_{i\bar{j}, k\bar{l}} g^{k\bar{l}} - g_{k\bar{l}, i} g^{k\bar{m}} g_{n\bar{m}, \bar{j}} g^{n\bar{l}}) \right] \quad (\text{A.61})$$

$$= -\frac{1}{2\pi} (\delta t) \int d^2 x \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} R_{i\bar{j}} \quad (\text{A.62})$$

となる。ここで、もとのラグランジアンになかった微分 2 次の項、

$$(\partial_\mu \varphi)^2, (\partial_\mu \varphi^*)^2$$

のような項は計算途中では現れたが最終的にはキャンセルした。

2. \hat{M}_4 を使った時

\hat{M}_1 のときと同じく、相互作用部分のオペレーターを

$$V_1 = \hat{p} G_{\bar{k}l} \hat{p} \quad (\text{A.63})$$

$$V_2 = \hat{p} g_{l\bar{j},k} (i\partial_\mu \varphi^{*\bar{j}}) \quad (\text{A.64})$$

$$V_3 = -g_{i\bar{k},l} (i\partial_\mu \varphi^i) \hat{p}^\mu \quad (\text{A.65})$$

$$V_4 = g_{i\bar{j},\bar{k}l} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (\text{A.66})$$

と置く。

外線微分 2 次をだす場合わけも計算方法も \hat{M}_1 のときと同じ。

結果を書くと

(a) V が V_1 のみのとき

$$\frac{1}{4} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x (\partial_\mu \partial^\mu G_{l\bar{k}}) g^{l\bar{k}} \quad (\text{A.67})$$

$$= \frac{1}{4} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x \left[\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j g_{l\bar{k},i} g^{l\bar{m}} g_{\bar{m}n,j} g^{n\bar{k}} \right. \\ \left. + \partial_\mu \varphi^{*\bar{i}} \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} g_{l\bar{k},\bar{i}} g^{l\bar{m}} g_{\bar{m}n,\bar{j}} g^{n\bar{k}} + 2\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} g_{l\bar{k},i} g^{l\bar{m}} g_{\bar{m}n,\bar{j}} g^{n\bar{k}} \right] \quad (\text{A.68})$$

(b) V_2 が 2 回と残りは V_1 のとき

$$\frac{1}{4} \int_{p'_1} \frac{1}{(p_1'^2)} \int d^2x g_{l\bar{j},\bar{k}} g^{l\bar{m}} g_{n\bar{i},\bar{m}} g^{n\bar{k}} \partial_\mu \varphi^{*\bar{i}} \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (\text{A.69})$$

(c) V_3 が 2 回と残りは V_1 のとき

$$\frac{1}{4} \int_{p'_1} \frac{1}{(p_1'^2)} \int d^2x g_{i\bar{k},l} g^{l\bar{m}} g_{j\bar{m},n} g^{n\bar{k}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \quad (\text{A.70})$$

(d) V_2, V_3 が 1 回ずつ入り、残りは V_1 のとき

$$-\frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{(p_1'^2)} \int d^2x g_{i\bar{k},l} g^{l\bar{m}} g_{n\bar{j},\bar{m}} g^{n\bar{k}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}} \quad (\text{A.71})$$

(e) V_2 が 1 回と残りは V_1 のとき

$$-\frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x \left[\partial_\mu \varphi^{*i} \partial^\mu \varphi^{*j} g_{\bar{k}l, \bar{i}} g^{l\bar{m}} g_{\bar{m}n, \bar{j}} g^{n\bar{k}} + \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} g_{i\bar{k}, l} g^{l\bar{m}} g_{\bar{m}n, \bar{j}} g^{n\bar{k}} \right] \quad (\text{A.72})$$

(f) V_3 が 1 回と残りは V_1 のとき

$$\frac{1}{2} \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x \left[\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j g_{i\bar{k}, l} g^{l\bar{m}} g_{\bar{m}n, \bar{j}} g^{n\bar{k}} + \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} g_{i\bar{k}, l} g^{l\bar{m}} g_{\bar{m}n, \bar{j}} g^{n\bar{k}} \right] \quad (\text{A.73})$$

(g) V_4 が 1 回と残りは V_1 のとき

$$\int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x g_{i\bar{j}, l\bar{k}} g^{l\bar{k}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} \quad (\text{A.74})$$

以上をまとめて、 \hat{M}_4 からでる外線微分 2 次の寄与は、 \hat{M}_1 と同じ

$$\int_{p'} \text{tr} \ln M_{4i\bar{j}} = \int_{p'_1} \frac{1}{p_1'^2} \int d^2x \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} \left[g_{i\bar{j}, k\bar{l}} g^{k\bar{l}} - g_{k\bar{l}, i} g^{k\bar{m}} g_{n\bar{m}, \bar{j}} g^{n\bar{l}} \right] \quad (\text{A.75})$$

$$= -\frac{1}{2\pi} (\delta t) \int d^2x \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} R_{i\bar{j}} \quad (\text{A.76})$$

となる。

1, 2, の結果から、

$$\int_{p'} \text{tr} \ln M_{ij} = \int_{p'} \text{tr} \ln M_{1i\bar{j}} + \int_{p'} \text{tr} \ln M_{4i\bar{j}} \quad (\text{A.77})$$

$$= -\frac{1}{\pi} (\delta t) \int d^2x \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*j} R_{i\bar{j}} \quad (\text{A.78})$$

となる。

B CP^{N-1}, Q^{N-2} model の metric & Ricci tensor の導出 (詳しい計算)

ここでは、4章で使った CP^{N-1} model と Q^{N-2} model のメトリック&リッチテンソルの導出を詳しく書く。

1. CP^{N-1} model

ケーラーポテンシャル、

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(1 + \Phi\Phi^\dagger) \quad (\text{B.1})$$

からはじめる。すると、メトリックは定義からただちに

$$g_{i\bar{j}} \equiv K_{,i\bar{j}} \quad (\text{B.2})$$

$$= c(t) \left[\frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \varphi^*\varphi} - \frac{\varphi_i^* \varphi_{\bar{j}}}{(1 + \varphi^*\varphi)^2} \right] \quad (\text{B.3})$$

と得られる。ここで

$$K_{,i} \equiv \frac{\delta K}{\delta \varphi^i} \quad (\text{B.4})$$

とする。

次にリッチテンソルを求める。ケーラー多様体の場合、リッチテンソルは、次の式で与えることができる。[12]

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_{\bar{j}} \partial_i (\ln \det g_{k\bar{l}}) \quad (\text{B.5})$$

すると、今の場合、

$$\ln \det g_{k\bar{l}} = \text{tr} \ln g_{k\bar{l}} \quad (\text{B.6})$$

$$= \text{tr} \left[-\ln(1 + \varphi^*\varphi) + \ln\left(\delta_{k\bar{l}} - \frac{\varphi_k^* \varphi_{\bar{l}}}{1 + \varphi^*\varphi}\right) \right] \quad (\text{B.7})$$

$$= \left[-(N-1) \ln(1 + \varphi^*\varphi) + \ln\left(1 - \frac{\varphi^*\varphi}{1 + \varphi^*\varphi}\right) \right] \quad (\text{B.8})$$

$$= -N \ln(1 + \varphi^*\varphi) \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{-N}{c(t)} K \quad (\text{B.10})$$

となるので、

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_{\bar{j}} \partial_i (\ln \det g_{k\bar{l}}) \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{N}{c(t)} g_{i\bar{j}} \quad (\text{B.12})$$

を得る。

このメトリックとリッチテンソルに $\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^{*\bar{j}}$ をつけることで、もともとのラグランジアンと、1ループ補正部分のラグランジアンを得ることができる。しかし、繰りこみ群方程式(2.25)に代入

するときは運動項の係数を 1 にしておかないと正しい anomalous dimension を出すことができないので、場 φ, φ^* を

$$\sqrt{c}\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} \quad (\text{B.13})$$

$$\sqrt{c}\varphi^* \rightarrow \tilde{\varphi}^* \quad (\text{B.14})$$

$$(\text{B.15})$$

と rescale する。(ここからは $\tilde{\varphi}$ を φ と書く。) さらに、摂動論との対応を見やすくするため、パラメーター $c(t)$ を coupling constant λ を使って

$$c(t) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{B.16})$$

とおきなおす。

すると、メトリックとリッチテンソルは、

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi} - \frac{\lambda^2 \varphi_i^* \varphi_{\bar{j}}}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi)^2} \quad (\text{B.17})$$

$$R_{i\bar{j}} = N \lambda^2 g_{i\bar{j}} \quad (\text{B.18})$$

となり、これを本文では式 (4.96) として与えた。

最後にコメントとして、最初に導入していたパラメーター $c(t)$ は、半径の 2 乗になっていることをみる。まず、上の式から分かるように、scalar curvature を計算すると、

$$R \equiv R_{i\bar{j}} g^{i\bar{j}} \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{N}{c(t)} \quad (\text{B.20})$$

となる。さらに、 CP^N は $N=1$ のとき S^2 であり、 CP^N はその拡張と思えば、半径 a の S^N の scalar curvature が

$$R \sim \frac{1}{a^2} \quad (\text{B.21})$$

と書けるので、[16]

$$c \sim a^2 \quad (\text{B.22})$$

になっていることがわかる。

2. Q^{N-2} model

ケーラーポテンシャル

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = c(t) \ln(1 + \Phi \Phi^\dagger + \frac{1}{4} \Phi^2 \Phi^{\dagger 2}) \quad (\text{B.23})$$

からはじめる。

メトリックは定義から

$$g_{i\bar{j}} \equiv K_{,i\bar{j}} \quad (\text{B.24})$$

$$= c(t) \left[\frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \varphi^* \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \varphi^{*2}} + \frac{\varphi^i \varphi^{*\bar{j}} (1 + \varphi^* \varphi) - (\varphi_i^* \varphi_{\bar{j}} + \frac{1}{2} \varphi^2 \varphi_i^* \varphi^{*\bar{j}} + \frac{1}{2} \varphi^{*2} \varphi^i \varphi_{\bar{j}})}{(1 + \varphi^* \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \varphi^{*2})^2} \right] \quad (\text{B.25})$$

とだせる。

次にリッチテンソルをだす。そのためには、 $\ln \det g_{i\bar{j}}$ をだす必要がある。そのためのトリックとして、 $\varphi^i \varphi^{*\bar{i}}$ の座標を $SO(N-2)^C$ 群で回転させ、適当な座標変換をする。

$$\vec{\Phi}^i = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \vdots \\ \Phi^{N-2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$$\xrightarrow{h_j^i} \begin{pmatrix} \Phi'^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

$$\vec{\Phi}^{*\bar{i}} \xrightarrow{(h_j^i)^*} \begin{pmatrix} \Phi'^{*1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

この座標系では1成分しかないのでメトリックの行列式はすぐ計算でき、

$$\det g_{k'\bar{l}'} = \left(\frac{1}{1 + \varphi^* \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \varphi^{*2}} \right)^{N-2} \quad (\text{B.29})$$

となる。

すると、もとの一般的な座標系での行列式は $SO(N-2)^C$ 群の generator である $h_{k'}^k$ の \det は1であることを使って、

$$\det g_{k'\bar{l}'} \equiv \det \frac{\delta^2 K}{\delta \varphi'^k \delta \varphi'^{*l}} \quad (\text{B.30})$$

$$= \det [h_{k'}^k (h_{\bar{l}'}^{\bar{l}}) g_{k\bar{l}}] \quad (\text{B.31})$$

$$= \det g_{k\bar{l}} \quad (\text{B.32})$$

より、式 (B.29) と同じであることから、最終的にリッチテンソル

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_{\bar{j}} \partial_i \ln \det g_{k\bar{l}} \quad (\text{B.33})$$

$$= (N-2) \partial_{\bar{j}} \partial_i \ln \left(1 + \varphi^* \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \varphi^{*2} \right) \quad (\text{B.34})$$

$$= \frac{(N-2)}{c(t)} \partial_{\bar{j}} \partial_i K \quad (\text{B.35})$$

$$= \frac{(N-2)}{c(t)} g_{i\bar{j}} \quad (\text{B.36})$$

を得る。

最後に CP^{N-1} model のときと同じく運動項の係数を1にするため、場を rescale し、パラメーター $c(t)$ を coupling constant λ を使って

$$c(t) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{B.37})$$

とおきなおすと、

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\delta_{i\bar{j}}}{1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda^4}{4} \varphi^2 \varphi^{*2}} + \frac{\lambda^2 \varphi^i \varphi^{*\bar{j}} (1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi) - (\lambda^2 \varphi_i^* \varphi_{\bar{j}} + \frac{\lambda^4}{2} \varphi^2 \varphi_i^* \varphi^{*\bar{j}} + \frac{\lambda^4}{2} \varphi^{*2} \varphi^i \varphi_{\bar{j}})}{(1 + \lambda^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda^4}{4} \varphi^2 \varphi^{*2})^2} \quad (\text{B.38})$$

$$R_{i\bar{j}} = (N - 2) \lambda^2 g_{i\bar{j}} \quad (\text{B.39})$$

となり、これを本文の式 (4.120) として与えた。

C Kähler normal coordinate(KNC)

ここでは、Kähler normal coordinateの主な性質についてまとめる。Kähler 多様体では、§3.1の Riemann 多様体で行ったような多様体上の測地線方程式を展開することで得られる座標変換の式は holomorphic な座標変換を与えないので、その座標変換で移った座標系 (Kähler 多様体での RNC) はラグランジアン の展開をするのに便利な座標系といえない (詳しくは文献 [17][18])。しかし、下の式 (C.5) のような変換をすることで、

$$K_{, \bar{j} i_1 \dots i_N}(\omega, \omega^*) = 0 \quad (\text{C.1})$$

つまり、

$$\partial_{i_3 \dots i_N} \Gamma^j_{i_1 i_2}(\omega, \omega^*)|_0 = 0 \quad (\text{C.2})$$

という性質をもつ座標系をとることができる。ここで添え字‘ 0 ’は KNC の原点 $\omega^i = 0$ を示す。このような性質を持つ座標系を Kähler normal coordinate(KNC) という。

すると、この KNC では、

$$\begin{aligned} K(\omega, \omega^*) &= K|_0 + F(\omega) + F^*(\omega^*) + g_{i\bar{j}}|_0 \omega^i \omega^{*\bar{j}} + \sum_{M, N} \frac{1}{M!N!} K_{, i_1 \dots i_M \bar{j}_1 \dots \bar{j}_N}|_0 \omega^{i_1} \dots \omega^{i_M} \omega^{*\bar{j}_1} \dots \omega^{*\bar{j}_N} \\ &= K|_0 + F(\omega) + F^*(\omega^*) + g_{i\bar{j}}|_0 \omega^i \omega^{*\bar{j}} + \frac{1}{4} R_{i\bar{j}k\bar{l}}|_0 \omega^i \omega^k \omega^{*\bar{j}} \omega^{*\bar{l}} + O(\omega^3) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

とケーラーポテンシャルを展開できるので、この式からケーラーメトリックを KNC で展開、

$$g_{i\bar{j}}(\omega, \omega^*) = g_{i\bar{j}}|_0 + R_{i\bar{j}k\bar{l}}|_0 \omega^k \omega^{*\bar{l}} + O(\omega^3) \quad (\text{C.4})$$

を得る。

一方で一般的な座標系 z^i は次のような holomorphic な座標変換で KNC へ移ることができる。

$$\omega^i = z^i + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} [g^{i\bar{j}} K_{, \bar{j} i_1 \dots i_n}(z, z^*)]|_0 z^{i_1} \dots z^{i_n} \quad (\text{C.5})$$

ただしここでの添え字‘ 0 ’は一般的な座標系の原点 $z^i = 0$ を示す。

ここまでのことを、NL σ M のラグランジアンの場合を background field(φ) とそのゆらぎ (π) にわけ、background field のまわりでの展開を行うため、

$$z \rightarrow \pi \quad (\text{C.6})$$

$$\omega \rightarrow \xi \quad (\text{C.7})$$

とする。ここで、それぞれの座標系での原点を φ ととり、 ξ は多様体の点 φ での接ベクトルある。すると、Riemann 多様体の場合と同じく、ラグランジアン の運動項に現れる、時空の微分を求めると

$$\partial_\mu(\varphi^i + \pi^i) \xrightarrow{NC} \partial_\mu(\varphi^i + \bar{\pi}^i) \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} &= \partial_\mu(\varphi^i + \xi^i - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^i_{k_1 k_2} \xi^{k_1} \xi^{k_2}) \\ &= \partial_\mu \varphi^i + \partial_\mu \xi^i - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^{*\bar{l}} \partial_{\bar{l}} \bar{\Gamma}^i_{k_1 k_2}[\varphi] \xi^{k_1} \xi^{k_2} - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^i_{k_1 k_2}[\varphi] \partial_\mu(\xi^{k_1} \xi^{k_2}) \\ &= \partial_\mu \varphi^i + D_\mu \xi^i - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^{*\bar{l}} \bar{R}^i_{k_1 \bar{l} k_2}[\varphi] \xi^{k_1} \xi^{k_2} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

となる。ここで、1行目は、ゆらぎ部分の一般座標系での座標 π^i を normal coordinate での座標 $\bar{\pi}^i$ へ座標変換し、次の行で normal coordinate での座標 $\bar{\pi}^i$ をその接ベクトルで展開している。

以上、式 (C.4) と式 (C.9) まとめて、NL σ M のラグランジアンを background(φ) とそのゆらぎ (π) にわけ、繰りこみ群方程式の1ループ補正部分に必要な、ゆらぎ部分の2次までの展開では、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g_{i\bar{j}}|_{\varphi} \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \varphi^{*\bar{j}} + g_{i\bar{j}}|_{\varphi} (D_{\mu} \xi^i \partial^{\mu} \varphi^{*\bar{j}} + \partial^{\mu} \varphi^i D_{\mu} \xi^{*j}) + g_{ij^*}|_{\varphi} D_{\mu} \xi^i D_{\mu} \xi^{*j} \\ & + R_{ij^*kl^*}|_{\varphi} \left(\xi^k \xi^{*l} \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \varphi^{*j} - \frac{1}{2} \xi^i \xi^k \partial_{\mu} \varphi^{*j} \partial^{\mu} \varphi^{*l} - \frac{1}{2} \xi^{*j} \xi^{*l} \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \varphi^k \right) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

となる。

参考文献

- [1] V.A.Novikov, M.A.Shifman, A.I.Vainshtein and V.I.Zakharov, Instanton Effects In Supersymmetric Theories Nucl. Phys. B **229** (1983) 407
V.A.Novikov, M.A.Shifman, A.I.Vainshtein and V.I.Zakharov, Instantons And Exact Gell-Mann-Low Function Of Supersymmetric O(3) Sigma Model Phys. Lett. B **139** (1984) 389.
- [2] A.Y.Morozov, A.M.Perelomov and M.A.Shifman, Exact Gell-Mann-Low Function Of Supersymmetric Kahler Sigma Models Nucl. Phys. B **248** (1984) 279
- [3] K.Higashijima, T.Kimura, M.Nitta and M.Tsuzuki, Large-N limit of N = 2 supersymmetric Q^{**}N model in two dimensions Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 261 [arXiv:hep-th/0010272]
A. D'Adda, P. Di Vecchia and M. Luscher, Confinement And Chiral Symmetry Breaking In CP^{N-1} Models With Quarks Nucl. Phys. B **152** (1979) 125.
- [4] K.Aoki, Introduction To The Non-Perturbative Renormalization Group And Its Recent Applications Int. J. Mod. Phys. B **14** (2000) 1249.
- [5] K.G.Wilson and I.G.Kogut, The Renormalization Group And The ϵ Expansion Phys.Rep.**12**,75 (1974)
- [6] F.Wegner and A.Houghton, Renormalization Group equation for Critical Phenomena Phys.Rev.**A8**,401(1973)
- [7] T.R.Morris, The Exact renormalization group and approximate solutions Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 2411 [arXiv:hep-ph/9308265].
T.R.Morris, Derivative expansion of the exact renormalization group Phys. Lett. B **329** (1994) 241 [arXiv:hep-ph/9403340].
T.R.Morris and M.D.Turner, Derivative expansion of the renormalization group in O(N) scalar field theory Nucl. Phys. B **509** (1998) 637 [arXiv:hep-th/9704202].
- [8] ランダウ・リフシッツ, 場の古典論
- [9] L.Alvarez-Gaumé,D.Z.Freedman and S.Mukhi, The Background Field Method And The Ultraviolet Structure Of The Supersymmetric Nonlinear σ -Model Ann.of Phys. **134** (1981) 85
- [10] D.G.Boulware and L.S.Brown, Symmetric Space Scalar Field Theory Ann.of Phys. **138** (1982) 392
- [11] J.Wess,J.Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* Princeton Univ.Press,Princeton(1992)
- [12] 中原 幹夫, 理論物理学のための幾何学とトポロジー
- [13] T.E.Clark, B.Haeri and S.T.Love, Wilson Renormalization Group Analysis Of Theories With Scalars And Fermions Nucl. Phys. B **402** (1993) 628 [arXiv:hep-ph/9211261].
- [14] T.E.Clark and S.T.Love, The Wilson effective Kaehler potential for supersymmetric nonlinear sigma models Phys. Rev. D **56** (1997) 2461 [arXiv:hep-th/9701134].

- [15] K.Higashijima, T.Kimura and M.Nitta, Gauge theoretical construction of non-compact Calabi-Yau manifolds To appear in Ann.of Phys [arXiv:hep-th/0110216].
K.Higashijima, T.Kimura and M.Nitta, Calabi-Yau Manifolds of Cohomogeneity One as Complex Line Bundles [arXiv:hep-th/0202064].
- [16] 佐々木 節, 一般相対論
- [17] K.Higashijima and M.Nitta, Kaehler normal coordinate expansion in supersymmetric theories Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 243 [arXiv:hep-th/0006027]
- [18] Higashijima,Itou and Nitta
Normal Coordinates in Kähler Manifolds and the Background Field Method in preparation
- [19] M.E.Peskin and D.V.Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory