修士論文

開いた膜と非可換幾何

河本 祥一

2000 年 6 月 8 日

概 要

弦理論は現時点での重力の量子理論の最有力候補であり、既知のすべての相互作用を統一的に記述し得ると考えられている。重力自身の量子効果が強くなるような高エネルギー領域においては、時空の点自体も量子論的な不確定性に支配され、時空の記述が変わったものになるだろうと言うことは古くから考えられてきた。最近、弦理論において constant な背景ゲージ場のもとでの開弦の振る舞いから、非可換幾何学に従うような有効理論の得られることが分かってきた。これは、重力の量子論としての弦理論に期待された結果と言えよう。

さて、近年の弦双対性の発見から、摂動論的に安定な超弦理論はすべて M 理論と呼ばれる 11 次元の理論の様々な極限であると考えられるようになった。この M 理論は低エネルギーで 11 次元超重力理論に一致すると思われているが、その量子論的記述としてもっとも有望なものの一つは 11 次元の超膜 (supermembrane) の理論である。

$$\text{M-theory} \overset{?}{=} 11\text{ 次元 quantum supermembrane}$$

M 理論は弦理論と同じく重力の量子論であるから、この理論においても時空の非可換性が示唆されるような結果が得られると期待される。実際、M 理論の別の定式化である Banks-Fischler-Shenker-Susskind 行列模型においては、背景ゲージ場の存在する場合に非可換幾何学があらわれることが知られている。

この修士論文では、M 理論の非可換性について、膜の理論からの視点でどのような結果が得られるかを考察した。簡単のためにボゾン的な開膜を用い、背景に constant な 3 階反対称テンソル場がある場合を考える。この場合の境界条件を Dirac 流の拘束条件として扱い、開膜の境界としての「弦」の位置座標であるスカラー場が非可換な交換関係を満たすことを確認した。また背景場の逐次でこれを扱い、その 2 次までの交換関係を計算した。さらに弦理論における非可換性について今回の解析に関係した部分や、膜の理論の基本的な事項に関してもその概観を述べた。

目 次

第 I 部
Introduction

歴史的に見れば、「素粒子」は実は点粒子—つまり、大きさも構造も持たない点—ではなく、何か「拡がりを持った」object であるという考え方は珍しくないようである[1]。

例えば Dirac は今から 50 年ほど前に「電子」のモデルとして 2 次元面—膜—を提案しているし、湯川も古くに同様の「双局所模型」「素領域理論」を提案していた。これらは様々な動機を持って提案されたようであるが、70 年代半ばまでは、あまり素粒子論の主流にはならなかった。「$\cdots$ (前略) $\cdots$ 近年、素粒子の拡がりや構造に言及する議論はたしかに多くなってきているが、素粒子の質点的描像をはなれて、何らかの固有の拡がりを想定する模型や理論は、やはり、例外的存在である。」[2]

このような extended object としてはじめて成功を収めたものが、いわゆる string model であろう。元々は Hadron の模型として提案されたこの string が、Scherk-Schwarz、米谷などの業績により重力を含むことが発見されて以来、量子重力の、従って素粒子の統一理論のもっとも有力な候補になったことは良く知られている通りである。

この string の「最初の黄金時代」の影では、さらなる extended object—p-brane—が何人かの人々によって、string に代わる統一理論の候補として調べられてきたようである。これらの発展のなかで重要なのが、以下に述べる Bergshoeff-Sezgin-Townsend の発見 [1] であろう。ここで彼らは、11 次元時空中の supermembrane に対し world-volume の fermionic な対称性である κ-symmetry を課すと、その background は $\mathcal{N}=1$ の supergravity の運動方程式に従うことを見いだした。これは、superstring が 10 次元の supergravity の量子論的な拡張であるのと同じように、supermembrane が「最大」の supergravity である 11 次元 $\mathcal{N}=1$ supergravity の量子論的拡張であることを示唆しているのかもしれない。このような発展を受けて、今から 10 年ほど前には、このような supermembrane(super p-brane) についての様々な研究が蓄積された。

一方、string においても近年の発展 (「第 2 の黄金時代」) の契機となったのは、ある種の supersymmetry を保つ extended object—Dirichlet p-brane の発見である。この Dp-brane は摂動論的には open string が端を持てる object として定義され、それの持つ様々な性質が、string における duality の検証や、様々な非摂動論的効果の発見に大きな役割を果たした。特に Witten は、type IIA 理論に存在する D0-brane が、11 次元理論の Kaluza-Klein 粒子であるという証拠をあげて、type IIA 理論の強結合極限として 11 次元の理論— M-theory を提案した。この M-theory を仮定することで、それまで知られていた 5 つの摂動論的に安定な superstring 理論は、実は一つの理論である、という見方が基本的になった。

さて、この M-theory は低エネルギー極限では 11 次元 supergravity に一致すると考えられている。また M-theory には「基本粒子」に当たる M2-brane と呼ばれる 2 次元面が存在し、ある円周に巻き付いて半径が 0 になる極限では type IIA の fundamental string になると信じられている。実は前述の 11 次元 supermembrane においても double dimensional reduction—space-time と world-volume を同時に Kaluza-Klein dimensional reduction す

---

[1] 以下の話は “historical review” としては甚だ不完全である。

[2] 後藤氏の著書 [36] の前書きより引用。この本にはこういった、初期の extended object の試みが幾つか紹介されている。

ること—の下で type IIA の superstring の作用に一致することが知られている。こうして、

$$\text{M-theory} \stackrel{?}{=} 11\,\text{次元 quantum supermembrane} \tag{0.1}$$

という図式が描かれる。従って M-theory の存在を通じて、さらに高次の extended object が再び fundamental object として取り上げられるべき動機が生まれたと言えよう[3]。

ここで、これらの理論、superstring、M-theory、もしくは supermembrane が、素粒子理論における基本理論だという意味を考えてみよう。素粒子論は知られているすべての相互作用と粒子を統一的に理解する枠組みを与えることを目標にする。標準模型は、3 つの力—電磁気力、弱い相互作用、強い相互作用—については実験結果と驚くほど一致するが、重力だけは含んでいない。実際、標準模型の枠組みに於いては、重力はそもそも考慮の埒外である。これは重力がその他の力と比べて桁違いに (字義通りの意味で!) 弱く、そもそも素粒子の相互作用に於いては無視して良いことによる。しかし、前述のような「基本理論」に於いては重力ももちろん考慮する必要がある。我々は他の 3 つの相互作用が皆量子論に従うことから、重力もまた量子論の枠組みで記述したい。この時、重力理論 (Einstein 理論) で仮定されていた、時空という観点が、量子理論とうまく相容れないことに気付く。重力理論では、「時空」自体が観測の対象であるために、時空の一点を観測することが不確定性原理に抵触する可能性がある。こうして、量子論と重力理論との融合は、我々が先験的に抱いている「時空」の観念を大きく覆すかもしれない。こうした可能性の一つとして提唱されるのが、「非可換幾何学」である。すなわち、時空 (数学的には多様体) の各点が「可換」なものを普通の幾何学とするなら、これを「非可換」に拡張したものが非可換幾何の枠組みである[4]。

実は string 理論の奥深い構造が非可換幾何学と関係しているのではないか、というのは昔から知られていたことである。実際、M(atrix) 理論の torus compact 化などでは、非可換幾何学があらわれることが知られている [12]。最近、Seiberg-Witten が非可換な D-brane effective 作用と可換な effective 理論についての対応を指摘した [17] ことに刺激され、弦理論における様々な非可換性が調べられている。D-brane や M(atrix) 理論のような最近発見された成果と併せて、string のこのような側面に対する理解は着実に進んでいるようである。

さて、先の疑問に戻ろう。先ほど述べたように、M-theory はいわば string 理論と同義であり、ある意味ではより基本的である。そしてその定義から明らかなように M-theory は超重力理論の量子論的な定義を与えると期待されている。従って次のように問うのは自然であろう。

「M-theory における非可換幾何学とのつながり、時空の非可換性はどのようなものか?」

この問いに対する回答の一部は M(atrix) 理論から与えられている。では、(super)membrane の視点から見てこのような問いに答えられるだろうか?

この論文ではこの問いに答える試みの一環として、背景に constant な gauge 場が存在する中での open membrane の振る舞いについて考察してみたい[5]。ここでの解析を通じて、

[3] もっとも最近の string duality の発展によれば、string と D-brane のどちらを「基本的」と思うかは、単に見方の問題であるが · · ·

[4] ここでは「可換」の意味などを定義しないので、感覚的に捕らえて欲しい。

[5] この解析は、笹倉氏との共同研究による [45]。

(少なくとも bosonic membrane での、ある近似の下においては於いては) 非可換性を示唆する結果が得られた。また、将来的に M-theory と supermembrane との関係をさらに明らかにするためにも、supermembrane についての基本的な部分を簡潔に review する。特に量子化の試みや、理論の持つ対称性について述べてみたい。

この論文の構成は以下の通りである。続く第 II 部は bosonic membrane の解説に当てられる。string の場合と同じく、membrane に於いても supersymmetry の入らない bosonic な場合にも、membrane 自身に付随する様々な性質が現れるため、まずこの場合を概観することは有意義である。1 節では、まず §1.1 において bosonic membrane の作用の構成と、その対称性などについて述べる。その後、§1.2 において特に場の理論における effective action としての扱いを少し詳しく調べる。その後 2 節では、membrane における、topology 的考察や対称性、gauge の選び方などを説明する。さらに §2.3 において、Hoppe による行列正則化を用いた Matrix quantum mechanics としての membrane の量子化について多少詳しく述べる。

3 節はこの修士論文の中心的な部分である。ここでは先に述べたように background の C-field 中の open bosonic membrane について、非可換幾何との関わりを調べる。まず最初に string において非可換性がどのようにあらわれるかについて簡単に説明する。ここでの取り扱いは、Dirac の方法に基づくもので、続く membrane の解析にも応用されるため、若干詳しく計算などをおった。その後、membrane の場合の扱いを詳しく述べる。まず最初に考えている setting を述べ、計算を遂行するためにどのような近似を採用したかを明らかにする。続いて拘束条件と、mode 展開による拘束方程式の解を与え、拘束を解くことでどのような結果が得られるかを見る。ここでの結果の解釈についてはいまだに考察を進めているところであり、最後に行った計算の問題点や、これからの展望についてまとめる。

第 III 部では、supermembrane についての基本的な部分を紹介する。ここでは flat superspace 上の supermembrane に話を限り、κ-symmetry や、supermatrix model に焦点を当てて review を行う。最後に最近の Matrix 理論と非可換性についての論文を簡単に紹介する。

付録 A では、この論文中で用いた Notation と convention についてまとめる。付録 B では、この論文を通じて使われる、Dirac の拘束条件の取り扱いについて詳しく解説する。特に、非可換幾何とのつながりで知られるようになった、境界条件を拘束として取り扱う処方について最近の論文を review する。付録 C では論文中で結果のみ用いた計算について詳しく述べている。

第 II 部
Bosonic membrane

この章では、今回の解析で用いた membrane、およびより高次の extended object である p-brane について、基本的な事実、対称性などを概観する。

string の場合と同じく、「高次元 object である」という事実から来る様々な性質は、supersymmetry を導入しない bosonic な場合を扱った方が見通しが良い[6]。ここでは world-volume の一般座標不変性から来る gauge 対称性や、トポロジー、有効理論としての Dirac-Nambu-Goto 作用の導出などを解説する。これらは supermembrane においても重要な部分であり、bosonic な場合を調べておくことで見通も良くなるであろう。

1 Action of membrane

1.1 Action of bosonic membrane

ここでは、まず D 次元 Minkowski 時空中を運動する p-brane の作用について考える[7]。まず、$X^\mu(\xi)$ を p-brane の world-volume から D 次元 space-time への埋め込みを定める写像とする。ここで、μ は D 次元 space-time の足で $\mu = 0, \ldots, D-1$ の D 個の値をとる。また、ξ^α は p-brane world-volume の座標であり $\alpha = 0, \ldots, p$ の $p+1$ 個の値をとる[8]。また、時に $\xi^\alpha = (\tau, \sigma^a)$ のように分解する。$a = 1, \ldots, p$ は、world-volume の space-like な添字である。

X^μ の時間発展は、次の作用より決まる。

$$S = \int d^{p+1}\xi \; \mathcal{L}(X^\mu, \partial X^\mu). \tag{1.1}$$

この時、次の要請をおこう。

1. p 次元超平面は、D 次元時空において、time-like surface [9]である。すなわち、p-brane の各点において 1 つの time-like tangent vector と p 個の space-like tangent vectors が存在する。これは、p-brane の各点が、光の速さを越えないという要請である。
2. 時空の Isometry は、作用 S の対称性である。今の場合、作用は時空の Poincarè 対称性を持つ。

$$\text{Translation:} \quad \delta X^\mu = a^\mu \tag{1.2}$$

$$SO(1, D-1)\text{Lorenz 対称性:} \quad \delta X^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu \tag{1.3}$$

---

[6] Polchinski の String の教科書など、その半分 (上巻) はすべて bosonic part である。

[7] space-time metric $G^{\mu\nu}(X)$ をいれれば、曲がった時空上の membrane になる。string の時には conformal 対称性が、supermembrane では κ-symmetry が許される背景時空を決定した [1]。bosonic membrane ではどうなのか、筆者は知らない。

[8] 後で supermembrane を論じるときは $\alpha, \beta, \ldots$ を spinor の index とし、world-volume の足には $i, j, \ldots$ を用いる。

[9] この呼び方は GGRT[7] による。

3. S は world-volume の座標の取り方によらない。すなわち $(p+1)$ 次元 world-volume において $\mathcal{L}$ は scalar 密度である。

これを満たす Lagrangian 密度はどのようなものか考えよう。(1.2) より、$\mathcal{L}$ は ∂X^μ のみの汎関数である。さらに、Lorenz 不変性の要求 (1.3) を満たすもっとも単純な形は $\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}$ であろう。ここで、$\eta^{\mu\nu}$ は D 次元 Minkowski 時空の flat metric である。これを要素とするなかで、もっとも単純 Lagrangian 密度は、次の Dirac-Nambu-Goto 型のものである。

$$\mathcal{L} \sim \sqrt{-h}, \tag{1.4}$$

$$h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

$$h = \det h_{\alpha\beta}\ ,\ (\alpha, \beta = 0, \ldots, p). \tag{1.5}$$

根号のなかの $-$ は、これが、time-like surface であるという条件からの帰結である。

さて、これより Dirac-Nambu-Goto 作用を次のように定めよう。

$$S_{\mathrm{DNG}} = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h} \tag{1.6}$$

ここで、自然単位系 $\hbar = c = 1$ をとると T は space-time において、次元 $[T] = p+1$ をもち、p 次元超平面の張力を表すので[10]、これを p-brane tension とよぶ。作用の前の overall の $-$ 符号は、p-brane が極小曲面の時が古典的に実現されるように選んだものである。

この時、X^μ について変分をとれば、運動方程式が

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{1.7}$$

と求まる。ここで $h^{\alpha\beta}$ は、induced metric $h_{\alpha\beta}$ の逆行列 $h^{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$ である。

$p=1$ のとき、この作用は relativistic な粒子の作用

$$S_{\mathrm{particle}} = -m \int dt\ (-\dot{X}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

を再現し、$p = 2$ のときには、string 理論で良く知られた Nambu-Goto 型の作用に一致する。

さて、この (1.6) は上記の条件を満たす作用のなかで、もっとも簡単なものだが、条件を満たしながら、もう少し拡張することも容易である。reparametrization 不変性を満たすためには、付け加えるべき項は induced metric $h_{\alpha\beta}$ と、それから作られる Riemann tensor$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ および、それらの微分でなければならない。したがって、考えられる拡張は、

$$S_{\mathrm{DNG+higher}} = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h} \left(1 + \ell_p^2 R(h) + \mathcal{O}(\ell_p^3)\right) \tag{1.9}$$

のようになる。ここで、ℓ_p は考えている p-brane における、長さのスケールである。今回のように、fundamental な object として brane を考える際には、このような高次の補正はその「定義」から存在しない。すなわち、考えている対象が、このような「内部の構造」を持たないときである。また、brane の持つ scale よりも大きな scale での effective な記述の際にも、このような補正は無視できる。後で、場の理論の "topological defect" として

[10] 後で、static gauge の時に具体的にみる。また、次元は **target space-time** の質量次元である。

p-brane 解が存在することをみるが、brane の「厚さ」を無視する近似で解を記述した場合がそれに当たる。

したがって、一般にはこのような高次の補正が存在しうるのであるが、この論文においては、上記 (1.6) のような作用で記述される p-brane を考えることにしよう。

1.1.1 Classically equivalent actions

さて、このようにして得られた p-brane 作用 (1.6) には、string の場合と同じように古典的に同値な作用が幾つか存在し、場合によっては、それを用いて記述したほうが便利なときもある。ここではそのような書き換えの幾つかについて紹介しよう。

Howe-Tucker action 最初に考えるのは、string における Polyakov 作用に当たる Howe-Tucker 作用である [9]。すなわち、補助場として、world-volume metric $g_{\alpha\beta}$ を導入した、次の作用である。

$$S_{\rm HT} = -\frac{T}{2}\int d^{p+1}\xi\,\sqrt{-g}\left[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} - (p-1)\right] \tag{1.10}$$

行列に対する、変分の式

$$\delta(\det M) = \det M (M^{-1})^{ij}\delta M_{ij} \tag{1.11}$$

$$\delta(M^{-1})^{ij} = -(M^{-1})^{ik}\delta M_{kl}(M^{-1})^{lj} \tag{1.12}$$

を用いると運動方程式は、

$$\sqrt{-g}\left\{\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\xi\zeta}\partial_\xi X^\mu\partial_\zeta X^\nu\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(p-1)\right) - g^{\alpha\xi}g^{\beta\zeta}\partial_\xi X^\mu\partial_\zeta X^\nu\eta_{\mu\nu}\right\} = 0 \tag{1.13}$$

となる。

$g_{\alpha\beta}$ をかけて (trace $\delta^\alpha_\alpha = p+1$)、

$$\frac{p-1}{2}g^{\xi\zeta}\partial_\xi X^\mu\partial_\zeta X^\nu\eta_{\mu\nu} = \frac{(p-1)(p+1)}{2} \tag{1.14}$$

よって、$p=1$(string の場合) 以外では、つぎの “embedding equation” を得る。

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu} \tag{1.15}$$

すなわち、$g_{\alpha\beta}$ は、world-volume 上の induced metric である。

$p=1$ の時には、(1.15) は、比例するにとどまる。これは、string の Polyakov 作用の持つ conformal 不変性による。実際、$p \geq 2$ では、この作用は $\sqrt{-g}$ に比例する「宇宙項」のために作用は conformal 対称性を持たない。

X^μ に対する運動方程式は、容易に

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu}\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\Box X^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu\right) = 0 \tag{1.16}$$

と求まり、(1.15) を用いれば、Dirac-Nambu-Goto 作用の場合 (1.7) と一致することが確かめられる。ここで $\Box$ は、world-volume での Laplace-Beltrami operator である。

こうして、この Howe-Tucker 作用 (1.10) は Dirac-Nambu-Goto 作用 (1.6) と古典的に同値であることが示されたわけであるが、ここで作用の前につく定数について述べておこう。Dirac-Nambu-Goto 作用 (1.6) では、作用の前の定数 T は、次元から membrane の張力 (tension) を表すものであった。Howe-Tucker 作用 (1.10) の場合、単純な次元解析からは T は target space-time の次元で mass 次元 $[T]=-2$ を持つ、すなわち、$p=1$(string) の場合を除いて、書き換えた作用の前の定数は tension ではない様に見える。ところが、“embedding equation” から分かるように、$g_{\alpha\beta}$ 自身が、space-time で次元 $[g]=-2$ をもつため、この場合も T は実際に tension である。g は、world-volume では metric であるから、world-volume の量としては無次元であることに注意しよう。

Weyl-invariant action　それではこの二つと同値で、さらに Weyl 不変性を持った作用を書き下してみよう [4, 18]。

$$S_{\mathrm{Weyl}} = -T\int d^{p+1}\xi\sqrt{-g}\left(\frac{1}{p+1}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu}\right)^{\frac{p+1}{2}} \tag{1.17}$$

この作用が実際に Weyl 変換

$$g_{\alpha\beta}\to\Omega g_{\alpha\beta},\qquad X^\mu\to X^\mu \tag{1.18}$$

の下で不変なことは、

$$g\equiv\det g_{\alpha\beta}\to\Omega^{p+1}g\ ,\ (g^{-1})^{\alpha\beta}\to\Omega^{-1}g^{\alpha\beta} \tag{1.19}$$

と変換することから容易に分かる。

これが、先に述べた、Dirac-Nambu-Goto 作用や Howe-Tucker 作用と同値であることを確かめよう。まず、$g_{\alpha\beta}$ の運動方程式は (前に導入した induced metric $h_{\alpha\beta}\equiv\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu}$ を用いて)、

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta g_{\gamma\delta}}S_{\mathrm{Weyl}} &= \frac{T}{2}\sqrt{-g}g^{\gamma\delta}\left(\frac{1}{p+1}g^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}\right)^{\frac{p+1}{2}}\\ &\qquad -T\sqrt{-g}\frac{p+1}{2}g^{\gamma\xi}g^{\delta\zeta}h_{\xi\zeta}\left(\frac{1}{p+1}g^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}\right)^{\frac{p+1}{2}-1}\\ &= 0\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\downarrow$$

$$g^{\gamma\delta}\frac{1}{p+1}g^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}=(p+1)g^{\gamma\xi}g^{\delta\zeta}h_{\xi\zeta} \tag{1.21}$$

trace をとれば、

$$g^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}=p+1 \tag{1.22}$$

よって、この場合も "embedding equation" (1.15) を再現する。

X^μ についての運動方程式は

$$\partial_\alpha \left\{ \sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{\xi\zeta} h_{\xi\zeta} \right)^{\frac{p+1}{2}-1} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \right\} = 0 \tag{1.23}$$

となり、g についての運動方程式を用いれば、(1.7) を再現することが分かる。

1.2 Membrane as effective action

membrane や string のような、extended object は、実は場の理論の soliton 解としても姿を表すことが知られている。この節では、そのようなものについて、もっとも簡単な例を構成して、その effective action が Nambu-Goto-Dirac 型になると言うことを見てみよう。

Nielsen-Olesen は、4 次元での Abelian-Higgs 模型を用いて、string 状の soliton 解を構成して見せた [8]。ここでは単純なスカラー場の理論を用いて一般の p-brane 解を構成してみよう [3, 10]。

考える Lagrangian は、$p+2$ 次元の Minkowski 空間における、次のようなスカラー場 $A(x^i, z)$ $(i = 0, \ldots, p)$ である。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A - \frac{g^2}{4}\left(A^2 - \frac{m^2}{g^2}\right)^2 . \tag{1.24}$$

真空は potential energy の極小点で与えられ、$A = \pm m/g$ である。Vacuum manifold v は 2 点からなり、0 次の homotopy 群 $\pi_0(v) = Z_2 \neq 0$ であるから、この理論には、co-dimension 1 の soliton 解 ("domain wall") が存在できる。運動方程式は、

$$\Box A = g^2 A \left(A^2 - \frac{m^2}{g^2}\right) \qquad (\text{ここで、}\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu) \tag{1.25}$$

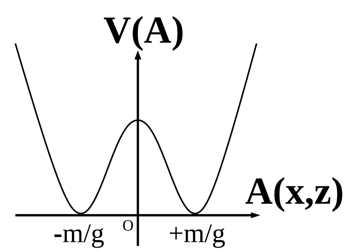

図 1: A の potential

である。この運動方程式の解として、$A = A(z)$(x^i 方向に広がった brane 解) で、$z \to \infty$ で、真空 $A = \pm m^2/g^2$ になるものを考えよう。$A = A(z)$ を運動方程式に代入すると

$$A'' = g^2 A \left(A^2 - \frac{m^2}{g^2}\right) \qquad \left(\text{ここで、}A' = \frac{d}{dz}A\right) \tag{1.26}$$

両辺に、$2A'$ をかければ、

$$\frac{d}{dz}(A')^2 = \frac{g^2}{2}\frac{d}{dz}\left(A^2 - \frac{m^2}{g^2}\right)^2 \tag{1.27}$$

$A(z) \to \pm\frac{m^2}{g^2}$ $(z \to \pm\infty)$ として、積分すれば

$$A'^2 = \frac{g^2}{2}\left(A^2 - \frac{m^2}{g^2}\right)^2 \tag{1.28}$$

$A^2 \leq m^2/g^2$,$g > 0$ として、

$$A' = \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\frac{m^2}{g^2} - A^2\right) \tag{1.29}$$

ここで、$(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$ を思い出せば、これは容易に積分できて

$$A_{\rm cl}(z) = \frac{m}{g}\tanh\frac{mz}{\sqrt{2}} \tag{1.30}$$

となる。ただし $z > 0$ で $A_{\rm cl} > 0$ とし、先ほど述べた境界条件をもう一度用いた。この古典解は 2 のように、「厚さ」が $1/m$ 程度の p-brane 解を表す。またこれは全空間を、$z > 0$ と $z < 0$ の領域に二分する、“domain wall” になっている。

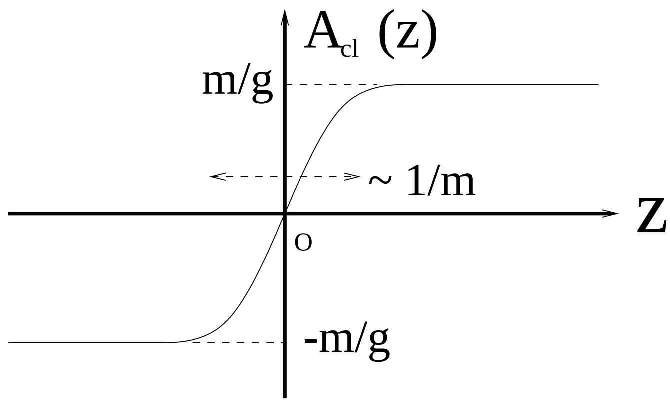

図 2: 古典解 $A_{\rm cl}$ は、厚さ $1/m$ 程度の “domain wall” を表している。

1.2.1 Low energy collective motion of the p-brane

さて、ここでこの古典解周りでの、小さな fluctuation について考えてみよう。$A(x^i, z) = A_{\rm cl}(z) + \delta A(x^i, z)$ として、運動方程式 (1.25) に代入すると、

$$\Box\left(A_{\rm cl} + \delta A\right) = g^2(A_{\rm cl} + \delta A)\left((A_{\rm cl} + \delta A)^2 - \frac{m^2}{g^2}\right) \tag{1.31}$$

$A_{\rm cl}$ は、運動方程式を満たすので、δA の一次までとると

$$\eta^{ij}\partial_i\partial_j\delta A + \frac{d^2}{dz^2}\delta A = g^2\delta A\left(A_{\rm cl}^2 - \frac{m^2}{g^2}\right) + 2g^2A_{\rm cl}^2\delta A \tag{1.32}$$

したがって、

$$-\eta^{ij}\partial_i\partial_j\delta A = \left(\frac{d^2}{dz^2} + m^2 - 3m^2\tanh^2\frac{mz}{\sqrt{2}}\right)\delta A \tag{1.33}$$

となる。

ここで、元の Lagrangian(1.25) には、z 方向の translation invariance があったので $A_{\rm cl}(z+a)$ もまた運動方程式の解であったことを思い出すと、微少な a にたいして

$$A_{\rm cl}(z+a) = A_{\rm cl}(z) + aA'_{\rm cl} + \mathcal{O}(a^2) \tag{1.34}$$

であるから、$\delta A = A'_{\rm cl}$ としたものは、上の線形化された fluctuation の式 (1.33) を満たす。実際、A'_{cl} は (1.33) の右辺の operator の zero-mode になっている。

このような zero-mode の存在は、元の translation invariance が brane 解によって自発的に破れたことに対する **Nambu-Goldstone mode** の存在を示唆している。実際、破れた translation invariance を回復するために world-volume 上に *collective field* $\phi(x^i)$ を導入して、

$$A(x^i, z) = A_{\rm cl}\left(z + \phi(x^i)\right) + \delta' A \tag{1.35}$$

のように書こう。ここで、$\delta' A$ は brane に平行な fluctuation(縦波 mode) をあらわす。ϕ は translation, $z \to z+a$ に対して次のような「非斉次な」変換をする。

$$\phi(x^i) \to \phi(x^i) - a \tag{1.36}$$

これにより、A の translation invariance が回復する。

微少変化に対する $\delta A = \phi(x^i)A'_{\rm cl}$ を (1.33) に代入すれば、

$$-\eta^{ij}\partial_i\partial_j\phi = 0 \tag{1.37}$$

を得る。

したがって、ϕ は、期待した通りに p-brane 上の massless scalar 場である。

Effective action for $\phi(x^i)$　それでは、先に求めた古典解 (1.30) の周りでの、effective action を求めてみよう。

$$A(x^i, z) = A_{\rm cl}(z + \phi(x^i)) = A_{\rm cl} + A'_{\rm cl}\phi \tag{1.38}$$

を、元の Lagrangian 密度 (1.24) に代入する。次に注意しよう。

$$\partial_i A = A'_{\rm cl}\partial_i\phi\ ,\ \partial_z A = A'_{\rm cl} \tag{1.39}$$

ここで、

$$A'_{\rm cl} \equiv \frac{d}{d(z+\phi)} A_{\rm cl}(z+\phi) \tag{1.40}$$

である。

これらを用いれば、得られる作用は

$$S_{\rm eff} = \int d^{p+2}x \left\{ -\frac{1}{2}\left(A'_{\rm cl}\right)^2\left(\eta^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + 1\right) - \frac{g^2}{4}\left(A_{\rm cl}^2 - \frac{m^2}{g^2}\right)\right\} \tag{1.41}$$

ここで、z 方向の積分を実行する。

$$A'_{\mathrm{cl}}(z) = \frac{m^2}{\sqrt{2}g} \cosh^{-2}\left(\frac{mz}{\sqrt{2}}\right) \tag{1.42}$$

であり、不定積分の公式

$$\int dx \frac{1}{\cosh^4 x} = \tanh x - \frac{1}{3}\tanh^3 x \tag{1.43}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dz \left(A'_{\mathrm{cl}}(z+\phi)\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(A'_{\mathrm{cl}}(z)\right)^2 \quad (\leftarrow \text{ 積分変数を shift}) \\
&= \frac{m^4}{2g^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dz \cosh^{-4} z \\
&= \frac{m^3}{\sqrt{2}g^2} \left[\tanh z - \frac{1}{3}\tanh^3 z\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{2\sqrt{2}m^3}{g^2} \equiv T
\end{aligned} \tag{1.44}$$

となる。変形した運動方程式 (1.28) から、(3.68) の potential term も同じ値になることが分かる。

ここで定義した T についてまず次元を考えよう。元の Lagrangian 密度 (1.24) から場 A と coupling g の質量次元が次のように読み取れる。

$$[\mathcal{L}] = p + 2 \ \longrightarrow \ [A] = \frac{p}{2} \, , \ [g] = -\frac{p}{2} + 1 \tag{1.45}$$

ゆえに、

$$[T] = p + 1 \tag{1.46}$$

これは、p-brane の tension の次元であり、これをこの effective action の tension と呼べば、結局求める作用は、

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{eff}} &= \int d^{p+1}x \left\{ -\frac{T}{2}\left(\eta^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + 1\right) - \frac{T}{2} \right\} \\
&= -T \int d^{p+1}x \left(1 + \frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi\right) \\
&\simeq -T \int d^{p+1}x \sqrt{1 + \eta^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi}
\end{aligned} \tag{1.47}$$

のようにまとまる。

1.2.2 Covariant form of the effective action

こうして得られた effective action(1.47) は、明らかに $(p+2)$ 次元の Lorentz 不変性を持たない。これを回復させるために、次のような手続きを取ろう。

- $X^{p+1} = \phi$ と置き、さらに $p+1$ 個の *unphysical* な場 X^i , $i = 0, \ldots, p$ を導入する。
- この余分な場が、物理的な自由度を担わないように、さらに $(p+1)$ 次元の world-volume reparametrization での不変性を持たせる。

こうして得られた covariant な作用は、Dirac-Nambu-Goto 型になることが期待される。

$$S = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h} \ , \ \ h_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{1.48}$$

ここで、world-volume 上の座標 ξ^α, $(\xi^i \equiv x^i)$ を導入した[11]。

この作用が、前節で求めた non-covariant な形に一致することは次のようにして分かる。余分な自由度を落とすために、static(physical) gauge をとろう。

$$X^\alpha(\xi) = \xi^\alpha, \quad \alpha = 0, \ldots, p \tag{1.49}$$

唯一残った physical な場を $X^{p+1} = \phi$ と書けば、

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} d\xi^\beta &= \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu d\xi^\beta = \partial_\alpha X^\mu dX_\mu \\ &= dX_\alpha + \partial_\alpha \phi d\phi \qquad (\partial_\alpha X^\beta = \delta^\beta_\alpha) \end{aligned} \tag{1.50}$$

従って、volume form の変換を考えて

$$\begin{aligned} &\det h d\xi^0 \wedge \cdots \wedge d\xi^p \\ &\quad = (d\xi_0 + \partial_0 \phi d\phi) \wedge (d\xi_1 + \partial_1 \phi d\phi) \wedge \cdots \wedge (d\xi_p + \partial_p \phi d\phi) \\ &\quad = d\xi_0 \wedge \cdots \wedge d\xi_p \\ &\qquad + \sum_{\alpha=0}^{p} d\xi_0 \wedge \cdots \wedge \partial_\alpha \phi d\phi \wedge \cdots \wedge d\xi_p \\ &\quad = -\left(1 + \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi\right) d\xi^0 \wedge \cdots \wedge d\xi^p \\ &\qquad\qquad (-1 \text{ は } 0 \sim p \text{ の足を上げたことからでる}) \end{aligned} \tag{1.51}$$

よって、

$$\sqrt{-h} = \sqrt{1 + \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi} \tag{1.52}$$

これにより、結局 (1.48) は (1.47) に一致する。

2 Topologies, Gauge choices and Quantization of p-brane

この小節では、membrane の持つ対称性やその topology が果たす役割について簡潔に述べる。そのあと、membrane の reparametrization invariance に由来する gauge 対称性をどのように gauge 固定するかについても述べる。

[11] ここでこれまでの notation と一致するように、i を α と呼び変えたことに注意。

2.1 Topology of membrane

string は 1 次元の object であるから、ある時刻におけるその topology は 2 種類しかない—すなわち、開いた弦 (open string) か、閉じた弦 (closed string) かである。さらに高次の p-brane になると topology は非常に複雑になる。実際、境界を持たない閉じた (2 次元の)membrane に対してさえ、その topology は genus で区別される無限の variety があるのである。

topology を考慮することは、membrane の state や spectrum を考える際に非常に重要である [6]。例えば、membrane を string のように第一量子化した場合には、その全 Hilbert 空間は各 topology からの寄与をすべて含んだものになるだろう。

membrane 理論の path-integral による定式化は、難しいと考えられている。例えば、3 次元の sigma-model としては繰り込み不可能であるし、3 次元多様体のすべての topology についての足しあげにも様々な困難がある [2]。実際、membrane 同士の相互作用には様々な複雑な topology の中間状態が寄与するためその定式化は難しいものになるだろう[12]。一方、Hamiltonian formalism では、各時刻で membrane は決まった topology しか持たないので、各 topology からの寄与を独立に考慮しなければならない。

また、membrane を統一理論としてとらえる場合にはその spectrum に対する topology の影響も考えねばならない。実際、各々の topology の持つ spectrum に対し**ただ一つの** topology sector のみが graviton state を持つのでない限り、統一理論としては矛盾に導かれるだろう。

以上簡単に topology と membrane の関係について述べてみた。この方面での発展はどうやらあまりなされていないようであるが、これから membrane の定式化が進むに連れて、このような考察は重要になってくるだろう。

2.2 Gauge choice

この節では、membrane の持つ reparametrization invariance に由来する gauge 自由度をどのように固定するかについて解説する。最初に、物理的意味が明確になる static gauge について述べ、応用上有用と思われる orthonormal covariant gauge について簡潔に述べた後、light-cone gauge を詳しく扱う。light-cone gauge は Matrix model を通じて応用上も大切であるから、ここでは gauge 自由度を扱う一般的処方にのっとって、丁寧にその手続きを追うことにする。

2.2.1 Static(Physical) gauge

ここでは、static gauge について述べる。先に effective action のところでも扱ったようにこの gauge は physical gauge とも呼ばれ、unphysical な自由度をすべて消去してしまうために、ghost や残った gauge 対称性の扱いに頭を悩ます必要がない。後に、外場中の open membrane を考えるときや、準古典的な考察から spectrum を求めるときにはこの gauge が便利である。また、具体的に静的なときの energy を見ることで、brane tension

[12] しかし、最近の supermatrix model のように、membrane の量子論は自然に**第二量子化した理論しかない**とするならば第一量子化した理論を考える意味は薄れる [30, 29]。

T が、実際に張力としての意味を持つことを確かめることも行う。

このgaugeでは、次のようにgauge固定条件を置く。

$$\begin{aligned} X^0(\tau,\sigma) &= \tau \\ X^1(\tau,\sigma) &= \sigma^1 \\ &\vdots \\ X^{p-1}(\tau,\sigma) &= \sigma^{p-1} \\ X^p(\tau,\sigma) &= \sigma^p \end{aligned} \tag{2.1}$$

これにより、reparametrizationの自由度はすべて使い尽くされる。残ったphysicalな場を次のように書こう。

$$\begin{aligned} X^{p+1}(\xi) &= \phi^1(\xi) \\ &\vdots \\ X^{D-1}(\xi) &= \phi^{D-p-1}(\xi) \end{aligned} \tag{2.2}$$

但し $\xi^\alpha = (\tau, \sigma^a)$ である。以上の処方により、D 個あった X^μ のうち $D-p-1$ 個のみがphysicalな自由度であることが分かる。

さて、§1.2で扱ったような、$p+2$ 次元中の p-braneについて考えよう。この時、Dirac-Nambu-Goto作用に対してstatic gaugeをとれば、(1.52)での結果から

$$\begin{aligned} S &= -T\int d^{p+1}d\xi\ \sqrt{1+\eta^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi} \\ &= -T\int d^{p+1}d\xi\ \sqrt{1+(\nabla\phi)^2-\dot{\phi}^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

ϕ に対する共役運動量を求めると

$$P = \frac{T\dot{\phi}}{\sqrt{1+(\nabla\phi)^2-\dot{\phi}^2}} \tag{2.4}$$

従ってHamiltonianは

$$\begin{aligned} H[\phi,P] &= \int d^p\sigma\left[\dot{\phi}P-\mathcal{L}\right] \\ &= T\int d^p\sigma\frac{1+(\nabla\phi)^2}{\sqrt{1+(\nabla\phi)^2-\dot{\phi}^2}} \\ &= \int d^p\sigma P\frac{1+(\nabla\phi)^2}{\dot{\phi}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\left(P^2\left(1+(\nabla\phi)^2\right) = (P^2+T^2)\dot{\phi}^2 \text{ をもちいる}\right)$$

$$= \int d^p\sigma\sqrt{\left(1+(\nabla\phi)^2\right)\left(P^2+T^2\right)} \tag{2.6}$$

$\dot{\phi}$ で表せば、energy の表式が得られる (2.5)。

$$E = T\int d^p\sigma \frac{1+(\nabla\phi)^2}{\sqrt{1+(\nabla\phi)^2-\dot{\phi}^2}} \tag{2.7}$$

static な場合 ($\dot{\phi}=0$) を考えると、

$$\begin{aligned} E_{\rm static} &= T\int d^p\sigma\sqrt{1+(\nabla\phi)^2} \\ &= T\times(\text{membrane の面積}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。従って、実際に T は membrane tension としての意味を持つことが分かる。

2.2.2 Orthonormal covariant (or Conformal) gauge

ここでは、[5] にしたがって、Orthonormal covariant gauge を導入しよう。この gauge は後でみるように、$p=1$ の場合には string で良く知られた conformal gauge に一致するため、時に conformal gauge と呼ばれることもある。名前の通り、Lorentz covariance を壊さない gauge 固定であり、covariant な解析を行う際には便利である。

$(p+1)$ 次元の world-volume diffeomorphism によって metric g は次のように変化する。

$$\delta g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varepsilon^\gamma g_{\gamma\beta}+\partial_\beta\varepsilon^\gamma g_{\alpha\gamma}+\partial_\gamma\varepsilon^\gamma g_{\alpha\beta} \tag{2.9}$$

これに伴って、作用のなかの g の part は

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}) &= \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta}-g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\right)\delta g_{\gamma\delta} \\ &= \partial_\gamma\left(\varepsilon^\gamma\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\right)-\sqrt{-g}g^{\alpha\gamma}\partial_\gamma\varepsilon^\beta-\sqrt{-g}g^{\gamma\beta}\partial_\gamma\varepsilon^\alpha \end{aligned} \tag{2.10}$$

のように変化する。$(p+1)$ 個有るこの座標変換の自由度を用いて、$p+1$ 個の g の成分を固定しよう。すなわち、

$$\sqrt{-g}g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \bar{g}\bar{g}^{ab} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

ととる。ここで、$\bar{g}_{ab}$ は world-volume の「空間」方向の metric であり、$a,b=1,\dots,p$ および $\bar{g}=\det\bar{g}_{ab}$ である。この表式より、次が導かれる。

$$\sqrt{-g}=\bar{g},\qquad g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} -\bar{g} & 0 \\ 0 & \bar{g}_{ab} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

ここでとくに string の場合 ($p=1$) には $\bar{g}\bar{g}^{ab}=1$、membrane の場合 ($p=2$) には $\bar{g}\bar{g}^{ab}=\epsilon^{ac}\epsilon^{bd}\bar{g}_{cd}$ となり、この gauge は特に簡単になる。string の場合は、この gauge は良く用いられる *conformal gauge* に等しい。

g の表式を元の Howe-Tucker 作用 (1.10) に代入すれば、

$$S = -\frac{T}{2}\int d^{p+1}\xi\ \left[-(\partial_0X^\mu)^2+\bar{g}\bar{g}^{ab}\partial_aX^\mu\partial_bX_\mu-(p-1)\bar{g}\right] \tag{2.13}$$

metric に対する “embedding equation” $g_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}\equiv\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu$ を用いれば、

$$
\begin{aligned}
S &= T\int d^{p+1}\xi\ \left[\frac{1}{2}(\partial_0 X^\mu)^2-\frac{1}{2}\bar{h}\bar{h}^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu+\frac{1}{2}(p-1)\bar{h}\right]\\
&= \frac{T}{2}\int d^{p+1}\xi\ \left[(\partial_0 X^\mu)^2-\bar{h}\right]
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

ここで $\bar{h}_{ab}=\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu,\ \bar{h}=\det\bar{h}_{ab}$ である。

この論文では、covariant な membrane についてはこれ以上考えないので、この gauge 固定に関してはあまり深入りせずにこの形を示すにとどめよう。

2.2.3 Light-cone gauge

ここでは、membrane の light-cone gauge-fixing について述べよう。始めは一般の p-brane の場合を扱い、最後にはもっとも興味有る $p=2$ の場合に限ることにする。string の場合には、この gauge では Virasoro 拘束条件が完全に解けてしまうため、量子化へ簡単に進むことができる上に、unphysical mode をすべて落とせるために、ghost などがあらわれなかった。membrane の場合には、残念ながら話は string ほど簡単には行かない。しかし、実はこの gauge には、量子化へ向けての大きな前進があるのである。すなわち、この gauge での作用は、large N matrix 理論で近似が可能であり、この意味で量子化が行えるのである。

この matrix model の approach は特に supermembrane において membrane の量子論的構造を探るのに非常に大きな役割を果たしており、ここでは少し紙幅を割いて、丁寧に gauge 固定を行っていこう。文献ではよく、最初から「gauge 固定条件」を課してそこからすぐに Hamiltonian などを求めてしまうが、ここでは付録 B で述べた一般論に従い、まず系にあらわれる拘束条件をすべて求めた上で、gauge 固定条件を課すことにしよう。

最初に、p-brane の Howe-Tucker 作用 (1.10) から始めよう。

$$
S_{\mathrm{HT}}=-\frac{T}{2}\int d^{p+1}\sigma\,\sqrt{-g}\left[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu}-(p-1)\right]
\tag{2.15}
$$

ここから正準形式に移るために時間 τ を “Light-cone time” $X^+(\tau,\sigma)=\tau$ で定める。ただし、

$$
X^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^0\pm X^{D-1}\right)
\tag{2.16}
$$

とおいた。このとき、metric は

$$
\begin{cases}
\eta_{ij}=\delta_{ij} & (\text{transverse 方向:}\quad i,j=1,\cdots,D-2)\\
\eta_{+-}=\eta_{-+}=-1 & \\
\eta^{+-}=\eta^{-+}=-1 &
\end{cases}
\tag{2.17}
$$

のようになる。この表式から、

$$
g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu}=g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^i-2g^{0\alpha}\partial_\alpha X^-
\tag{2.18}
$$

のように分解される。

Townsend に従って、次のような metric の分解を導入 [3] するのが便利である[13]。

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} \omega^{-2}\left(-\bar{g} + u^a \bar{g}_{ab} u^b\right) & -\omega^{-1} u^a \bar{g}_{ab} \\ \hline -\omega^{-1} \bar{g}_{ab} u^b & \bar{g}_{ab} \end{array}\right) \tag{2.19}$$

これの逆行列として

$$g^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -\bar{g}^{-1}\omega^2 & -\bar{g}^{-1}\omega u^a \\ \hline -\bar{g}^{-1}\omega u^b & \bar{g}^{ab} - u^a \bar{g}^{-1} u^b \end{array}\right) \tag{2.20}$$

がえられる。このとき、

$$\sqrt{-g} = \omega^{-1}\bar{g} \tag{2.21}$$

となることに注意しよう。

すると、Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{LC}} &= -\frac{T}{2}\sqrt{-g}\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^i - 2g^{0\alpha}\partial_\alpha X^- - (p-1)\right) \\ &= -\frac{T}{2}\omega^{-1}\bar{g}\left[-\bar{g}^{-1}\omega^2\left((\dot{X}^i)^2 - 2\dot{X}^-\right) - 2\bar{g}^{-1}\omega u^a\left(\dot{X}^i\partial_a X^i - \partial_a X^-\right)\right. \\ &\qquad \left. + \bar{g}^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^i - \bar{g}^{-1}u^a u^b \partial_a X^i \partial_b X^i - (p-1)\right] \\ &= -\frac{T}{2}\left[-\omega\left((\dot{X}^i)^2 - 2\dot{X}^-\right) - 2u^a\left(\dot{X}^i\partial_a X^i - \partial_a X^-\right)\right. \\ &\qquad \left. + \bar{g}\omega^{-1}\bar{g}^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^i - \omega^{-1}u^a u^b \partial_a X^i \partial_b X^i - \omega^{-1}\bar{g}(p-1)\right] \end{aligned} \tag{2.22}$$

のように変形される。

ここで、

$$D_0 \equiv \partial_0 + \omega^{-1}u^a\partial_a \tag{2.23}$$

を導入すると、

$$(D_0 X^i)^2 = (\dot{X}^i)^2 + 2\omega^{-1}\dot{X}^i u^a \partial_a X^i + \omega^{-2}u^a u^b \partial_a X^i \partial_b X^i \tag{2.24}$$

となるから、これを用いて

$$\mathcal{L}_{\mathrm{LC}} = \frac{T}{2}\left[\omega(D_0 X^i)^2 - 2\omega D_0 X^- - \omega^{-1}\bar{g}\left(\bar{g}^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^i - (p-1)\right)\right] \tag{2.25}$$

[13] この分解は、一般相対論の正準形式で用いられる ADM 分解の変形である。普通の ADM parametrization との関係を、付録 A にまとめておいた。

X^i に対する共役運動量は

$$\Pi_\omega = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\omega}} = 0$$
$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^a} = 0$$
$$\Pi_{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{g}^{ab}} = 0$$
$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^i} = T\omega D_0 X_i \tag{2.26}$$
$$(-P^+ =) P_- = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^-} = -T\omega \tag{2.27}$$

この表式から、この系の primary constraints を読み取れば、

$$\phi_\omega = \Pi_\omega \approx 0 \tag{2.28}$$
$$\phi_a = \Pi_a \approx 0 \tag{2.29}$$
$$\phi_{ab} = \Pi_{ab} \approx 0 \tag{2.30}$$
$$\phi_- = P_- + T\omega \approx 0 \tag{2.31}$$

と求まる。

Hamiltonian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= P_i \dot{X}^i + P_- \dot{X}^- + \Pi_\omega \omega + \Pi_a u^a + \Pi_{ab} \bar{g}^{ab} - \mathcal{L} \\ &= \frac{T}{2}\left[\omega D_0 X^i \bar{D}_0 X^i + 2u^a \partial_a X^- + \omega^{-1}\left(\bar{g}^{ab}\bar{h}_{ab} - (p-1)\right)\right]\end{aligned} \tag{2.32}$$

ここで、

$$\bar{D}_0 \equiv \partial_0 - \omega^{-1} u^a \partial_a \; , \; \bar{h}_{ab} \equiv \partial_a X^i \partial_b X^i \tag{2.33}$$

を定義した。

$$\begin{aligned}\omega D_0 X^i \bar{D}_0 X^i &= \omega \frac{P^i}{T\omega}\left(\frac{P^i}{T\omega} - 2\omega^{-1} u^a \partial_a X^i\right) \\ &= \frac{(P^i)^2}{T^2\omega} - \frac{2}{T\omega} u^a \partial_a X^i P_i\end{aligned} \tag{2.34}$$

であるから、$P^+ = T\omega$ を用いて結局

$$\mathcal{H} = \frac{(P^i)^2}{2P^+} - \frac{T}{P^+} u^a \partial_a X^i P^i + T u^a \partial_a X^- + \frac{T^2 \bar{g}}{2P^+}\left(\bar{g}^{ab}\bar{h}_{ab} - (p-1)\right) \tag{2.35}$$

のように Hamiltonian 密度が求まる。従って、total Hamiltonian は

$$H_{\mathrm{T}} = \int d^p\sigma \left(\mathcal{H} + \lambda^\omega \phi_\omega + \lambda^a \phi_a + \lambda^{ab}\phi_{ab} + \lambda^- \phi_-\right) \tag{2.36}$$

となる。これを用いて、拘束の “consistency conditions” を求めてみよう。

$$\dot{\phi}_\omega = \{\phi_\omega, H_{\mathrm{T}}\}_{\mathrm{PB}} = -T\lambda^- \approx 0 \tag{2.37}$$

$$\dot{\phi}_a = \{\phi_a, H_{\mathrm{T}}\}_{\mathrm{PB}} = \frac{T}{P^+}\partial_a X^i P^i - T\partial_a X^- \approx 0 \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{ab} &= \{\phi_{ab}, H_{\mathrm{T}}\}_{\mathrm{PB}} \\ &= \frac{T^2}{2P^+}\bar{g}\left(\bar{g}^{ab}\left(\bar{g}^{cd}\bar{h}_{cd} - (p-1)\right) - \bar{g}^{ca}\bar{g}^{db}\bar{h}_{cd}\right) \approx 0\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\dot{\phi}_- = \{\phi_-, H_{\mathrm{T}}\}_{\mathrm{PB}} = T\partial_a u^a + T\lambda^\omega \approx 0 \tag{2.40}$$

よって、(2.38)(2.39) より、secondary constraints が、次のように求まる。

$$\chi_a \equiv P^i\partial_a X^i - P^+\partial_a X^- \approx 0 \tag{2.41}$$

$$\chi_{ab} \equiv \bar{g}_{ab} - \bar{h}_{ab} \approx 0 \tag{2.42}$$

これを用いると、Hamiltonian 密度は次のように書き換えられる。

$$\mathcal{H} = \frac{(P^i)^2 + T^2\bar{g}}{2P^+} - \frac{T}{P^+}u^a\chi_a + \frac{T^2\bar{g}}{2P^+}\bar{h}^{ab}\chi_{ab} \tag{2.43}$$

よって、total Hamiltonian は、

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{T}} = \int d^p\sigma \Bigg[&\frac{(P^i)^2 + T^2\bar{g}}{2P^+} \\ &+ \bar{\lambda}^a\chi_a + \bar{\lambda}^{ab}\chi_{ab} + \lambda^\omega\phi_\omega + \lambda^a\phi_a + \lambda^{ab}\phi_{ab} + \lambda^-\phi_-\Bigg]\end{aligned} \tag{2.44}$$

ここで、未定乗数 $\bar{\lambda}^a$、$\bar{\lambda}^{ab}$ に余分な部分を吸収させた。実際、この繰り込んだ部分にかかる Poisson 括弧は必ず拘束に比例するから、dynamics には効かない。

この時点で、拘束条件 ϕ_a は、他のすべての拘束および、H とも交換するから、1st. class の拘束であることが分かる。また、再び拘束の時間発展の式を作れば、もはや secondary constraint はでないことが分かる。

さて、この時点で §B.1 で説明したように、拘束からなる行列

$$C_{AB} \equiv \{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{PB}} \tag{2.45}$$

を構成する。ここで ϕ_A などは今までの拘束の内 ϕ_a 以外をまとめたものである。C_{AB} を具体的に求めると[14]、

$$C_{AB} = \begin{array}{c} \phi_\omega \\ \phi_{ab} \\ \phi_- \\ \chi_a \\ \chi_{ab} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \\ T & 0 & 0 & P^+\partial' & 0 \\ 0 & 0 & -P^+\partial' & 0 & -2\partial_a X^i\partial_b\partial_c X^i \\ 0 & (\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) & 0 & 2\partial_a X^i\partial_b\partial_c X^i & 0 \end{pmatrix} \delta(\sigma - \sigma') \tag{2.46}$$

[14] $a, b, c, \ldots$ などの足は適当に解釈してください。

これから $\det C$ を求めれば、今の時点では C_{AB} は singular であることが分かる。従ってこの系には ϕ_a 以外にもまだ 1st. class の拘束が残っている。

ここで、“Light-cone gauge” を以下のようにとろう[15]。

$$\zeta = \omega - 1 \approx 0 \tag{2.47}$$

$$\zeta^a = u^a \approx 0 \tag{2.48}$$

このようにすれば、ϕ_a が 2nd. class になることはすぐ分かるし、$\det C \neq 0$ もすぐに確かめられる。実際、今や

$$C^{(\mathrm{new})}_{AB} = \delta(\sigma - \sigma') \times$$
$$\begin{array}{c} \phi_\omega \\ \phi_{ab} \\ \phi_- \\ \chi_a \\ \chi_{ab} \\ \zeta \\ \zeta_a \\ \phi_a \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -T & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) & 0 & 0 & 0 \\
T & 0 & 0 & P^+\partial' & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -P^+\partial' & 0 & -2\partial_a X^i \partial_b \partial_c X^i & 0 & 0 & 0 \\
0 & (\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) & 0 & 2\partial_a X^i \partial_b \partial_c X^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ab} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_{ab} & 0
\end{pmatrix} \tag{2.49}$$

となり、$\det C^{(\mathrm{new})} \neq 0$ である。

こうして、gauge 自由度をすべて固定したので、一般論にしたがって未定乗数を決定し、Dirac 括弧を求めれば dynamics は決定される。しかしこの場合にはこの手続きはかなりややこしいものとなる。ところが、§B.1.3 で注意したように今やすべての拘束は 2nd. class であるから、拘束を解いてしまって、Hamiltonian に代入すれば十分である[16]。

$$\Pi_\omega = \Pi_a = \Pi_{ab} = u^a = 0 \tag{2.50}$$

$$\omega = 1, \qquad \bar{g}_{ab} = \bar{h}_{ab}, \qquad P^+ = T \tag{2.51}$$

$$\partial_a X^- = \frac{1}{P^+} P^i \partial_a X^i \tag{2.52}$$

ところが話はこれではまだ終わらない。最後の式 (2.52) は、Hamiltonian にあらわれていない補助場 X^- を決定する方程式である。この式が矛盾無く解けなければすべての変数の dynamics が consistent に決まらないことになる。従ってさらに、(2.52) に対する**可積分条件**が必要である。この可積分条件は次の 1-form $F_{[1]} = d\sigma^a \partial_a X^-$ に対し、

$$\oint F = 0 \tag{2.53}$$

と書ける。この条件は、局所的には exact であること、$dF = 0$ を要求し、考えている membrane の first homology group が non-trivial なときにはさらに、non-trivial cycle に

[15] 最初にとった metric の分解を思い出せば分かるように、この gauge 固定自体は “orthonormal covariant gauge” と同一であることに注意しよう。

[16] 同様に §B.1.3 で注意したように、この場合は Dirac 括弧など使わなくても、普通の Poisson 括弧で良いのである。

対する **global** な拘束が生じる。興味有る $p = 2$ の場合、2 次元面 $\Sigma_{[2]}$ 上での harmonic vectors を

$$\frac{1}{\sqrt{g^{(2)}}}\partial_a\left(\sqrt{g^{(2)}}\Psi^{(\lambda)a}\right) = 0 \tag{2.54}$$

として導入すれば[17]、

$$\begin{aligned} &\text{局所的可積分条件:} \quad && \epsilon^{ab}\partial_a\partial_b X^- = 0 \\ &\text{大域的可積分条件:} \quad && \int d^2\sigma\sqrt{g^{(2)}}\Psi^{(\lambda)a}\partial_a X^- = 0 \end{aligned}$$

ここで、$g^{(2)}$ はこの 2 次元面 $\Sigma_{[2]}$ 上の fiducial metric の行列式である。

この拘束条件と、(2.52) より、拘束条件

$$\varphi = \epsilon^{ab}\partial_a P^i \partial_b X^i \approx 0 \tag{2.55}$$

$$\varphi^\lambda = \int d^2\sigma\sqrt{g^{(2)}}\Psi^{(\lambda)a}P^i\partial_a X^i \approx 0 \tag{2.56}$$

がもとまる。

よって結局 Hamiltonian は、

$$H_{\mathrm{LC}} = \int d^p\sigma\left[\frac{(P^i)^2}{2P^+} + \frac{P^+}{2}\bar{h} + \rho\varphi + \rho_\lambda\varphi^\lambda\right] \tag{2.57}$$

のようにもとまる。

以降では、global constraint φ^λ については考えないことにする。

2.3 Quantization of membrane

さてそれでは、membrane の量子化について、基本的な部分を紹介しよう。扱うのは、前節で導入した、light-cone gauge での Hamiltonian(2.57) である。前にも述べたように、Hamilton 形式を導入する際には、決まった topology の membrane を個別に扱う必要がある。ここでは、topology は S^2、すなわち sphere(球) であるとし、global constraint を考えないようにしよう。

残った local な補助条件は、§B.1 で述べたように、state にかかる補助条件として扱うことにしよう。この時考える Hamiltonian は、

$$H_{\mathrm{LC}} = \int d^p\sigma\left[\frac{(P^i)^2}{2P^+} + \frac{P^+}{2}\bar{h}\right] \tag{2.58}$$

である。ここで、考えている membrane が 2 次元であることから、

$$\bar{h} = \det\bar{h} = \frac{1}{2}\epsilon^{ac}\epsilon^{bd}\bar{h}_{cd} \tag{2.59}$$

[17] $\Sigma_{[2]}$ の genus が g のとき $\lambda = 1, \ldots, 2g$ である。一般にはもちろん $\dim H^1(\Sigma_{[p]})$ 個の harmonic vectors が存在する。

となる。そこで、2 次元面上 $\Sigma_{[2]}$ の Lie 括弧を次で定義しよう。

$$\{F,G\}_\ell = \epsilon^{ab}\partial_a F\partial_b G \tag{2.60}$$

これを用いると、Hamiltonian と拘束は

$$H_{\rm LC} = \int d^p\sigma \left[\frac{(P^i)^2}{2P^+} + \frac{P^+}{4}\left\{X^i, X^j\right\}_\ell^2\right] \tag{2.61}$$

$$\varphi(\sigma) = \left\{P^i, X^i\right\}_\ell \tag{2.62}$$

と書き直せる。

今、残った gauge 対称性 φ について考えてみると、

$$\delta_\zeta X^i = \int d^2\sigma\zeta(\sigma)\left\{X^i(\tau,\sigma),\varphi(\sigma)\right\}_{\rm PB} = \left\{-\zeta, X^i\right\}_\ell \tag{2.63}$$

と求まり、この gauge 対称性は 2 次元面 $\Sigma_{[2]}$ 上の時間によらない面積を保存する座標変換 (time-independent area-preserving diffeomorphism 以下 APD) を生成することが分かる。

$$\sigma^a \to \sigma^a - \epsilon^{ab}\partial_b\zeta(\sigma) \tag{2.64}$$

この拘束は string 理論において、座標 σ を時間によらずに (global に) 動かす自由度

$$\sigma \to \sigma + a \tag{2.65}$$

が生成する拘束に対応している。string の場合でもこの拘束は、例えば spectrum に関して "level-matching condition" $N_L = N_R$ を要求し、その理論に大きな影響をおよぼす。従ってこの場合でも我々は、この拘束を注意深く扱わなければならない。

このような gauge 条件をうまく state に課すにはどのようにすれば良いだろうか。

これに答えるために、一度 Lagrangian 形式に戻ってみよう。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm LC} &= P^i\dot{X}^i - \mathcal{H}_{\rm LC} \\ &= \frac{P^+}{2}\left[(\dot{X}^i)^2 - \frac{1}{2}\left\{X^i, X^j\right\}_\ell^2\right]\end{aligned} \tag{2.66}$$

但しいまは $u^a = 0$ なので、前に導入した D_0 はただの時間微分であることに注意。

さて、回答は、次のように与えられる。すなわち、この APD を "gauge 化" し gauge 場 $A_0(=\rho)$ を導入するのである。そのために、次の「共変微分」を導入する。

$$D_0 \equiv \partial_0 + \{A_0, \cdot\}_\ell \tag{2.67}$$

こうして、微分を共変微分に置き換えれば

$$\mathcal{L}_{\rm LC} = \frac{P^+}{2}\left[(D_0X^i)^2 - \frac{1}{2}\left\{X^i, X^j\right\}_\ell^2\right] \tag{2.68}$$

ここで (2.66) は、この (2.68) で、“temporal gauge” $A_0 = 0$ を取ったものと考えられる。A_0 と ρ を対応づければ、これが最初に言った state への補助条件になっていることが分かる。

この “gauge 場” A_0 と未定乗数 ρ の関係は次のようにもみることができる。いま、A_0 は補助場であるから、その運動方程式はすべての時間で成り立つべき「拘束」である[18]。実際、

$$
\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{\delta S}{\delta A_0}\right|_{A_0=0\ (\text{temporal gauge})} \\
&= P^+ \left\{ X^i, \dot{X}^i \right\}_\ell
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

となり、APD 拘束条件が再現されていることが分かる。

2.3.1 Matrix regularization

このような系を量子化するために、Hoppe は「行列正則化」という手続きを提案した [32]。先の Lagrangian 密度 (2.68) は、無限次元の gauge 自由度 (APD) を持ったゲージ理論であり、例えばその generator は関数自由度 (適当な基底を用いれば無限次元行列) を持つことになる。行列正則化とは、この**無限次元の gauge 自由度を有限の gauge 自由度で近似**するという idea である。

この手続きについて、detail に拘泥せずに簡単に紹介しよう[19]。まず、考えている membrane の 2 次元面 $\Sigma_{[2]}$ 上の規格直交完全系を $Y_A(\sigma)$ と書こう。これは、もし $\Sigma_{[2]}$ が S^2(球) なら、球面調和関数 Y_{lm} であり、T^2(トーラス) ならば Fourier mode $\exp[2\pi i(n\sigma_1 + m\sigma_2)]$ である。もちろん今は完全系の足 A は $A = 0, 1, \ldots \infty$ である。また $Y_0 \equiv 1$ と書くのが便利である。

この時、完全系は先に定義した Lie 括弧の下で Lie 代数をなす。

$$
\{Y_A, Y_B\}_\ell = f_{AB}{}^C Y_C \tag{2.70}
$$

この Lie 括弧を、有限次元行列のなす交換子 $[\cdot,\cdot]$ で近似するのが、Hoppe の基本的な考え方である。

topology が、T^2 の場合を考えよう [31]。ここで torus は、$\sigma_a \sim \sigma_a + 1$ の同一視で作られるものを考える。この時 $\Sigma_{[2]}$ の面積は

$$
A(\Sigma_{[2]}) = \int d^2\sigma\ 1 = 1 \tag{2.71}
$$

である。さらに、$\Sigma_{[2]}$ 上の完全系は

$$
Y_A = \exp\left[2\pi i(a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2)\right], \qquad n = (a^1, a^2) \in \mathbf{Z}^2 \tag{2.72}
$$

この Y_A に対して

$$
\begin{aligned}
\{Y_A, Y_B\}_\ell &= \partial_1 Y_A \partial_2 Y_B - \partial_2 Y_A \partial_1 Y_B \\
&= -4\pi^2 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) Y_{A+B}, \qquad (\text{where, } \mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv a^1 b^2 - a^2 b^1)
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

[18] 普通の電磁場での “Gauss-low constraint”。
[19] 行列正則化の詳しい話については篠原君の修士論文を参照してください [33]。

が成り立つ。この代数を、N 次元の Lie 代数の交換子 $-2\pi i N\,[T_A, T_B]$ で近似することを考えよう。この時便利なのが、次の’t Hooft の twisted matrix である。これは、

$$U^N = V^N = \mathbf{1}_N, \qquad VU = qUV, \qquad \left(q \equiv \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)\right) \tag{2.74}$$

を満たす $N \times N$unitary 行列である。$N \to \infty$ で $q \to 1$ であるから、large N でこの U、V は可換になることに注意。

具体的な表現は、

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & q & & & \\ & & q^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & q^{N-1} \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

ここで、U、V に対して次が成り立つ。

$$\mathrm{tr}(V^m U^n) = N \hat{\delta}_{m0} \hat{\delta}_{n0} \tag{2.76}$$

ここで、$\hat{\delta}_{mn}$ は、modulo N の Kronecker の δ

$$\hat{\delta}_{mn} \equiv \begin{cases} 1 & m \equiv n \qquad (\mathrm{mod}\ N) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.77}$$

(証明)　まず、定義の式から明らかに

$$\mathrm{tr}\, U^m = \mathrm{tr}\, V^m = \hat{\delta}_{m0} \tag{2.78}$$

さらに

$$\begin{gathered} \mathrm{tr}(V^m U^n) = q^n\, \mathrm{tr}(V^m U^n) = q^m\, \mathrm{tr}(V^m U^n) \\ \downarrow \\ (1 - q^n)\, \mathrm{tr}(V^m U^n) = (1 - q^m)\, \mathrm{tr}(V^m U^n) = 0 \end{gathered}$$

したがって、(2.76) が成り立つ。

■

これらより、T_A を次のように定義しよう。

$$T_A \equiv q^{-\frac{1}{2}a^1 a^2} V^{a^1} U^{a^2} \tag{2.79}$$

定義より従う性質は

$$T_A T_B = q^{\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})} T_{A+B} \tag{2.80}$$

$$T_A^\dagger = T_{-A} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T_A) &= q^{-\frac{1}{2}a^1 a^2} N \hat{\delta}_{a^1 0} \hat{\delta}_{a^2 0} = q^{+\frac{1}{2}a^1 a^2} N \hat{\delta}_{a^1 0} \hat{\delta}_{a^2 0} \\ &= \mathrm{Re}\left(q^{-\frac{1}{2}a^1 a^2} N \hat{\delta}_{a^1 0} \hat{\delta}_{a^2 0}\right) = N \cos\left(\frac{\pi}{N} a^1 a^2\right) \hat{\delta}_{a^1 0} \hat{\delta}_{a^2 0} \end{aligned} \tag{2.82}$$

(2.81) は、U、V が unitary だから

$$U^\dagger = (U)^{-1} = U^{N-1}, \qquad (V \text{ も同様}) \tag{2.83}$$

などになることを用いればすぐに分かる。また、$T_0 = \mathbf{1}_N$ であるから、(2.80)(2.81) より、T_A はまた、unitary であることが分かる。

これらの性質から、

$$[T_A, T_B] = -2i \sin\left(\frac{\pi}{N}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\right) T_{A+B} \tag{2.84}$$

$$\{T_A, T_B\} = 2\cos\left(\frac{\pi}{N}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\right) T_{A+B} \tag{2.85}$$

が分かり、ゆえに

$$[T_A, T_B] \xrightarrow{\text{large } N} -\frac{2\pi i}{N}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})T_{A+B} + \mathcal{O}(N^{-3}) \tag{2.86}$$

$$\{T_A, T_B\} \xrightarrow{\text{large } N} 2T_{A+B} + \mathcal{O}(N^{-2}) \tag{2.87}$$

従って、この場合には $\mathcal{O}(N^{-1})$ までで

$$T_A \equiv q^{-\frac{1}{2}a^1a^2}V^{a^1}U^{a^2} \xrightarrow{\text{large } N} Y_A \equiv \exp\left[2\pi i(a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2)\right] \tag{2.88}$$

$$-2\pi i\,[\cdot,\cdot] \xrightarrow{\text{large } N} \{\cdot,\cdot\} \tag{2.89}$$

の近似が成り立つ。さらに、

$$\int d^2\sigma\ Y_A Y_B = \delta_{a^1,-b^1}\delta_{a^2,-b^2} \tag{2.90}$$

に対応する式を求めよう。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(T_AT_B) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\{T_A, T_B\} = \cos\left(\frac{\pi}{N}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\right)\mathrm{tr}(T_{A+B}) \\
&= N\cos\left(\frac{\pi}{N}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\right)\cos\left(\frac{\pi}{N}(a^1+b^1)(a^2+b^2)\right)\hat{\delta}_{a^1,-b^1}\hat{\delta}_{a^2,-b^2} \\
&\xrightarrow{\text{large } N} N\hat{\delta}_{a^1,-b^1}\hat{\delta}_{a^2,-b^2}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

となるから、

$$\frac{1}{N}\,\mathrm{tr} \xrightarrow{\text{large } N} \int d^2\sigma \tag{2.92}$$

の対応が分かる。

このようにして、T^2 の場合には、具体的に APD を近似する $U(N)$ 群を構成できた。S^2 の場合にも、Hoppe によって具体的な群が構成されている[20]。以上、簡単ではあるが行列正則化についてはこのくらいにしておく。

[20] 実は任意 genus の closed membrane に対して、このような構成が可能であるらしいのだが筆者はあまり follow していない [34]。open membrane に対しては、$SO(N)$ 群による正則化がなされている [27]。

2.3.2 Matrix quantum mechanics

さて、以上のような処方を (2.68) について行ってみよう。この時、作用は

$$S_{\text{matrix}} = \int d\tau \frac{1}{N}\frac{P^+}{2}\,\text{tr}\left[(D_0X^i)^2 + 2\pi^2N^2\left[X^i, X^j\right]^2\right] \tag{2.93}$$

この場合、共役運動量は、

$$P^i = \frac{P^+}{N}D_0X^i \tag{2.94}$$

となるから、前の定義と比べて

$$N(P^i)_{\text{matrix}} \stackrel{\text{large } N}{\longrightarrow} P^i(\sigma) \tag{2.95}$$

の対応が分かる。したがって、Hamiltonian は

$$H_{\text{matrix}} = N\,\text{tr}\left[\frac{(P^i)^2}{2P^+} - \pi^2\left[X^i, X^j\right]^2\right] \tag{2.96}$$

こうして、light-cone gauge での membrane の運動は $U(N)$gauge 群を持つ行列の量子力学で記述されることが分かった。この model を $U(N)$ matrix model という。

このモデルについては supermembrane において重要な応用が数多くある (supermatrix model)。この点については後に §5.1 で述べることにしよう。

3 Open membrane in background gauge fields

3.1 Background of this issue

3.1.1 String theory and Noncommutative geometry

string 理論は、量子重力の理論である。このような理論においては、Plank scale 程度の scale で、一般相対論での時空の記述が悪くなり、我々の持っている「時空」のイメージから離れたものに書き換えられることが考えられる。また、このようなミクロな領域では、string 自体の持つ典型的な長さのスケール ℓ_s も無視できなくなり、時空はいわば"dissolve" すると考えられる。

このような視点から、string 理論と、いわゆる非可換幾何学には、密接なつながりがあるのではないかと信じられてきた。string 理論の非摂動的な振る舞いを記述していると考えられる種々の Matrix 理論においては、時空の「座標」が行列で表されることになり、自然に非可換性を持つに至る。Matrix 理論においては、potential は $[X^i, X^j]^2$ のような形で表され、低エネルギーで効いてくるのは、「可換」な座標の効果でありこれは我々の直感と一致していると言える。

さらに、Connes-Douglas-Schwarz らによって constant な C-field があるときの Matrix 理論の torus compact 化を考えることによって、自然に非可換 torus があらわれることが指摘された [12]。

これらの発展を受けて、近年、string 理論と非可換幾何学とのつながりを理解しようという試みが盛んである。たとえば、背景に constant な B-field がある場合の D-brane の量

子化を考えると、その上の理論は非可換なものになる。この時、実は T-duality を考えることで、D-brane の effective action は、非可換な記述と可換の記述の両方を許すことになる。同じものについて、このように全く違った二つの記述が可能になるのは驚きであるが、Seiberg と Witten はこれらの記述は実は、ある種の場の「再定義」によってうつり合えることを示した [17][21]。

このような状況のなかで、constant B-field の効果による境界条件[22]の変化を、Dirac 流に「拘束条件」として扱うことによっても D-brane 上の非可換性を導けると言うことが知られるようになってきた [14, 15, 16]。

3.1.2 Emergence of noncommutativity in string theory

ここでは、[16] に従い、Dirac の方法に基づいて string 理論における非可換性について調べてみよう。

まず、考える open string の作用は

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \left[\eta^{\alpha\beta} g_{ij}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j - \epsilon_{\alpha\beta} b_{ij}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j\right] \tag{3.1}$$

$$(\eta^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (\epsilon^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

で与えられる。ここで、この節で使う notation についてまとめておく。world-sheet metric は、$\eta_{\alpha\beta}$ で conformal gauge をとっている。background metric g_{ij} は flat に限らないが constant。また、space-time の二階反対称テンソル場 b_{ij} も constant とする。α' は、通常の Regge-slope parameter である。ここでは、open bosonic string が background の反対称テンソル場と couple する状況を考えていて、$\sigma \in [0,\pi]$ である。

作用の変分をとれば、

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \left(\eta^{\alpha\beta} g_{ij}\partial_\beta X^j - \epsilon^{\alpha\beta} b_{ij}\partial_\beta X^j\right)\partial_\alpha \delta X^i \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \partial_\alpha \left[\left\{\eta^{\alpha\beta} g_{ij}\partial_\beta X^j - \epsilon^{\alpha\beta} b_{ij}\partial_\beta X^j\right\}\delta X^i\right] \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \delta X^i \left[\eta^{\alpha\beta} g_{ij}\partial_\alpha\partial_\beta X^j\right]\end{aligned} \tag{3.3}$$

ともとまる。従って、運動方程式は、

$$\partial^\alpha\partial_\alpha X^i(\tau,\sigma) = 0 \tag{3.4}$$

境界条件は

$$\begin{aligned}\text{Dirichlet 方向:} &\quad \delta X^{i_{\rm D}} = 0 \qquad (X^{i_{\rm D}} = \text{const.}) \\ \text{Neumann(Mixed) 方向:} &\quad g_{ij}X'^j + b_{ij}\dot{X}^j = 0 \;\;\text{at}\;\; \sigma = 0,\pi\end{aligned}$$

[21] string 理論と非可換幾何学とのつながりにおける、最近の発展については、この論文に簡潔に review してある。

[22] constant な B-field と、open string との coupling を表す Chern-Simons term は、この場合 total divergence になり、その効果は “boundary” にしか効かない。

である。ここで、

$$X' \equiv \frac{\partial}{\partial\sigma}X \quad , \quad \dot{X} \equiv \frac{\partial}{\partial\tau}X \tag{3.5}$$

また、Mixed boundary condition と呼んでいるのは、幾つかの方向の成分が "mix" した境界条件になっているためである。

今の場合、D-brane と平行な方向の open string の成分について考えよう。実際、Dirichlet 方向に対しては、constant な b-field の存在は何ら特別な効果をおよぼさないことが見て取れる。

ここで、正準量子化を考える。作用を書き直して、

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \left[g_{ij}\left(\dot{X}^i\dot{X}^j - X'^iX'^j\right) + 2b_{ij}\dot{X}^iX'^j \right] \tag{3.6}$$

ここから共役運動量を計算すると

$$P_i(\tau,\sigma) \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{X}^i} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\left(g_{ij}\dot{X}^j + b_{ij}X'^j\right) \tag{3.7}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{X}^i = g^{ij}\left(2\pi\alpha' P_j - b_{jk}X'^k\right) \tag{3.8}$$

境界条件は、ここで拘束条件として扱うことにすれば ($\dot{X}$ を消去して)

$$\begin{aligned}
\phi_i(\sigma) &= g_{ij}X'^j + b_{ik}g^{kl}\left(2\pi\alpha' P_l - b_{lj}X'^j\right) \\
&= \left(g_{ij} - b_{ik}g^{kl}b_{lj}\right)X'^j + 2\pi\alpha' b_{ik}g^{kl}P_l \\
&= G_{ij}X'^j + 2\pi\alpha' b_{ik}g^{kl}P_l
\end{aligned} \tag{3.9}$$

いま定義した G_{ij} は "Open string metric" で、次のように定義される。

G と Θ の定義 G,Θ は、$(g+b)^{-1}$ のそれぞれ、**対称部分、反対称部分**である。

$$\underbrace{G^{-1}}_{\text{Symmetric}} + \underbrace{\frac{\Theta}{2\pi\alpha'}}_{\text{Anti-symm.}} = \frac{1}{g+b} = g^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n(bg^{-1})^n \tag{3.10}$$

この定義から、次のように様々な便利な形を得られる。

$$\begin{aligned}
G^{-1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g+b} + \left(\frac{1}{g+b}\right)^{\mathrm{T}}\right) \\
&= \frac{1}{g+b}g\frac{1}{g-b} \\
&= g^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(bg^{-1})^{2n}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Theta}{2\pi\alpha'} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g+b} - \left(\frac{1}{g+b}\right)^{\mathrm{T}}\right) \\
&= -\frac{1}{g+b} b \frac{1}{g-b} \\
&= -g^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(bg^{-1})^{2n+1}
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

$$
\frac{\Theta}{2\pi\alpha'} = -G^{-1}bg^{-1} = -g^{-1}bG^{-1} \tag{3.13}
$$

$$
G^{-1} - b^{-1} = g^{-1}bG^{-1}bg^{-1} \tag{3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= (g-b)g^{-1}(g+b) \\
&= g + b - b - bg^{-1}b \\
&= g - bg^{-1}b
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

以降、これらの表式を用いて式を見易いように変形することにしよう。

Hamiltonian 密度を求めると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \dot{X}^i P_i - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{4\pi\alpha'} g_{ij}\left(\dot{X}^i\dot{X}^j + X'^i X'^j\right) \qquad \text{(ここに (3.8) を代入)} \\
&= \frac{1}{4\pi\alpha'}\left(X'^i, 2\pi\alpha' P_i\right)\begin{pmatrix} G_{ij} & b_{ik}g^{kj} \\ -g^{ik}b_{kj} & g^{ij}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'^j \\ 2\pi\alpha' P_j\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

したがって Hamiltonian は、

$$
H = \int d\sigma \mathcal{H} \tag{3.17}
$$

で定義される。Poisson 括弧を次で定義する。

$$
\left\{X^i(\sigma), P_j(\sigma')\right\}_{\mathrm{PB}} = \delta^i_j \delta(\sigma - \sigma') \tag{3.18}
$$

これにより、Hamilton 形式での運動方程式が求まる。

$$
\dot{X}^i \equiv \left\{X^i(\sigma), H\right\}_{\mathrm{PB}} = (2\pi\alpha')g^{ij}P_j(\sigma) - g^{ik}b_{kj}X'^j(\sigma) \tag{3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_i \equiv \left\{P_i(\sigma), H\right\}_{\mathrm{PB}} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_\sigma\left(G_{ij}X'^j + b_{ik}g^{kj}(2\pi\alpha')P_j\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'}\phi'_i(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

さて、Dirac の処方の一般論にしたがってこの拘束条件が、時間発展と矛盾しないための条件を見ていこう。付録 B.2 で述べたようにに、これは無限に続く第二種拘束条件を与える。

まず、primary constraint の “consistency condition” は、

$$
\dot{\phi}_i \equiv \left\{\phi_i(\sigma), H\right\}_{\mathrm{PB}} = 2\pi\alpha' P'_i(\sigma)\big|_{(\sigma=0,\pi)} \approx 0 \tag{3.21}
$$

最右辺は、“secondary constraint” $P'_i(\sigma) \approx 0$ at $(\sigma = 0, \pi)$ を与える。この手続きを続けていけば、

$$
\begin{aligned}
\left\{P'_i(\sigma), H\right\}_{\rm PB} &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\phi_i^{(2)}(\sigma)\bigg|_{(\sigma=0,\pi)} \approx 0 \\
\left\{\phi_i^{(2)}(\sigma), H\right\}_{\rm PB} &= 2\pi\alpha' P_i^{(3)}(\sigma)\bigg|_{(\sigma=0,\pi)} \approx 0 \\
&\vdots \\
\left\{P_i^{(2n+1)}(\sigma), H\right\}_{\rm PB} &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\phi_i^{(2n+2)}(\sigma)\bigg|_{(\sigma=0,\pi)} \approx 0 \\
\left\{\phi_i^{(2n)}(\sigma), H\right\}_{\rm PB} &= 2\pi\alpha' P_i^{(2n+1)}(\sigma)\bigg|_{(\sigma=0,\pi)} \approx 0
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

を得る。但しここで、

$$
P_i^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial\sigma^n}P_i(\sigma) \quad , \quad \phi^{(n)} = \frac{d^n}{d\sigma^n}\phi_i(\sigma) \tag{3.23}
$$

である。

Solving constraints　こうして得られた、無限個の拘束条件

$$
\left(\phi_i^{(2n)}(\sigma), P_i^{(2n+1)}(\sigma)\right)_{n=0,1,2,\cdots}\bigg|_{\sigma=0,\pi} \approx 0 \tag{3.24}
$$

を、mode 展開を用いて解くことを考えよう。

実際、$\sigma = 0, \pi$ において、ϕ も P' も偶数回の微分が 0 になるのであるから、$\sin n\sigma$ の Fourier 展開により容易に解くことができる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
\phi_i(\sigma) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{ni}(\tau)\sin(n\sigma) \\
P_i(\sigma) &= -\sum_{n=1}^{\infty}nP_{ni}(\tau)\sin(n\sigma)
\end{aligned}
\right.
\tag{3.25}
$$

P の式を次のように書き換える。

$$
P_i(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty}P_{ni}(\tau)\cos(n\sigma) \tag{3.26}
$$

$n = 0$ は積分定数である。(3.9) から、

$$
\begin{aligned}
X'^i(\sigma) &= G^{ij}\left[\phi_j(\sigma) - 2\pi\alpha' b_{jk}g^{kl}P_l(\sigma)\right] \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\left[G^{ij}\phi_{nj}(\tau) + 2\pi\alpha'\underbrace{G^{ik}b_{kl}g^{lj}}_{-\Theta^{ij}}P_{nj}(\tau)\cos(n\sigma)\right] \\
&\qquad - 2\pi\alpha'\underbrace{G^{ik}b_{kl}g^{lj}}_{-\Theta^{ij}}P_{0j}(\tau)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

ここで、(3.13) を用いた。ここで、

$$\phi_{ni}(\tau) = nG_{ij}X_n^j(\tau) \tag{3.28}$$

とおけば、結局 X と P に対して、次の展開式を得る。

$$\begin{cases} X^i(\tau,\sigma) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} X_n^i(\tau)\cos(n\sigma) + \Theta^{ij}\left[P_{0j}(\tau)\sigma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P_{nj}\sin(n\sigma)\right] \\ P_i(\tau,\sigma) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_{ni}(\tau)\cos(n\sigma) \end{cases} \tag{3.29}$$

$n=0$ は、X、P ともに積分定数である。

Compute the Lagrange bracket　これで拘束を完全に解いてしまったので、まず Lagrange 括弧を求め、それを用いて Dirac 括弧を求めよう。§B.1 で述べたように Lagrange 括弧は次で定義される。

$$\begin{aligned} \Omega &= -2\int d\sigma dX^i(\sigma)\wedge dP_i(\sigma) \\ &\equiv L_{I,J}d\Phi^I\wedge d\Phi^J \end{aligned} \tag{3.30}$$

I, J は連続変数も走るものとする。(3.29) を代入して計算する。

$$\begin{aligned} \Omega = -2&\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} dX_n^i\wedge dP_{mi}\overbrace{\int_0^{\pi} d\sigma\cos(n\sigma)\cos(m\sigma)}^{\spadesuit}\right] \\ &-2\Theta^{ij}\left[\sum_{m=0}^{\infty} dP_{0j}\wedge dP_{0i}\overbrace{\int_0^{\pi} d\sigma\sigma\cos(m\sigma)}^{\heartsuit}\right. \\ &\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n}dP_{nj}\wedge dP_{mi}\underbrace{\int_0^{\pi} d\sigma\sin(n\sigma)\cos(m\sigma)}_{\clubsuit}\right] \end{aligned} \tag{3.31}$$

積分の部分を求めよう。

$$\spadesuit = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\delta_{nm} & (n,m\neq 0) \\ \pi & (n=m=0) \end{cases} \tag{3.32}$$

$$\heartsuit_{m=0} = \int_0^{\pi} d\sigma\ \sigma = \frac{\pi^2}{2} \tag{3.33}$$

$$
\begin{aligned}
\heartsuit_{n\geq 1} + \clubsuit_{m=0} &= \int_0^\pi d\sigma \underbrace{\left(\sigma\cos(n\sigma) + \frac{1}{n}\sin(n\sigma)\right)}_{(\sin(n\sigma))'} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

$\clubsuit_{m\geq 1}$ の部分を求めよう。

$$
\begin{aligned}
\clubsuit &= \int_0^\pi d\sigma \sin(n\sigma)\cos(m\sigma) \\
&= \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{2}\left\{\sin((n+m)\sigma) + \sin((n-m)\sigma)\right\}
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

をもちいる。まず、$n = m$ の場合。

$$
\clubsuit_{n=m} = \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{2}\sin((2n)\sigma) = 0 \tag{3.36}
$$

$n \neq m$ かつ $n + m$ が偶数の時。このとき $n - m$ もまた偶数で、

$$
\begin{aligned}
\clubsuit &= \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{2}\left\{\sin((n+m)\sigma) + \sin((n-m)\sigma)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((n+m)\sigma)}{n+m} + \frac{\cos((n-m)\sigma)}{n-m}\right)\Bigg|_0^\pi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

$n \neq m$ かつ $n + m$ が奇数の時。

$$
\begin{aligned}
\clubsuit &= \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{2}\left\{\sin((n+m)\sigma) + \sin((n-m)\sigma)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((n+m)\sigma)}{n+m} + \frac{\cos((n-m)\sigma)}{n-m}\right)\Bigg|_0^\pi \\
&= \frac{1}{n+m} + \frac{1}{n-m} \\
&= \frac{2n}{n^2 - m^2}
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

これらをまとめて次のように書こう。

$$
\clubsuit_{m\geq 1} = \frac{n}{n^2 - m^2}\left((-)^{n+m} - 1\right)(1 - \delta_{nm}) \tag{3.39}
$$

以上を併せて、

$$
\begin{aligned}
\Omega = &-2\left[\pi dX_0^i \wedge dP_{0i} + \frac{\pi}{2} dX_n^i \wedge dP_{ni} - \Theta^{ij}\frac{\pi^2}{2} dP_{0i} \wedge dP_{0j}\right] \\
&\underbrace{+ 2\,\Theta^{ij} \sum_{n,m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2 - m^2}\left((-)^{n+m} - 1\right)(1 - \delta_{nm})}_{\text{anti-sym. under} \quad n \leftrightarrow m} dP_{mi} \wedge dP_{nj}}_{=0}
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

従って、Lagrange 括弧が次のように求まる。

$$(L_{I,J}) = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & M \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

$$J = \begin{pmatrix} \pi & & & \\ & \frac{\pi}{2} & & \\ & & \frac{\pi}{2} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} \Theta\pi^2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

Dirac bracket　前節で求めた Lagrange 括弧の逆行列を求めることで、Dirac 括弧が計算できる。

$$(L)^{-1}_{I,J} = \begin{pmatrix} J^{-1}MJ^{-1} & J^{-1} \\ -J^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

ここで、

$$J^{-1}MJ^{-1} = \begin{pmatrix} \Theta & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

従って、各 mode に対する Dirac 括弧は、

$$\begin{cases} \left\{X_0^i, P_{0j}\right\}_{\mathrm{DB}} = \dfrac{1}{\pi}\delta^i_j \\ \left\{X_n^i, P_{mj}\right\}_{\mathrm{DB}} = \dfrac{2}{\pi}\delta^i_j\delta_{nm} \\ \left\{X_0^i, X_0^j\right\}_{\mathrm{DB}} = \Theta^{ij} \end{cases} \tag{3.45}$$

その他のものは 0 である。

これらを用いれば、元の変数 $X^i(\sigma)$、$P_j(\sigma)$ に対する Dirac 括弧が容易に求まり、

$$\begin{aligned} \left\{X^i(\sigma), P_j(\sigma')\right\}_{\mathrm{DB}} &= \delta^i_j \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\sigma)\cos(n\sigma') \right) \\ &\equiv \delta^i_j \ \tilde{\delta}(\sigma, \sigma') \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\left\{P_i(\sigma), P_j(\sigma')\right\}_{\mathrm{DB}} = 0 \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} \left\{X^i(\sigma), X^j(\sigma')\right\}_{\mathrm{DB}} &= \Theta^{ij}\frac{1}{\pi}\left[\pi - \sigma - \sigma' - \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[n(\sigma+\sigma')]}{n}}_{\star} \right] \\ &= \begin{cases} 0 & (\sigma, \sigma' \in (0, \pi)) \\ \Theta^{ij} & (\sigma = \sigma' = 0) \\ -\Theta^{ij} & (\sigma = \sigma' = \pi) \end{cases} \end{aligned} \tag{3.48}$$

ただし ★ では Fourier 級数の公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}(\pi - x) = \arctan\left(\cot\frac{x}{2}\right) \quad (\text{但し } x \in (0, 2\pi)) \tag{3.49}$$

を用いた。また、(3.46) の最後の $\tilde{\delta}(\sigma - \sigma')$ は、定義域の両端で微分が 0 になる delta 関数である。

従って、この場合 open string は、その「端点」でのみ非可換性を有し、端点以外の場所では可換な普通の string として振る舞うことが分かる (図 3)。そしてその「非可換性」の出方は両端でそれぞれ逆むきになっていることも分かる。このために、もし open string が D-brane に端を持てばその上の理論は、「位置」が非可換になった非可換幾何学で記述されると期待される。

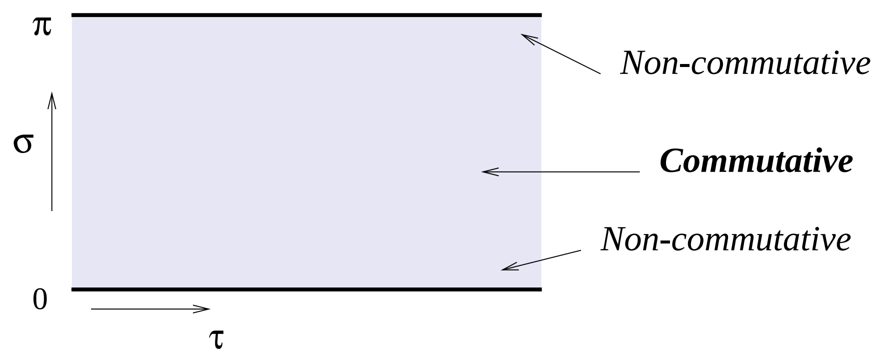

図 3: Open string は端以外では可換だが、端点は非可換で両端で符号が違っている。

この描像は例えば [13] などにより、量子化の手続きを経て導入された。この Dirac の方法の利点は、非可換性を導出した時点ではまだ、「古典論」を扱っているという点にある。従って、量子化に際し様々な困難に直面するより高次元の object、特に membrane などに対しても同様の解析を試みることが考えられる。次節では、実際ここで導入した手法を用いて、open membrane が constant な 3 階反対称 gauge 場の background でどのような振る舞いをするかを解析しよう。

3.2 Open membrane in background C-field and noncommutativity

前節までは、string 理論において、open string + constant NS-NS B-field という系において、open string の端点に非可換性が顕れることを見た。このことは Introduction でも述べたように、string 理論の量子重力理論としての側面であるといっても良い。さてそれでは、M-theory における非可換性とは何か、という問いに membrane 理論の立場から何が言えるかを考えよう。

string 理論の場合のように、membrane もその world-volume 上に 3 階反対称テンソル場 C との自然な coupling を持つ。前節での解析の枠組みでは、string 理論の非可換性は、constant な B-field の存在によって boundary condition が変化したために端点において「非可換性」というものが現れたとみることができる。従って membrane でも constant な

C-field があるとき、その “boundary” はどのようなものになるか?というのは自然な疑問であろう。string の場合は「端点」は実際に点状であり、その boundary(D-brane) 上に誘導された理論は、その位置が非可換になった非可換幾何学であった。それに対し、membrane ではその “boundary” はひも状になっており、その場合に boundary 上の理論としてどのようなものが現れるか、直感的には想像がつかない (図 4)。解析を通じて、このような membrane 特有の excentric な現象にも何か知見が得られるだろうか?

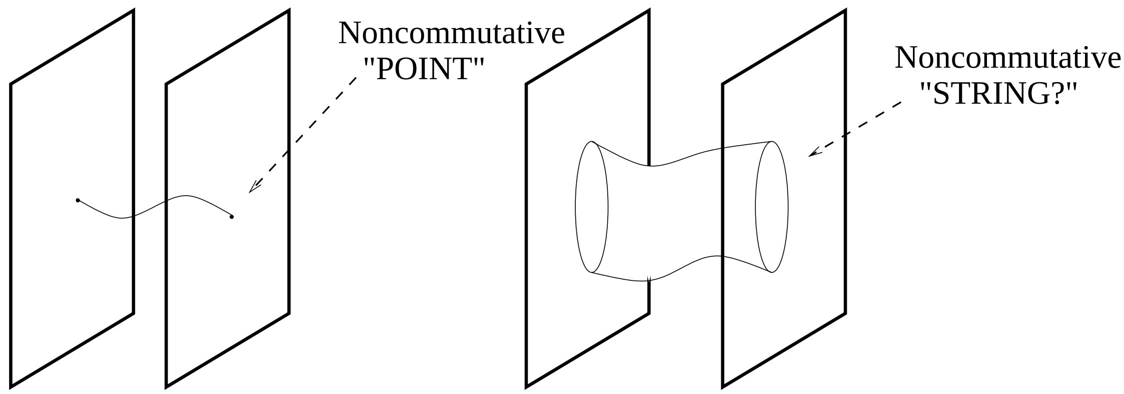

図 4: string 理論では端は点状だが、membrane ではひも状になる。

ここで、“Open membrane” について少し述べておこう。我々は以下の解析を bosonic な場合に限るのであるが、もちろんその先には supermembrane、M-theory への適用を考えている。Introduction で述べたように、supermembrane は自然に 11 次元 supergravity と couple し、また M-theory も低エネルギー極限が 11 次元 supergravity になることからその background としてとりいれる場はこの理論の bosonic part に限りたい。ところが 11 次元 supergravity には massless の 2 階反対称 tensor 場は存在せず、従って、flat な Minkowski background には、open supermembrane は存在できない。実際、supersymmetry を壊さない boundary condition を flat Minkowski 上で課すことはできないのである [2]。よって、11 次元 supermembrane への応用を考える際には、open membrane を考える意味が薄れるように思えるのだが、実は target space-time にある種の “topological defect” が存在するときには、supersymmetry を保つような open supermembrane を構成することができるのである [26, 27, 28]。この種の defect は例えば M-theory に存在する M5-brane であると解釈される。実際 M5-brane 上には M2-brane が couple できるような self-dual 2-form 場が存在する[23]。

従って我々は、以下で行う bosonic な場合の解析においても、open membrane はある “boundary plane” にその端を束縛されているという状況を考えることにする。

[23]他に許されるのは 1-brane と 9-brane である [27]。9-brane はいわゆる Hořava-Witten における “End of the world” と見なされる [26]。1-brane の解釈については良く知らない。

3.2.1 Setup

11 次元中の、constant な C-field 中を動く open membrane を考える。まず、static gauge

$$X^0 = \tau \qquad \tau \in (-\infty, \infty) \tag{3.50}$$

$$X^9 = \sigma_1 L \qquad \sigma_1 \in [0, \pi] \tag{3.51}$$

$$X^{10} = \sigma_2 R \qquad \sigma_2 \in [0, 2\pi] \tag{3.52}$$

を取り、次のように 10 方向を compact 化し、9 方向に boundary を設ける。

$$\begin{cases} \Delta X^9 = \pi L \\ X^{10} \sim X^{10} + 2\pi R \end{cases} \tag{3.53}$$

すなわち、membrane は X^{10} 方向の半径 R の円周に巻き付いており πL の間隔でその端をある固定面 (fixed plane) に束縛されている (図 5)。以下ではこの cylinder 状の membrane のみを考え、winding のある場合などは考えないことにする。

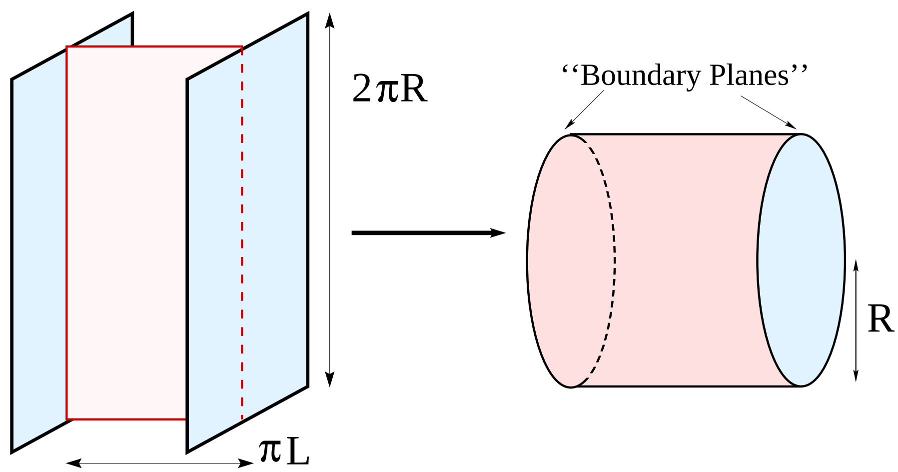

図 5: membrane は、半径 R の円周に巻き付いており、間隔 πL 離れた “boundary fixed plane” に両端を持つ

この場合の、open membrane の作用は

$$S = -T \int d^3\xi \left\{ \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}} + \frac{1}{3!}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} C_{\mu\nu\rho} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \partial_\gamma X^\rho \right\} \tag{3.54}$$

ここで、$\xi^\alpha = (\tau, \sigma_1, \sigma_2)$

static gauge の下で $h_{\alpha\beta}$ は、

$$\begin{aligned} h_{00} &= -1 + (\dot{X}^i)^2 \\ h_{0a} &= \dot{X}^i \partial_a X^i \\ h_{11} &= L^2 + (\partial_1 X^i)^2 \\ h_{ab} &= \partial_a X^i \partial_b X^i \\ h_{22} &= R^2 + (\partial_2 X^i)^2 \end{aligned} \tag{3.55}$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
\det h &= \begin{vmatrix} -1+(\dot{X}^i)^2 & \dot{X}^i\partial_1 X^i & \dot{X}^i\partial_2 X^i \\ \dot{X}^i\partial_1 X^i & L^2+(\partial_1 X^i)^2 & \partial_1 X^i\partial_2 X^i \\ \dot{X}^i\partial_2 X^i & \partial_1 X^i\partial_2 X^i & R^2+(\partial_2 X^i)^2 \end{vmatrix} \\
&= -L^2R^2 + L^2R^2(\dot{X}^i)^2 - R^2(\partial_1 X^i)^2 - L^2(\partial_2 X^i)^2 + \mathcal{O}\left((\partial X)^4\right) \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

これにより、作用の Dirac-Nambu-Goto 部分は、

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{DNG}} &= -T\int d^3\xi LR\sqrt{1-(\dot{X}^i)^2+\frac{1}{L^2}(\partial_1 X^i)^2+\frac{1}{R^2}(\partial_2 X^i)^2+\mathcal{O}\left((\partial X)^4\right)} \\
&= TLR\int d^3\xi\left[-1+\frac{1}{2}(\dot{X}^i)^2-\frac{1}{2L^2}(\partial_1 X^i)^2-\frac{1}{2R^2}(\partial_2 X^i)^2+\mathcal{O}\left((\partial X)^4\right)\right] \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

のようになる。見やすくするために $L\sigma_1 \to \sigma_1$, $R\sigma_2 \to \sigma_2$ と rescale すれば、

$$
S_{\mathrm{DNG}} = T\int d^3\xi\left[-1+\frac{1}{2}(\dot{X}^i)^2-\frac{1}{2}(\partial_1 X^i)^2-\frac{1}{2}(\partial_2 X^i)^2+\mathcal{O}\left((\partial X)^4\right)\right] \qquad (3.58)
$$

さて、次は C-field の項を見よう。$C_{\mu\nu\rho}$ は、今の場合、transverse な方向 (1 ∼ 9 方向) にのみ成分を持っているとしよう。これは、boundary plane 上での、“magnetic” な場のみ考えることに相当する。この時、

$$
S_C = -T\int d^3\xi C_{ijk}\dot{X}^i\partial_1 X^j\partial_2 X^k \qquad (3.59)
$$

である。さて、ここで rescale $L\sigma_1 \to \sigma_1$, $R\sigma_2 \to \sigma_2$ に応じて、$C \to (LR)^{-1}C$ とする。

まとめれば、

$$
L\sigma_1 \to \sigma_1\ ,\ R\sigma_2 \to \sigma_2\ ,\ C \to (LR)^{-1}C \qquad (3.60)
$$

$$
LRd^3\xi \to d^3\xi \qquad (3.61)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\sigma_1} \to L\frac{\partial}{\partial\sigma_1} \qquad (3.62)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\sigma_2} \to R\frac{\partial}{\partial\sigma_2} \qquad (3.63)
$$

$$
C_{ijk}\dot{X}^i\partial_1 X^j\partial_2 X^k \to C_{ijk}\dot{X}^i\partial_1 X^j\partial_2 X^k \qquad (3.64)
$$

$$
\left\{\begin{array}{c} \sigma_1 \in [0,\pi] \\ \sigma_2 \in [0,2\pi] \end{array}\right. \quad\to\quad \left\{\begin{array}{c} \sigma_1 \in [0,\pi L] \\ \sigma_2 \in [0,2\pi R] \end{array}\right. \qquad (3.65)
$$

$$
S_{\mathrm{total}} = T\int d^3\xi\left(-1+\frac{1}{2}(\dot{X}^i)^2-\frac{1}{2}(\partial_1 X^i)^2-\frac{1}{2}(\partial_2 X^i)^2-C_{ijk}\dot{X}^i\partial_1 X^j\partial_2 X^k+\mathcal{O}\left((\partial X)^4\right)\right) \qquad (3.66)
$$

ここで、次のような極限を考えよう。

$$
\begin{array}{l} T \to \alpha^2 T \\ X \to \frac{1}{\alpha}X \\ C \to \alpha C \end{array} \quad \& \quad \alpha \to \infty \qquad (3.67)
$$

すなわち、membrane tension、background gauge 場を大きくし、それと同時に X の高次項を落とす近似をとる。この下で (古典論を考えるので)constant な項を落として、

$$S^{\text{eff}} = T\int d^3\xi \left[\frac{1}{2}\left\{(\dot{X}^i)^2 - (\partial_1 X^i)^2 - (\partial_2 X^i)^2\right\} - C_{ijk}\dot{X}^i\partial_1 X^j\partial_2 X^k\right] \tag{3.68}$$

という effective な作用を得る。以下では、これを用いて background に存在する constant な C-field の効果について考察しよう。

Gauge fields on boundary plane　さて、ここで C-field として、C_{ijk} 成分のみをとったことについて考察しよう。一般に、p-brane は次の Chern-Simons 項を通じて $p+1$-form gauge 場 $C_{[p+1]}$ が自然に couple する。

$$\int_\Sigma C_{[p+1]} \tag{3.69}$$

ここで Σ は p-brane の world-volume である。この $p+1$-form gauge 場 $C_{[p+1]}$ に対する gauge 変換は

$$C_{[p+1]} \to C_{[p+1]} + d\Lambda_{[p]} \tag{3.70}$$

で定義される。gauge 変換で出てくる項は、全微分であるから、これは「閉じた (closed)」p-brane は gauge 不変であることを表す。しかし「開いた (open)」p-brane に対しては表面項が残るため、このままでは gauge 不変でない。そこでつぎのような p-form 場 $B_{[p]}$ を boundary に couple させよう。

$$\int_{\partial\Sigma} B_{[p]} \tag{3.71}$$

この $B_{[p]}$ は gauge 変換の下で、次のように変換する。

$$B_{[p]} \to B_{[p]} - \Lambda \tag{3.72}$$

そうすれば、この二つを併せた

$$S_{\text{CS}} = \int_\Sigma C_{[p+1]} + \int_{\partial\Sigma} B_{[p]} \tag{3.73}$$

は gauge 変換に対し

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{CS}} &= \int_\Sigma d\Lambda - \int_{\partial\Sigma}\Lambda \\ &= \int_{\partial\Sigma}\Lambda - \int_{\partial\Sigma}\Lambda \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.74}$$

となって、不変に保たれる。

p-brane が boundary plane 上に端を持てるためには、この boundary plane 上に p-form gauge 場 $B_{[p]}$ が存在しなければならない。この $B_{[p]}$ に対する field strength $H_{[p+1]} = dB_{[p]}$

を考えよう。boundary plane 上で gauge 不変性が保たれるためには、その上の二種類の gauge 場は常に「gauge 不変な」組み合わせ $C+H$ で入ってくることになる[24]。したがって今の場合、background に constant な C-field が存在することを、boundary plane 上に constant な field strength H があると読み替えても良い。

C-field に対し、"transverse" 方向にのみ non-zero な値を持たせたことは、この場合、boundary plane 上の場 H に対して、"electric" な場 $H_{0i_1\ldots i_p}$ を 0 にし、"magnetic" な場 $H_{i_1\ldots i_p}$ だけを考えることに相当する。

Equation of motion and Boundary condition さて、まず (3.68) を変分する。

$$\begin{aligned}\delta S^{\text{eff}} &= -T\int d^3\xi\left[\ddot{X}^i-(\partial_1)^2X^i-(\partial_2)^2X^i\right]\delta X^i\\&\quad+T\int d^3\xi\,\partial_1\left[\left(-\partial_1X^i-C_{ijk}\dot{X}^k\partial_2X^j\right)\delta X^i\right]\end{aligned}\tag{3.75}$$

従って、運動方程式は

$$\Box X^i=0\tag{3.76}$$

ここで、$\Box\equiv\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$。membrane の端が満たすべき、境界条件は

$$\partial_1X^i-C_{ijk}\dot{X}^j\partial_2X^k\Big|_{\sigma_1=0,\pi}=0\tag{3.77}$$

Hamiltonian formalism 正準形式にうつるために、共役運動量を求めよう。

$$P_i=\frac{\delta}{\delta\dot{X}^i}L=T\left(\dot{X}_i-C_{ijk}\partial_1X^j\partial_2X^k\right)\tag{3.78}$$

従って、Hamiltonian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&\equiv\dot{X}^iP_i-\mathcal{L}\\&=\frac{T}{2}\left((\dot{X}^i)^2+(\partial_1X^i)^2+(\partial_2X^i)^2\right)\\&=\frac{T}{2}\left[\left(\frac{P^i}{T}+C_{ijk}\partial_1X^j\partial_2X^k\right)^2+(\partial_1X^i)^2+(\partial_2X^i)^2\right]\end{aligned}\tag{3.79}$$

よって、Hamiltonian が

$$H=\int d^2\sigma\frac{T}{2}\left[\left(\frac{P^i}{T}+C_{ijk}\partial_1X^j\partial_2X^k\right)^2+(\partial_1X^i)^2+(\partial_2X^i)^2\right].\tag{3.80}$$

と求まる。

境界条件を、Dirac 拘束条件として取り入れると、primary constraint が

$$\phi_1^i=\partial_1X^i-C_{ijk}\left(\frac{P^j}{T}+C_{jlm}\partial_1X^j\partial_2X^k\right)\partial_2X^k\Big|_{\sigma_1=0,\pi}\approx0\ ,\tag{3.81}$$

[24]例えば、string 理論における Dirichlet p-brane に対する Dirac-Born-Infeld action ではたしかに NS-NS 2-form $B_{[2]}^{NSNS}$(の pull-back) と D-brane 上の field strength F が $B_{[2]}^{NSNS}+F$ の組合わせで入る。

と求まる。Poisson 括弧を、次のように定義しよう。

$$
\begin{aligned}
&\left\{X^i(\sigma_1,\sigma_2),P_j(\sigma_1',\sigma_2')\right\}_{\mathrm{PB}}=\delta^i_j\delta^2(\sigma-\sigma')\\
&\left\{X^i,X^j\right\}_{\mathrm{PB}}=\{P_i,P_j\}_{\mathrm{PB}}=0
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

ここで、Hamilton 形式での運動方程式を求めておこう。

$$
\dot{X}^i\equiv\left\{X^i(\sigma),H\right\}_{\mathrm{PB}}=\frac{P^i}{T}+C_{ijk}\partial_1X^j\partial_2X^k. \tag{3.83}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{P}^i\equiv\{P_i(\sigma),H\}_{\mathrm{PB}}=&T\left\{\ddot{X}^i-C_{ijk}\left(\partial_1\dot{X}^j\partial_2X^k+\partial_1X^j\partial_2\dot{X}^k\right)\right\}\\
=&T\left[C_{ijk}\left(\partial_2X^j\partial_1\left(\frac{P^k}{T}+C_{klm}\partial_1X^l\partial_2X^m\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\partial_1X^j\partial_2\left(\frac{P^k}{T}+C_{klm}\partial_1X^l\partial_2X^m\right)\right)\quad+\Delta X^i\right].
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

ただし、Laplacian は $\Delta\equiv\partial_1^2+\partial_2^2$ である。

membrane tension T は、必ず P/T の形でしかでてこないので、以下では式を見易くするために T は省略することにしよう。

3.3 Calculations of Dirac bracket

この節では、Dirac の処方に基づいて、string の場合 (§3.1.2) と同様にして、boundary constraint を解くことを試みる。無限個の拘束が容易にとけた string の場合と異なり、membrane の場合には完全に拘束を解いてしまうことは難しい。従って、何らかの近似を用いて拘束を解けるように変形し、それに基づいて Dirac 括弧を計算することにする。ここでは σ_1、σ_2 方向の oscillator について高次のものを落とす近似を行い、また、C-field については逐次で解を求めていくことにする。

3.3.1 Solving constraints

まず、boundary constraint が作る、無限個の “secondary constraints” を求めよう。もちろん具体的な形は分からないが、次のような考察から、拘束は C の高々3 次であることが分かる。

拘束の “consistency condition” は、拘束自身の時間発展で与えられるから、この無限個の chain は次のように求まる。

$$
\begin{aligned}
\phi_2^i &\equiv \dot{\phi}_1^i = \{\phi_1^i, H\} \\
&= \partial_1 \dot{X}^i - C_{ijk}\ddot{X}^j\partial_2 X^k - C_{ijk}\dot{X}^j\partial_2\dot{X}^k \ , \\
\phi_3^i &\equiv \dot{\phi}_2^i \\
&= \partial_1 \ddot{X}^i - C_{ijk}\left[X^{(3)j}\partial_2 X^k + 2\ddot{X}^j\partial_2\dot{X}^k + \dot{X}^j\partial_2\ddot{X}^k\right] \ , \\
&\vdots \\
\phi_{n+1}^i &\equiv \phi_1^{(n)i} \\
&= \partial_1 X_1^{(n)i} - C_{ijk}\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{n}{\ell} X^{(n+1-\ell)j}\partial_2 X^{(\ell)k}
\end{aligned} \tag{3.85}
$$

ここで、

$$
\phi^{(n)i} \equiv \frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\phi^i \tag{3.86}
$$

を定義した。

次のことに注意しよう。まず、運動方程式 (3.76) および (3.83) より、

$$
\begin{aligned}
X^{(2n)i} &= (\Delta)^n X^i \sim \ C \text{ の } 0 \text{ 次} \\
X^{(2n+1)i} &= (\Delta)^n \dot{X}^i \sim \ C \text{ の } 1 \text{ 次まで}
\end{aligned} \tag{3.87}
$$

これから次のことが分かる。

$$
\phi_{n+1}^i = \begin{cases} \text{高々} C \text{ の } 2 \text{ 次} & (n \text{ が偶数。このとき } n+1-\ell \text{ か } \ell \text{ のどちらか は偶数}) \\ \text{高々} C \text{ の } 3 \text{ 次} & (n \text{ が奇数。このとき } n+1-\ell \text{ と } \ell \text{ は同時に奇数か偶数になる。}) \end{cases} \tag{3.88}
$$

従って、拘束はたかだか C の 3 次までである。

最初の幾つかについて、その具体形を計算しておこう。

$$
\phi_1^i = \partial_1 X^i - C_{ijk}\left(P^j + C_{jlm}\partial_1 X^j\partial_2 X^k\right)\partial_2 X^k\Big|_{\sigma_1=0,\pi} \approx 0 \ , \tag{3.89}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_2^i =& \partial_1 P^i \\
&+ C_{ijk}\left[\partial_1 X^j\partial_1\partial_2 X^k - \partial_2^2 X^j\partial_2 X^k - P^j\partial_2 P^k\right] \\
&+ C_{ijk}C_{jlm}\left[-\partial_2 P^k\partial_1 X^l\partial_2 X^m + P^k\partial_2(\partial_1 X^l\partial_2 X^m)\right] \\
&- C_{ijk}C_{jlm}C_{kop}[\partial_1 X^l\partial_2 X^m\partial_2(\partial_1 X^o\partial_2 X^p)] \ ,
\end{aligned} \tag{3.90}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_3^i =& \partial_1\Delta X^k \\
&+ C_{ijk}[-\Delta P^j\partial_2 X^k + 2\partial_2 P^j\Delta X^k - P^j\partial_2\Delta X^k] \\
&+ C_{ijk}C_{jlm}[2\Delta X^k\partial_2(\partial_1 X^l\partial_2 X^m) - \partial_2 X^k\Delta(\partial_1 X^l\partial_2 X^m) - \partial_2\Delta X^k(\partial_1 X^l\partial_2 X^m)]
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

Solutions of constraint equations　さて、前節で求めた拘束方程式の組を、近似を用いて解いていくことを考えよう。先の解析で明らかなように、拘束はあとから出てくるものほど、σ_1、σ_2 の微分について高次である。従って、この微分を効かなくするような近似について考えていこう。

以下では C の逐次で考えることにする。まず、C の 0 次を考えよう。この時、運動方程式は

$$\Box X^i = 0 \tag{3.92}$$

boundary condition は、

$$\begin{cases} \tau \in (-\infty, \infty) \\ \sigma_1 \in [0, \pi L] \quad \text{Neumann B.C.} \quad \partial_1 X^i\big|_{\sigma_1 = 0, \pi} = 0 \\ \sigma_2 \in [0, 2\pi R] \quad \text{periodic B.C.} \quad X^i(\tau, \sigma_1, \sigma_2) = X^i(\tau, \sigma_1, \sigma_2 + 2\pi) \end{cases} \tag{3.93}$$

であるから、$X^i(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ は次のように mode 展開される。

$$X^i(\tau, \sigma_1, \sigma_2) = (\text{zero-mode}) + \sum_{n \geq 0}^{\infty} \sum_{m \neq 0}^{\infty} X^i_{n,m}(\tau) \cos\left(\frac{n}{L}\sigma_1\right) \exp\left(i\frac{m}{R}\sigma_2\right) \tag{3.94}$$

transverse 方向の zero-mode は、境界条件を考慮して

$$\text{zero-mode:} \quad X_0(\tau, \sigma_1, \sigma_2) = X^i_0 + P^i_0 \tau \tag{3.95}$$

である。X^i_0、P^i_0 はともに定数。

$L \to 0$、$R \to \infty$ の極限を考える。

この時、

$$\begin{cases} \sigma_1 \text{方向:} \quad \text{oscillator} \quad e^{\frac{n}{L}\sigma_1} \quad \text{は落ちる。} \\ \sigma_2 \text{方向:} \quad \partial_2(\sigma_2 \text{ derivative}) \ \sim \mathcal{O}(\frac{1}{R}) \quad \text{の高次は落ちる。} \end{cases} \tag{3.96}$$

従って、σ_1 については **oscillator 部分を無視**し σ_2 部分については $\mathcal{O}((1/R)^3)$ を無視する近似をとると、

$$X^i(\tau, \sigma_1, \sigma_2) \simeq X_0(\tau, \sigma_1, \sigma_2) + \sum_{m=1}^{\infty} X^i_{0,m}(\tau) \exp\left(i\frac{m}{R}\sigma_2\right) \tag{3.97}$$

$$\partial_2^3 X^i = 0 \ , \ \partial_2^2 X^i \partial_2 X^j = 0 \quad \text{etc.}\ldots \tag{3.98}$$

のようになる。このように、$\mathcal{O}(C^0)$ で σ_1 の oscillator part に依存しない部分のみを考えれば、拘束を解くことが可能になる。また、$\mathcal{O}(C^0)$ では zero-mode は (3.95) より、σ_1 依存していない。したがって、$\mathcal{O}(C^0)$ で $X^i(\tau, \sigma) = X^i(\tau, \sigma_2)$ であり、σ_1 には依存していないことに注意しておこう。

次に、この mode 展開の各項に対する C の高次の補正を求めていこう。

X、P に対する補正　まず X、P を C の各次数で展開しよう。但し、以下で考えるのは前述したように (3.97) であり、C の 2 次までを計算することにしよう。

$$\begin{cases} X_0^i(\tau,\sigma_1,\sigma_2) = X_0^{(0)i} + X_0^{(1)i} + X_0^{(2)i} \\ P_0^i(\tau,\sigma_1,\sigma_2) = P_0^{(0)i} + P_0^{(1)i} + P_0^{(2)i} \end{cases} \tag{3.99}$$

これを、先に求めた拘束 ϕ_n^i に代入して各次数にまとめる。(まず ϕ_1、ϕ_2 のみ考える)

$\mathcal{O}(C^1)$

$$\begin{aligned} \phi_1^i &= \partial_1 X_0^{(1)i} - C_{ijk} P_0^{(0)j} \partial_2 X_0^{(0)k} \Big|_{\sigma_1=0,\pi} \approx 0 \\ \phi_2^i &= \partial_1 P_0^{(1)i} + C_{ijk} \left(-P_0^{(0)j} \partial_2 P_0(0)k \right) \Big|_{\sigma_1=0,\pi} \approx 0 \end{aligned} \tag{3.100}$$

ここで、(3.98) および、$\mathcal{O}(C^0)$ で、X^i に σ_1 依存性がないことを用いた。

従って、

$$\begin{cases} X_0^{(1)i}(\tau,\sigma_1,\sigma_2) = X_0^{(1)i}(\tau,\sigma_2) + C_{ijk} P_0^{(0)j} \partial_2 X_0^{(0)k} \cdot \sigma_1 \\ P_0^{(1)i}(\tau,\sigma_1,\sigma_2) = P_0^{(1)i}(\tau,\sigma_2) + C_{ijk} P_0^{(0)j} \partial_2 P_0(0)k \cdot \sigma_1 \end{cases} \tag{3.101}$$

ここで解となる zero-mode が σ_1 のなめらかな関数になるように解いた。右辺の σ_1 に依存しない X_0、P_0 は積分定数として出てくるもので、これが "unconstrained variable" である。

$\mathcal{O}(C^2)$

上で求めた $\mathcal{O}(C^1)$ の結果を代入し、$\mathcal{O}(C^2)$ について求める。

$$\begin{aligned} \phi_1^i &= \partial_1 X_0^{(2)i} - C_{ijk} \left(P_0^{(1)j} + C_{jlm} P_0^{(0)l} \partial_2 P_0^{(0)m} \cdot \sigma_1 \right) \partial_2 X_0^{(0)k} \\ &\qquad - C_{ijk} P_0^{(0)j} \partial_2 \left(X_0^{(1)k} + C_{klm} P_0^{(0)l} \partial_2 X_0^{(0)m} \cdot \sigma_1 \right) \\ &\qquad - C_{ijk} C_{jlm} \underbrace{\partial_1 X_0^{(0)l}}_{=0} \partial_2 X_0^{(0)m} \partial_2 X_0^{(0)k} \cdot \sigma_1^2 \\ &= \partial_1 X_0^{(2)i} - C_{ijk} \left[P_0^{(1)j} \partial_2 X_0^{(0)k} + P_0^{(0)j} \partial_2 X_0^{(1)k} \right] \\ &\qquad - C_{ijk} C_{jlm} \left(P_0^{(0)l} \partial_2 P_0^{(0)m} \partial_2 X_0^{(0)k} - P_0^{(0)l} \partial_2 X_0^{(0)m} P_0^{(0)k} \right) \cdot \sigma_1^2 \end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^i &= \partial_1 P_0^{(2)i} - C_{ijk} \left(P_0^{(1)j} + C_{jlm} P_0^{(0)l} \partial_2 P_0^{(0)m} \cdot \sigma_1 \right) \partial_2 P_0^{(0)k} \\ &\qquad - C_{ijk} P_0^{(0)j} \partial_2 \left(P_0^{(1)k} + C_{klm} P_0^{(0)l} \partial_2 P_0^{(0)m} \cdot \sigma_1 \right) \\ &\qquad - C_{ijk} C_{jlm} \left[-\partial_2 P_0^{(0)k} \underbrace{\partial_1 X_0^{(0)l}}_{=0} \partial_2 X_0^{(0)m} + P_0^{(0)k} \partial_2 \left(\underbrace{\partial_1 X_0^{(0)l}}_{=0} \partial_2 X_0^{(0)m} \right) \right] \cdot \sigma_1^2 \\ &= \partial_1 P_0^{(2)i} - C_{ijk} \left[P_0^{(1)j} \partial_2 P_0^{(0)k} + P_0^{(0)j} \partial_2 P_0^{(1)k} \right] \\ &\qquad - C_{ijk} C_{jlm} \left(P_0^{(0)l} \partial_2 P_0^{(0)m} \partial_2 P_0^{(0)k} - P_0^{(0)l} \partial_2 P_0^{(0)m} P_0^{(0)k} \right) \cdot \sigma_1^2 \end{aligned} \tag{3.103}$$

従ってこの場合の解は、

$$\begin{aligned}X_0^{(2)i}(\tau,\sigma_1,\sigma_2) &= X_0^{(2)i}(\tau,\sigma_2) + C_{ijk}\left[P_0^{(1)j}\partial_2 X_0^{(0)k} + P_0^{(0)j}\partial_2 X_0^{(1)k}\right]\sigma_1 \\ &\quad + C_{ijk}C_{jlm}\left(P_0^{(0)l}\partial_2 P_0^{(0)m}\partial_2 X_0^{(0)k} - P_0^{(0)l}\partial_2 X_0^{(0)m}P_0^{(0)k}\right)\cdot\frac{\sigma_1^2}{2} \\ P_0^{(2)i}(\tau,\sigma_1,\sigma_2) &= P_0^{(2)i}(\tau,\sigma_2) + C_{ijk}\left[P_0^{(1)j}\partial_2 P_0^{(0)k} + P_0^{(0)j}\partial_2 P_0^{(1)k}\right]\sigma_1 \\ &\quad + C_{ijk}C_{jlm}\left(P_0^{(0)l}\partial_2 P_0^{(0)m}\partial_2 P_0^{(0)k} - P_0^{(0)l}\partial_2 P_0^{(0)m}P_0^{(0)k}\right)\cdot\frac{\sigma_1^2}{2}\end{aligned} \tag{3.104}$$

のように求まる。

これらをまとめれば $\mathcal{O}(C^2)$ で

$$\begin{aligned}X^i =& X_0^i + \sigma_1 C_{ijk}P_0^j\partial_2 X_0^k \\ &+ \frac{\sigma_1^2}{2}C_{ijk}C_{jlm}\left[\partial_2 X_0^k P_0^l\partial_2 P_0^m - P_0^k\partial_2(P_0^l\partial_2 X_0^m)\right]\end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}P^i =& P_0^i + \sigma_1 C_{ijk}P_0^j\partial_2 P_0^k \\ &+ \frac{\sigma_1^2}{2}C_{ijk}C_{jlm}\left[\partial_2 P_0^k P_0^l\partial_2 P_0^m - P_0^k\partial_2(P_0^l\partial_2 P_0^m)\right]\end{aligned} \tag{3.106}$$

がえられる。もちろん、意味があるのは C^2 の部分までである。次に、こうして得られた解が残りの constraints の解になっていることを確かめておこう。

3 つ目の拘束 ϕ_3 は、

$$\begin{aligned}\phi_3^i =& \partial_1\Delta X^k \\ &+ C_{ijk}[-\Delta P^j\partial_2 X^k + 2\partial_2 P^j\Delta X^k - P^j\partial_2\Delta X^k] \\ &+ C_{ijk}C_{jlm}[2\Delta X^k\partial_2(\partial_1 X^l\partial_2 X^m) - \partial_2 X^k\Delta(\partial_1 X^l\partial_2 X^m) - \partial_2\Delta X^k(\partial_1 X^l\partial_2 X^m)]\end{aligned} \tag{3.107}$$

である。ここで先の解の形から、∂_1 がかかる度に C の次数が上がり[25]、∂_2 を 3 つ以上含む項を落とすことを思い出せば、$\phi_3 = 0 + \mathcal{O}(C^3)$ が満たされていることが分かる。最初にも述べたように、拘束は先に行くほど微分が高次になるから、残りの拘束が trivial に満たされることも容易に見て取れる。従って我々はこの段階で、$\mathcal{O}(C^2)$ での拘束の解を得たことになる。

3.3.2 Compute the Lagrange brackets

以上で、拘束を解いてしまったので、string のときに倣ってまず Lagrange 括弧を求め、その逆行列をとることで、Dirac 括弧を求めよう。

[25]実際、最低次では σ_1^0、1 次では σ_1^1、2 次では σ_1^2 であった。

Lagrange bracket　まず、Lagrange bracket を構成しよう。(3.105)(3.106) より、Symplectic form を作る。dX^i、dP^i は、

$$\begin{aligned}dX^i =&dX_0^i + \sigma_1 C_{ijk}(dP_0^j\partial_2 X_0^k + P_0^j\partial_2 dX_0^k)\\&+\frac{\sigma_1^2}{2}C_{ijk}C_{jlm}[\partial_2 dX_0^k P_0^l\partial_2 P_0^m + \partial_2 X_0^k dP_0^l\partial_2 P_0^m\\&+\partial_2 X_0^k P_0^l\partial_2 dP_0^m - dP_0^k\partial_2(P_0^l\partial_2 X_0^m) - P_0^k\partial_2(dP_0^l\partial_2 X_0^m + P_0^l\partial_2 dX_0^m)]\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}dP^i =&dP_0^i + \sigma_1 C_{ijk}(dP_0^j\partial_2 P_0^k + P_0^j\partial_2 dP_0^k)\\&+\frac{\sigma_1^2}{2}C_{ijk}C_{jlm}[\partial_2 dP_0^k P_0^l\partial_2 P_0^m + \partial_2 P_0^k dP_0^l\partial_2 P_0^m\\&+\partial_2 P_0^k P_0^l\partial_2 dP_0^m - dP_0^k\partial_2(P_0^l\partial_2 P_0^m) - P_0^k\partial_2(dP_0^l\partial_2 P_0^m + P_0^l\partial_2 dP_0^m)]\end{aligned} \tag{3.109}$$

となる。

これから作られる、Symplectic form は

$$\Omega = -2\int d^2\sigma dX^i\wedge dP^i \tag{3.110}$$

である。ここで、σ_1 に関する積分を行い、また dX、dP の定義にある σ_2 微分を部分積分するために、

$$\int d\sigma_2 dX^i(\sigma_2)\wedge dP^j(\sigma_2) = \int dxdy\delta(x-y)dX^i(x)\wedge dP^j(y) \tag{3.111}$$

と単位行列 $\delta(x-y)$ を挟んで積分を行うことにする[26]。このようにすれば、ω は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}\Omega =& -2\int d^2\sigma dX^i\wedge dP^i\\=&\int dxdy\,\mathbf{L}_{xy}^{ij}\,d\phi^i(x)\wedge d\phi^j(y),\end{aligned} \tag{3.112}$$

となる。$\mathbf{L}$ は、Lagrange 括弧 (から作られる行列) であり、

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & L\\ -L^{\mathrm{T}} & l\end{pmatrix} \tag{3.113}$$

という形になる。ここで、$d\phi = dX_0$ or dP_0 である[27]。右上部分 (L) が $dX_0^i(x)\wedge dP_0^j$ の係数であり右下部分 (l) が $dP_0^i(x)\wedge dP_0^j$ の係数である。左上 (11 成分) が 0 なのは dX、dP の定義式から読み取れる。この下で l は明らかに i,x と j,y の交換に関して反対称行列である。

$$(l)_{xy}^{ij} = -(l)_{yx}^{ji} \tag{3.114}$$

[26] 具体的には後でやる計算をみれば分かる。

[27] ϕ を用いるが、拘束と混同はしないであろう。

また、

$$
\begin{aligned}
dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\mathcal{X}^{ij}_{xy} &= \frac{1}{2}dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\mathcal{X}^{ij}_{xy} - \frac{1}{2}dP_0^j(y)\wedge dX_0^i(x)\mathcal{X}^{ij}_{xy} \\
&= dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\left(\frac{1}{2}\mathcal{X}\right)^{ij}_{xy} \\
&\quad + dP_0^i(x)\wedge dX_0^j(y)\left(-\frac{1}{2}\mathcal{X}^{\mathrm{T}}\right)^{ij}_{xy}
\end{aligned}
\tag{3.115}
$$

であるから、$dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)$ の係数の 1/2 が Lagrange 括弧の L になることが分かる。

さて、ここで $\mathbf{L}$ を C の次数に応じて次のように分ける。

$$
\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(0)} + \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)} \tag{3.116}
$$

こうしてから、C の各次数に応じて Lagrange 括弧を求めて行くことにしよう。

Calculations of $\mathcal{O}(C^0)$　まず、C の 0 次から求める。この時、相当する Symplectic form は

$$
\begin{aligned}
\Omega^{[0]} &= -2\int d\sigma^2 dX_0^i\wedge dP_0^i \\
&= \int dxdy\, -2L\,\delta^{ij}\,\delta(x-y)\,dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)
\end{aligned}
\tag{3.117}
$$

L は σ_1 の積分範囲が 0 から πL までになったことから出てきた、“membrane width” である[28]。従って、$\mathbf{L}^{(0)}$ は、

$$
\mathbf{L}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & L^{(0)} \\ -(L^{(0)})^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.118}
$$

$$
L^{(0)} = -L\delta^{ij}\delta(x-y) \tag{3.119}
$$

のように求まる。この $\mathbf{L}^{(0)}$ の逆行列を

$$
\mathbf{J} = (\mathbf{L}^{(0)})^{-1} = \begin{pmatrix} & -J \\ J & \end{pmatrix}\ ,\ J = (L^{(0)})^{-1} = -\frac{1}{L}\,\delta^{ij}\,\delta(x-y)\ ,\ J^{\mathrm{T}} = J\ . \tag{3.120}
$$

で定義しよう。

先に行く前に、この段階で Dirac 括弧を計算してみよう。C の 0 次では、期待した通りに (normalization を除いて) 元の Poisson 括弧を再現することが分かる。

$$
\left\{X_0^i(x), X_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} = 0 \tag{3.121}
$$

$$
\left\{P_0^i(x), P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} = 0 \tag{3.122}
$$

$$
\left\{X_0^i(x), P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} = \frac{1}{L}\,\delta^{ij}\,\delta(x-y) \tag{3.123}
$$

[28] Lagrange 括弧の成分と同じ記号だが、区別は文脈から明らかなので問題はないであろう。

Calculations of $\mathcal{O}(C^1)$　続いて C の 1 次を計算しよう。symplectic form から[29]、

$$
\begin{aligned}
\Omega^{[1]} =& -2\int d^2\sigma\ \Big[\sigma_1 C_{ikl}\, dX_0^i \wedge (dP_0^k \partial_2 P_0^l + P_0^k \partial_2 dP_0^l) \\
&\qquad\qquad + \sigma_1 C_{ikl} (dP_0^k \partial_2 X_0^l + P_0^k \partial_2 dX_0^l) \wedge dP_0^i\Big] \\
=& -L^2 \int dx dy\, C_{ijl}\ \Big[dX_0^i(x) \wedge dP_0^j(y) \left(-2C_{ijl} P_0^l(x) \partial_x \delta(x-y)\right) \\
&\qquad\qquad - dP_0^i(x) \wedge dP_0^j(y) \partial_x X_0^l\, \delta(x-y)\Big]
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

したがって、

$$
\mathbf{L}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & L^{(1)} \\ -(L^{(1)})^{\mathrm{T}} & l^{(1)} \end{pmatrix}
\tag{3.125}
$$

とすると、

$$
L^{(1)} = L^2 C_{ijl} P_0^l(x) \partial_x \delta(x-y)
\tag{3.126}
$$

$$
l^{(1)} = L^2 C_{ijl} \partial_x X_0^l \delta(x-y)
\tag{3.127}
$$

のように求まる。

Calculations of $\mathcal{O}(C^2)$　さて、続いて C の 2 次を計算しよう。この部分は、非常にややこしいので、幾つかの部分に別けて計算して行くことにする。

まず、$\mathcal{O}(C^1) \wedge \mathcal{O}(C^1)$ の部分を計算しよう。この部分を $\Omega^{[2-1]}$ と呼ぶことにすれば

$$
\begin{aligned}
\Omega^{[2-1]} =& -2\int d^2\sigma\, \sigma_1^2\ C_{ijk} C_{ilm}\, (dP_0^j \partial_2 X_0^k + P_0^j \partial_2 dX_0^k) \wedge (dP_0^l \partial_2 P_0^m + P_0^l \partial_2 dP_0^m) \\
=& -\frac{2L^3}{3} \int d^2\sigma\, C_{ikl} C_{jml} \\
&\times \Big\{ dX_0^i(x) \wedge dP_0^j(y) \partial_x \left(P_0^k(x) \left(2\partial_y P_0^m(y) + P_0^m(y) \partial_y\right) \delta(x-y) \right) \\
&\qquad + dP_0^i(x) \wedge dP_0^j(y) \left[\frac{1}{2} \left(X_0^{k\prime}(x) P_0^{m\prime}(x) - P_0^{k\prime}(y) X_0^{m\prime}(y) \right) \delta(x-y) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \left(X_0^{k\prime}(x) P_0^m(x) + P_0^k(y) X_0^{m\prime}(y) \right) \delta'(x-y) \right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{3.128}
$$

と求まる。したがって、

$$
\mathbf{L}^{[2-1]} = \begin{pmatrix} & L^{[2-1]} \\ -(L^{[2-1]})^{\mathrm{T}} & l^{[2-1]} \end{pmatrix} .
\tag{3.129}
$$

[29]細かい計算は、付録 C.1 に回すことにする。

と定義すれば、

$$
\begin{aligned}
L^{[2-1]} &= -\frac{L^3}{3} C_{ikl} C_{jml} \partial_x \left(P_0^k(x) \left(2\partial_y P_0^m(y) + P_0^m(y) \partial_y \right) \delta(x-y) \right) && (3.130) \\
l^{[2-1]} &= -\frac{1}{3} L^3 C_{ikl} C_{jml} \left(\left(X_0^{k\prime}(x) P_0^{m\prime}(x) - P_0^{k\prime}(y) X_0^{m\prime}(y) \right) \delta(x-y) \right. \\
& \qquad \left. - \left(X_0^{k\prime}(x) P_0^m(x) + P_0^k(y) X_0^{m\prime}(y) \right) \delta'(x-y) \right) && (3.131)
\end{aligned}
$$

次に、$\mathcal{O}(C^0) \wedge \mathcal{O}(C^2)$ と $\mathcal{O}(C^2) \wedge \mathcal{O}(C^0)$ を幾つかの部分に分けて計算する。この部分を $\Omega^{[2-2]}$ と書くことにすると

$$
\begin{aligned}
\Omega^{[2-2]} = -2 \int & d^2\sigma\, \sigma_1^2\ C_{ijk} C_{ilm} \\
\times \Big\{ & \Big[\partial_2 dX_0^k P_0^l \partial_2 P_0^m + \partial_2 X_0^k dP_0^l \partial_2 P_0^m - \partial_2 X_0^k P_0^m \partial_2 dP_0^l \\
& - dP_0^k \partial_2 (P_0^l \partial_2 X_0^m) - P_0^k \partial_2 (dP_0^l \partial_2 X_0^m - P_0^m \partial_2 dX_0^l) \Big] \wedge dP_0^i \\
& + dX_0^i \wedge \Big[\partial_2 dP_0^k P_0^l \partial_2 P_0^m - \partial_2 P_0^k P_0^m \partial_2 dP_0^l + \partial_2 P_0^k dP_0^l \partial_2 P_0^m \\
& - dP_0^k \partial_2 (P_0^l \partial_2 P_0^m) - P_0^k \partial_2 (dP_0^l \partial_2 P_0^m - P_0^m \partial_2 dP_0^l) \Big] \Big\} \qquad (3.132)
\end{aligned}
$$

さて、これを

$$
\Omega^{[2-2]} = \int dx dy \mathbf{L}^{[2-2]} d\phi^i(x) \wedge d\phi^j(y)\ , \qquad (3.133)
$$

と書いたときに

$$
\mathbf{L}^{[2-2]} = \mathbf{M} + \mathbf{N} \qquad (3.134)
$$

と分解しよう。M と N は、それぞれ C^2 の異なった足のつぶし方に対応している。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &\propto C_{ijk} C_{klm} \\
\mathbf{N} &\propto C_{ikl} C_{jml}
\end{aligned}
$$

M と N を以下のようにとる。

$$
(\mathbf{M})_{xy}^{ij} = \begin{pmatrix} & M \\ -M^{\mathrm{T}} & m \end{pmatrix}\ , \qquad (3.135)
$$

$$
(\mathbf{N})_{xy}^{ij} = \begin{pmatrix} & N \\ -N^{\mathrm{T}} & n \end{pmatrix}\ , \qquad (3.136)
$$

このとき、(3.132) からでてくる各項と、M, N, m, n の対応は次の通りである。

$$
\left\{ \begin{array}{ccc}
dX_0^i(x) \wedge dP_0^k(y) & \leftrightarrow & M_{xy}^{ij} \\
dX_0^i(x) \wedge dP_0^l(y) & \leftrightarrow & N_{xy}^{ij} \\
dP_0^i(x) \wedge dP_0^k(y) & \leftrightarrow & m_{xy}^{ij} \\
dP_0^i(x) \wedge dP_0^l(y) & \leftrightarrow & n_{xy}^{ij}
\end{array} \right. \qquad (3.137)
$$

計算は付録 C.1 にまわして、結果のみ記せば

$$M = \frac{L^3}{3} C_{ijk} C_{klm} \left[P_0^l(x) \partial_x P_0^m(x) \delta'(x-y) \right] \tag{3.138}$$

$$m = \frac{L^3}{3} C_{ijk} C_{klm} \partial_y \left(P_0^l(y) \partial_y X_0^m(y) \right) \delta(x-y) \; . \tag{3.139}$$

$$N = \frac{L^3}{3} C_{ikl} C_{jml} \left[P_0^k(x) P_0^m(x) \delta''(x-y) + P_0^{m\prime}(x) \partial_x \left(P_0^k(x) \delta(x-y) \right) \right] \tag{3.140}$$

$$= \frac{L^3}{3} C_{ikl} C_{jml} \left[P_0^k(x) \partial_x \left(P_0^m(x) \delta'(x-y) \right) + P_0^{k\prime}(x) P_0^{m\prime}(x) \delta(x-y) \right] \tag{3.141}$$

$$n = \frac{L^3}{3} C_{ikl} C_{jml} \left[X_0^{k\prime}(x) P_0^m(x) + X_0^{m\prime}(y) P_0^k(y) \right] \delta'(x-y) \tag{3.142}$$

3.3.3 Compute the Dirac brackets

こうして、Lagrange 括弧が求まったので、逆行列を求めることで Dirac 括弧を計算しよう。

Inverse matrices C の逐次で $\mathbf{L}$ を計算したので、逆行列は以下のようにして計算できる。

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(0)} + \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)} \tag{3.143}$$

にたいして、逆行列たる Dirac matrix$\mathbf{C}$ は

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}^{(0)-1} - \mathbf{L}^{(0)-1}(\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)})\mathbf{L}^{(0)-1} + \mathbf{L}^{(0)-1}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(0)-1}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(0)-1} + \mathcal{O}(C^3) \tag{3.144}$$

$$= \mathbf{J} - \mathbf{J}(\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)})\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{J}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{J} + \mathcal{O}(C^3) \tag{3.145}$$

ここで、$\mathbf{J}$ は前に求めた 0 次の Lagrange 括弧の逆行列 $\mathbf{J} = \mathbf{L}^{(0)-1}$ である。

これから Dirac 括弧を求めると $\mathcal{O}(C^2)$ までで、

$$\begin{aligned}
\left\{ X_0^i(x), X_0^j(y) \right\}_{\mathrm{DB}} &= J \left(l^{(1)} \right) J \\
&\quad + J \left(l^{(2)} \right) J - J l^{(1)} J L^{(1)} J - J (L^{(1)})^{\mathrm{T}} J l^{(1)} J \\
&= \frac{1}{L^2} \left(l^{(1)} \right)^{ij}_{xy} \\
&\quad + \frac{1}{L^2} \left(l^{(2)} \right)^{ij}_{xy} + \frac{1}{L^3} \left\{ (l^{(1)})^{il}_{xz} (L^{(1)})^{lj}_{zy} + \left((L^{(1)})^{\mathrm{T}} \right)^{il}_{xz} (l^{(1)})^{lj}_{zy} \right\} + \mathcal{O}(C^3)
\end{aligned} \tag{3.146}$$

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x), P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} &= -J + J\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)J \\
&\quad + J\left((L^{(2)})^{\mathrm{T}}\right)J - J(L^{(1)})^{\mathrm{T}}J(L^{(1)})^{\mathrm{T}}J \\
&= \frac{1}{L}(\mathbf{1})^{ij}_{xy} \\
&\quad + \frac{1}{L^2}\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{ij}_{xy} \\
&\quad + \frac{1}{L^2}\left((L^{(2)})^{\mathrm{T}}\right)^{ij}_{xy} + \frac{1}{L^3}\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{il}_{xz}\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{lj}_{zy} + \mathcal{O}(C^3)
\end{aligned} \tag{3.147}
$$

$$
\left\{P_0^i(x), P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} = 0 \tag{3.148}
$$

のようになる。具体的に Lagrange 括弧を代入するのは §C.2 に回し、結果のみを記す。但し、以下では

$$
LP_0^i \to P_0^i \tag{3.149}
$$

という rescale を行おう。$L \to 0$ の極限においては端点の値である P_0 よりも積分された LP_0 の方が自然な量だからである。実際、こうすることで結果より L を消去できて、

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x), X_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} &= C_{ijl}X_0^{l\prime}(x)\delta(x-y) \\
&\quad - \frac{1}{3}C_{ikl}C_{jml}\Big[\left(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x) - X_0^{m\prime}(y)P_0^{k\prime}(y)\right)\delta(x-y) \\
&\qquad\qquad + \left(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m}(x) + X_0^{m\prime}(y)P_0^{k}(y)\right)\delta'(x-y)\Big] \\
&\quad + \frac{1}{3}C_{ijk}C_{klm}\partial_y\left(P_0^l(y)X_0^{m\prime}(y)\right)\delta(x-y)
\end{aligned} \tag{3.150}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x), P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} =& \delta^{ij}\delta(x-y) + C_{ijl}P_0^l(y)\delta'(x-y) \\
&- \frac{1}{3}C_{ikl}C_{jml}\Big[P_0^k(x)P_0^m(x)\delta''(x-y) \\
&\qquad + 3P_0^k(x)P_0^{m\prime}(x)\delta'(x-y) \\
&\qquad + \left(2P_0^k(x)P_0^{\prime\prime m}(x) + P_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x)\right)\delta(x-y)\Big] \\
&+ \frac{1}{3}C_{ijl}C_{lkm}P_0^k(y)P_0^{m\prime}(y)\delta'(x-y)
\end{aligned} \tag{3.151}
$$

これが、background に constant な C-field があるときの、open membrane に対する Dirac 括弧である。

このように、Dirac 括弧の結果を見る限り、boundary 上の座標を表す場 X には非可換性があらわれていることが分かる。この計算結果については次節で考察を加えよう。

3.4 Conclusion and Discussion

さて、前節までの結果を見れば分かるように、この場合も boundary plane 上の座標 X にはある種の「非可換性」があらわれた。この結果をどのように解釈するべきだろうか。

まず、結果における対称性についてみてみよう。結果から分かるように、C の一次では結果は simple なものであるが、実際には C_{ijk} の浮いている足を見れば分かるようにあまり複雑な結果にはなり得ない。C の一次で、浮いている足に対して X か P が交換関係に顔を出すことは、ある意味予想できたことなのである。C の 2 次になると、あまり明らかな対称性は見て取れない。さらに計算を C の 3 次、4 次と進めることで何らかの規則性があらわれることも予想されるが、計算の量が急速に増えることからこの approach は難しいと思われる。

元々の membrane の作用には豊富な gauge 対称性が存在した。我々は unphysical mode を除くために static gauge を選び、さらに非線形項から来る困難を避けるために作用のなかの高次項を落とすような近似をとった。このために、我々が考察した作用 (3.68) には元からあった対称性が残っていない。ここで、対称性を残すような approach を行えば、何らかの規則性が復活することも考えられよう。

一方、string、membrane での解析を通じて明らかなように、Dirac の処方を用いる限り非可換性の起源はその boundary condition から出る座標の 'mixture" である [15, 20]。すなわち、boundary condition に反対称な tensor 場があらわれることにより、ある座標の共役運動量は他の座標成分にも依存するようになる。

$$
\begin{gathered}
\left\{X^i, P^j\right\}_{\mathrm{PB}} = \delta^{ij} \quad \text{and} \quad C_{ij\circ\bullet\cdots}X^{\circ}P^{\bullet}\cdots+\cdots=0 \\
\Downarrow \\
\left\{X^i, X^j\right\}_{\mathrm{DB}} \not\sim 0
\end{gathered}
\tag{3.152}
$$

これに対して正準交換関係を設定するのであるから、拘束を解いてしまったときに、座標同士の交換関係が 0 でなくなるのもある意味当然であると言える。従って、同様のことは他の p-brane に対しても言えるであろう。boundary に反対称 tensor 場が couple する限り、constant な背景場中での非可換性の出現は避けられないのである。このことは、量子重力の候補として extended object を考えることへの何らかの support なのである、といえば言い過ぎであろうか?

以上のような点をふまえ、membrane 理論と非可換幾何学との関係についての考察は現在も進められている最中である [45]。

第 III 部

A few comments on supermembranes and related topics

この論文の動機はそもそも M 理論と非可換幾何とのつながりを membrane の理論を通じて探ることであった。M 理論と membrane の理論は supermembrane—**space-time の supersymmetry が manifest な membrane 理論**—を通じて深く関係していると信じられている。以下ではこのつながりに関して基本的な部分を概観していきたい。さらに、supermembrane、Matrix 理論に関連した非可換幾何の話を紹介することにする。

4 Construction of the supermembrane in flat superspace

$p+1$ 次元 world-volume Σ から、target space への写像 $X(\xi)$ を、flat superspace $\mathcal{M}_S$ への写像に置き換えることを考えよう。

$$\begin{array}{rccc} & \Sigma & \longrightarrow & \mathcal{M}_S \\ Z^M(\xi): & \xi & \longrightarrow & Z^M(\xi) \end{array} \tag{4.1}$$

ここで、

$$Z^M = (X^\mu, \theta^\alpha) \tag{4.2}$$

である。以下、X 座標の足を $\mu, \nu, \ldots$、spinor の足を $\alpha, \beta, \ldots$ と書く。

local flat coordinates を、

$$Z^A = (X^a, \theta^{\dot{\alpha}}) \tag{4.3}$$

で決める[30]。$a, b, \ldots$ は flat 空間の X の足。$\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ldots$ は flat 空間の spinor の足である。

SUSY-inv. 1-forms を以下で定義する。

$$\Pi^A \equiv dZ^M e_M^A \tag{4.4}$$

flat superspace supervielbein は、成分で書くと、

$$e_M^A = \begin{pmatrix} e_\mu{}^a = \delta_\mu^a & e_\mu{}^{\dot{\alpha}} = 0 \\ e_\alpha{}^a = i\bar{\theta}\Gamma^a & e_\alpha{}^{\dot{\alpha}} = \delta_\alpha^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

のようになる。従って、

$$\Pi^a \equiv dX^a - i\bar{\theta}\Gamma^a d\theta, \quad \Pi^\alpha \equiv d\theta^\alpha \tag{4.6}$$

[30] もちろん、target space に flat superspace を仮定するかぎりこの区別は重要ではない。以下しばらく、曲がった空間でもつかえる notation を展開する。

flat superspace では、

$$\Pi^M = (\delta^\mu_a \Pi^a, \delta^\alpha_{\dot\alpha}\Pi^{\dot\alpha}) \tag{4.7}$$

である。以下では flat な場合に話を限り、両者の足をあまり区別しないことにする。

global SUSY 変換は、以下で定義される。

$$\delta_\epsilon X^\mu = i\bar\epsilon\Gamma^\mu\theta, \quad \delta_\epsilon\theta = \epsilon \tag{4.8}$$

ここで、ϵ は、**constant** な space-time spinor である。(SUSY 変換は curved では一般に superspace の座標変換として複雑なものになることに注意。)

SUSY inv. 1-form では、

$$\delta_\epsilon\Pi^\mu = \delta_\epsilon\Pi^\alpha = 0 \tag{4.9}$$

となり、これからできる量は SUSY 不変である。。もちろんこれが、"SUSY-invariant 1-form" と呼ぶ理由である。

(4.2) で定義される埋め込みでの pull-back は、

$$\begin{aligned} {}^*\Pi^A &= d\xi^i\partial_i Z^M e_M^{\ A} \\ &= d\xi^i\Pi_i^A \end{aligned} \tag{4.10}$$

である。この引き戻しを用いて、*space-time supersymmetric* な world-volume action を作ることができる。

$$\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i\bar\theta\Gamma^\mu\partial_i\theta, \quad \Pi_i^\alpha = \partial_i\theta^\alpha \tag{4.11}$$

supermembrane action　さて、先ほど定義した supersymmetric な埋め込みを決める Π^A の引き戻しを用いて Dirac-Nambu-Goto 作用を「超対称化」しよう。

$$S_D = -T\int d^{p+1}\xi\,\sqrt{-M} \tag{4.12}$$

$$M_{ij} = \Pi_i^\mu\Pi_j^\nu\eta^{\mu\nu}, \quad M = \det M_{ij} \tag{4.13}$$

この部分を作用の「Dirac 部分」と呼ぶ。実はこの作用だけでは、supermembrane の作用としては完全ではなく、この作用は bulk の supersymmetry をすべて壊してしまうことが知られている[31]。

実は、この部分と同じ order で寄与する他の作用が存在するのである。次の rescale を考えよう。

$$X^\mu \to \Omega X^\mu, \quad \theta^\alpha \to \Omega^{1/2}\theta^\alpha \quad \Longrightarrow \quad \Pi^\mu \to \Omega\Pi^\mu, \quad S_D \to \Omega^{(p+1)}S_D \tag{4.14}$$

ここで、この rescale の下で同じ scale 次元を持つ作用は Dirac 部分と同じ寄与を与える。この次元を持ち、Lorentz 不変で supersymmetric な作用がひとつだけ存在する。そのような作用は、Dirac 部分と同じように dynamics に寄与するから、簡単に捨ててしまうわけ

[31] 余談だが、この作用は non BPS D-brane の作用として A. Sen によって提唱されている [22]。

には行かない。それは、coset superspace $\mathcal{M}_S$ = “Super Poincaré” / “Lorentz” に対する “Wess-Zumino”-term である [23]。

これを構成するために、exact な (従って closed な)$(p+2)$-form $h_{[p+2]}$ を用意する。h は exact なので、

$$ {}^{\exists}b_{[p+1]} \quad \text{s.t.} \quad h = db \tag{4.15} $$

この b を用いて Wess-Zumino term は

$$ \begin{aligned} S_{WZ} &= -2T \int_{\Sigma_{p+1}} {}^{*}b_{[p+1]} \\ &= -\frac{2T}{(p+1)!} \int d^{p+1}\xi \ \epsilon^{i_1 \cdots i_{p+1}} b_{i_1 \cdots i_{p+1}} \end{aligned} \tag{4.16} $$

として定義される。ただし、${}^{*}b$ は world-volume への pull-back

$$ {}^{*}b = \frac{1}{(p+1)!} d\xi^{i_1} \cdots d\xi^{i_{p+1}} b_{i_1 \cdots i_{p+1}} \tag{4.17} $$

である。

h を構成してみよう。h は supersymmetric なので invariant 1-form Π^M(今は flat) から出来ていなければならない。scale の制約から

$$ h_{[p+2]} = \frac{i}{2p!} \Pi^{\mu_p} \cdots \Pi^{\mu_1} d\bar{\theta} \Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_p} d\theta \tag{4.18} $$

の形に限られる (係数はあとで便利なように決めた)。

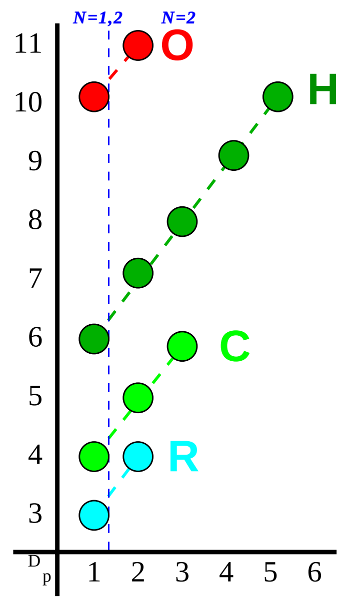

図 6: “brane scan”

実はこのような h が存在できる D と p の組合わせは限られている (“brane scan”)[32]。許される組合わせは右図 6 にある通りである。ここで、$\mathcal{N}=2$ の supersymmetry が許されるのは $p=1$ (string) の場合のみである。残りは (string も含めて)$\mathcal{N}=1$ の supersymmetry を実現できる[33]。

κ-symmetry ここで、Wess-Zumino term を付け加えたことで、作用は重要な対称性—κ-symmetry—を獲得したことを述べよう。まず、Howe-Tucker 型の作用を用いよう。

$$ S = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \ \left\{ \sqrt{-g} \left[g^{ij} M_{ij} - (p-1) \right] + \frac{4c}{(p+1)!} \epsilon^{i_1 \cdots i_{p+1}} b_{i_1 \cdots i_{p+1}} \right\} \tag{4.19} $$

この形から、「1.5 階」形式を用いよう。これは、g と Z を独立変数と思う「1 階」形式と、“embedding equation” $g_{ij} = M_{ij}$ を用いて補助場 g を消去した「2 階」形式との中間にあたるものである。

---

[32] この制限は、実は world-volume supersymmetry の要求である。[24]

[33] $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}$ の記号はそれぞれ対応する division algebra を表す。このように呼ばれる理由について述べる余裕がないのは残念である。興味ある人は [39] を見られたい。

この「1.5 階」形式では “embedding equation” を**暗に**用いるのである。すなわち、g の変分をとる際には通常の chain rule を用いて

$$\delta g_{ij} = \delta Z^M \partial_M g_{ij} \tag{4.20}$$

とする。すなわち、この場合の g は $g_{ij} = g_{ij}(Z)$ と解釈される。この方法の利点は、作用の変分をとる際に

$$\delta g_{ij} \frac{\delta S}{\delta g_{ij}}\bigg|_{g=M} \equiv 0 \tag{4.21}$$

が (運動方程式から) 恒等的に成り立つために、g **の変分をとる必要がない**点にある。さて、以下では次の形の δZ を考えよう。

$$\delta X^\mu = i\bar{\theta}\Gamma^\mu \delta\theta \tag{4.22}$$

$$\downarrow$$

$$\delta \Pi_i^\mu = -2i\delta\bar{\theta}\Gamma^\mu \partial_i \theta, \qquad \delta\Pi_i^\alpha = \partial_i \delta\theta^\alpha \tag{4.23}$$

ここで、$\delta\theta$ はあとで決めることにする。$db = h$ であるから、§A.2.1 の (A.19) より、(表面項を除いて) 次が成り立つ。

$$\delta b = \frac{1}{(p+1)!}\Pi^{A_{p+1}} \cdots \Pi^{A_2}(\delta Z^M e_M^{\ A}) h_{A_1 \cdots A_{p+2}} \tag{4.24}$$

さて、h の non-zero 成分は

$$h_{\alpha\beta\mu_1\cdots\mu_p} = i(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p})_{\alpha\beta} \tag{4.25}$$

であるから、$A_1 = \alpha, A_2 = \beta$ に選んで ($p+1$ 通り)

$$\delta b = \frac{1}{p!}\Pi^{\mu_p} \cdots \Pi^{\mu_1} i d\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\delta\theta \tag{4.26}$$

よって、作用の変分は

$$\delta S = 2iT \int d^{p+1} \left[\sqrt{-g} g^{ij}\Gamma_i + \frac{c}{p!}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \epsilon^{i_1\cdots i_p j} \Pi_{i_1}^{\mu_1} \cdots \Pi_{i_p}^{\mu_p} \Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\right] \partial_j \theta \tag{4.27}$$

ここで、Wess-Zumino 項の -1 の冪は、volume-form を作るときに i の足を並べ替えたことから出た。さらに、添字が $i, j, \ldots$ のガンマ行列は

$$\Gamma_i \equiv \Pi_i^\mu \Gamma_\mu, \quad \Gamma_{ij} = \Pi_i^\mu \Pi_j^\nu \Gamma_{\mu\nu}, \quad \text{etc}\ldots \tag{4.28}$$

で定義され、Clifford 代数

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = g_{ij} \tag{4.29}$$

を満たす。従って、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
g^{jl}\Gamma_l\epsilon^{i_1\cdots i_pk}\Gamma_{i_1\cdots i_pk} &= g^{kl}\epsilon^{i_1\cdots i_pk}\left(\underbrace{\Gamma_{li_1\cdots i_pk}}_{=0}+(p+1)g_{l[i_1}\Gamma_{i_2]i_3\cdots i_pk}\right)\\
&= (p+1)\epsilon^{ji_2\cdots i_pk}\Gamma_{i_2\cdots i_pk}\\
&= (p+1)\epsilon^{i_1\cdots i_pj}\Gamma_{i_1\cdots i_p}
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

これを用いて 2 項目を書き換えると (ここで $\zeta=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$ と置いた)、

$$
\begin{aligned}
\frac{c\zeta}{p!}\epsilon^{i_1\cdots i_pkj}\Gamma_{i_1\cdots i_p} &= c\zeta\eta^{-1}\sqrt{-g}g^{jl}\Gamma_l\frac{\eta}{(p+1)!\sqrt{-g}}\epsilon^{i_1\cdots i_pk}\Gamma_{i_1\cdots i_pk}\\
&= c\zeta\eta^{-1}\sqrt{-g}g^{jl}\Gamma_l\Gamma
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

但しここで、

$$
\Gamma\equiv\frac{\eta}{(p+1)!\sqrt{-g}}\epsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}\Gamma_{i_1\cdots i_{p+1}},\qquad \eta=(-1)^{(p+1)(p-2)/4}
\tag{4.32}
$$

を定義した。この Γ は次を満たす。

$$
\Gamma\Gamma_i=(-1)^p\Gamma_i\Gamma,\qquad \mathrm{tr}\,\Gamma=0\qquad (\text{但し } D\neq p+1 \text{ のとき})
\tag{4.33}
$$

さらに "embedding equation" を用いると、Γ は次の性質を満たすことが分かる。まず、Clifford 代数としての性質と、独立な Γ_i が $p+1$ 個しかないことから、

$$
\epsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}\Gamma_{i_1\cdots i_{p+1}}\cdot\Gamma_{j_1}=(p+1)\epsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}\Gamma_{i_1\cdots i_p}g_{i_{p+1}j_1}
\tag{4.34}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2 &= \frac{\eta^2}{(p!)^2(-g)}\epsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}\Gamma_{i_1\cdots i_{p+1}}\epsilon^{j_1\cdots j_{p+1}}\Gamma_{j_1\cdots j_{p+1}}\\
&= \frac{\eta^2}{(p!)^2(-g)}p!\epsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}\epsilon^{j_1\cdots j_{p+1}}g_{i_{p+1}j_1}g_{i_pj_2}\cdots g_{i_1j_{p+1}}\\
&= \frac{\eta^2}{p!(-g)}(-1)^{\frac{(p+2)(p+1)}{2}}\epsilon^{i_1\cdots i_{p+1}}\epsilon^{j_1\cdots j_{p+1}}g_{i_1j_1}\cdots g_{i_{p+1}j_{p+1}}\\
&= \frac{1}{-g}(-1)^{\frac{(p+1)(p-2)}{2}+\frac{(p+2)(p+1)}{2}}\cdot g\\
&= 1
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

となる。即ち Γ の定義の中の η は、単に 2 乗が 1 になるように置いたものである。これを用いれば作用の変分は、

$$
\delta S=2iT\int d^{p+1}\xi\ \delta\bar{\theta}\left(1-(c\zeta\eta^{-1})\Gamma\right)\left(\sqrt{-g}g^{ij}\Gamma_i\partial_j\theta\right)
\tag{4.36}
$$

したがって、

$$
c=\pm\zeta^{-1}\eta=\pm(-1)^{\frac{-p^2+p-2}{4}}
\tag{4.37}
$$

のときに、

$$\delta\theta = (1 \pm \Gamma)\kappa(\xi) \tag{4.38}$$

と置けば、作用はこの変換の下で不変になる。特に membrane ($p = 2$) の場合は $c = \pm 1$ で、$c = 1$ と選ぶことができる。

大切なのは、(4.35)(4.33) より、$1 \pm \Gamma$ が fermion の自由度を**半分だけ**動かす変換になっていることである。

これまでは具体形を書かなかった b であるが、Evans により、任意の p-brane に対する (translation invariant な) $h = db$ の解 b が計算されている [38]。

$$b = \frac{(-1)^p}{2(p+1)!}(id\bar{\theta}\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\theta)\left[\sum_{r=0}^{p}(-1)^r \begin{pmatrix} p+1 \\ r+1 \end{pmatrix} \Pi^{\mu_p}\cdots\Pi^{\mu_1}(id\bar{\theta}\Gamma^{\mu_r}\theta)\cdots(id\bar{\theta}\Gamma^{\mu_1}\theta)\right] \tag{4.39}$$

これを用いれば、$p = 2$ の supermembrane action が書き下せる。

$$\begin{aligned} S = -\frac{T}{2}\int d^3\xi\ \Big\{ & \sqrt{-g}\left[g^{ij}M_{ij} - 1\right] \\ & +i\epsilon^{ijk}\bar{\theta}\Gamma_{\mu\nu}\partial_i\theta\left(\Pi^\mu_j\Pi^\nu_k + i\Pi^\mu_j\bar{\theta}\Gamma^\nu\partial_k\theta - \frac{1}{3}(\bar{\theta}\Gamma^\mu\partial_j\theta)(\bar{\theta}\Gamma^\nu\partial_k\theta)\right)\Big\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

ここでこの作用には、今まで述べた対称性の他に、新しい “κ-invariance”

$$\delta\theta = (1+\Gamma)\kappa, \qquad \delta X^\mu = i\bar{\theta}\Gamma^\mu(1+\Gamma)\kappa \tag{4.41}$$

が存在して、world-volume 上の fermion の自由度を半分に落している。

ここで、**world-volume 上の**場の自由度について考えてみよう。X^μ の方は bosonic と同じく、$11 - 3 = 8$ 個の自由度がある。fermion の方は、まず 11 次元の Majorana spinor であることと運動方程式で自由度が半分になることから、(Dirac part のみでは)$32 \div 2 = 16$ 個の自由度があった。しかし今や作用には κ-symmetry があり、この自由度はさらに半分になる。$16 \div 2 = 8$。したがって、この場合、world-volume 上で boson と fermion の自由度は等しくなるのである!!

このことは,**world-volume 上の supersymmetry** を示唆しているように思えるが、実際 static gauge を取ることでそうであることが示される[34]。また、この時の world-volume 上の spinor 場は、static gauge での X が並進に対する Goldstone mode であったと解釈されたように、space-time supersymmetry が破れたことに対する Goldstone spinor であると解釈される。従って、κ-symmetry を持つ作用は、fermion を半分だけ gauge away することで、space-time supersymmetry を**部分的に**破っていると解釈して良い。このような状況は PBGS (Partially Broken Global Supersymmetry) がある、といわれる [25]。

[34] 細かい話は [3] や、そこにあげられた reference を見よ。

5 Supermembrane, M(atrix) theory and Noncommutative geometry

5.1 Supermatrix model

ここでは、light-cone gauge での supermembrane 作用と、その行列正則化について簡単に考えよう。この手続きで得られる “supermatrix model” は、現代的な supermembrane の解析のなかで大きな部分を占めている。また、ここで得られた作用は、M-theory の non-perturbative な定義として提案された、Banks-Fischler-Shenker-Susskind の M(atrix) 模型の作用との非常な一致が見られるのである! このことは何を意味するのであろうか?

5.1.1 Supermembranes in light-cone gauge

それでは supermembrane 作用 (4.40) に対して、light-cone gauge を考えよう。但し、以下では 11 次元の Majorana spinor を Θ と書こう。これはあとで gauge 固定した際に、残った $SO(9)$ 対称性の spinor を θ と書くためである。まず、light-cone time と、κ-symmetry の固定を次のように行う

$$X^+(\xi) = \tau, \qquad \Gamma^+\Theta = 0 \tag{5.1}$$

transverse 方向の Lorentz の足を $I, J = 1, \ldots 9$ と書くことにする。この時、§A.3 にある、ガンマ行列の具体的な表示によりすぐに分かることは、

$$\Pi_i^I = \partial_i X^I, \qquad \Pi_i^+ = \delta_i^0, \qquad \Pi_i^- = \partial_i X^- - i\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_i\Theta \tag{5.2}$$

$$\bar{\Theta}\Gamma^\mu\partial_i\theta = 0 \qquad \text{if } \mu \neq - \tag{5.3}$$

$$\bar{\Theta}\Gamma^{IJ}\partial_i\Theta = \bar{\Theta}\Gamma^{+I}\partial_i\Theta = 0 \tag{5.4}$$

である。

まず、Dirac part の方を見てみよう。

$$\begin{aligned} g^{ij}\Pi_i^\mu\Pi_j^\nu\eta_{\mu\nu} &= g^{ij}\Pi_i^I\Pi_j^I - 2g^{0i}\Pi_i^- \\ &= g^{ij}h_{ij} - 2g^{0i}\left(\partial_i X^- - i\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_i\Theta\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

ここで、$h_{ij} = \partial_i X^I \partial_j X^I$。

続いて Wess-Zumino term のほうは, まず括弧の外の項が、

$$\bar{\Theta}\Gamma_{\mu\nu}\partial_i\Theta \to \bar{\Theta}\Gamma_{+I}\partial_i\Theta, \quad \bar{\Theta}\Gamma_{I+}\partial_i\Theta \qquad \text{のみ 0 でない。} \tag{5.6}$$

となる。よって、括弧の中は

$$\begin{gathered} \Pi_j^\mu\Pi_k^\nu \to 2\Pi^+ mu_j\Pi_k^I = 2\delta_j^0\partial_k X^I \\ i\Pi_j^\mu\bar{\Theta}\Gamma^\nu\partial_k\Theta \to 0 \\ -\frac{1}{3}\left(\bar{\Theta}\Gamma^\mu\partial_j\Theta\right)\left(\bar{\Theta}\Gamma^\nu\partial_k\Theta\right) \to 0 \end{gathered} \tag{5.7}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\text{WZ-term} &= i\epsilon^{ijk}\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\partial_i\Theta\cdot 2\delta_j^0\partial_k X^I \\ &= 2i\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\epsilon^{0ki}\partial_k X^I\partial_i\Theta \\ &= 2i\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\left\{X^I,\Theta\right\}_\ell \end{aligned} \tag{5.8}$$

よって、Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -\frac{T}{2}\Big\{&\sqrt{-g}\left[g^{ij}h_{ij} - 2g^{0i}\left(\partial_i X^- - i\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_i\Theta\right) - 1\right] \\ &+2i\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\left\{X^I,\Theta\right\}_\ell\Big\}\end{aligned} \tag{5.9}$$

のように求まる。

bosonic の場合と同じく、Townsend の parametrization を導入するのが便利である。

$$\begin{cases} g^{00} = -\bar{g}^{-1}\omega^2 \\ g^{0r} = -\bar{g}^{-1}\omega u^r \\ g^{rs} = \bar{g}^{rs} - u^r\bar{g}^{-1}u^s \end{cases} \tag{5.10}$$

ここで、$r,s=1,2$ は world-volume の spatial 方向を表す足。Dirac part は $\partial_i X^-$ を $\partial_i X^- - i\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_i\Theta$ に変えただけだから、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{LC}} = \frac{T}{2}\Big[&\omega(D_0X^I)^2 - 2\omega\left(D_0X^- - i\bar{\Theta}\Gamma^- D_0\Theta\right) \\ &-\omega^{-1}\bar{g}\left(\bar{g}^{ab}\partial_a X^I\partial_b X^I - (p-1)\right) - 2i\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\left\{X^I,\Theta\right\}_\ell\Big]\end{aligned} \tag{5.11}$$

のように求まる。共役運動量は、ほとんど bosonic と変わらない。

$$\Pi_\omega = \Pi_r = \Pi_{rs} = 0 \tag{5.12}$$

$$-P^+ = P_- = -\omega T \tag{5.13}$$

$$P^I = \omega T D_0 X^I \tag{5.14}$$

$$S_\alpha = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Theta}^\alpha = iT\omega\left(\bar{\Theta}\Gamma^-\right)_\alpha \tag{5.15}$$

ここで、metric の共役運動量に Π を用いたが、この先では supersymmetric 1-form の意味で Π を用いることはないので混同はないであろう。spinor の共役運動量を求める際には「右微分」の約束を用いた[35]。この系の primary constraints は、

$$\begin{aligned} &\phi_\omega,\ \phi_r,\ \phi_{rs} \qquad (\text{bosonic と同じ}) \\ &\phi_- = P_- + \omega T \approx 0 \\ &\Xi_\alpha = S_\alpha - i\underbrace{T\omega}_{=P^+}\left(\bar{\Theta}\Gamma^-\right)_\alpha \approx 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Ξ は fermion を扱う際に、通常でてくる 2nd. class constraint である。

[35] 記号の約束は [19] を踏襲する。

Hamiltonian 密度は (右微分の約束の下で)、

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= P^I\dot{X}^I + P_-\dot{X}^- + S_\alpha\dot{\Theta}^\alpha + (\text{metric part}) - \mathcal{L} \\ &= \frac{(P^I)^2}{2P^+} - \frac{T}{P^+}u^r\partial_r X^I P^I + Tu^r\left(\partial_r X^- - i\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_r\Theta\right) \\ &\quad + \frac{T^2\bar{g}}{2P^+}\left(\bar{g}^{rs}\bar{h}_{rs} - 1\right) + iT\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\left\{X^I, \Theta\right\}_\ell \end{aligned} \tag{5.17}$$

従って、total Hamiltonian は

$$H_{\mathrm{T}} = \int d^2\sigma\left(\mathcal{H} + \lambda^\omega\phi_\omega + \lambda^a\phi_a + \lambda^{ab}\phi_{ab} + \lambda^-\phi_- + \Lambda^\alpha\Xi_\alpha\right) \tag{5.18}$$

これから secondary constraints を求めれば、ほぼ前と同じく、

$$\chi_r \equiv P^I\partial_a X^I - P^+\left(\partial_r X^- - i\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_r\Theta\right) \approx 0 \tag{5.19}$$

$$\chi_{rs} \equiv \bar{g}_{rs} - \bar{h}_{rs} \approx 0 \tag{5.20}$$

bosonic の場合と同じく "Light-cone gauge" 条件を置こう。

$$\begin{cases} \zeta = \omega - 1 \approx 0 \\ \zeta^r = u^r \approx 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

こうすれば、すべての拘束は 2nd. class になる。ここで、Ξ 以外の拘束を、bosonic の場合に倣って解いてしまおう。

$$\Pi_\omega = \Pi_r = \Pi_{rs} = u^r = 0 \tag{5.22}$$

$$\omega = 1, \qquad \bar{g}_{rs} = \bar{h}_{rs}, \qquad P^+ = T \tag{5.23}$$

$$\partial_r X^- = \frac{1}{P^+}P^I\partial_r X^I + i\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_r\Theta \tag{5.24}$$

残った Ξ は解いてしまうと、$SO(9)$ での covariance を壊してしまうので、これは §B.1.3 で説明した通りに Dirac 括弧を作って扱おう。

まず始めに Poisson 括弧を定義する際には、少し注意しなければならない。まず、X の方は普通に定義する[36]。

$$\left\{X^i(\sigma), P_j(\sigma')\right\}_{\mathrm{PB}} = \delta^i_j\delta^{(2)}(\sigma - \sigma') \tag{5.25}$$

fermion の方は、最初にとった κ-symmetry gauge-fixing より

$$\Gamma^+\Theta = 0 \to \begin{cases} \Theta = \frac{1}{2}\Gamma^+\Gamma^-\Theta \\ S = S\frac{1}{2}\Gamma^+\Gamma^- \end{cases} \tag{5.26}$$

を満たすので、これを尊重するように Poisson 括弧を設定しなければいけない[37]。これは、$\frac{1}{2}\Gamma^+\Gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{16} \end{pmatrix}$ の射影演算子であるから、Poisson 括弧を

$$\{\Theta_\alpha, S_\beta\}_{\mathrm{PB}} = \left(\frac{\Gamma^+\Gamma^-}{2}\right)_{\alpha\beta}\delta^{(2)}(\sigma - \sigma') \tag{5.27}$$

[36] 今や、X^-、P^+ は dynamical でないことに注意しよう。

[37] 簡単のために、κ-symmetry の方をいきなり固定したためである。きちんと gauge 対称性として扱えば、普通に Poisson 括弧を設定しても Dirac 括弧を構成した時点で同じ結果になるはずである。

ととれば良い。この時、

$$
\begin{aligned}
\{\Theta_\alpha, \Xi_\beta\}_{\mathrm{PB}} &= \left(\frac{\Gamma^+\Gamma^-}{2}\right)_{\alpha\beta} \delta^{(2)}(\sigma-\sigma') \\
\{S_\alpha, \Xi_\beta\}_{\mathrm{PB}} &= -iP^+\left(\frac{\Gamma^+\Gamma^-}{2}\mathcal{C}\Gamma^-\right)_{\alpha\beta} \delta(\sigma-\sigma')
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

ここで、Ξ 同士の交換関係を求めておくと、

$$
C_{\alpha\beta} \equiv \{\Xi_\alpha, \Xi_\beta\}_{\mathrm{PB}} = -2iP^+\left(\frac{\Gamma^+\Gamma^-}{2}\mathcal{C}\Gamma^-\right)_{\alpha\beta} \delta^{(2)}(\sigma-\sigma') \not\approx 0 \tag{5.29}
$$

ここでは Dirac 括弧を以下で定義しよう。

$$
\begin{aligned}
\{F,G\}_{\mathrm{DB}} &\equiv \{F,G\}_{\mathrm{PB}} - \{F,\Xi_\alpha\}_{\mathrm{PB}}\,(C^{-1})^{\alpha\beta}\,\{\Xi_\beta,G\}_{\mathrm{PB}} \\
&= \{F,G\}_{\mathrm{PB}} - \frac{1}{-2iP^+}\{F,\Xi_\alpha\}_{\mathrm{PB}}\left(\left(\frac{\Gamma^+\Gamma^-}{2}\mathcal{C}\Gamma^-\right)^{-1}\right)^{\alpha\beta}\{\Xi_\beta,G\}_{\mathrm{PB}}
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

これで、Dirac 括弧を計算できる。結果は、

$$
\begin{aligned}
\left\{X^i(\sigma), P_j(\sigma')\right\}_{\mathrm{DB}} &= \delta^i_j \delta^{(2)}(\sigma-\sigma') \\
\{\Theta_\alpha, S_\beta\}_{\mathrm{DB}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma^+\Gamma^-}{2}\right)_{\alpha\beta}\delta^{(2)}(\sigma-\sigma')
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Dirac 括弧を用いる限り、拘束は等式として扱って良いので、$\Xi = 0$ より

$$
\left\{\Theta_\alpha, \bar{\Theta}^\beta\right\}_{\mathrm{DB}} = \frac{-i}{4P^+}(\Gamma^+)_\alpha^{\ \beta}\delta^{(2)}(\sigma-\sigma') \tag{5.32}
$$

が、もとまる。

これで、拘束はすべて処理したので、light-cone gauge での supermembrane の Hamiltonian を書き下せば、

$$
\mathcal{H} = \frac{(P^I)^2 + T^2\bar{h}}{2P^+} + iT\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\left\{X^I, \Theta\right\}_\ell \tag{5.33}
$$

もちろん今回もこれで終りではない。bosonic の時と同じく、X^- が決まるための「可積分条件」が存在する。

$$
\begin{aligned}
&\text{局所的可積分条件:} \qquad \epsilon^{rs}\partial_r\partial_s X^- = 0 \\
&\text{大域的可積分条件:} \qquad \int d^2\sigma\sqrt{g^{(2)}}\Psi^{(\lambda)r}\partial_r X^- = 0
\end{aligned}
$$

拘束の式 (5.19) を代入して、

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^{rs}\left[\frac{1}{P^+}\partial_r P^I \partial_s X^I + i\partial_r\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_s\Theta\right] \approx 0 \\
&\to \varphi = \left\{P^I, X^I\right\}_\ell + iP^+\left\{\bar{\Theta}\Gamma^-, \Theta\right\}_\ell \approx 0
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

$$
\varphi^\lambda = \int d^2\sigma\sqrt{g^{(2)}}\Psi^{(\lambda)r}\left[\frac{1}{P^+}P^I\partial_r X^I + i\bar{\Theta}\Gamma^-\partial_r\Theta\right] \approx 0 \tag{5.35}
$$

がもとまる。

今回も、global constraint については考えないことにして、Hamiltonian は、

$$H_{\mathrm{LC}} = \int d^2\sigma \left[\frac{(P^I)^2}{2P^+} + \frac{T^2}{4P^+} \left\{X^I, X^J\right\}_\ell^2 + iT\bar{\Theta}\Gamma_{+I} \left\{X^I, \Theta\right\}_\ell + \rho\varphi \right] \tag{5.36}$$

5.1.2 Matrix regularization

さて、bosonic の時のように行列正則化を考えるために、まずは Lagrangian 形式に戻って APD を "gauge 化" しよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= P^I \dot{X}^I + S\dot{\Theta} - \mathcal{H} \\ &= \frac{P^+}{2}(\dot{X}^I)^2 + iP^+\bar{\Theta}\Gamma^-\dot{\Theta} - \frac{T^2}{4P^+}\left\{X^I, X^J\right\}_\ell^2 - iT\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\left\{X^I, \Theta\right\}_\ell \end{aligned} \tag{5.37}$$

ここで、未定乗数を $\rho = 0$ に置いている。gauge 化は、bosonic の場合と全く同じく、gauge 場 A_0 と「共変微分」D_0 を導入すれば良い。

$$D_0 \equiv \partial_\tau - \{A_0, \cdot\}_\ell \tag{5.38}$$

を定義して、

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{APD}} &= \int d\tau d^2\sigma \mathcal{L}_{\mathrm{APD}} \\ \mathcal{L}_{\mathrm{APD}} &= \frac{P^+}{2}(D_0 X^I)^2 + iP^+\bar{\Theta}\Gamma^- D_0\Theta - \frac{T^2}{4P^+}\left\{X^I, X^J\right\}_\ell^2 - -iT\bar{\Theta}\Gamma_{+I}\left\{X^I, \Theta\right\}_\ell \end{aligned} \tag{5.39}$$

この場合も、(temporal gauge での) A_0 の運動方程式は、"Gauss-law constraint"

$$P^+\left\{\dot{X}^I, X^I\right\}_\ell + iP^+\left\{\bar{\Theta}\Gamma^-, \Theta\right\}_\ell = 0 \tag{5.40}$$

を導く。

$SO(9)$ **形式**　それではここで得られた Hamiltonian と、Lagrangian を $SO(9)$ のガンマ行列と spinor を用いて書き直してみよう。

$$\Theta = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{P^+}}\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

これに対し、具体的なガンマ行列の表式

$$\Gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\cdot\mathbf{1}_{16} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{+I} = -\Gamma^{-I} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}\gamma^I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

を代入すれば、

$$\mathcal{H}_{\mathrm{LC}} = \frac{1}{P^+}\left[\frac{(P^I)^2}{2} + \frac{T^2}{4}\left\{X^I, X^J\right\}_\ell^2 - i\frac{T}{2}\theta\gamma^I\left\{X^I, \theta\right\}_\ell\right] \tag{5.43}$$

$$S_{\rm APD} = \int d\tau d^2\sigma \mathcal{L}_{\rm APD}$$
$$\mathcal{L}_{\rm APD} = \frac{P^+}{2}(D_0 X^I)^2 + \frac{i}{2}\theta D_0 \theta - \frac{T^2}{4P^+}\left\{X^I, X^J\right\}_\ell^2 + i\frac{T}{2P^+}\theta\gamma^I\left\{X^I,\theta\right\}_\ell \tag{5.44}$$

今の $SO(9)$ のガンマ行列の convention では、$\mathcal{C}=1$ すなわち、$\bar{\theta}=\theta$ であることに注意しよう。

行列正則化　それでは、この作用と Hamiltonian を、行列正則化してみよう。§2.3 で行ったように、次の置き換えを行えば良い。

$$-2\pi i\,[\cdot,\cdot] \overset{\text{large } N}{\longrightarrow} \{\cdot,\cdot\} \tag{5.45}$$
$$\frac{1}{N}\,\mathrm{tr} \overset{\text{large } N}{\longrightarrow} \int d^2\sigma \tag{5.46}$$

そうすれば、まず作用は

$$S_{\rm SM} = \int d\tau \frac{1}{N}\left[\frac{P^+}{2}(D_0X^I)^2 + \frac{(\pi NT)^2}{4P^+}\left[X^I,X^J\right]^2 + \frac{i}{2}\theta D_0\theta + \frac{\pi NT}{P^+}\theta\gamma^I\left[X^I,\theta\right]\right] \tag{5.47}$$

共変微分と運動量は

$$\frac{1}{2\pi N}(A_0(\tau))_{\rm matrix} \overset{\text{large } N}{\longrightarrow} A_0(\tau,\sigma)$$
$$D_0 \equiv \partial_0 + i\left[A_0,\cdot\right] \tag{5.48}$$
$$N(P)_{\rm matrix} \overset{\text{large } N}{\longrightarrow} P(\tau,\sigma) \tag{5.49}$$

のように対応し、よって、Hamiltonian は、

$$H_{\rm SM} = \frac{N}{P^+}\left[\frac{(P^I)^2}{2} - (\pi NT)^2\left[X^I,X^J\right]^2 - \frac{\pi T}{N}\theta\gamma^I\left[X^I,\theta\right]\right] \tag{5.50}$$

こうして得られた作用と Hamiltonian が、light-cone gauge での supermembrane の量子論を表すと考えられている “Supermatrix model” である [31]。

5.1.3 Relation to BFSS M(atrix) theory

こうして得られた supermatrix model は、実は Banks-Fischler-Shenker-Susskind によって提案された、M-theory の非摂動的定義である、M(atrix) 理論[38]に深い関係があると思われている。以下ではこのことを説明しよう[39]。

---

[38] M-theory を表す Matrix 理論という意味で、このように括弧をつける。面倒なので以下往々にして括弧は略す。

[39] 但し以下の説明は Matrix 理論の解説としては全く不十分である。ここでは駆け足で、Matrix 理論の作用にたどり着くためにいろいろな部分を端折ってしまっている。注意して欲しい。

BFSS Matrix theory　まず、BFSS の Matrix 理論について概略のみを説明しよう。まず 11 次元 SUSY 代数を考えよう。

$$\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\right\} = 2(\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} P^\mu \tag{5.51}$$

この代数に対し、11 方向を Kaluza-Klein compact 化し、10 次元の type IIA SUSY 代数を導けば、

$$\begin{aligned} &\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\right\} = 2(\Gamma_M)_{\alpha\beta} P^M + 2(\Gamma_{11})_{\alpha\beta} Z \\ \overset{\text{KK reduction}}{\Longrightarrow} &\left\{Q_\alpha^{(i)}, \bar{Q}_\beta^{(j)}\right\} = 2\delta^{ij} (\mathcal{P}^{(i)}\Gamma_M)_{\alpha\beta} P^M + 2\epsilon^{ij} (\mathcal{P}^{(i)})_{\alpha\beta} Z \end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\mathcal{P}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1+\Gamma_{11}\right), \quad \mathcal{P}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(1-\Gamma_{11}\right) \tag{5.53}$$

ここで、$M = 0, \ldots 9$ である。type IIA の言葉でみると、Z は central charge であり、これに対応する charged state は D0-brane である。ところがこれは、11 次元の言葉でみれば 11 方向の運動量 P^{11} と解釈される。実際、次元を持つ量の間の関係式[40]

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{type IIA string tension:} & \ell_s \\ \text{type IIA string coupling:} & g_s \\ \text{11 方向の半径:} & R = \ell_s g_s \\ \text{11 次元 Plank length:} & \ell_p, \quad \ell_p^3 = \ell_s^3 g_s = \ell_s^2 R \\ \text{Kaluza-Klein momemtum:} & P^{11} = \frac{N}{R} = \frac{N}{\ell_s g_s} = N\frac{T_{D_0}}{g_s} \\ \text{D}p\text{-brane tension:} & T_{D_p} = \frac{1}{(2\pi)^p \ell_s^{p+1}} \end{array} \right. \tag{5.54}$$

をみれば、たしかに D0-brane は 11 方向の KK 運動量に結合する charged state と見なせることが分かる。

ここで、11 方向の IMF(infinite momentum frame) を考えよう。この時 $P^{11} > 0$ となるモードのみが decouple せずに生き残る。ここでさらに、decompactified limit ($R \to \infty$) をとることを考えると同時に $N \to \infty$ としなければならない。よって、string+ 無限個の D0-brane という系は、compact 化していない M-theory の自由度 (の少なくとも一部) を担っていると考えられる。BFSS の主張は、**実は、M-theory の自由度はこれで尽くされる**というものである。従って、この無限個の D0-brane の有効理論を考えると IMF での M-theory が記述できると言うことである。

D0-brane effective action　良く知られているように [41]、N 枚の重なった Dp-brane の有効作用は、$1+9$ 次元 $U(N)$ Super Yang-Mills 理論を $1+p$ 次元へと dimensional reduction した理論として与えられる。

$$\begin{aligned} S_{\text{SYM}} = \int d^{p+1}\sigma \ \text{Tr}\Big[-\frac{T_{D_p}(2\pi\ell_s^2)^2}{4g_s} \Big(F_{mn}F^{mn} + 2D_m A_I D^M A^I - \left[A^I, A^J\right]^2 \Big) \\ + i\bar{\Psi}\Gamma^M D_m \Psi - \bar{\Psi}\Gamma^I \left[A^I, \Psi\right] \Big] \end{aligned} \tag{5.55}$$

[40] brane tension などの convention については [40] で $\alpha' = \ell_s^2$ と置いたものを採用している。

ここで、$m, n = 0, \ldots, p$ は、brane に平行な方向、$I, J = p+1, \ldots, 9$ は、brane に垂直な方向を表す。$p = 0$ の場合をとれば、BFSS の作用が得られる。

$$S_{\rm BFSS} = \int d\tau \, {\rm Tr} \left[\frac{T_{D_0}}{g_s} \left(\frac{1}{2}(D_0 X^I)^2 + \frac{1}{4(2\pi \ell_s^2)^2} \left(\left[X^I, X^J \right] \right)^2 \right) + i\psi D_0 \psi + \frac{1}{2\pi \ell_s^2} \psi \gamma^I \left[X^I, \psi \right] \right] \tag{5.56}$$

ここで、ψ は dimensional reduction によってでてきた $SO(9)$ Majorana spinor である。(5.54) を用いて書き直せば、

$$S_{\rm BFSS} = \int d\tau \, {\rm Tr} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{1}{2}(D_0 X^I)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{2\pi \ell_p^3} \right)^2 \left(\left[X^I, X^J \right] \right)^2 \right) + i\psi D_0 \psi + \frac{R}{2\pi \ell_p^3} \psi \gamma^I \left[X^I, \psi \right] \right] \tag{5.57}$$

これが、BFSS Matrix 理論の作用である [42]。

Supermatrix model and BFSS Matrix theory ここで、先に得られた supermatrix model の作用 (5.47) と BFSS Matrix theory の作用 (5.57) の関係について述べよう。supermembrane の側で、11 方向を compact 化し、X^{11} 方向への IMF を取ることを考えよう。この時、IMF と light-cone との関係で良く知られているように、X^- 方向の半径を R とすることに対応し、共役運動量 P^+ は $P^+ = m/R$ と量子化される。ここで、m はある整数。対応をみるために、これを D0-brane の個数 N と等しく置こう。

$$P^+ = \frac{N}{R} \tag{5.58}$$

そしてさらに、supermatrix 理論の gauge 群も、$U(N)$ に取ることにしよう。最後に、supermembrane の tension を M2-brane tension に等しく取ろう。

$$T = T_{M2} = \frac{1}{(2\pi)^2 \ell_p^3} \tag{5.59}$$

そうすれば、supermatrix の作用 (5.47) は

$$S_{\rm SM} = \int d\tau \frac{1}{R} \left[\frac{1}{2}(D_0 X^I)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{2\pi \ell_p^3} \right)^2 \left[X^I, X^J \right]^2 + \frac{1}{2N} \left(\frac{i}{2} \theta D_0 \theta + \frac{R}{2\pi \ell_p^3} \theta \gamma^I \left[X^I, \theta \right] \right) \right] \tag{5.60}$$

これは、fermion の overall の規格化を除いて、BFSS の作用 (5.57) と一致する!

この二つの作用は、起源とするものが全くの別物—supermembrane の light-cone gauge と D0-brane の IMF での有効作用—であったことから、この一致は非常に興味深い。これらは共に M-theory を通じて関係していると思われるが、この結果はこの関係の一つのあらわれとみることもできる。

5.2 Matrix theory in a Constant C-field Background

ここで、これまでに関連した最近の論文として、[35] を紹介する。ここではまず、C-field がある背景中での closed membrane の行列正則化から、constant な C-field がある場合の BFSS M(atrix) 理論を導く。この時、brane 解を考えることで、自然に非可換幾何学が導かれることをみる。

以下では fermion の存在は本質的ではないので、bosonic part のみ考えることにしよう[41]。まず、membrane と C-field との coupling は次のように与えられるとしよう。

$$S_1 = \frac{1}{3!}\int C_{\mu\nu\rho} dX^\mu \wedge dX^\nu \wedge dX^\rho \tag{5.61}$$

C が constant な場合、この項は全微分になる。従って運動方程式は何も変わらない[42]。しかし、量子論的な計算をする場合には全微分項を簡単に落すわけには行かない。例えば、適当な state 間の相関関数を求めてみよう。

$$\langle \Psi(t_2)|\Psi(t_1)\rangle = \int [DX] e^{i(S_0+S_1)} \tag{5.62}$$

ここで、S_0 は C-field がないときの membrane 作用である。S_1 は total derivative であるから、

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\int d^2\sigma C_{\mu\nu\rho} X^\mu \left\{X^\nu, X^\rho\right\}_\ell (t_2) - \int d^2\sigma C_{\mu\nu\rho} X^\mu \left\{X^\nu, X^\rho\right\}_\ell (t_1)\right) \tag{5.63}$$

この項の効果は、各波動関数を "renormalize" する。

$$\hat{\Psi}(t_1) = U\Psi(t_1) \tag{5.64}$$

$$U = \exp\left(\frac{-i}{2}\int d^2\sigma C_{\mu\nu\rho} X^\mu \left\{X^\nu, X^\rho\right\}_\ell\right) \tag{5.65}$$

BFSS の言葉 (以下 $D0$-brane picture) では、

$$U = \exp\left(-\pi C_{\mu\nu\rho}\, \mathrm{tr}\, X^\mu \left[X^\nu, X^\rho\right]\right) \tag{5.66}$$

operator の立場でみれば、この変換は operator に対する「相似変換」とみることができる。

$$\mathcal{O} \to \hat{\mathcal{O}} \tag{5.67}$$

この作用が、矛盾無く定義できるときには、何も物理は変わらない。この操作が、何らかの意味で "singular" なときに新しい現象が起こるのである。

Toy model　先に定義した U は、C_{-ij} 成分が 0 であれば特異ではない。もし C_{-ij} 成分が 0 でなければ、U のなかにあらわれる X^- が拘束条件を通じて P^i を含むために、この変換がうまく定義されなくなる場合がある。これは、物理的 Hilbert 空間がある **constraint によって制限**されていて、この constraint と、U の作用が可換でない場合に起こる。

[41] 従って、我々は notation を bosonic の場合に戻して使うことにする。

[42] この辺の事情は §3.2 での解析で触れた通りである。今の場合は、**閉じた** membrane を扱うことに注意しよう。

どのようなことが起こるか、toy model を作ってみてみよう。2×2 行列 X^i を用意し、$U = \exp(i\,\mathrm{tr}(\alpha \sum_i P_i))$ で unitary 変換することを考えよう。ここで α は constant Hermitian matrix である。この変換は、X を shift する働きがある。

$$(X^i)_{ab} \to (\hat{X}^i)_{ab} = (X^i)_{ab} + (\alpha)_{ab} \tag{5.68}$$

さて、ここで commutative limit $(X^i)_{12} = (X^i)_{21} = 0$ を取ることを考えよう。この時、X^i は可換になり、この constrained matrix model は普通の可換な幾何学の点を定義する。ところが、この limit をとったあとでは、明らかに先ほどの unitary 変換は well-defined ではない。逆に相似変換をしてから、この constraint を課すことを考えよう。この時は、我々は**新たな** matrix model を手にする。このとき $\left[\hat{X}^i, \hat{X}^j\right]$ は、任意の α に対しては可換でなくなる。あとで実際に扱う例においても、この toy model と同様の状況が起きていることを見ることになるであろう。

Noncommutativity　それでは、この相似変換から、非可換性が導かれることを説明しよう。まず、C-field は、C_{-ij} 成分のみが値を持つとしよう。この時に、Matrix 理論の brane 解を考えると、この解は非可換な座標で記述されるものになる。ここで、$i, j, \cdots$ の足は、brane の垂直な方向を表すとする。D0-brane 系に移る前には、U は、

$$U = \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2\sigma\; C_{-ij}\left\{X^-, X^i\right\}_\ell X^j\right) \tag{5.69}$$

であった。ここで、constraint を用いると (fermion は無視していることを思い出して)

$$\left\{X^-, X^i\right\}_\ell = D_0 X^k \left\{X^k, X^i\right\}_\ell \tag{5.70}$$

ここで、

$$-2\pi i\,[\cdot,\cdot] \xrightarrow{\text{large } N} \{\cdot,\cdot\} \tag{5.71}$$

$$\frac{1}{N}\,\mathrm{tr} \xrightarrow{\text{large } N} \int d^2\sigma \tag{5.72}$$

によって、Matrix に移れば

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(-\pi C_{-ij}\,\mathrm{tr}\left[X^k, X^i\right] X^j D_0 X^k\right) \\ &\to \exp\left(\frac{1}{2} C_{-ij}\,\mathrm{tr}\left[X^k, X^i\right] X^j D_0 X^k\right) \end{aligned} \tag{5.73}$$

最後の行では、あとの式を見易くするために C の規格化を変えた。さて、ここで $D_0 X^k$ を共役運動量 $P^k = \frac{1}{R} D_0 X^k$ に変えれば、I は演算子として次のよう形になる。

$$U = \exp(-I), \qquad I = \frac{1}{2}\Theta_{ij}\,\mathrm{tr}\left[X^i, X^k\right] X^j P^k \tag{5.74}$$

ここで、Θ を $\Theta_{ij} = R C_{-ij}$ で定義した。

Brane solution　以下ではD-braneが存在する状況を考える[43]。D-braneはC_{-ij}が0でないi,jの方向に広がっているとしよう。従って、Cに平行な方向にT-dualを取って、

$$X_i \to iD_i = i\partial_i + A_i \tag{5.75}$$

とする[44]。Dp-brane上のgauge場については考えないので$A_i = 0$としておこう。さらにこの方向の座標をσ^iと書こう。このときtraceはσ積分に置き換えられる。

見易いように、Iを次のように書く。

$$I = -\frac{i}{2}\Theta_{ij}\,\mathrm{tr}\left[X^i, X^\mu\right] X^j \frac{\delta}{\delta X^\mu} \tag{5.76}$$

μは、1から9の任意の方向を表す。

さて、それではこのC_{-ij}があることによる効果を見るために、次の相似変換を考える。

$$\hat{\mathcal{O}} = U^\dagger \mathcal{O} U \tag{5.77}$$

考えるべきoperatorはmatrix X^μである。まず、$X^\mu = \Phi$と書けば、(5.77)より、直ちに

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi} = e^I \Phi e^{-I} &= \Phi + [I,\Phi] + \frac{1}{2}[I,[I,\Phi]] + \cdots + \frac{1}{n!}[I,\ldots,[I,[I,\Phi]]] + \cdots \\
&= \Phi + \left(\frac{-i}{2}\Theta_{ij}\right)\left[X^i,\Phi\right] X^j + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{2}\Theta_{i_1 j_1}\right)\cdots\left(\frac{-i}{2}\Theta_{i_n j_n}\right)\left[X^{i_1},\ldots,\left[X^{i_n},\Phi\right]\right] X^{j_1}\cdots X^{j_n} + \cdots
\end{aligned} \tag{5.78}$$

となる[45]。

D-brane解を考えることにし、$X_i = i\partial_i$とすれば、

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi} &= U^\dagger \Phi U \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\Theta_{i_1 j_1}\right)\cdots\left(\frac{i}{2}\Theta_{i_n j_n}\right)\left(\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}\Phi(\sigma)\right)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_n} \\
&= \Phi\left(\sigma_i + \frac{i}{2}\Theta_{ij}\partial_j\right) \\
&= \Phi(\hat{\sigma}_i)
\end{aligned} \tag{5.79}$$

となる。ここで、$\hat{\sigma} = \sigma_i + \frac{i}{2}\Theta_{ij}\partial_j$である。従って、D-braneの上では、相似変換を行ったあとは、この$\hat{\sigma}$を「座標」と見なすべきである。そしてこの$\hat{\sigma}$は、非可換な交換関係

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = i\Theta_{ij} \tag{5.80}$$

をみたす。従って、**D-braneの上の理論は、非可換なものになる!** この非可換性はopen stringでの考察で得たものとconsistentであるが[46]、この場合には、string的な考察は何も行わなかったことは注目すべきである。

[43] この辺りの詳しい話は[43]を参照してください。
[44] 以下では$2\pi\alpha' = 1$に取っている。
[45] 計算について。行列の微分に関して$A\partial_C[B,C] = [B,A]$
[46] 係数は一致するようにCの規格化を設定した。iは量子化の際にでる普通のものである。

Moyal product　先ほど得た表式を次のように書き直してみよう。

$$\Phi(\hat{\sigma}_i) = \sum \frac{1}{n!}\partial^n \Phi(\sigma)(\Delta\sigma)^n \tag{5.81}$$

ここで、$\Delta\sigma_i = \sigma'_i - \sigma_i = \frac{i}{2}\Theta_{ij}\partial_j$ である。これに、Fourier 変換

$$\Phi(\sigma) = \int dk \tilde{\Phi}(k) e^{ik^i\sigma_i} \tag{5.82}$$

を代入すれば、

$$\begin{aligned}\Phi(\hat{\sigma}) &= \int dk \tilde{\Phi}(k) e^{ik^i\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}k^i\Theta_{ij}\partial_j} \\ &= \int dk \tilde{\Phi}(k) e^{ik^i\hat{\sigma}_i}\end{aligned} \tag{5.83}$$

となる。ただし $k^i\sigma_i$ と $k^i\Theta_{ij}\partial_j$ が Θ の反対称性のために可換なことを用いた。

これにより、いわゆる "star product" を

$$(f * g)(\sigma) \equiv e^{\frac{i}{2}\Theta_{ij}\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\frac{\partial}{\partial\sigma'_j}} f(\sigma)g(\sigma')\Big|_{\sigma=\sigma'} \tag{5.84}$$

で定義する。Fourier 変換して、

$$\begin{aligned}\widetilde{f * g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int d\sigma\ (f*g)(\sigma)e^{-ik\cdot\sigma} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int d\sigma dk' dk''\ \tilde{f}(k')\tilde{g}(k'')e^{-\frac{i}{2}\Theta_{ij}k'_i k''_j} e^{i(k'+k''-k)\sigma} \\ &= \int dk'\ \tilde{f}(k')\tilde{g}(k-k')e^{-\frac{i}{2}\Theta_{ij}k'_i(k-k')_j}\end{aligned} \tag{5.85}$$

となることを用いれば、

$$f(\hat{\sigma})g(\hat{\sigma}) = (f*g)(\hat{\sigma}) \tag{5.86}$$

が成り立つ。これから、star 積 (Moyal product) は、Matrix の視点からは自然に出てくるものであることが分かる。

A puzzle　さて、最後に少し注意すべき点を見ておこう。まず、元々は可換であった 2 つの場 $\Phi_1(\sigma)$ と $\Phi_2(\sigma)$ を用意しよう。すると、相似変換を施した $\hat{\Phi}_1$ と $\hat{\Phi}_2$ は、互いに可換でなくなる。しかし、元の定義を naive に用いれば

$$\left[\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2\right] = U^\dagger \left[\Phi_1, \Phi_2\right] U = 0 \tag{5.87}$$

となり、一見矛盾した関係が得られる。

なぜこのようなことが起こるのであろうか?

実は我々は、元々行列であった Φ_1, Φ_2 を σ の関数に変えるときに (T-dual)、無限に多くの自由度を落としていたのである。実際、一般に元の行列 Φ_1, Φ_2 は互いに可換でない。即ち、我々は T-dual を取るときに物理的な Hilbert 空間をその部分空間へ reduce してお

り、この上で相似変換が ill-defined であるために、このような一見矛盾した結果が得られたのである。

この点が、最初に述べた簡単な toy model と共通する部分なのである。

言い換えれば、brane 解を考えることでこのような reduce が起きたのであるから、このことが本来は total derivative であった constant C_{-ij}-field の効果が、brane 解に対してその上の物理的内容を変えたと言える。

ここでの解析は、閉じた (closed) membrane に対してのものであるために、直接に我々の先の解析とは結び付かない。実際、non-zero な C_{ijk} の場は、このような singularity を持ち得ず、ここで見たような「非可換性」の起源になり得ないことが分かる[47]。

しかし、Matrix 理論を membrane の行列正則化という観点で捕らえたこの解析が、string の非可換性を再現したことは興味深いと思われる。

[47] C_{ijk} の効果は、運動量を shift して、spectrum を変えてしまうだけである。

第IV部
Conclusion

以上、この論文を通じ最近の非可換幾何と、膜の理論とのつながり、および membrane を始めとする extended object の基本的な事実について概観してきた。

特に中心となる結果として、背景に constant な 3 階反対称テンソル場 C があるときの bosonic open membrane の boundary の交換関係を計算した。ここで用いたのは、最近の string での非可換幾何の発展のなかで用いられた、境界条件に対する Dirac 拘束条件としての取り扱いである。これを用いて拘束を C の 2 次まで解くことで、非可換な交換関係が得られることを確認することができた。

これまでの解析を見る限り、string と同様な非可換性を membrane を含む extended object が持ち得ると言うことは確かめられたように思う。但しこれまでの解析は非常に限られたものであり、現時点では、string のような豊富な内容を持った物理には展開して行きがたいように思える。やはり続く目標としては、膜の理論の持つ非可換性について、membrane 特有の現象を見つけることや、string での結果との定量的な比較ができる段階を目指したい。

M-theory における非可換性、という大目標に達するには様々な breakthrough がこれからも必要になるようであろう。以前から知られている Matrix 理論を経た approach とは別に、今回のような membrane 理論としての approach がどれだけのことを言えるかは未知であるが、地道に進めれば、おもしろい発見ができるのではないだろうか。

また、membrane のような高次の extended object の振る舞いにも興味深いところがありそうである。最近でも supermembrane において様々な発展がみられた。string 理論と相互に刺激を試合、また様々な点で絡み合いながら、この辺りの分野はこれからも、おもしろい話題を提供してくれるであろうと予感させてくれる。

M-theory、supermembrane、非可換幾何学と、皆 string 理論の根幹に関係した重要な分野である。これらの境界領域を探る今回のような解析はさらに重点的に押し進める価値のあるものであろう。

あとがき、および謝辞

だいぶんページもかさんできたのでこの辺で終わりたいと思います。当初の計画にあった話、特に open supermembrane や κ-symmetry と background の関係、M5-brane 作用の導出など、書きたいことはたくさんあったのですが、とても手が回らずに削ることになりました。

この修士論文の中心となる解析は笹倉さんとの議論の賜物です。遅々として計算が進まず、結局この論文でもはっきりとした「落ち」がついていない状態になってしまいましたが、そんな私にいろいろ親切に教えてくださり、指導してくれた笹倉さんに心から感謝します。また、membrane の基本的な話については、研究室の M2 でやったゼミからたくさんのことを学びました。いろいろと議論してくれた同級生たちにも感謝! 東大素研の上杉君は、同じく membrane をテーマにした修士論文を書くと言うことで、いろいろ役に立つ review なんかを教えてくれました。どうもありがとう。

最後に、修士論文を書き始める前にも、そして書いている最中にもいろいろ親切にしてくださった、素粒子論研究室の皆様に、ありがとうを言って筆を置きたいと思います。

A Notation

以下では本文中で用いた notation について、簡単にまとめる。

A.1 Bosonic Membranes

Flat Minkowski D 次元の flat Minkowski 空間中の p-brane を考える場合。

$$\text{Flat Minkowski metric} \qquad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,\overbrace{+,\ldots,+}^{D-1}) \tag{A.1}$$

$$\text{World-volume metric} \qquad h^{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta = \overbrace{0,1,\ldots,p}^{p+1}) \tag{A.2}$$

$$\tag{A.3}$$

である。

A.1.1 Light-cone gauge

light-cone 座標は次のように取る。

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^0 \pm X^{D-1}\right) \tag{A.4}$$

このとき metric は

$$\begin{cases} \eta_{ij} = \delta_{ij} & (\text{transverse 方向}: i,j = 1,\cdots,D-2) \\ \eta_{+-} = \eta_{-+} = -1 & \\ \eta^{+-} = \eta^{-+} = 1 & \end{cases} \tag{A.5}$$

で与えられる。

Arnowitt-Deser-Misner parametrization of the world-volume metric $g^{\alpha\beta}$
metric の ADM 分解は、一般相対論の正準形式を扱うときに用いられるものである。[37] にあるような、標準的な定義は、

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -N^2 + N^a\bar{g}_{ab}N^b & N^a\bar{g}_{ab} \\ \hline \bar{g}_{ab}N^b & \bar{g}_{ab} \end{array}\right) \tag{A.6}$$

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\bar{g}} \tag{A.7}$$

である。ここで N は "shift function"、N^a は "lapse vectors" とよばれる。本文中で用いたのは Townsend[3] での notation で、

$$\begin{cases} \text{shift function:} & N = \omega^{-2}\bar{g} \\ \text{lapse vectors:} & N^a = -\omega^{-1}u^a \end{cases} \tag{A.8}$$

と置くものである。このとき、

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} \omega^{-2}\left(-\bar{g}+u^a\bar{g}_{ab}u^b\right) & -\omega^{-1}u^a\bar{g}_{ab} \\ \hline -\omega^{-1}\bar{g}_{ab}u^b & \bar{g}_{ab} \end{array}\right) \tag{A.9}$$

$$g^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -\bar{g}^{-1}\omega^2 & -\bar{g}^{-1}\omega u^a \\ \hline -\bar{g}^{-1}\omega u^b & \bar{g}^{ab}-u^a\bar{g}^{-1}u^b \end{array}\right) \tag{A.10}$$

$$\sqrt{-g} = \omega^{-1}\bar{g} \tag{A.11}$$

がなりたつ。

A.2 Supermembrane

A.2.1 Differential forms in superspace

以下良く用いられる superspace での form 記法について、若干説明しよう。p-form は、次で定義される。

$$A_{[p]} \equiv \frac{1}{p!}dZ^{M_p}\wedge\cdots\wedge dZ^{M_1}A_{M_1\cdots M_p} \tag{A.12}$$

以下往々にして、wedge は略す。外微分、普通の微分と変分は「右から」かかる convention を取る。

$$d(FG) \equiv FdG + (-)^q dFG \qquad \text{(for q-form } G\text{)} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{p!}dZ^{M_p}\wedge\cdots\wedge dZ^{M_1}\wedge dZ^N\partial_N A_{M_1\cdots M_p} \\ &= \frac{1}{(p+1)!}dZ^{M_p}\wedge\cdots\wedge dZ^{M_1}\wedge dZ^N(p+1)\partial_{[N}A_{M_1\cdots M_p]} \end{aligned} \tag{A.14}$$

一行目で $N,\ldots,M_p$ の足はあらゆる反対称な組について和をとっているので ($dZ\wedge\cdots$ のため)、2 行目では反対称化の記号はいれてもいれなくても同じである。よって、

$$F_{[p+1]} \equiv dA_{[p]} \tag{A.15}$$

とおけば

$$\begin{aligned} \left(F_{[p+1]}\right)_{M_1\cdots M_{p+1}} &= (p+1)\partial_{[M_1}A_{M_2\cdots M_{p+1}]} \\ &= \partial_{M_1}A_{M_2\cdots M_{p+1}} - \partial_{M_2}A_{M_1M_3\cdots M_{p+1}} + \cdots \end{aligned} \tag{A.16}$$

と求まる。

変分　p-form $A_{[p]}$ の変分は $Z \to Z + \delta Z$ に対して、

$$\begin{aligned}
\delta A &= \frac{1}{p!}\sum_{i=1}^{p} dZ^{M_p}\cdots d\left(\delta Z^{M_i}\right)\cdots dZ^{M_1} A_{M_1\cdots M_p} \\
&\qquad + \frac{1}{p!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_1}\ \delta Z^N \partial_N A_{M_1\cdots M_p} \\
&= \frac{1}{(p-1)!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_2} d\left(\delta Z^{M_1}\right) A_{M_1\cdots M_p} \\
&\qquad + \frac{1}{p!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_1}\ \delta Z^N \partial_N A_{M_1\cdots M_p} \\
&= d\left(\frac{1}{(p-1)!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_2}\delta Z^{M_1} A_{M_1\cdots M_p}\right) \\
&\qquad - \frac{1}{(p-1)!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_2}\delta Z^{M_1} dZ^N \partial_N A_{M_1\cdots M_p} \\
&\qquad + \frac{1}{p!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_1}\ \delta Z^N \partial_N A_{M_1\cdots M_p}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

最後の式の 2 行目で、dZ と δZ を入れ替え、M_1 と N を呼び変えれば、2 行目と 3 行目は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_1}\ \delta Z^N \left[\partial_N A_{M_1\cdots M_p} - p(-)^{nm_1}\partial_{M_1} A_{NM_2\cdots M_p}\right] \\
&= \frac{1}{p!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_1}\ \delta Z^N (p+1)\partial_{[N} A_{M_1\cdots M_p]} \\
&= \frac{1}{p!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_1}\ \delta Z^N F_{NM_1\cdots M_p}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

のようにまとまる。n などは、Z^N が fermionic なら 1、bosonic なら 0 になる「符号因子」である。結局、

$$\begin{aligned}
\delta A &= d\left(\frac{1}{(p-1)!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_2}\delta Z^{M_1} A_{M_1\cdots M_p}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{p!} dZ^{M_p}\cdots dZ^{M_1}\ \delta Z^N F_{NM_1\cdots M_p}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

とまとまることが分かる。

A.3 Gamma matrices

Clifford algebra (Dirac algebra) は

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{A.20}$$

のように定義される。ガンマ行列から作る反対称 tensor は

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n} &\equiv \Gamma^{[\mu_1}\cdots\Gamma^{\mu_n]} \\
&= \sum_{\text{perms.}} \frac{1}{n!}\,\mathrm{sgn}\,\sigma\Gamma^{\mu_{\sigma(1)}}\cdots\Gamma^{\mu_{\sigma(n)}} \\
&= \frac{1}{n!}\left\{(\Gamma^{\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_n}) - (\Gamma^{\mu_2}\Gamma^{\mu_1}\cdots\Gamma^{\mu_n}) + \cdots\right\} \\
&= \begin{cases} \Gamma^{\mu_1}\cdots\Gamma^{\mu_n} & (\mu_1,\ldots,\mu_n \text{ が全部異なるとき}) \\ 0 & (\mu_1,\ldots,\mu_n \text{ の内どれか 2 つが一致するとき}) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

であり、完全反対称 tensor $V_{[n]}$ にたいして、

$$
V_{\mu_1\cdots\mu_n}\Gamma^{\mu_1}\cdots\Gamma^{\mu_n} = V_{\mu_1\cdots\mu_n}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n} \tag{A.22}
$$

が成り立つように定義してある。さらに、反交換関係 (A.20) から、

$$
\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu} = \Gamma^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \tag{A.23}
$$

$$
\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu\rho} = \Gamma^{\mu\nu\rho} + 2\eta^{\mu[\nu}\Gamma^{\rho]} \tag{A.24}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu_1\cdots\nu_n} = \Gamma^{\mu\nu_1\cdots\nu_n} + n\eta^{\mu[\nu_1}\Gamma^{\nu_2]\cdots\nu_n} \tag{A.25}
$$

が成り立つことが分かる。

Spinor and $SO(1,10)$ gamma matrix　Dirac conjugate は次で定義される。

$$
\bar{\psi} \equiv \psi^{\dagger}A, \qquad A = (\Gamma^0)^{-1} = \Gamma_0 \tag{A.26}
$$

Charge conjugation matrix は

$$
\bar{\psi} = -\psi\mathcal{C}^{-1} \tag{A.27}
$$

と約束しよう。

11 次元の Lorentz 群 $SO(1,10)$ では、Majorana spinor を定義することができる。

$$
\Theta \text{は Majorana} \leftrightarrow \Theta^* = \Theta \tag{A.28}
$$

本文中では、この Majorana spinor しか扱わない。この時、charge conjugation matrix が

$$
\begin{gathered}
-\Theta^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1} = \bar{\Theta} = -\Theta^{\dagger}\Gamma^0 = -\Theta^{\mathrm{T}}\Gamma^0 \\
\Downarrow \\
\mathcal{C} = \Gamma_0
\end{gathered}
\tag{A.29}
$$

ときまる。またこの時 Γ はすべて実行列。

$SO(1,10) \supset SO(9)$ decomposition　Light-cone gauge を扱う (§5.1) 際には次のような $SO(1,10)$ ガンマ行列の $SO(9)$ ガンマ行列への分解を用いるのが便利である。

$SO(9)$ ガンマ行列は、次の代数を満たす。

$$\left\{\gamma^I, \gamma^J\right\} = \delta^{IJ} \tag{A.30}$$

これは $2^{[\frac{9}{2}]} = 16$ 次元表現であり、32 次元表現である $SO(1,10)$ ガンマ行列に次のように埋め込まれる。

$$\Gamma^I = \begin{pmatrix} \gamma^I & \\ & \gamma^I \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^0 = -\mathcal{C} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_{16} \\ -\mathbf{1}_{16} & \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^{11} = \begin{pmatrix} & -\mathbf{1}_{16} \\ -\mathbf{1}_{16} & \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

このとき、γ はすべて対称になり、従って $SO(9)$ charge conjugation matrix $\mathcal{C}_9$ は、単位行列である。故に、$SO(9)$ Majorana spinor は

$$\bar{\theta} = \theta \tag{A.32}$$

を満たす。

light-cone　light-cone 座標を取るときに、ガンマ行列も以下のように組み直される。

$$\Gamma^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma^0 \pm \Gamma^{11}\right) \tag{A.33}$$

$$\Gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\cdot\mathbf{1}_{16} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\cdot\mathbf{1}_{16} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.34}$$

$$\Gamma^+\Theta = 0 \implies \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \tag{A.35}$$

$$\bar{\Theta} = -\Theta^{\mathrm{T}}\mathcal{C}^{-1} = -\Theta^{\mathrm{T}}\Gamma^0 = \left(\bar{\theta}, 0\right) \tag{A.36}$$

最後の式では、先ほど述べたように、実は bar は要らない。

B　Dirac's procedure of constrained systems and Boundary conditions

ここでは、[20] に基づいて、“boundary condition” を Dirac 流の拘束条件として扱う処方について説明する。最初に一般的な singular Lagrangian とその Dirac 流の扱いについて本文で必要な部分などを簡単に説明した後、boundary condition が Dirac の拘束条件としてどのように扱われるかを解説する。拘束系についてのもっと完全な取り扱いについては、場の理論の教科書 (例えば [19]) などを参照して欲しい。

B.1 Review of Dirac Procedure

簡単のために有限な N 自由度系の Lagrangian $L(q^i,\dot{q}^i)$ について考えよう。すなわち、$i=1,\ldots,N$。場の理論にうつるときは i,j を連続変数に拡張すれば良い。

まず最初に Euler-Lagrange の運動方程式を考えよう。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

$$\downarrow$$

$$W_{ij}\ddot{q}^j+\alpha_i=0 \tag{B.1}$$

$$\tag{B.2}$$

ここで、

$$\alpha_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i}-\dot{q}^i\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\right) \tag{B.3}$$

であり、W_{ij} は Hesse 行列

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{B.4}$$

である。

もし Hesse 行列式 $|W_{ij}|=0$ ならば、Lagrangian は特異 (singular) であるといい、系は特異系 (singular system) であると言われる。このようにいわれるのは、加速度 $\ddot{q}^i$ を含む運動方程式の数が、系の自由度 N よりも少なく、系の時間発展が一意に決まらないためである。

この時、系には Lagrangian constraints $\gamma^A(q,\dot{q})=0\ ,\ (A=1,\ldots,N-\mathrm{rank}\,W)$ が存在する。これらの constraint は W の null eigenvector ξ_i^A を用いて、

$$\gamma^A(q,\dot{q})=\xi_i^A\alpha_i \tag{B.5}$$

と書かれる。

Hamilton 形式に移ることを考えよう。q に対する正準共役運動量 p は、

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{B.6}$$

で定義される。Hamiltonian は、L からの Legendre 変換 $(q,\dot{q})\to(q,p)$ を行うことで定義される。

$$H(q,p)\equiv p_i\dot{q}^i-L(q,\dot{q}) \tag{B.7}$$

ところが、元の Lagrangian L が singular($\det W=0$) であると、(B.6) が $\dot{q}^i$ について解けない。従って、この時 q と p は互いに独立な変数ではなくなり、幾つかの関係式を満たすことになる。

$$\phi_A(q,p)=0 \tag{B.8}$$

これらの関係式が “primary constraints” である。

ここで、次の事実に注意しておこう。

「Hamiltonian は、q と p のみの関数であり、$\dot{q}$ には依存しない。」

実際、(B.7) を変分すれば

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\delta \dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^j}\delta q^j \\ &= \delta p_i \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^j}\delta q^j \end{aligned} \tag{B.9}$$

となる。従って、$H = H(q,p)$ である。ゆえに、H の変分は、次のように書き直せる。

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q^j}\delta q^j \tag{B.10}$$

この式と、(B.9) とを見比べることで、次の Hamilton 形式での運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\end{aligned}$$

ここで、Euler-Lagrange の運動方程式 (B.1) を用いた。しかし、拘束条件 (B.8) があるときには、これは正しくない。実際、変分 (B.10) は拘束条件を満たしながらのものでなければならないので、Lagrange multiplier λ^A を用いて

$$\delta(H + \lambda^A \phi_A) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q^j}\delta q^j + \lambda^A\left(\frac{\partial \phi_A}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial \phi_A}{\partial q^j}\delta q^j\right) \tag{B.11}$$

としなければならない。この時、運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^A \frac{\partial \phi_A}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q^i} + \lambda^A \frac{\partial \phi_A}{\partial q^i}\end{aligned} \tag{B.12}$$

のように変更を受ける。

ここで、Poisson 括弧を通常のように

$$\{F, G\}_{\mathrm{PB}} \equiv \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{B.13}$$

で定義しよう。こうすれば、(B.12) は、

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \left\{q^i, H\right\}_{\mathrm{PB}} + \lambda^A \left\{q^i, \phi_A\right\}_{\mathrm{PB}} \\ \dot{p}^i &= \left\{p^i, H\right\}_{\mathrm{PB}} + \lambda^A \left\{p^i, \phi_A\right\}_{\mathrm{PB}}\end{aligned} \tag{B.14}$$

と書き直せ、一般の関数 $F(q,p)$ の運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \{F, H\}_{\mathrm{PB}} + \{F, \phi_A\}_{\mathrm{PB}}\lambda^A \\ &= \left\{F, H + \phi_A\lambda^A\right\}_{\mathrm{PB}} - \left\{F, \lambda^A\right\}_{\mathrm{PB}}\phi_A \\ &\approx \left\{F, H + \phi_A\lambda^A\right\}_{\mathrm{PB}}\end{aligned} \tag{B.15}$$

ここで、最後の行の $\approx$ は拘束 $\phi_A = 0$ で定義される (phase space の) 超曲面上で、等しいという意味であり、簡単にいえば、ϕ_A に比例した項を除いて等しいという意味である。この意味で等しいことを、"weak" に等しいという[48]。注意したいのは、Poisson 括弧自体は、拘束とは独立にすべての変数 (q, p) を用いて定義されているので、Poisson 括弧を計算する前に拘束を用いてはならず、拘束を 0 に置くのは Poisson 括弧を計算した**後**だということである。

ここで、元の Lagrangian から、Hamiltonian を定義するのに、元々拘束条件に比例する項の不定性があったことを思い出し、全 (total)Hamiltonian を次で定義する。

$$H_{\mathrm{T}} \equiv H + \lambda^A \phi_A \tag{B.16}$$

すると、運動方程式 (B.15) は次のようにかける。

$$\dot{F} \approx \{F, H_{\mathrm{T}}\}_{\mathrm{PB}} \tag{B.17}$$

これが、拘束のあるときの Hamilton 形式での運動方程式である。

B.1.1 Consistency of constraints, secondary constraints and 2nd class constraints

ここで、**「拘束条件が時間発展と矛盾しない条件」**について考えよう。運動方程式 (B.17) から、"consistency condition" は次のように書かれる。

$$\dot{\phi_A} = \{\phi_A, H\}_{\mathrm{PB}} + \{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{PB}} \lambda^B \approx 0 \tag{B.18}$$

この時、単純に言って次の 3 通りの状況が考えられる。

$\{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{PB}} \not\approx 0$ このときは、Lagrange multiplier λ^A が、
$\lambda^A = -\{\phi_A, \phi_B\}^{-1}_{\mathrm{PB}} \{\phi_B, H\}_{\mathrm{PB}}$ のように決まる。

$\{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{PB}} \approx 0$ この時はさらに次の二つの状況に分かれる。

- **$\{\phi_A, H\}_{\mathrm{PB}} \not\approx 0$** このときは、"consistency condition" は、さらに新しい拘束 $\phi^{(2)} \equiv \{\phi_A, H\}_{\mathrm{PB}} \approx 0$ を要求する。すなわち新たな、"secondary" な constraint があらわれる。
- **$\{\phi_A, H\}_{\mathrm{PB}} \approx 0$** この時は拘束は後で述べる "1st. class" である。これの取り扱いについては後で述べる。

このようにして、λ^A が決まるか、secondary constraint が決まったら、また最初から "consistency condition" をチェックする。この作業を、secondary constraint が新たにあらわれなくなるまで繰り返すのである。

以上のことをもう少し正確に述べよう。拘束同士の Poisson 括弧から作られる、次の行列を考えよう。

$$C_{AB} \equiv \{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{PB}} \tag{B.19}$$

[48] この時、普通の意味の等号を強い ("strong") 等号という。

もし、行列 C が、full rank($\det C \neq 0$) でなければ、η_A の線形結合を取り直すことで次のように書き換えられる。

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} C_{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.20}$$

ここで、$a, b = 1, \ldots, \mathrm{rank}\, C$ である。すると、(B.18) は次のように読み替えられる。

$$C\lambda = -\mathbf{v} \tag{B.21}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \{\phi_1, H\}_{\mathrm{PB}} \\ \{\phi_2, H\}_{\mathrm{PB}} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{B.22}$$

ここで、解の求まる部分 ($C_{ab}\lambda^b = v_a$) が未定乗数を決定し、解が不能の部分 ($0 \cdot \lambda^A = v_B (\neq 0)$) が secondary の拘束条件を与え、解が不定の部分 ($0 \cdot \lambda = 0$) の部分が、決まらない (すぐ後で述べる 1st. class の拘束条件) になるのである。こうして新たに secondary な拘束が出なくなるまで同じ手続きを繰り返す。こうして得られた拘束の組を新たに ϕ_A とおこう[49]。

ここで、次のように定義しよう。

$$\begin{aligned} \left\{\phi_A, {}^{\forall}\phi\right\}_{\mathrm{PB}} &\approx 0 \quad \longleftrightarrow \text{拘束は第一類 (first class)} \\ \left\{\phi_A, {}^{\exists}\phi\right\}_{\mathrm{PB}} &\not\approx 0 \quad \longleftrightarrow \text{拘束は第二類 (second class)} \end{aligned}$$

すなわち、second class constraints とは (B.20) において、C_{ab} を与える部分のことである。前に述べたことから、second class の拘束条件は、未定乗数 λ を決定する。ところが 1st. class の拘束が存在すると、この λ のなかに不定なものが出てくる。つまり、系の時間発展が一意に決まらなくなる。これは gauge 自由度を持った系に特徴的なことであり、実際 1st. class の拘束とは、系の gauge 自由度に由来する。

B.1.2 First class constraints and Gauge-fixing condition

ここでは 1st. class の拘束の取り扱いについて述べる。この論文を通して扱う membrane(およびさらに高次の p-brane) は、その作用において world-volume での reparametrization invariance を持ち、この gauge 対称性のために正準形式で取り扱う際には 1st. class の constraint をうまく処理せねばならない。

ここではまず、前節の最後で述べた、1st.class の拘束が、gauge 対称性と関係しているという事実から説明しよう。まず最初に注意すべきは次の事実である。

「1st. class の拘束同士の Poisson 括弧は、1st. class の拘束の一次結合になる。」[21]

[49]実際、拘束が primary か secondary かの違いは出どころだけで、本質的な区別はない。次に述べる 1st. class か 2nd. class かの区別は重要である。

(証明) R、S をそれぞれ 1st. class の拘束であるとせよ。まず、拘束は 1st. class であるから

$$\{R, \phi_A\}_{\mathrm{PB}} = r_A{}^B \phi_B \tag{B.23}$$

S も同様。任意の constraintϕ_A に対して、Jacobi の恒等式より、

$$\begin{aligned}\{\{R,S\}_{\mathrm{PB}}, \phi_A\}_{\mathrm{PB}} &= \{\{R,\phi_A\}_{\mathrm{PB}}, S\}_{\mathrm{PB}} - \{\{S,\phi_A\}_{\mathrm{PB}}, R\}_{\mathrm{PB}} \\ &\approx r_A{}^B \{\phi_B, S\}_{\mathrm{PB}} - s_A{}^C \{\phi_C, R\}_{\mathrm{PB}} \\ &\approx 0 \end{aligned} \tag{B.24}$$

よって、$\{R,S\}_{\mathrm{PB}}$ もまた 1st. class。

■

以上のことから、次のように書ける。

$$\{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{PB}} = f_{AB}{}^C \phi_C \tag{B.25}$$

すなわち、1st. class の拘束は「構造定数」$f_{AB}{}^C$ を持つ代数をなすことが分かる。次にこれらの拘束が、gauge 変換を生成することを見よう。1st. class の拘束があると、導入した未定乗数 λ^A のなかに決まらないものが存在する。すると、系の時間発展が、この λ の分だけ決まらない。

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \left\{q^i, H\right\}_{\mathrm{PB}} + \lambda^A \left\{q^i, \phi_A^{\mathrm{1st}}\right\}_{\mathrm{PB}} \\ \dot{p}^i &= \left\{p^i, H\right\}_{\mathrm{PB}} + \lambda^A \left\{p^i, \phi_A^{\mathrm{1st}}\right\}_{\mathrm{PB}}\end{aligned} \tag{B.26}$$

決まらない方向は

$$\delta q^i \equiv \left\{q^i, \phi_A^{\mathrm{1st}}\right\}_{\mathrm{PB}}, \quad \delta p_i \equiv \left\{p_i, \phi_A^{\mathrm{1st}}\right\}_{\mathrm{PB}} \tag{B.27}$$

であり、これは ϕ_A^{1st} で生成される正準変換である。故に系には (B.27) で生成される変換の下での不変性があり、あらゆる物理量 F はこの下で不変であるべきこと

$$\delta F = \left\{F, \phi_A^{\mathrm{1st}}\right\}_{\mathrm{PB}} \approx 0 \tag{B.28}$$

を示している。すなわち、系には gauge 不変性があり、物理量は gauge 不変でなければならない。

gauge 固定　このような不変性が系に存在すると、古典的な時間発展が決まらなくなってしまう。そこで元々系が持つ不変性を利用して、次のような gauge 固定条件 (gauge-fixing condition) を置く。

$$\chi_A(q,p) = 0 \tag{B.29}$$

この条件は 1st. class constraint と同じ数だけ置き、さらにこれを導入したことによって系の拘束がすべて 2nd. class になるように (つまり (B.19) で導入した C が $\det C \neq 0$ になるように) 置く。このようにすれば、系の時間発展は矛盾無く決定される。

subsidiary condition　古典的にはこれで良いのであるが、量子論的には gauge の固定が系の対称性を壊したり (例えば、light-cone gauge は Lorentz 対称性を壊してしまう) するために、次のような方法がとられることもある。

すなわち、ϕ_A が変換の生成子であることを利用し、未定乗数を適当な値 (例えば $\lambda^A = 0$) にとった上で系の状態空間がこの変換の下で不変になるように置く。

$$\phi_A^{\mathrm{1st}}\,|\,phys.\rangle = 0 \tag{B.30}$$

このような条件を補助条件 (subsidiary conditions) と呼ぶ。このようにすれば、物理的状態上では系の時間発展は矛盾無く決まることになる[50]。

B.1.3　Second class constraints and Dirac brackets

この節では、2nd. class の拘束条件の取り扱い、特にこの論文で主要な働きをする Dirac 括弧の取り扱いについて述べよう。

考えている系 (Lagrangian) には、2nd. class の拘束しかないとしよう。実際、前節で述べたことから、1st. class の拘束は 2nd. class に帰着させる (gauge-fixing) か、拘束としては考えなくて良い (subsidiary condition) という風にできる。この時、仮定から (B.19) で定義した C は、$\det C \neq 0$ である。従って、C^{-1} が存在するから、次の **Dirac 括弧 (Dirac bracket)** を定義しよう。

$$\{F,G\}_{\mathrm{DB}} \equiv \{F,G\}_{\mathrm{PB}} - \{F,\phi_A\}_{\mathrm{PB}}\left(C^{-1}\right)^{AB}\{\phi_B,G\}_{\mathrm{PB}} \tag{B.31}$$

大切な点は、任意の拘束と他の量との Dirac 括弧は (strong に)0 になることである。

$$\left\{{}^\forall\phi_A,{}^\forall X\right\}_{\mathrm{DB}} = \{\phi_A,X\}_{\mathrm{PB}} - C_{AB}C^{BC}\{\phi_C,X\}_{\mathrm{PB}} = 0 \tag{B.32}$$

よって、任意の物理量に対し、拘束条件の部分を同一視した量

$$\tilde{F} \equiv \left\{F|F \sim F + \lambda^A\phi_A\right\} \tag{B.33}$$

すなわち Dirac 括弧は $\tilde{F} = F/\sim$ の任意の元に対して定義された括弧である。この Dirac 括弧が、$\phi_A = 0$ で定義される phase space 内の超平面上の Poisson 括弧であることをこれから示そう。

正準 2 次微分形式 Ω を次で定義しよう。

$$\Omega \equiv -2dq^i \wedge dp_i \tag{B.34}$$

これは、正準変換で不変な量である。ここで、新しい適当な座標 z を導入する。

$$z^\mu = z^\mu(q,p) \tag{B.35}$$

この変数変換の下で

$$\Omega = -2dq^i(z)\wedge dp_i(z) = \mathbf{L}^{\mu\nu}dz^\mu \wedge dz^\nu \tag{B.36}$$

[50] さらに詳しい話は教科書 [19] を見てください。

のようになる。ここで定義した、L を、Lagrange 括弧という。

$$\mathbf{L}^{\mu\nu} = \frac{\partial q^i}{\partial z^\mu}\frac{\partial p_i}{\partial z^\nu} - \frac{\partial q^i}{\partial z^\nu}\frac{\partial p_i}{\partial z^\mu} \tag{B.37}$$

この表式から明らかなように、Lagrange 括弧は Poisson 括弧の逆行列になっている。

$$\mathbf{L}_{\mu\nu}\left\{z^\nu, z^\rho\right\}_{\mathrm{PB}} = \delta^\rho_\mu \tag{B.38}$$

さて、ここで次のように変数を取ってみよう。

$$\underbrace{z^1, z^2, \dots, z^{2N-2m}}_{\text{拘束超平面上の座標}}, \underbrace{z^{2N-2m+1} = \phi_1, \dots, z^{2N} = \phi_{2m}}_{\text{2m 個の拘束}} \tag{B.39}$$

すなわち、最初の変数は、拘束 $\phi = 0$ で決まる超平面上の座標。この時、最初の $2N-2m$ 個の座標に制限した Lagrange 括弧は Dirac 括弧の逆行列である。

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu,\nu=1}^{2N-2m} \mathbf{L}_{\mu\nu}\left\{z^\nu, z^\rho\right\}_{\mathrm{DB}} &= \sum_{\mu,\nu=1}^{2N} \mathbf{L}_{\mu\nu}\left\{z^\nu, z^\rho\right\}_{\mathrm{DB}} \qquad \left(\left\{{}^\forall\phi, {}^\forall X\right\}_{\mathrm{DB}} = 0 \text{ だから。}\right) \\
&= \delta^\rho_\mu - \underbrace{\delta_{\mu,2N-2m+A}}_{=0} C^{AB}\left\{z^{2N-2m+B}, z^\rho\right\}_{\mathrm{PB}} \\
&= \delta^\rho_\mu
\end{aligned} \tag{B.40}$$

従って、Dirac 括弧は拘束超平面上での Poisson 括弧であることが分かった。また、この証明から次のようなことも分かる。

すなわち、拘束 $\phi_A = 0$ を解いてしまって、余分な変数を消し、独立な座標 (q^{*i}, p^*_i) を正準変数とすれば良い。このとき、この (q^{*i}, p^*_i) に対する Lagrange 括弧は当然 Dirac 括弧の逆行列である。§3.1.2 や、§3.3 ではこの方法により、Dirac 括弧を計算した。

B.2 Boundary conditions as Dirac constraints

以上により、普通の singular Lagrangian に対する拘束系での取り扱い方を説明したので、いよいよ本題である境界条件を Dirac 流の拘束条件として取り扱う処方について述べよう。

B.2.1 Boundary conditions as Lagrangian constraints

Boundary condition は singular Lagrangian とは関係なくでてくる、加速度によらない運動方程式とみることができる。この視点から捕らえることで、boundary condition は constraint となるのである。まず、[20] に倣って、単純な $(1+1)$ 次元の scalar 場の理論を用いてこのことを見てみよう。

考える作用は、

$$S = \int_0^l dx \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2}\left[(\partial_t\Phi)^2 - (\partial_x\Phi)^2\right] \tag{B.41}$$

作用の変分をとれば、

$$\delta S=\int_0^l dx\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{\delta L}{\delta\Phi}\delta\Phi+\int_0^l dx\ \delta\Phi\partial_t\Phi|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2} dt\ \delta\Phi\partial_x\Phi|_0^l \tag{B.42}$$

作用がこの下で不変であるための条件は、各項が独立に 0 になることである。最初の項はもちろん、運動方程式

$$\frac{\delta L}{\delta\Phi}=\left(\partial_t^2-\partial_x^2\right)\Phi=0 \tag{B.43}$$

をあたえる。2 番目の項は、初期条件と終条件に対する制限である。3 番目の項 (表面項) が、今から主に考える部分で、これが 0 になるには次の 2 つの選択肢がある。

Dirichlet 条件 この条件は、境界での固定端条件である。$\delta\Phi|_{\mathrm{boundary}}=0$

Neumann 条件 この条件は、自由端条件に当たる。$\partial_x\Phi|_{\mathrm{boundary}}=0$

これから分かることは、境界条件は一般に加速度を含まないが、すべての時間で成り立たなければならないので一種の運動方程式である。最初の一般論で述べたように、これは、境界条件を一種の Lagrangian 拘束条件 $\gamma(q,\dot{q})$ として扱えると言うことである。

B.2.2 Boundary conditions as Hamiltonian constraints

このことをふまえて、Hamiltonian 形式での枠内で、境界条件を拘束条件として扱うことを考えよう。もちろん、前節ででてきた Lagrangian constraints は、singular Lagrangian $\det W=0$ から出てきたものでないために、Legendre 変換自体に不都合はない[51]。従って、Lagrangian constraint から primary constraint を得ることができる。

$$\gamma^A(q,\dot{q})=0\quad\rightarrow\quad\phi_A(q,p)=0 \tag{B.44}$$

先ほどの例で言えば、primary constraint は (Neumann 条件を採用している)

$$\phi^{(0)}=\partial_x\Phi|_{x=0} \tag{B.45}$$

となる[52]。したがって、total Hamiltonian は、

$$H_{\mathrm{T}}=H+\lambda_0\phi^{(0)} \tag{B.46}$$

ここで Hamiltonian は、

$$H=\int_0^l dx\frac{1}{2}\left(\Pi^2+(\partial_x\Phi)^2\right) \tag{B.47}$$

であり、共役運動量 Π は

$$\Pi\equiv\frac{\partial L}{\partial\partial_t\Phi}=\partial_t\Phi \tag{B.48}$$

[51] 元の Lagrangian が singular なときは適当な処方で拘束を解いておく。すなわち今は一般に、non-singular な Lagrangian を考える。
[52] $x=l$ の方も同様なので、今は $x=0$ のみ考える。

である。

それでは、この primary constraint の “consistency condition” をみてみよう。時間発展の方程式から[53]、

$$\dot{\phi^{(0)}} = \left\{\phi^{(0)}, H_{\mathrm{T}}\right\}_{\mathrm{PB}} = \partial_x \Pi|_{x=0} \approx 0 \tag{B.49}$$

したがって secondary constraint

$$\phi^{(1)} = \partial_x \Pi|_{x=0} \tag{B.50}$$

があらわれる。さらに拘束が出現するかをみてみよう。再び “consistency condition” から、

$$\dot{\phi^{(1)}} = \left\{\phi^{(1)}, H_{\mathrm{T}}\right\}_{\mathrm{PB}} = \left\{\phi^{(1)}, H\right\}_{\mathrm{PB}} + \lambda_0 \left\{\phi^{(1)}, \phi^{(0)}\right\}_{\mathrm{PB}} \approx 0 \tag{B.51}$$

ここで、2 項目は

$$\begin{aligned} \left\{\phi^{(1)}, \phi^{(0)}\right\}_{\mathrm{PB}} &= \int dx dx' \delta(x)\delta(x') \left\{\partial_x \Pi(x), \partial_{x'} \Phi x'\right\}_{\mathrm{PB}} \\ &= -\int dx dx' \delta(x)\delta(x') \partial_x \partial_{x'} \delta(x-x') \\ &\overset{\text{formally}}{=} \partial_x^2 \delta(x-x')|_{x=x'=0} \end{aligned} \tag{B.52}$$

となり、非常に singular である。この部分を扱うために、一旦離散化して、有限自由度の系にしてみよう。

離散化　区間 $[0, l]$ を $N-1$ 個の部分に分割し、

$$\Phi_0(t) \equiv \Phi(0,t),\ \ \Phi_\epsilon(t) \equiv \Phi(x=\epsilon, t),\ \ \ldots\ \ ,\ \ \Phi_N(t) \equiv \Phi(x=l, t) \tag{B.53}$$

とする。ここで $\epsilon = l/N$ は各点同士の間隔。

このとき、

$$\int dx \quad \rightarrow \quad \epsilon \sum_{n=1}^{N} \tag{B.54}$$

$$\partial_x f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon}\left(f_n - f_{n-1}\right) \tag{B.55}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{n=0}^{N} \epsilon(\partial_t \Phi_n)^2 - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\epsilon}\left(\Phi_{n+1} - \Phi_n\right)^2\right] \tag{B.56}$$

この下で、正準運動量と、拘束条件は

$$\Pi_n = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \Phi_n)} \overset{\text{discretize}}{=} \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial L}{\partial(\partial_t \Phi_n)} = \partial_t \Phi_n \tag{B.57}$$

$$\phi^{(0)} = \frac{1}{\epsilon}(\Phi_1 - \Phi_0) \approx 0 \tag{B.58}$$

[53] Poisson 括弧は普通に $\{\Phi(x_1), \Pi(x_2)\}_{\mathrm{PB}} = \delta(x_1 - x_2)$ で定義する。

のようになる[54]。よって Hamiltonian は、

$$H=\frac{1}{2\epsilon}\left[\sum_{n=0}^{N}\epsilon^2\Pi_n^2+\sum_{n=0}^{N-1}\left(\Phi_{n+1}-\Phi_n\right)^2\right] \tag{B.59}$$

正準交換関係は

$$\{\Phi_n,\Pi_m\}_{\mathrm{PB}}=\frac{1}{\epsilon}\delta_{nm} \tag{B.60}$$

のように変更される[55]。

よって、secondary constraint は、

$$\phi^{(1)}\equiv\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\left\{\Phi_1-\Phi_0,\Pi_n^2\right\}_{\mathrm{PB}}=\frac{1}{\epsilon}(\Pi_1-\Pi_0) \tag{B.61}$$

となる。よって、先ほど計算した量を離散化して求めると

$$\begin{aligned}\left\{\phi^{(1)},\phi^{(0)}\right\}_{\mathrm{PB}}&=\frac{1}{\epsilon^2}\left\{\Pi_1-\Pi_0,\Phi_1-\Phi_0\right\}_{\mathrm{PB}}\\&=\frac{2}{\epsilon^3}\sim\mathcal{O}(\epsilon^{-3})\end{aligned} \tag{B.62}$$

ともとまる。一方、“consistency condition” の一項目は

$$\begin{aligned}\left\{\phi^{(1)},H\right\}_{\mathrm{PB}}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\epsilon}(\Pi_1-\Pi_0),\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\epsilon}\left(\Phi_{n+1}-\Phi_n\right)^2\right\}_{\mathrm{PB}}\\&=-\frac{1}{\epsilon^3}\left((\Phi_2-\Phi_1)-(\Phi_1-\Phi_0)\right)\\&=-\frac{1}{\epsilon^3}(\Phi_2+\Phi_0)\sim\mathcal{O}(\epsilon^{-3})\end{aligned} \tag{B.63}$$

となり、λ_0 がこれで決まりそうに思える[56]。

$$\lambda_0=2(\Phi_2+\Phi_0) \tag{B.64}$$

しかし、連続極限をとることを考えれば、右辺で連続極限で有限になる量は $\partial_x^2\Phi(x)$ になるはずで、

$$\begin{aligned}\lambda_0&=2\epsilon^2\frac{1}{\epsilon^2}\left((\Phi_2-\Phi_1)-(\Phi_1-\Phi_0)\right)\\&\xrightarrow{\text{continuum limit}}\mathcal{O}(\epsilon^2)\cdot 2\partial_x^2\Phi(x)\end{aligned} \tag{B.65}$$

である。よって、実際には 2 項目の方が高位の発散である。従って、矛盾無く拘束を課すためには次のように置かなければならない。

$$\lambda_0=0\quad\text{かつ、}\quad {}^{\exists}\phi^{(2)}\equiv\left\{\phi^{(1)},H\right\}_{\mathrm{PB}}\approx 0 \tag{B.66}$$

[54] このように ϵ を除いた部分を momentum とすれば、連続極限で non-zero な momentum が得られる。
[55] Π を上のように決めたので、連続極限で右辺は δ 関数になる。
[56] 文献 [20] では素朴に二項目のほうが高位の無限小とあったが誤りであろう。

これが、[20] で得られた新しい結果である。すなわち、**Lagrange multiplier は決定されるけれども拘束の連鎖** (*constraint chain*) **は無限に続く。**実際、同様の操作が続くことによって、すべての未定乗数 λ_n は 0 になるけれども、拘束自身は無限に課されていく。今の場合、簡単な scalar 場のモデルを用いてこのことを見たが、$\lambda=0$ になる条件が**境界条件から来る singularity** であったことを思い出せば、他のモデルでも同様のことが言える。

まとめれば、boundary condition を Dirac 流の拘束条件として課した場合、Hamiltonian は変更を受けない (実際先に述べたことから $H_{\mathrm{T}}=H$ である) が、boundary に於いて無限個の拘束が課されることになる。この拘束を (例えば mode 展開などで) 解くことができれば、境界条件を拘束として取り入れた Dirac 括弧を求めることができ、この下で古典的な時間発展は完全に決定されるのである。

以上が、§3.1.2 や §3.2 で行った処方に対する formal な解説である。

C Miscellaneous calculations

C.1 Lagrange brackets(§3.3.2)

ここでは、§3.3.2 の計算の詳細について述べる。

$\Omega^{[1]}$ (3.124) の導出

$$
\begin{aligned}
\Omega^{[1]} =& -2\int d^2\sigma\ \sigma_1\, C_{ikl}\, dX_0^i\wedge(dP_0^k\partial_2 P_0^l + P_0^k\partial_2 dP_0^l)\\
&\qquad\qquad + \sigma_1 C_{ikl}(dP_0^k\partial_2 X_0^l + P_0^k\partial_2 dX_0^l)\wedge dP_0^i\\
=& -L^2\int dxdy\,\delta(x-y)\ \Big[dX_0^i(x)\wedge dP_0^k(y)\partial_y P_0^l(y) + P_0^k(y)dX_0^i(x)\wedge\partial_y dP_0^l(y)\\
&\qquad + dP_0^k(x)\wedge dP_0^i(y)\partial_x X_0^l(x) + P_0^k(x)\partial_x dX_0^l(x)\wedge dP_0^i(y)\Big]\\
=& -L^2\int dxdy\, C_{ijl}\ \Big[dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\partial_y P_0^l(y)\,\delta(x-y)\\
&\qquad + dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\partial_y(P_0^l(y)\,\delta(x-y))\\
&\qquad - dP_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\partial_x X_0^l(x)\,\delta(x-y)\\
&\qquad - dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\partial_x(P_0^l(x)\,\delta(x-y))\Big]\\
=& -L^2\int dxdy\, C_{ijl}\ \Big[dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\,\Big(\partial_y P_0^l(y)\,\delta(x-y)\\
&\qquad + \partial_y(P_0^l(y)\,\delta(x-y)) - \partial_x(P_0^l(x)\,\delta(x-y)\,)\Big)\\
&\qquad - dP_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\partial_x X_0^l\,\delta(x-y)\Big]
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

ここで、以下の計算でもよく使う、次の恒等式に注意しよう。

$$
\partial_x\left(f(x)\delta(x-y)\right) = \partial_x\left(f(y)\delta(x-y)\right)
\tag{C.2}
$$

が、δ 関数の性質として成り立つ。これから例えば、

$$f(y)\delta'(x-y) = f'(x)\delta(x-y) + f(x)\delta'(x-y) \tag{C.3}$$

などが成立し、微分の位置を変えたり、関数の引数を変更できる。この事実を用いると、(C.1) の最後の行の $dX_0^i \wedge dP_0^j$ の係数は、

$$\begin{aligned}
&\partial_y P_0^l(y)\delta(x-y) + \partial_y(P_0^l(y)\delta(x-y)) - \partial_x(P_0^l(x)\,\delta(x-y) \\
&= P_0^{l\prime}(y)\delta(x-y) + P_0^{l\prime}(y)\delta(x-y) - P_0^l(y)\delta'(x-y) - P_0^l(y)\delta'(x-y) \\
&= 2P_0^{l\prime}(y)\delta(x-y)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

となる。ここで、プライム $'$ は普通の引数での微分を表す記号である。これで、(3.124) の最後の行が得られる。

$\Omega^{[2-1]}$ (3.128) の導出

次に $\mathcal{O}(C^1) \wedge \mathcal{O}(C^1)$ の部分である、$\Omega^{[2-1]}$ を求めよう。

$$\begin{aligned}
\Omega^{[2-1]} =& -2\int d^2\sigma\,\sigma_1^2\;C_{ijk}C_{ilm}\,(dP_0^j\partial_2 X_0^k + P_0^j\partial_2 dX_0^k) \wedge (dP_0^l\partial_2 P_0^m + P_0^l\partial_2 dP_0^m) \\
=& -\frac{2L^3}{3}\int d^2\sigma\,C_{ijk}C_{ilm} \\
&\times\Big[-dX_0^k(x)\wedge dP_0^l(y)\Big(P_0^{m\prime}(y)\partial_x(P_0^j(x)\delta(x-y)) + \partial_x\partial_y(P_0^j(x)P_0^m(y)\delta(x-y))\Big) \\
&\qquad + dP_0^j(x)\wedge dP_0^l(y)\Big(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(y)\delta(x-y) + X_0^{k\prime}(x)\partial_y(P_0^m(y)\delta(x-y))\Big)\Big] \\
&(dX\wedge dP \text{ の方は } k\to i\to l\to j\to k \text{ につけ変え。}) \\
&(dP\wedge dP \text{ の方は } j\to i\to l\to j \text{ につけ変える。}) \\
=& -\frac{2L^3}{3}\int d^2\sigma\,C_{ikl}C_{jml} \\
&\times\Big[dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\Big(P_0^{m\prime}(y)\partial_x(P_0^k(x)\delta(x-y)) + \partial_x\partial_y(P_0^k(x)P_0^m(y)\delta(x-y))\Big) \\
&\qquad + dP_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\Big(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(y)\delta(x-y) + X_0^{k\prime}(x)\partial_y(P_0^m(y)\delta(x-y))\Big)\Big] \\
&(dP\wedge dP \text{ の方は } \{k,x\}\leftrightarrow\{m,y\} \text{ の交換で反対称なもののみ残るので、反対称化}) \\
&(dX\wedge dP \text{ の係数を (C.3) を用いて書き換え}) \\
=& -\frac{2L^3}{3}\int d^2\sigma\,C_{ikl}C_{jml} \\
&\times\Big\{dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\partial_x\Big(P_0^k(x)\,(2\partial_y P_0^m(y) + P_0^m(y)\partial_y)\,\delta(x-y)\Big) \\
&\qquad + dP_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\Big[\frac{1}{2}\Big(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x) - P_0^{k\prime}(y)X_0^{m\prime}(y)\Big)\delta(x-y) \\
&\qquad\qquad - \Big(X_0^{k\prime}(x)P_0^m(x) + P_0^k(y)X_0^{m\prime}(y)\Big)\delta'(x-y)\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

これで、(3.128) が得られた。

$\Omega^{[2-2]}$ の導出

(3.132) をもう一度書くと

$$
\begin{aligned}
\Omega^{[2-2]} = -2 \int & d^2\sigma\, \sigma_1^2\ C_{ijk} C_{ilm} \\
& \times \Big\{ \Big[\partial_2 dX_0^k P_0^l \partial_2 P_0^m + \partial_2 X_0^k dP_0^l \partial_2 P_0^m - \partial_2 X_0^k P_0^m \partial_2 dP_0^l \\
& \qquad -dP_0^k \partial_2 (P_0^l \partial_2 X_0^m) - P_0^k \partial_2 (dP_0^l \partial_2 X_0^m - P_0^m \partial_2 dX_0^l) \Big] \wedge dP_0^i \\
& \quad + dX_0^i \wedge \Big[\partial_2 dP_0^k P_0^l \partial_2 P_0^m - \partial_2 P_0^k P_0^m \partial_2 dP_0^l + \partial_2 P_0^k dP_0^l \partial_2 P_0^m \\
& \qquad - dP_0^k \partial_2 (P_0^l \partial_2 P_0^m) - P_0^k \partial_2 (dP_0^l \partial_2 P_0^m - P_0^m \partial_2 dP_0^l) \Big] \Big\} \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

これを以下のように分けて計算していく。

$$
\begin{cases}
dX_0^i(x) \wedge dP_0^k(y) & \leftrightarrow \quad M_{xy}^{ij} \\
dX_0^i(x) \wedge dP_0^l(y) & \leftrightarrow \quad N_{xy}^{ij} \\
dP_0^i(x) \wedge dP_0^k(y) & \leftrightarrow \quad m_{xy}^{ij} \\
dP_0^i(x) \wedge dP_0^l(y) & \leftrightarrow \quad n_{xy}^{ij}
\end{cases} \qquad \text{(C.7)}
$$

右側が、それぞれの part の係数になる行列である。

M_{xy}^{ij} $(dX_0^i \wedge dP_0^l)$ の計算

$$
\begin{aligned}
\Omega_M^{[2-2]} &= -\frac{L^3}{3} \int dx dy C_{ijk} C_{jlm} \\
& \quad \times dX_0^i(x) \wedge dP_0^k(y) \Big[-\partial_y \Big(P_0^l(y) P_0^{m\prime}(y) \delta(x-y) \Big) - \partial_y (P_0^l(y) P_0^{m\prime}(y)) \delta(x-y) \Big] \\
& \qquad \times dX_0^k(x) \wedge dP_0^i(y) \Big[-\partial_x \Big(P_0^l(x) P_0^{m\prime}(x) \delta(x-y) \Big) \Big] \\
&= -\frac{L^3}{3} \int dx dy C_{ikj} C_{jlm} \\
& \qquad \times dX_0^i(x) \wedge dP_0^j(y) \Big[P_0^l(x) P_0^{m\prime}(x) \delta'(x-y) - \partial_x \Big(P_0^l(x) P_0^{m\prime}(x) \Big) \delta(x-y) \\
& \qquad\qquad + \partial_x \Big(P_0^l(x) P_0^{m\prime}(x) \delta(x-y) \Big) \Big] \\
&= \frac{2L^3}{3} \int dx dy C_{ijk} C_{jlm} dX_0^i(x) \wedge dP_0^j(y) \Big[P_0^l(x) P_0^{m\prime}(x) \delta'(x-y) \Big] \qquad \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

これが、$(2M)_{xy}^{ij} dX_0^i(x) \wedge dP_0^j(y)$ に当たる。よって、

$$
M = \frac{L^3}{3} C_{ijk} C_{klm} \Big[P_0^l(x) \partial_x P_0^m(x) \delta'(x-y) \Big] \qquad \text{(C.9)}
$$

N_{xy}^{ij} $(dX_0^i \wedge dP_0^k)$ の計算

$$
\begin{aligned}
\Omega_N^{[2-2]} &= -\frac{L^3}{3}\int dxdy C_{ilk}C_{ljm} \qquad\qquad (\leftarrow\quad l \text{ と } j \text{ を入れ替えた。})\\
&\quad \times \Big\{ dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\Big[P_0^{m\prime}(y)P_0^{k\prime}(y)\delta(x-y)+\partial_y\Big(P_0^m(y)P_0^{k\prime}(y)\delta(x-y)\Big)\\
&\qquad\quad +P_0^{m\prime}(y)\partial_y\Big(P_0^k(y)\delta(x-y)\Big)+\partial_y\Big(P_0^m(y)\partial_y\Big(P_0^k(y)\delta(x-y)\Big)\Big)\Big]\\
&\qquad\qquad +dX_0^j(x)\wedge dP_0^i(y)\Big[\partial_x\Big(P_0^m(x)\partial_x\Big(P_0^k(x)\delta(x-y)\Big)\Big)\Big]\Big\}\\
&\qquad\quad (\text{(C.3) を用いて、} P_0 \text{ の引数を } x \text{ に統一})\\
&= \frac{L^3}{3}C_{ikl}C_{jml}\int dxdy\, dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\\
&\quad \times \Big[P_0^{m\prime}(x)P_0^{k\prime}(x)\delta(x-y)-P_0^m(x)P_0^{k\prime}(x)\delta'(x-y)\\
&\qquad\quad -P_0^{m\prime}(y)P_0^k(x)\delta'(x-y)-\partial_y\Big(P_0^m(y)P-)^k(x)\delta'(x-y)\Big)\\
&\qquad\quad +\partial_x\Big(P_0^k(x)\partial_x\left(P_0^m(x)\delta(x-y)\right)\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{C.10}
$$

最後の行での最後の項は $k \leftrightarrow m$ とした。ここで、

$$
\begin{aligned}
-P_0^k(x)P_0^{m\prime}(y)\delta'(x-y) &= -P_0^k(x)\left(P_0^{\prime\prime m}(x)\delta(x-y)+P_0^{m\prime}(x)\delta'(x-y)\right)\\
-\partial_y\Big(P_0^k(x)P_0^m(y)\delta'(x-y)\Big) &= P_0^k(x)P_0^{m\prime}(x)\delta'(x-y)+P_0^k(x)P_0^m(x)\delta''(x-y)\\
\partial_x\Big(P_0^k(x)\partial_x\left(P_0^m(x)\delta(x-y)\right)\Big) &= P_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x)\delta(x-y)+P_0^{k\prime}(x)P_0^m(x)\delta'(x-y)\\
&\quad +P_0^k(x)P_0''(x)\delta(x-y)+2P_0^k(x)P_0^{m\prime}(x)\delta'(x-y)\\
&\quad +P_0^k(x)P_0^m(x)\delta''(x-y)
\end{aligned} \tag{C.11}
$$

を用いれば、

$$
\begin{aligned}
(\cdots(\text{続き})\cdots) &= \frac{L^3}{3}C_{ikl}C_{jml}\int dxdy\, dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\\
&\quad\times\Big[2P_0^k(x)P_0^m(x)\delta''(x-y)\\
&\qquad\quad +2P_0^k(x)P_0^{m\prime}(x)\delta'(x-y)\\
&\qquad\quad +2P_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x)\delta(x-y)\Big]\\
&= \frac{2L^3}{3}C_{ikl}C_{jml}\int dxdy\, dX_0^i(x)\wedge dP_0^j(y)\\
&\quad\times\Big[P_0^k(x)\partial_x\left(P_0^m(x)\delta'(x-y)\right)+P_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x)\delta(x-y)\Big]
\end{aligned} \tag{C.12}
$$

のようにまとまることが分かる。従って、この結果より

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{L^3}{3}C_{ikl}C_{jml}\Big[P_0^k(x)P_0^m(x)\delta''(x-y)+P_0^{m\prime}(x)\partial_x\Big(P_0^k(x)\delta(x-y)\Big)\Big]\\
&= \frac{L^3}{3}C_{ikl}C_{jml}\Big[P_0^k(x)\partial_x\left(P_0^m(x)\delta'(x-y)\right)+P_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x)\delta(x-y)\Big]
\end{aligned} \tag{C.13}
$$

のように N が求まる。この二つの表式は書き換えただけであり、互いに等価である。

$m_{xy}^{ij}\left(dP_0^k \wedge dP_0^i\right)$ の計算

結果が $\{i,x\} \leftrightarrow \{j,y\}$ で反対称になることに注意しつつ、

$$\begin{aligned}
\Omega_m^{[2-2]} &= -\frac{L^3}{3}\int dxdy C_{ijk}C_{jlm} dP_0^k(x) \wedge dP_0^i(y)\left(-\partial_x\left(P_0^l(x)X_0^{m\prime}(x)\right)\delta(x-y)\right) \\
&= \frac{L^3}{3}\int dxdy C_{ijk}C_{klm} dP_0^i(x) \wedge dP_0^j(y)\left(-\partial_x\left(P_0^l(x)X_0^{m\prime}(x)\right)\delta(x-y)\right) \qquad \text{(C.14)}
\end{aligned}$$

と求まり、

$$m = \frac{L^3}{3} C_{ijk}C_{klm}\partial_y\left(P_0^l(y)\partial_y X_0^m(y)\right)\delta(x-y)\ . \qquad \text{(C.15)}$$

となる。

$n_{xy}^{ij}\left(dP_0^l \wedge dP_0^i\right)$ の計算

この部分も $\{i,x\} \leftrightarrow \{j,y\}$ で反対称になるのだが、n は $C_{ikl}C_{jml}$ に比例する部分なので $\{k,x\} \leftrightarrow \{m,y\}$ で反対称な部分を取り出せば良い。

$$\begin{aligned}
\Omega_n^{[2-2]} &= -\frac{L^3}{3}\int dxdy C_{ijk}C_{jlm} \\
&\quad \times dP_0^l(x) \wedge dP_0^i(y)\Big(P_0^{m\prime}(x)X_0^{k\prime}(x)\delta(x-y) + \partial_x(P_0^m(x)X_0^{k\prime}(x)\delta(x-y)) \\
&\qquad\qquad + X_0^{m\prime}(x)\partial_x(P_0^k(x)\delta(x-y))\Big) \\
&= -\frac{L^3}{3}\int dxdy C_{ijk}C_{jlm} \\
&\quad \times dP_0^l(x) \wedge dP_0^i(y)\Big(P_0^{m\prime}(x)X_0^{k\prime}(x)\delta(x-y) + P_0^{k\prime}(x)X_0^{m\prime}(x)\delta(x-y) \\
&\qquad\qquad + X_0^{m\prime}(x)P_0^k(x)\delta'(x-y) + X_0^{k\prime}(y)P_0^m(y)\delta'(x-y)\Big)
\end{aligned} \qquad \text{(C.16)}$$

$\{m,x\} \leftrightarrow \{k,y\}$ で対称な項は消えて、

$$\begin{aligned}
\Omega_n^{[2-2]} &= -\frac{L^3}{3}\int dxdy C_{ijk}C_{jlm} \\
&\quad \times dP_0^l(x) \wedge dP_0^i(y)\left(X_0^{m\prime}(x)P_0^k(x)\delta'(x-y) + X_0^{k\prime}(y)P_0^m(y)\delta'(x-y)\right) \\
&= \frac{L^3}{3}\int dxdy C_{ikl}C_{jml} \\
&\quad \times dP_0^i(x) \wedge dP_0^j(y)\left(X_0^{k\prime}(x)P_0^m(x)\delta'(x-y) + X_0^{m\prime}(y)P_0^k(y)\delta'(x-y)\right) \qquad \text{(C.17)}
\end{aligned}$$

となる。これから n を読み取れば

$$n = \frac{L^3}{3} C_{ikl}C_{jml}\left[X_0^{k\prime}(x)P_0^m(x) + X_0^{m\prime}(y)P_0^k(y)\right]\delta'(x-y) \qquad \text{(C.18)}$$

C.2 Computing the Dirac brackets (§3.3.3)

ここでは、§3.3.3 で必要になる逆行列の計算の詳細を述べる。§3.3.3 で述べたように、C の逐次で逆行列を求めるには次のようにすれば良い。

まず、

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(0)} + \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)} \tag{C.19}$$

と C の次数に対して Lagrange 括弧を展開すれば、逆行列である Dirac matrix $\mathbf{C}$ は

$$\begin{aligned}\mathbf{C} =& \mathbf{L}^{(0)-1} - \mathbf{L}^{(0)-1}(\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)})\mathbf{L}^{(0)-1} + \mathbf{L}^{(0)-1}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(0)-1}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(0)-1} + \mathcal{O}(C^3) && \text{(C.20)}\\ =& \mathbf{J} - \mathbf{J}(\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)})\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{J}\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{J} + \mathcal{O}(C^3) && \text{(C.21)}\end{aligned}$$

と求まる。

ここで、$\mathbf{J}$ は前に求めた 0 次の Lagrange 括弧の逆行列 $\mathbf{J} = \mathbf{L}^{(0)-1}$ である。

ここで具体的な形をみるために、次の行列 $\mathbf{X}$ を取ろう。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{\mathrm{T}} & x \end{pmatrix} \tag{C.22}$$

このとき、$\mathbf{JXJ}$ と $\mathbf{JXJXJ}$ は各々、

$$\begin{aligned}\mathbf{JXJ} &= \begin{pmatrix} & -J \\ J & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & X \\ -X^{\mathrm{T}} & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -J \\ J & \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -JxJ & -JX^{\mathrm{T}}J \\ JXJ & 0 \end{pmatrix} && \text{(C.23)}\\ \mathbf{JXJXJ} &= \begin{pmatrix} -JxJXJ - JX^{\mathrm{T}}JxJ & -JX^{\mathrm{T}}JX^{\mathrm{T}}J \\ JXJXJ & 0 \end{pmatrix} && \text{(C.24)}\end{aligned}$$

となる。

従って求める Dirac 括弧は

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x), X_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} &= J\left(l^{(1)}\right)J \\
&\quad + J\left(l^{(2)}\right)J - Jl^{(1)}JL^{(1)}J - J(L^{(1)})^{\mathrm{T}}Jl^{(1)}J \\
&= \frac{1}{L^2}\left(l^{(1)}\right)^{ij}_{xy} \\
&\quad + \frac{1}{L^2}\left(l^{(2)}\right)^{ij}_{xy} + \frac{1}{L^3}\left\{(l^{(1)})^{il}_{xz}(L^{(1)})^{lj}_{zy} + \left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{il}_{xz}(l^{(1)})^{lj}_{zy}\right\} + \mathcal{O}(C^3)
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x), P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} &= -J + J\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)J \\
&\quad + J\left((L^{(2)})^{\mathrm{T}}\right)J - J(L^{(1)})^{\mathrm{T}}J(L^{(1)})^{\mathrm{T}}J \\
&= \frac{1}{L}(\mathbf{1})^{ij}_{xy} \\
&\quad + \frac{1}{L^2}\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{ij}_{xy} \\
&\quad + \frac{1}{L^2}\left((L^{(2)})^{\mathrm{T}}\right)^{ij}_{xy} + \frac{1}{L^3}\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{il}_{xz}\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{lj}_{zy} + \mathcal{O}(C^3)
\end{aligned}
\tag{C.26}
$$

$$
\left\{P_0^i(x), P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}} = 0 \tag{C.27}
$$

のようになる[57]。以下では、前節で求めた具体形を代入し、Dirac 括弧を求めていこう。

(C.25) の計算　まず、$\mathcal{O}(C^1)$ を計算すれば

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x), X_0^j(y)\right\}^{(1)}_{\mathrm{DB}} &= \frac{1}{L^2}\left(l^{(1)}\right)^{ij}_{xy} \\
&= \frac{1}{L^2}L^2 C_{ijl}\partial_x X_0^l \delta(x-y) \\
&= C_{ijl}X_0^{l\prime}(x)\delta(x-y)
\end{aligned}
\tag{C.28}
$$

となる。

$\mathcal{O}(C^2)$ の方はまず、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{L^3}\left\{(l^{(1)})^{il}_{xz}(L^{(1)})^{lj}_{zy} + \left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{il}_{xz}(l^{(1)})^{lj}_{zy}\right\} \\
= \quad & -LC_{ikl}C_{jml}\left(X_0^{k\prime}(x)P_0^m(x) + X_0^{m\prime}(y)P_0^k(y)\right)\delta'(x-y)
\end{aligned}
\tag{C.29}
$$

---

[57] $\left\{P_0^i(x), P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}}$ はきっと C の補正がないのだろう。どうやって示せば良いのだろう？

残りは

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{L^2}\left(l^{(2)}\right)^{ij}_{xy}\\
&=\frac{1}{L^2}\Bigg(-\frac{L^3}{3}C_{ikl}C_{jml}\Big\{\left(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x)-X_0^{m\prime}(y)P_0^{k\prime}(y)\right)\delta(x-y)\\
&\qquad-\left(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m}(x)+X_0^{m\prime}(y)P_0^{k}(y)\right)\delta'(x-y)\Big\} && (l^{[2-1]}\text{ より})\\
&\quad+\frac{L^3}{3}C_{ikl}C_{jml}\left[X_0^{k\prime}(x)P_0^{m}(x)+X_0^{m\prime}(y)P_0^{k}(y)\right]\delta'(x-y) && (n\text{ より})\\
&\quad+\frac{L^3}{3}C_{ijk}C_{klm}\partial_x\left(P_)^{l}(x)X_0^{m\prime}(x)\right)\delta(x-y)\Bigg) && (m\text{ より})
\end{aligned}
\tag{C.30}
$$

のようになる。従って、以上を併せて結果は

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x),X_0^j(y)\right\}^{(2)}_{\mathrm{DB}}=\frac{-L}{3}C_{ikl}C_{jml}&\Big[\left(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m\prime}(x)-X_0^{m\prime}(y)P_0^{k\prime}(y)\right)\delta(x-y)\\
&+\left(X_0^{k\prime}(x)P_0^{m}(x)+X_0^{m\prime}(y)P_0^{k}(y)\right)\delta'(x-y)\Big]\\
&+\frac{L}{3}C_{ijk}C_{klm}\partial_y\left(P_0^{l}(y)X_0^{m\prime}(y)\right)\delta(x-y)
\end{aligned}
\tag{C.31}
$$

(C.26) の計算　同様にまず $\mathcal{O}(C^1)$ を計算すれば

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x),P_0^j(y)\right\}^{(1)}_{\mathrm{DB}}&=\frac{1}{L^2}\delta^{il}_{xw}((L^{(1)})^{\mathrm{T}})^{lk}_{wz}\delta^{kj}_{zy}\\
&=\frac{1}{L^2}((L^{(1)})^{\mathrm{T}})^{ij}_{xy}\\
&=C_{ijl}P_0^l(y)\delta'(x-y)
\end{aligned}
\tag{C.32}
$$

ともとまる。

つぎに $\mathcal{O}(C^2)$ を計算しよう。

$$
\begin{aligned}
\left\{X_0^i(x),P_0^j(y)\right\}_{\mathrm{DB}}&=J\left((L^{(2)})^{\mathrm{T}}\right)J-J(L^{(1)})^{\mathrm{T}}J(L^{(1)})^{\mathrm{T}}J\\
&=\underbrace{\frac{1}{L^2}\left((L^{[2-1]}+M+N)^{\mathrm{T}}\right)^{ij}_{xy}}_{\spadesuit}+\underbrace{\frac{1}{L^3}\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{il}_{xz}\left((L^{(1)})^{\mathrm{T}}\right)^{lj}_{zy}}_{\clubsuit}
\end{aligned}
\tag{C.33}
$$

まず ♠ の方は

$$
\begin{aligned}
\spadesuit=&-\frac{L}{3}C_{jkl}C_{iml}\partial_y\left(P_0^k(y)\left(2\partial_xP_0^m(x)+P_0^m(x)\partial_x\right)\delta(y-x)\right) && \left((L^{[2-1]})^{\mathrm{T}}\text{より}\right)\\
&+\frac{L}{3}C_{jik}C_{klm}\left[P_0^l(y)\partial_yP_0^m(y)\delta'(y-x)\right] && (M^{\mathrm{T}}\text{より})\\
&+\frac{L}{3}C_{jkl}C_{iml}\left[P_0^k(y)\partial_y\left(P_0^m(y)\delta'(y-x)\right)+P_0^{k\prime}(y)P_0^{m\prime}(y)\delta(y-x)\right] && (N^{\mathrm{T}}\text{より})
\end{aligned}
\tag{C.34}
$$

♣ の方も同様に

$$\begin{aligned} \clubsuit &= \int dz L C_{lim} P_0^m(z) \delta'(z-x) C_{jlk} P_0^k(y) \delta'(y-z) \\ &= C_{iml} C_{jkl} P_0^k(y) \partial_x \left(P_0^m(x) \delta'(y-x) \right) \end{aligned} \tag{C.35}$$

以上を併せて、引数を x にまとめると

$$\begin{aligned} \left\{ X_0^i(x), P_0^j(y) \right\}_{\mathrm{DB}}^{(2)} = -\frac{L}{3} C_{ikl} C_{jml} \Big[& P_0^k(x) P_0^m(x) \delta''(x-y) \\ & + 3 P_0^k(x) P_0^{m\prime}(x) \delta'(x-y) \\ & + \left(2 P_0^k(x) P_0^{\prime\prime m}(x) + P_0^{k\prime}(x) P_0^{m\prime}(x) \right) \delta(x-y) \Big] \\ + \frac{L}{3} C_{ijl} C_{lkm} P_0^k(y) P_0^{m\prime}(y) \delta'(x-y) & \end{aligned} \tag{C.36}$$

のようになる。

これで、2 次の Dirac 括弧が求まった。

参考文献

[1] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. K. Townsend, "Supermembranes and Eleven-Dimensional Supergravity", Phys. Lett. **B189** (1987) 75-78

[2] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. K. Townsend, "Properties of the Eleven-Dimensional Supermembrane Theory", Ann. Phys. **185** (1988) 330-368

[3] P. K. Townsend, "Three Lectures on Supermembranes" in *"Superstrings '88"*.

[4] M. J. Duff, "Supermembranes", `hep-th/9611203`

[5] I. Bars, "Membrane Symmetries and Anomalies" in *"Supermembranes and Physics in 2+1 Dimensions"*.

[6] I. Bars, "Issues of Topology and The Spectrum of Membranes" in *"Supermembranes and Physics in 2+1 Dimensions"*.

[7] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi and C. B. Thorn, "Quantum Dynamics of A Massless Relativistic String", Nucl. Phys. **B56**, 109 (1973).

[8] H. B. Nielsen, O. Olesen, "Vortex-Line Model for Dual Strings", Nucl. Phys. **B61**(1973) 45-61

[9] P. S. Howe, R. W. Tucker, "A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for a spinning membrane", J. Phys. **A10** (1977) L155;
"Local supersymmetry in (2+1) dimensions. I. Supergravity and differential forms", J. Math. Phys. **19**, (1978) 869;
"Local supersymmetry in $(2+1)$ dimensions. II. An action for a spinning membrane", J. Math. Phys. **19**, (1978) 981

[10] Y. Kazama, "Strings and Beyond" lecture notes given at Ochanomizu Univ. (1998,1997)

[11] M. J. Duff, T. Inami, C. N. Pope, E. Sezgin, K. S. Stelle, "Semiclassical Quantization of the Supermembrane", Nucl.Phys. **B297**(1988) 515-538

[12] Alain Connes, Michael R. Douglas, Albert Schwarz, "Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori", JHEP **9802** (1998) 003 `hep-th/9711162`

[13] Chong-Sun Chu, Pei-Ming Ho, "Noncommutative Open String and D-brane", Nucl.Phys. **B550** (1999) 151-168, `hep-th/9812219`

[14] Chong-Sun Chu, Pei-Ming Ho, "Constrained Quantization of Open String in Background B Field and Noncommutative D-brane" ,to appear in Nucl.Phys. **B** `hep-th/9906192`

[15] F. Ardalan, H. Arfaei, M. M. Sheikh-Jabbari, "Dirac Quantization of Open Strings and Noncommutativity in Branes", `hep-th/9906161`

[16] T. Kawano, "Non-commutative Geometry in String Theory", 99 年度 特別講義 at 京都大学 (1999)

[17] Nathan Seiberg, Edward Witten, "String Theory and Noncommutative Geometry," JHEP **9909** (1999) 032, `hep-th/9908142`

[18] U. Lindström, M. Roček, "A Super-Weyl-Invariant Spinning Membrane", Phys.Lett. **B218**(1989) 207-209

[19] 九後 汰一郎, 「ゲージ場の量子論 I & II」 (培風館)

[20] M. M. Sheikh-Jabbari, A. Shirzad, "Boundary Conditions as Dirac Constraints", `hep-th/9907055`

[21] P. A. M. Dirac, "*Lectures on Quantum Mechanics*" (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ., 1964)

[22] Ashoke Sen, "Supersymmetric World-volume Action for Non-BPS D-branes", JHEP **9910** (1999) 008, `hep-th/9909062`

[23] M. Henneaux, L. Mezincescu, "A σ-model Interpretation of Green-Schwarz Covariant Superstring Action", Phys.Lett. **152B** (1985) 340-342

[24] A. Achucarro, J. M. Evans, P. K. Townsend and D. L. Wiltshire, "Super P-Branes," Phys. Lett. **B198**, 441 (1987).

[25] J. Hughes, J. Liu, J. Polchinski, "Supermembranes", Phys.Lett. **B180** (1986), 370-374

[26] Ph. Brax, J. Mourad, "Open supermembranes in eleven dimensions", Phys.Lett. **B408** (1997) 142-150, `hep-th/9704165`;
"Open Supermembranes Coupled to M-Theory Five-Branes", Phys.Lett. **B416** (1998) 295-302, `hep-th/9707246`

[27] K. Ezawa, Y. Matsuo, K. Murakami, "Matrix Regularization of an Open Supermembrane —towards M-theory five-branes via open supermembranes —", Phys.Rev. **D57** (1998) 5118-5133, `hep-th/9707200`

[28] Bernard de Wit, Kasper Peeters, Jan Plefka, "Open and Closed Supermembranes with Winding", Nucl.Phys.Proc.Suppl. **68** (1998) 206-215, `hep-th/9710215`

[29] Hermann Nicolai, Robert Helling, "Supermembranes and M(atrix) Theory", *Lectures given by H. Nicolai at the Trieste Spring School on Non-Perturbative Aspects of String Theory and Supersymmetric Gauge Theories, 23 - 31 March 1998*, `hep-th/9809103`

[30] B. de Wit, M. Lüscher, H. Nicolai, "The Supermembrane is Unstable", Nucl. Phys. **B320**(1989), 135-159

[31] B. de Wit, J. Hoppe, H. Nicolai, "On The Quantum Mechanics of Supermembranes", Nucl. Phys. **B305**[FS23] (1988), 545-581

[32] J. Hoppe, "Quantum Theory of a Massless Relativistic Surface and a Two-Dimensional Bound State Problem", MIT Ph.D thesis,and in 素粒子論研究 **80-3** (1989)

[33] 篠原 俊一, 「行列正則化と IIB 行列模型」 修士論文 (京都大学) (2000)

[34] Martin Bordemann, Eckhard Meinrenken, Martin Schlichenmaier, "Toeplitz Quantization of Kähler Manifolds and $gl(N)$ $N \to \infty$", Commun.Math.Phys. **165** (1994) 281-296, `hep-th/9309134`

[35] Chong-Sun Chu, Pei-Ming Ho, Miao Li, "Matrix Theory in a Constant C Field Background",`hep-th/9911153`

[36] 後藤 鉄男、「拡がりをもつ素粒子像」 (物理学選書) 岩波書店 (1978)

[37] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, (W.M. Freeman, San Francisco, 1970), Chapter 21

[38] J. M. Evans, "Super p-brane Wess-Zumino terms", Class.Quantum Grav. **5** (1988) L87-L90

[39] J. M. Evans, "Supersymmetric Yang-Mills Theories And Division Algebras", Nucl. Phys. **B298**, 92 (1988);
G. Sierra, "An application of the theories of Jordan algebras and Freudenthal triple systems to particles and strings", Class. Quantum Grav. **4** (1987) 227-236

[40] Joseph Polchinski, "TASI Lectures on D-Branes", *Lectures given at TASI-96* , `hep-th/9611050`

[41] Edward Witten, "Bound States Of Strings And p-Branes", Nucl.Phys. **B460** (1996) 335-350, `hep-th/9510135`

[42] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, L. Susskind, "M Theory As A Matrix Model: A Conjecture", Phys.Rev. **D55** (1997) 5112-5128, `hep-th/9610043`

[43] Washington Taylor, "Lectures on D-branes, Gauge Theory and M(atrices)", *lectures presented at Trieste summer school on particle physics and cosmology, June 1997.* `hep-th/9801182`

[44] 村上 公一, 「Supermembrane を用いた Matrix Theory の解析」 博士論文 (京都大学)

[45] Shoichi Kawamoto, Naoki Sasakura, in preparation.