

$\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric $O(N)$ Model in Two Dimensions beyond the Leading Order of $1/N$ Expansion

— Master Thesis —

大阪大学大学院 理学研究科 物理学専攻 素粒子論研究室

木村 哲士

t-kimura@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

Abstract

現在この世界の低エネルギー領域を記述する標準模型として Yang-Mills 理論を用いることが広く認められているが、Yang-Mills 理論と同様に多くの分野に貢献している模型として非線形模型というものがある。この模型は場の理論の非摂動的性質を多く提供するために活発に研究されている模型である。最近は超対称性を含む模型としても解析されている。

そこで我々は今回、2次元時空 ($D = 2$) での $\mathcal{N} = 2$ 超対称 $O(N)$ 非線形模型の非摂動的解析を、補助場を導入し、 $1/N$ 展開を用いて行った。この模型の target 空間として、原点を含む strong coupling theory と、原点を含まない weak coupling theory の両方を構成することが可能であると考えられる。どちらの target 空間も非コンパクトな Kähler 多様体として実現されている。

それぞれの模型を $1/N$ 展開の主要項で解析したところ、strong coupling theory ではポテンシャルの停留点が 2 つ、weak coupling theory では停留点が 1 つ存在している。strong coupling theory では補助場が粒子描像を持たない解と、ゼロ質量粒子として登場する解がある。一方 weak coupling theory ではたった 1 つの解が、粒子描像を持たない補助場の解である。

これらの 2 つの理論はどうつながっているのか。それを見るために繰り込み群を構成するが、展開の主要項だけでは発散が登場しない。したがって我々は $1/N$ 展開での高次を解析しなければならない。しかし拘束条件が F -term にのみ存在するために非繰り込み定理が働く。したがって繰り込みは波動関数繰り込みを介して行う方法を取る。

この方法で結合定数の繰り込みを考察したところ、この模型は漸近的自由性を持たない事が定性的ではあるが示された。これは結合定数が F -term にのみ存在することが直接の原因であり、他の非線形模型とは異なる振舞いを示す。

平成 13 年 2 月 10 日

Contents

1	Introduction	4
1.1	Histories of Particle Physics	4
1.2	Supersymmetric Nonlinear Sigma Models	4
1.3	The Purpose	7
1.4	Organizations	7
2	The Supersymmetric Lagrangian in Two Dimensions	9
3	Leading Order Contributions in $1/N$ Expansion	13
3.1	Strong Coupling Theory: $a^2 = 0$	13
3.1.1	Effective Action and Effective Potential	13
3.1.2	Gap Equations	15
3.1.3	Massless Solution	16
3.1.4	Massive Solution	18
3.2	Weak Coupling Theory: $a^2 \neq 0$	20
3.2.1	Effective Action and Effective Potential	20
3.2.2	Gap Equations	21
3.2.3	Massless Solution	21
3.2.4	Massive Solution	22
4	Realization of Symmetries	26
4.1	Phase Symmetry Realization	26
4.2	Dilatation Symmetry Realization	28
4.3	$O(N)$ Symmetry Realization	29
5	Beyond the Leading Order Contributions	31
5.1	Renormalization Group Flow: Two Scenarios	31
5.1.1	Asymptotically Free Scenario	31
5.1.2	Asymptotically Non-Free Scenario	32
6	Renormalization in Higher Order Contributions	34
6.1	Propagators	34
6.2	Wave Function Renormalization	34

6.3	Coupling Constant Renormalization	37
7	Conclusion and Discussions	39
A	Non-Perturbative Analysis: $1/N$ Expansion	43
B	Momentum Representations	46
C	Gap Equations in NLO – Non-Renormalization –	47
C.1	Two-Point Functions	48
C.2	Effective Potential	49
C.3	Gap Equations	50
C.4	Supersymmetric Massless Condition	50
C.5	Supersymmetric Massive Condition	51
D	Renormalization in Higher Order Contributions	56
D.1	Preliminaries for Renormalization	56
D.2	Loop Corrections	57
D.2.1	Propagators	57
D.2.2	Four-Point Vertex	58
D.2.3	Three-Point Vertex	59
D.3	Field Mixing	60
D.4	Wave Function Renormalization	61
D.5	Coupling Constant Renormalization	62
E	Spontaneous Symmetry Breaking in Four Dimensions	64
E.1	Nambu-Goldstone Theorem	64
E.2	Example: Nambu-Jona-Lasinio Model	69
F	Nonlinear Sigma Models in Two Dimensions	73
F.1	$O(N)$ Model	73
F.2	CP^{N-1} Model	77
F.3	Gross-Neveu Model	80
G	Coleman’s Theorem	83
G.1	Introduction and Conclusions	83
G.2	Lemma	83

G.3	The Proof	84
H	Realization of Symmetries in Two Dimensions	86
H.1	Two Point Function	86
H.2	Soluble Model	86
H.3	Chiral Gross-Neveu Model	90
I	Notations of $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetry in Four Dimensions	93
J	Dimensional Reduction to Two Dimensions	95
K	Extended $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetry in Two Dimensions	97
K.1	Definitions	97
K.1.1	Metric and Spinors	97
K.1.2	Lorentz Transformations	97
K.1.3	Lorentz Scalar, Vector	97
K.2	Supersymmetry	98
K.2.1	Supersymmetry Algebra	98
K.2.2	Super-Poincaré Translation	98
K.2.3	Differential Representations	98
K.2.4	Super-Covariant Derivative	99
K.3	Superfield	99
K.3.1	Chiral Superfield	100
K.3.2	Real Superfield	100
L	Kähler Potential	102
M	$\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Q^N Model in Two Dimensions	104
M.1	Lagrangian and Symmetries	104
M.2	Effective Potential	105
M.3	Gap Equations and Vacua	106
M.4	Schwinger Phase	108
M.5	Higgs Phase	112
M.6	Asymptotic Freedom	115

1 Introduction

1.1 Histories of Particle Physics

4次元時空 ($D = 4$) の場の量子論は、その誕生当初から、時空次元が我々人間の感知できる、そして我々人間の実験や観測に登場する次元数を持つことから、最も研究されてきた理論である。誕生当初から様々な試行錯誤が繰り返された。技術的には、紫外発散、ゲージ対称性、アノマリーなど、解決困難と思われていた問題が非常に多くの研究者の知恵によって、正則化とくりこみ、ghost や BRST 対称性の導入などといった形で解決されて来た。また低エネルギー領域での有効理論を構成するためにも、いろいろな模型が考案されて来た。スカラー場理論、スピノール場理論、非線形模型、可換ゲージ理論、そして Yang-Mills 理論などである。さらにこれらの応用として標準模型 [1][2]、大統一理論 [3][4]、超対称性理論 [5][6][7]、超重力理論 [8][9] その他多くの模型が存在する。ハドロン物理学を説明するために考案され、後に全ての物理現象を説明する理論の候補として再登場した弦理論 [10][11] もこの延長上にある。

$D = 4$ 理論の解析はいろいろな技術的問題を抱えており、今のところは全ての量子論的現象に満足な体系が完成していない。そこで、 $D = 4$ ではなく、その toy model ではあるが、2次元時空 ($D = 2$) での解析が、場の量子論誕生当時から盛んに研究されている [12]。 $D = 2$ 理論は数学的に解析可能で、さらに物理的にも有用な模型を非常に多く与えてくれるのである。そういった意味で、 $D = 2$ 理論を研究する事が非常に重要視される。また、 $D = 2$ 理論は非摂動論的解析が可能な理論体系の一つでもある。

場の量子論の摂動論的解析はもちろんのことながら、非摂動論的解析は特に重要である。非摂動論的解析によって、摂動論的解析では得られない、場の理論の数々の特徴を得ることができるからである。

1970年代後半に、様々な実験による審査の後、Weinberg-Salam (WS) model が標準模型として摂動論的解析によって確立されたが、その根底にある非摂動論的な性質は依然として解明されていない。その筆頭に挙げられるのがカラーの閉じ込めであろう。我々は $D = 4$ 理論においては、この閉じ込めに対する確固たる理論を、まだ持ち合わせてはいないのである。

またここ数年、弦理論も非摂動論的解析が非常に活発になっている。最近の発展における弦理論の研究の産物は、duality[13] と D-brane[14] であろう。これらの産物によって、 $D = 4$ 以外の場の理論の研究も同時に盛んになっている。その1つとして見ても、やはり $D = 2$ 理論は重要である。

1.2 Supersymmetric Nonlinear Sigma Models

Quasi Nambu-Goldstone Boson

非線形模型 (nonlinear sigma model, NLSM) を構成したとき、その target 空間は、破れる前に持っていた対称性 G を破れた後にまだ保っている対称性 H で割った G/H となっている。これを超対称性模型に拡張しよう。

$D = 4, \mathcal{N} = 1$ の target 空間は Kähler 多様体になっていることが B. Zumino によって示されている [15]。したがって NLSM を超対称非線形模型 (supersymmetric nonlinear sigma model, SNLSM) に拡張すると、target 空間は G^C/\hat{H} となる。ここで G^C は G の複素化であり、 \hat{H} は H^C を含んだものとなっている。

だが、破れる前に理論が持っていた対称性が G^C に拡張されているわけではないことに注意したい。非線形模型は、低エネルギー定理によって記述される Nambu-Goldstone (NG) boson の理論である。この NG boson は、理論が最初持っていたポテンシャルの最小点の集合 (対称性 G を持つ) の中を運動する。これを超対称性模型に拡張した際、NG boson は chiral superfield のスカラー場として含まれる。NG boson はポテンシャルの最小点を運動していたので、ポテンシャルも F -term として理論に入って来て複素化され、target 空間は G^C となる。しかし運動項は、理論がエルミートであるので実なままである (D -term)。したがって理論としては G のままとなっている。

この複素化によって、NG boson は chiral superfield のスカラー場として組み込まれるが、さらに Quasi Nambu-Goldstone boson (QNG boson) が導入される。この QNG boson が SNLSM の構成を難しくしている。

BKMU Classifications

SNLSM は大きく分けて A type, B type, C type という 3 つのタイプに分類される [16][17]。このうち、A type と C type の Lagrangian は対称性 G の変換で不変であるが、B type Lagrangian は Kähler 変換を伴う。また A type と C type には QNG boson が存在し、そのため理論に任意関数と言う、target 空間の非コンパクトな方向を決める自由度が含まれる。target 空間自体は G^C/\hat{H} となっている。一方 B type には QNG boson が登場せず、そのため任意関数も登場せず、target 空間も NLSM のときのまま G/H で Kähler 多様体となっている。

type	G transformation	arbitrariness	QNG boson	target space
A type	invariant	exist	exist	non-compact
B type	up to Kähler transformation	none	none	compact
C type	invariant	exist	exist	non-compact

Table 1: BKMU classification.

B type は QNG boson が全く現れず、NG boson だけで記述されている (pure realization という) ので、このタイプが最もよく研究されて来ている。しかしその研究において、線形起源からこの B type Lagrangian を構成しようとしてもそれは不可能であることが分かっている。言い替えると、線形起源の低エネルギー理論として非線形模型を構成すると、必ず理論に QNG boson が含まれているのである。では A type や C type はどうか。それらは理論に任意関数が登場するので非常に厄介である。target 空間のある点を真空に選ぶのであるが、真空点の選び方で破れずに残る対称性 H が大きく変わってしまうのである。

Nonlinear Sigma Models as Gauge Theories

BKMU 分類での B type、つまり pure realization をなす type は、超対称性を導入しても target 空間が $G^{\mathbf{C}}/\hat{H} \simeq G/H$ であった。つまり QNG boson が存在せず、target 空間そのものもそのおかげでコンパクトなものになっていた。しかしその線形起源を構築しようとしても、線形模型から非線形模型を構成するとどうしても QNG boson が登場してしまうという問題のために、ながらく B type の線形模型は構成されなかった。一方 A type や C type は QNG boson が存在して、線形模型は構成できるのであるが、同時に線形模型には任意関数が導入される。この QNG boson、任意関数のために target 空間が非コンパクトかつ非等質になり、真空をどこに取るかで対称性の破れ方まで変わってしまう。

実はごく最近になって B type のうち、さらに target 空間がエルミート対称空間 (hermitian symmetric space, HSS) の線形起源を構成することに成功した [18][19][20]。HSS となっている target 空間の分類を Table 2 に挙げておく。

Type	G/H	$\dim_{\mathbf{C}}(G/H)$
AIII ₁	$CP^{N-1} = SU(N)/SU(N-1) \times U(1)$	$N-1$
AIII ₂	$G_{N,M}(\mathbf{C}) = U(N)/U(N-M) \times U(M)$	$M(N-M)$
BDI	$Q^{N-2}(\mathbf{C}) = SO(N)/SO(N-2) \times U(1)$	$N-2$
CI	$Sp(N)/U(N)$	$\frac{1}{2}N(N+1)$
DIII	$SO(2N)/U(N)$	$\frac{1}{2}N(N-1)$
EIII	$E_6/SO(10) \times U(1)$	16
EVII	$E_7/E_6 \times U(1)$	27

Table 2: Hermitian symmetric spaces (HSS).

CP^{N-1} model と $G_{N,M}(\mathbf{C})$ model は実は以前から知られていた [21][22]。これらの model も [19] の構成方法で再現される。

その構成方法は、非線形模型の拘束条件を D -term もしくは F -term 拘束として課し、その拘束条件のために出現する QNG boson をゲージ場で吸収させて、コンパクトな線形起源を構成するというものである。詳細は挙げないが、 CP^{N-1} model と $G_{N,M}(\mathbf{C})$ model は D -term 拘束のみを課し、その他の model には F -term 拘束まで課している。そしてそれぞれに $U(1)$ もしくは $SU(N)$ ゲージ場を導入している。

1.3 The Purpose

$D = 4$, $\mathcal{N} = 1$ SNLSM を $D = 2$ 理論に応用する。我々はまず、SNLSM の 1 つを $D = 2$ に dimensional reduction することで解析した。この模型は Q^N model と呼ばれる [23]¹。ここで用いられた解析方法は $1/N$ 展開であり、非摂動的解析の一つの方法である。ここでの解析方法などを用いることで、target 空間が HSS となっている他の模型の解析も可能になると思われる。

今回ここで議論するのは、 Q^N model の応用である。 Q^N model では QNG boson を消去させるために $U(1)$ ゲージ場を導入していたが、この $U(1)$ ゲージ場を消去する。具体的には経路積分を用いてゲージ場を他の場で書き換えて再代入するのであるが、その模型はちょうど、NLSM の中でもっとも有名な $D = 2$ の $O(N)$ model の拡張された超対称模型への拡張になっている。非超対称模型や、 $\mathcal{N} = 1$ の $O(N)$ 超対称性模型は以前から多くの研究者によって解析されているが、それをさらに少し拡張してみた。

この模型の特徴は、target 空間が Kähler 多様体であり、非コンパクトな広がりを持っていることである。この模型に任意関数を導入し Ricci 平坦条件を加えることで、弦理論とのつながりを考えることも可能である。 $D = 2$, $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を持つコンパクトな target 空間は Calabi-Yau 多様体 [24] や Gepner model [25] として研究されているが、非コンパクトな target 空間を考えるのも面白いと思われる。しかし残念ながらこの論文ではこれについては一切触れることはできない。

また $D = 2$ 理論では、連続対称性に関しては自発的対称性の破れが起こらないという定理 (Coleman's theorem [26]) が存在する。我々はこの定理に関して、 Q^N model では容易に回避することができたが、 $O(N)$ model ではなかなかそうは行かない。しかし回避の方法を考察するのは重要であるので、それについても触れたいと思う。

1.4 Organizations

Section 2 ではまず $D = 2$, $\mathcal{N} = 2$ の superfield を用いた Lagrangian の定義を行う。その Lagrangian が持っている対称性を列挙する。Section 3 では $1/N$ 展開の主要項が与える解析結果の列挙を行う。ここでは 2 つの理論のそれぞれの有効ポテンシャルから得られる gap equation を導出し、それを満たす真空解を考察する。しかしそれだけでは満足行く様々な理論の関係が見出せない。つまり繰り込み群が構成できない。Section 5 でとりあえず主要項までの解析のまとめを行い、section 6 で波動関数繰り込みを用いた高次補正を議論する。Section 7 では、全体のまとめとこの模型の今後の展望、応用面等を議論する。

Appendix A では本文に登場する有効ポテンシャルに必要な最小限の議論、 $1/N$ 展開を掲載してある。運動量表示での計算に必要な定義は appendix B に掲載される。Appendix C では、 $1/N$ 展開の高次の補正でも、 F -term だけでは発散が登場しないことを確認する。計算が長いだけなのでここに掲載しておく。同様に長い計算のため、結合定数の繰り込みを見る一つの手段を appendix D に記載する。

¹本文ではこれは掲載しない。この模型の詳細は appendix M を参照されたい。

Appendix E では $D = 4$ での Nambu-Goldstone theorem の紹介を行う。appendix F では、この論文本体の元になっている、超対称性を含まない $D = 2$ 非線形模型の例を簡単に列挙している。Coleman's theorem は appendix G に掲載してある。Coleman's theorem の一つの回避として、appendix H を掲載する。Appendix I では、超対称性理論の解析をする際に参考にした notation を列挙してある。それは $D = 4$ 理論であるが、 $D = 2$ への reduction を appendix J に、それとは独立に、 $D = 2, \mathcal{N} = 2$ 超対称性を appendix K に掲載する。Appendix L は Kähler 多様体の非常に簡単な準備として掲載してある。これは摂動論的解析を考察するときにも非常に重要である。最後に、具体的な解析例として行った研究の一つである、“Large- N Limit of $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Q^N Model in Two Dimensions” を appendix M に掲載する。

2 The Supersymmetric Lagrangian in Two Dimensions

$D = 2$, $\mathcal{N} = 2$ 超対称 $O(N)$ 模型の Lagrangian をまずは構成することから始まる。NLSM との類似で、chiral superfield Φ_i を用いて書き下すのであるが、target 空間が Kähler 多様体である必要があるので、anti-chiral superfield Φ_i^* も同時に導入する²。また、やはり target 空間が Kähler 多様体であるために、拘束条件が F -term 拘束として複素化される。

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \Phi_i^* \Phi_i + \frac{1}{2} \left\{ \int d^2\theta \Phi_0 (\Phi_i^2 - a^2) + \int d^2\bar{\theta} \Phi_0^* (\Phi_i^{*2} - (a^2)^*) \right\}. \quad (2.1)$$

ここで a^2 , $(a^2)^*$ は互いに複素共役の関係にある定数である。target 空間が Kähler 多様体であるために、通常の $O(N)$ NLSM とは異なり、この定数がゼロに取ることもできる。さらにこの定数は位相変換で簡単に実数に定義しなおすことができる。例えば、次のように場に対して位相回転を行おう。

$$\begin{aligned} a^2 &= |a^2| e^{2i\alpha}, & a^{*2} &= |a^2| e^{-2i\alpha}, \\ \Phi_0 &\rightarrow e^{2i\alpha} \Phi_0, & \Phi_0^* &\rightarrow e^{-2i\alpha} \Phi_0^*, & \Phi_i &\rightarrow e^{-i\alpha} \Phi_i, & \Phi_i^* &\rightarrow e^{i\alpha} \Phi_i^*. \end{aligned}$$

位相変換された superfield を用いて (2.1) を書き直すことができる。

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \Phi_i^* \Phi_i + \frac{1}{2} \left\{ \int d^2\theta \Phi_0 (\Phi_i^2 - a^2) + \int d^2\bar{\theta} \Phi_0^* (\Phi_i^{*2} - a^2) \right\}. \quad (2.2)$$

以後、この Lagrangian で議論を進めよう。

この superfield で記述される Lagrangian は component field でも容易に書き下すことができる。書き下した結果を次に挙げておく³。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_m A_i^* \partial^m A_i + i \bar{\psi}_i \gamma^m \partial_m \psi_i + F_i^* F_i \\ &+ \frac{1}{2} \{ F_0 (A_i^2 - a^2) + F_0^* (A_i^{*2} - a^2) \} + \{ F_i A_i A_0 + F_i^* A_i^* A_0^* \} \\ &- \frac{1}{2} A_i (\bar{\psi}_0^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \psi_0) - \frac{1}{2} A_i^* (\bar{\psi}_0 \psi_i^c + \bar{\psi}_i \psi_0^c) - \frac{1}{2} A_0 \bar{\psi}_i^c \psi_i - \frac{1}{2} A_0^* \bar{\psi}_i \psi_i^c. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$D = 2$ 理論の規約として、時空の添字 m は $m = 0, 1$ をとる事とする。また ψ_i は Dirac スピノールであり、 $\psi_i^c = C_2 \bar{\psi}_i^T$ はその荷電共役として導入されている。

Lagrangian の持つ対称性には、 $a^2 = 0$, $a^2 \neq 0$ で多少場合が異なるが、それをここで列挙しておく。

- $O(N)$ symmetry

拘束条件 $\Phi_i^2 = a^2$ は $O(N, \mathbb{C})$ 変換で不変である。このとき Φ_i は $O(N, \mathbb{C})$ のベクトル表現、つまり N 表現をなす。 Φ_0 は $O(N)$ 一重項である。複素直交行列 R は、

$$R^T(\alpha) R(\alpha) = 1, \quad (2.4a)$$

²本当は Kähler ポテンシャルは $\Phi_i^* \Phi_i$ の任意関数で、(7.1) のように $K(\Phi_i, \Phi_i^*) = f(\Phi_i^* \Phi_i)$ として書かれる。何故なら target 空間の非コンパクト方向には $O(N, R)$ 変換ではつながらないからである。しかしここでは最も簡単な関数 $f(\Phi_i^* \Phi_i) = \Phi_i^* \Phi_i$ を選んでおく。

³ $D = 2$ 時空計量は $\eta = \text{diag}(+, -)$ を採用する。

と言う関係をみたすが、

$$R^\dagger(\alpha)R(\alpha) \neq 1, \quad (2.4b)$$

である。従って、Lagrangian 自身は $O(N, \mathbf{R})$ 対称性しか持つことができない。

- *Dilatation symmetry*

superspace で表示したときのパラメータ θ を変換させる dilatation 変換も構成できる。これについてもこの作用は不変である⁴。

$$\begin{aligned} x &\rightarrow e^{-\beta}x, \quad \beta : \text{scale parameter}, \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x') = e^{\beta d}\phi(x), \\ \beta\delta_L\phi(x) &= \beta[d + x^m\partial_m]\phi(x) + O(\beta^2), \quad \delta_L : \text{Lie derivative}, \\ [\Phi_0]_c &= [\Phi_0^*]_c = 1, \quad [\Phi_i]_c = [\Phi_i^*]_c = 0, \quad [\theta]_c = [\bar{\theta}]_c = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

superfield のチャージがこれで与えられたので、component field のチャージも特定される。

$$\begin{aligned} [A_i]_c &= 0, \quad [\psi_i]_c = \frac{1}{2}, \quad [F_i]_c = 1, \quad [A_i^*]_c = 0, \quad [\bar{\psi}_i]_c = \frac{1}{2}, \quad [F_i^*]_c = 1, \\ [A_0]_c &= 1, \quad [\psi_0]_c = \frac{3}{2}, \quad [F_0]_c = 2, \quad [A_0^*]_c = 1, \quad [\bar{\psi}_0]_c = \frac{3}{2}, \quad [F_0^*]_c = 2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

- *R-symmetry*

大域的 $U(1)$ 変換 $\theta \rightarrow e^{i\alpha}\theta$ で Lagrangian が不変であることを要請する。

$$\left[\int d^2\theta \Phi_0 a^2 \right]_c = 0, \quad (2.7)$$

であることから、 Φ_0, Φ_0^* の変換性が得られる。続いて

$$\left[\int d^2\theta \Phi_0 \Phi_i^2 \right]_c = 0, \quad (2.8)$$

から、 Φ_i の変換性が得られる。まとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} [A_i]_c &= 0, \quad [\psi_i]_c = -1, \quad [F_i]_c = -2, \quad [A_i^*]_c = 0, \quad [\bar{\psi}_i]_c = 1, \quad [F_i^*]_c = 2, \\ [A_0]_c &= 2, \quad [\psi_0]_c = 1, \quad [F_0]_c = 0, \quad [A_0^*]_c = -2, \quad [\bar{\psi}_0]_c = -1, \quad [F_0^*]_c = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

- *Chiral $U(1)$ symmetry*

$\theta \rightarrow e^{i\gamma_3\alpha}\theta$ の変換を引き起こす。このときフェルミオンの変換則に注意する必要がある。 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性で構成したフェルミオンは次の表記上の関係がある。

$$\psi\chi \equiv \bar{\psi}^c\chi, \quad \bar{\psi}\bar{\chi} \equiv \bar{\psi}\chi^c. \quad (2.10)$$

⁴変換に伴うチャージを括弧 $[\dots]_c$ で表す。

chiral superfield でのフェルミオンの参加の仕方に注意。これによって次のようにチャージを決定することができる。

$$\begin{aligned} [A_i]_c &= 0, & [\psi_i]_c &= 1, & [F_i]_c &= 0, & [A_i^*]_c &= 0, & [\bar{\psi}_i]_c &= 1, & [F_i^*]_c &= 0, \\ [A_0]_c &= 0, & [\psi_0]_c &= 1, & [F_0]_c &= 0, & [A_0^*]_c &= 0, & [\bar{\psi}_0]_c &= 1, & [F_0^*]_c &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

- *Global $U(1)$ symmetry* ($a^2 = 0$ theory only)

R -symmetry とは起源の異なる大域的 $U(1)$ 対称性である。定数 a^2 がゼロの時にのみ存在する。

$$[\Phi_i]_c = 1, \quad [\Phi_i^\dagger]_c = -1, \quad [\Phi_0]_c = -2, \quad [\Phi_0^\dagger]_c = 2, \quad [\theta]_c = [\bar{\theta}]_c = 0. \quad (2.12)$$

R -symmetry、chiral $U(1)$ symmetry、global $U(1)$ symmetry をまとめて Table 3 に列挙しておく。

	Φ_i	A_i	ψ_i	F_i	Φ_i^\dagger	A_i^*	$\bar{\psi}_i$	F_i^*	Φ_0	A_0	ψ_0	F_0	Φ_0^\dagger	A_0^*	$\bar{\psi}_0$	F_0^*	θ	$\bar{\theta}$
R	0	0	-1	-2	0	0	1	2	2	2	1	0	-2	-2	-1	0	1	-1
$U(1)_A$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
$U(1)_V$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-2	2	2	2	2	0	0

Table 3: Various $U(1)$ symmetries. $U(1)_A$ and $U(1)_V$ represent chiral $U(1)$ and global $U(1)$, respectively.

また、補助場全てを運動方程式を用いて書き直し、非線形表現 (すなわち元の表現) がどのような形式を持っているのかも確認しよう。

まず、超対称性の補助場 F_i, F_i^* を消去する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu F_i)} &= 0 \rightarrow F_i^* + A_i A_0 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu F_i^*)} &= 0 \rightarrow F_i + A_i^* A_0^* = 0. \end{aligned}$$

これを Lagrangian (2.3) に代入し、さらに補助場 $A_0, A_0^*, \psi_0, \bar{\psi}_0, F_0, F_0^*$ について運動方程式を与える。

$$F_0 : A_i^2 = a^2, \quad F_0^* : A_i^{*2} = a^2, \quad \psi_0 : A_i \psi_i = 0, \quad \bar{\psi}_0 : A_i^* \bar{\psi}_i = 0, \quad (2.13a)$$

$$A_0 : -2A_0^*(A_i^* A_i) - (\bar{\psi}_i^c \psi_i) = 0, \quad A_0^* : -2A_0(A_i^* A_i) - (\bar{\psi}_i \psi_i^c) = 0. \quad (2.13b)$$

これらの拘束条件を Lagrangian に代入して、元の非線形な表現を見てみよう。ただし $A_i^2 = a^2$ はあらわに代入しない。

$$\mathcal{L} = \partial_m A_i^* \partial^m A_i + i \bar{\psi}_i \gamma^m \partial_m \psi_i + \frac{1}{4} (A_i^* A_i)^{-1} (\bar{\psi}_i^c \psi_i) (\bar{\psi}_i \psi_i^c). \quad (2.14)$$

この Lagrangian は、 $\mathcal{N} = 1$ 、つまり $\text{Im}A_i = 0$, $\psi_i^c = \psi_i$ の条件では “ $O(N)$ + Gross-Neveu model” に一致している。つまり良く知られた超対称 $O(N)$ 模型 ($\mathcal{N} = 1$) となる。今の $\mathcal{N} = 2$ の模型ではそこまで簡単にはなっていない。

3 Leading Order Contributions in $1/N$ Expansion

3.1 Strong Coupling Theory: $a^2 = 0$

まずは $a^2 = 0$ の理論の解析を行う。この理論を strong coupling theory と呼んでおこう⁵。

3.1.1 Effective Action and Effective Potential

Lagrangian (2.3) のうち、運動項を持つ場 $A_i, A_i^*, \psi_i, \bar{\psi}_i$ とその超対称性に含まれる補助場 F_i, F_i^* を経路積分で追い出そう。つまり (2.3) を用いて生成汎関数を次で定義し、経路積分を実行する。ここでは Φ_i の Green 関数等を計算するのではないので、外場は導入しない。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\Phi_i \mathcal{D}\Phi_i^\dagger \mathcal{D}\Phi_0 \mathcal{D}\Phi_0^\dagger \exp\left(i \int d^2x \mathcal{L}\right), \\ \mathcal{D}\Phi_i &\equiv \mathcal{D}A_i \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}F_i, \quad \mathcal{D}\Phi_i^\dagger \equiv \mathcal{D}A_i^* \mathcal{D}\bar{\psi}_i \mathcal{D}F_i^*, \\ \mathcal{D}\Phi_0 &\equiv \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\psi_0 \mathcal{D}F_0, \quad \mathcal{D}\Phi_0^\dagger \equiv \mathcal{D}A_0^* \mathcal{D}\bar{\psi}_0 \mathcal{D}F_0^*. \end{aligned} \quad (3.1)$$

補助場 F_i, F_i^* をまず消去しよう。そうすると Lagrangian は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_m A_i^* \partial^m A_i + i \bar{\psi}_i \gamma^m \partial_m \psi_i \\ &\quad + \frac{1}{2} (F_0 A_i^2 + F_0^* A_i^{*2}) - A_0^* A_0 A_i^* A_i \\ &\quad - \frac{1}{2} A_i (\bar{\psi}_0^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \psi_0) - \frac{1}{2} A_i^* (\bar{\psi}_0 \psi_i^c + \bar{\psi}_i \psi_0^c) - \frac{1}{2} A_0 \bar{\psi}_i^c \psi_i - \frac{1}{2} A_0^* \bar{\psi}_i \psi_i^c. \end{aligned} \quad (3.2)$$

場の定数部分と量子的揺らぎの部分を以下のように分解する。

$$A_i(x) = \phi_i + B_i(x), \quad \int d^2x B_i(x) = 0. \quad (3.3)$$

分解しておいた Lagrangian (shifted Lagrangian) は次のようになる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} X_i'^\dagger D_A^{-1} X_i' + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_i' S^{-1} \Psi_i' - \frac{1}{2} X_i^{c\dagger} [D_B^{-1} - D_B^{-1} D_A D_B^{-1}] X_i^c. \quad (3.4)$$

生成汎関数 \mathcal{Z} について、 $B_i, B_i^*, \psi_i, \bar{\psi}_i$ を積分する。(各変数の定義は (3.6) で与えられる。)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\Phi_0 \mathcal{D}\Phi_0^\dagger \exp(i S_{\text{eff}}), \quad \mathcal{D}\Phi_0 = \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\psi_0 \mathcal{D}F_0, \quad \mathcal{D}\Phi_0^\dagger = \mathcal{D}A_0^* \mathcal{D}\bar{\psi}_0 \mathcal{D}F_0^*, \\ S_{\text{eff}} &= \frac{iN}{2} \text{Tr} \log \det [D_A^{-1}] - \frac{iN}{2} \text{Tr} \log \det [S^{-1}] - \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} [D_B^{-1} - D_B^{-1} D_A D_B^{-1}] X_i^c. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで、 Tr は時空のトレースを意味する⁶。

⁵線形理論では拘束条件が結合定数の逆数で入っているのが、appendix F などで紹介されている。ここでの理論は $a^2 = 0$ 、つまり結合定数が無限大であるという意味で、strong coupling theory と呼んでいる。なお、この理論は、 $D = 4$ としては [27] で既にやられている。

⁶後に登場する TR は、時空と行列両方のトレースを意味する。

ここで、(3.4),(3.5) で登場する各変数は次で定義されている⁷。

$$\begin{aligned}
X'_i &= X_i + D_A D_B^{-1} X_i^c, \quad X_i = \begin{pmatrix} B_i \\ B_i^* \end{pmatrix}, \quad X_i^c = \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_i^* \end{pmatrix}, \\
\Psi'_i &= \Psi_i - S \chi_i, \quad \Psi_i = \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_i^c \end{pmatrix}, \quad \chi_i = \mathcal{M} \begin{pmatrix} X_i + X_i^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \psi_0^c \\ \psi_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i + X_i^c \end{pmatrix}, \\
D_A^{-1} &= D_I^{-1} + \overline{M} S M, \quad D_B^{-1} = D_{II}^{-1} + \overline{M} S M, \\
D_I^{-1} &= \begin{pmatrix} \partial^2 + A_0^* A_0 & -F_0^* \\ -F_0 & \partial^2 + A_0^* A_0 \end{pmatrix}, \quad D_{II}^{-1} = \begin{pmatrix} A_0^* A_0 & -F_0^* \\ -F_0 & A_0^* A_0 \end{pmatrix}, \\
S^{-1} &= \begin{pmatrix} i\partial & -A_0^* \cdot \mathbf{1} \\ -A_0 \cdot \mathbf{1} & i\partial \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

有効作用から有効ポテンシャルを求める。有効作用からオーダー N の有効ポテンシャルを求める方法は、次の定義に従う。

$$S_{\text{eff}}[\phi(x) = \phi_c] = -V_{\text{eff}}(\phi_c) \int d^2x, \quad V_{\text{eff}}(\phi_c) \sim O(N). \tag{3.7}$$

この下で、有効作用の各項を計算する。

$$\begin{aligned}
\text{Tr log det}[D_c^{-1}] &= \int d^2x d^2y \langle x | \log \det \begin{pmatrix} \partial^2 + m^2 & -f \\ -f & \partial^2 + m^2 \end{pmatrix} | y \rangle \langle y | x \rangle \\
&= \int d^2x d^2y \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ik(x-y)} \log \det \begin{pmatrix} -k^2 + m^2 & -f \\ -f & -k^2 + m^2 \end{pmatrix} \delta^2(y-x) \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log [(-k^2 + m^2)^2 - f^2] \int d^2x,
\end{aligned} \tag{3.8a}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr log det}[S_c^{-1}] &= \int d^2x d^2y \langle x | \log \det \begin{pmatrix} i\gamma^m \partial_m & -m \cdot \mathbf{1} \\ -m \cdot \mathbf{1} & i\gamma^m \partial_m \end{pmatrix} | y \rangle \langle y | x \rangle \\
&= \int d^2x d^2y \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ik(x-y)} \log \det \begin{pmatrix} \not{k} & -m \cdot \mathbf{1} \\ -m \cdot \mathbf{1} & \not{k} \end{pmatrix} \delta^2(y-x) \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log \det [(-k^2 + m)(-1)] \int d^2x.
\end{aligned} \tag{3.8b}$$

ここで D_c^{-1} や S_c^{-1} は以下で構成されている。

$$D_c^{-1} = D_A^{-1}(B_i = 0, A_0 = m, F_0 = f), \quad S_c^{-1} = S^{-1}(B_i = 0, A_0 = m, F_0 = f).$$

⁷ここで登場する場の混合は後の議論でも登場する。

A_0, F_0 の真空期待値は、大域的 $U(1)$ 変換を行うことで実数部分にのみ押しつけることが可能であるので、

$$\langle A_0(x) \rangle = \langle A_0^*(x) \rangle = m, \quad \langle F_0(x) \rangle = \langle F_0^*(x) \rangle = f, \quad (3.9)$$

としている。 A_i についてはそれは可能でないで、別々に真空期待値を与えてある。

まとめると有効ポテンシャルが次のようになる。

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2i} \log [(-k^2 + m^2)^2 - f^2] - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2i} \log [-k^2 + m^2] \\ & - \frac{1}{2} f (\phi_i^2 + \phi_i^{*2}) + m^2 \phi_i^* \phi_i. \end{aligned} \quad (3.10)$$

1 行目が複素スカラー場 A_i, A_i^* の 1 ループ寄与 と Dirac フェルミオン ψ_i の 1 ループ寄与、2 行目が拘束条件からの寄与である。

3.1.2 Gap Equations

真空は、有効ポテンシャルを全ての定数場で微分をとったときの停留点で実現されている。ここでは定数場は ϕ_i, ϕ_i^*, m, f であるので、これらの微分で有効ポテンシャルが停留点をとる条件を列挙しよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} V_{\text{eff}} = 0 &= -f \phi_i + m^2 \phi_i^*, \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} V_{\text{eff}} = 0 &= -f \phi_i^* + m^2 \phi_i, \\ \frac{\partial}{\partial m} V_{\text{eff}} = 0 &= 2m \left\{ \phi_i^* \phi_i + N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2i} \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2i} \frac{1}{-k^2 + m^2} \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial f} V_{\text{eff}} = 0 &= -\frac{1}{2} (\phi_i^2 + \phi_i^{*2}) - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2i} \frac{f}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2}. \end{aligned}$$

さらにこれを次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_i (m^4 - f^2), \\ 0 &= \phi_i^* (m^4 - f^2), \\ 0 &= 2m \left\{ \phi_i^* \phi_i + N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2i} \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2i} \frac{1}{-k^2 + m^2} \right\}, \\ 0 &= -\frac{1}{2} (\phi_i^2 + \phi_i^{*2}) - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2i} \frac{f}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

我々は超対称な真空を探すのが目的であるので、次の条件を課しておこう。

$$f = 0. \quad (3.12)$$

この条件下で、gap equation (3.11) を考察すると、ゼロ質量条件 ($m = 0$) もしくは有質量条件 ($m \neq 0$) が現れる。それぞれについて考えよう。

3.1.3 Massless Solution

$f = 0, m^2 = 0$ のときは gap equation (3.11) より、

$$0 = \phi_i^2 + \phi_i^{*2}, \quad (3.13)$$

が得られる。この ϕ_i の値は Figure 1 で与えられるように、一般にゼロではない。

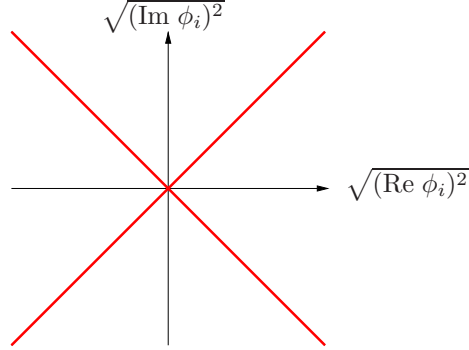


Figure 1: Strong coupling theory, massless case. All solutions are on the line.

この真空での補助場 A_0, ψ_0 の 2 点関数を求めておこう。

まずは A_0 から。 A_0 のみを含む Lagrangian を以下で与える。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -A_i^* [\partial^2] A_i + \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i^c \right) \begin{pmatrix} i\partial & -A_0^* \cdot \mathbf{1} \\ -A_0 \cdot \mathbf{1} & i\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_i^c \end{pmatrix} \\ & - A_0^* A_0 [A_i^* A_i + A_i^* \phi_i + \phi_i^* A_i] - \phi_i^* \phi_i A_0^* A_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

この Lagrangian から、 A_i, ψ_i を積分して有効ポテンシャルを求めるが、そこから 2 点関数を読みとる。

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} = & iN \text{Tr} \log [\partial^2 + A_0^* A_0] - \frac{iN}{2} \text{TR} \log \begin{pmatrix} i\partial & -A_0^* \cdot \mathbf{1} \\ -A_0 \cdot \mathbf{1} & i\partial \end{pmatrix} \\ & + \phi_i^* \phi_i \int d^2x [A_0^* A_0 (\partial^2 + A_0^* A_0)^{-1} A_0^* A_0 - A_0^* A_0] \\ = & \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left\{ A_0^*(-p) \Pi(p) A_0(p) + \dots \right\}, \\ \Pi(p) = & -\phi_i^* \phi_i + \frac{p^2}{4} \frac{N}{2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\lambda^2 - x(1-x)p^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

但し λ は赤外発散切断である⁸。

⁸超対称性などが理論に含まれているので、発散の正則化の仕方は次元正則化を用いない。切断理論として扱う。また (3.15) は紫外発散部分も当然登場していたが、外線運動量が紫外領域より十分小さいと見ると省略される。言いかえると、紫外領域より十分小さい領域で 2 点関数を定義したことになる。

同様に ψ_0 のみが含まれる Lagrangian を構成し、 ψ_0 の 2 点関数を求める。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -A_i^*[\partial^2]A_i + i\bar{\psi}_i\gamma^m\partial_m\psi_i \\
&\quad - \frac{1}{2}(\phi_i + A_i)(\bar{\psi}_0^c\psi_i + \bar{\psi}_i^c\psi_0) - \frac{1}{2}(\phi_i^* + A_i^*)(\bar{\psi}_0\psi_i^c + \bar{\psi}_i\psi_0^c), \\
S_{\text{eff}} &= \frac{iN}{2}\text{TR}\log[D_0^{-1} + \overline{\mathcal{M}}S_0\mathcal{M}] - \frac{iN}{2}\text{TR}\log[S_0^{-1}] \\
&\quad - \frac{1}{2}\int d^2x \left(\phi_i^*, \phi_i \right) \left\{ \overline{\mathcal{M}}S_0\mathcal{M} - \overline{\mathcal{M}}S_0\mathcal{M}(D_0^{-1} + \overline{\mathcal{M}}S_0\mathcal{M})^{-1}\overline{\mathcal{M}}S_0\mathcal{M} \right\} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_i^* \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left\{ \bar{\psi}_0(-p)\Sigma(p)\psi_0(p) + \dots \right\}, \\
\Sigma(p) &= \frac{1}{\not{p}} \left\{ -\phi_i^*\phi_i + \frac{p^2}{4} \frac{N}{2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\lambda^2 - x(1-x)p^2} \right\}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

補助場 F_0 も同様の計算によって導出できる。

ここに補助場 A_0, ψ_0, F_0 の 2 点関数をまとめたものを Table 4 に載せておく。

$\mathcal{F}(-p)\Gamma^{(2)}(p)\mathcal{G}(p)$	$A_0(p)$	$A_0^*(p)$	$\psi_0^c(p)$	$\psi_0(p)$	$F_0(p)$	$F_0^*(p)$
$A_0^*(-p)$	$\frac{1}{2}\Pi(p)$	0	0	0	0	0
$A_0(-p)$	0	$\frac{1}{2}\Pi(p)$	0	0	0	0
$\bar{\psi}_0(-p)$	0	0	$\frac{1}{2\not{p}}\Pi(p)$	0	0	0
$\bar{\psi}_0^c(-p)$	0	0	0	$\frac{1}{2\not{p}}\Pi(p)$	0	0
$F_0^*(-p)$	0	0	0	0	$\frac{1}{2p^2}\Pi(p)$	0
$F_0(-p)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2p^2}\Pi(p)$

Table 4: Two-point functions. $\Pi(p) = -\phi_i^*\phi_i + \frac{p^2}{4} \frac{N}{2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\lambda^2 - x(1-x)p^2}$.

この 2 点関数はどういうものであろうか。赤外発散切断が導入されているため、Feynman パラメータ積分の部分は特異な振舞をする。ここで運動量を space-like にとり ($-p^2 > 0$)、積分を実行しよう。

$$\int_0^1 dx \frac{p^2}{\lambda^2 - x(1-x)p^2} = - \int_0^1 dx \frac{1}{-x^2 + x - \lambda^2/p^2} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \frac{1}{a^2 - y^2}, \tag{3.17a}$$

$$a^2 \equiv \frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{p^2} > \frac{1}{4}, \quad a > \frac{1}{2}, \quad y = x - \frac{1}{2}. \tag{3.17b}$$

被積分関数は積分領域の範囲で正則であるので、積分を実行できる。

$$\int_0^1 dx \frac{p^2}{\lambda^2 - x(1-x)p^2} = \frac{1}{a} \log \left(\frac{2a-1}{2a+1} \right). \tag{3.18}$$

これを用いると A_0 の 2 点関数が次のように書き換えられる。

$$\Pi(p) \simeq -\phi_i^*\phi_i + \frac{1}{a} \log \left(\frac{2a-1}{2a+1} \right) < 0. \tag{3.19}$$

実はこの 2 点関数は単調減少な関数である。しかも運動量がゼロの点では負の値を持つ。つまり、space-like 領域では常に負の値を取ることになりゼロ点を持つことがない。time-like に解析接続したところで複素数因子が追加されるだけなので、ゼロ点は持てない。つまり補助場 A_0 は粒子描像を持つことはない。補助場 ψ_0, F_0 も同様である⁹。

ここで述べたゼロ質量解では、 $\phi_i \neq 0$ であるために大域的 $O(N)$ 対称性が破れてしまうようになっているが、Coleman's theorem¹⁰ では連続対称性は $D = 2$ では破れない。これについてはここでは議論せず、他の解を含めて section 4 でまとめて行う。

3.1.4 Massive Solution

超対称な真空を探すため、やはりここでも次の条件を課す。

$$f = 0. \quad (3.20)$$

またここでは $m \neq 0$ 、つまり有質量解を探す。このとき gap equation (3.11) から次が得られる。

$$\phi_i = \phi_i^* = 0. \quad (3.21)$$

つまり A_i は真空期待値を持たない。その様子を Figure 2 で表す。

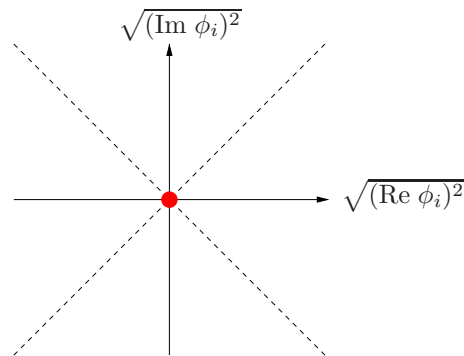


Figure 2: Strong coupling theory, massive case. The origin is the solution.

さらに補助場の 2 点関数を求める。まずは A_0 から。 A_0 のみで構成される Lagrangian を与え、有効作用と 2 点関数を与える。その前に、補助場 A_0 を実場 A_R, A_I で次のように分解しよう。

$$A_0(x) = m + A_R(x) + iA_I(x), \quad A_0^*(x) = m + A_R(x) - iA_I(x). \quad (3.22)$$

⁹2 点関数は伝播関数の逆行列である。したがって伝播関数が極を持つということは、2 点関数がゼロ点を持つということ、2 点関数が極を持つということではない。

¹⁰appendix G 参照。

では Lagrangian を与える。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -A_i^* [(\partial^2 + m^2) + (2mA_R + A_R^2 + A_I^2)] A_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i^c \right) \begin{pmatrix} i\partial & -(m + A_R - iA_I) \cdot \mathbf{1} \\ -(m + A_R + iA_I) \cdot \mathbf{1} & i\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_i^c \end{pmatrix}, \\
S_{\text{eff}} &= iN \text{Tr} \log [D_0^{-1} + D'^{-1}] - \frac{iN}{2} \text{TR} \log [S_0^{-1} + S'^{-1}] \\
&= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left\{ A_R(-p) \Pi_1(p) A_R(p) + A_I(-p) \Pi_2 A_I(p) + A_R(-p) \Pi_3 A_I(p) \right\} + \dots, \\
\Pi_1(p) = \Pi_2(p) &= \frac{p^2 N}{4 \cdot 2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 - x(1-x)p^2}, \quad \Pi_3(p) = 0. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

続いて ψ_0 のみの Lagrangian と 2 点関数。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -A_i^* [\partial^2 + m^2] A_i + \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i^c \right) \begin{pmatrix} i\partial & -m \cdot \mathbf{1} \\ -m \cdot \mathbf{1} & i\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_i^c \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} A_i (\bar{\psi}_0^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \psi_0) - \frac{1}{2} A_i^* (\bar{\psi}_0 \psi_i^c + \bar{\psi}_i \psi_0^c), \\
S_{\text{eff}} &= iN \text{Tr} \log [D_0^{-1} + \overline{\mathcal{M}} S_0 \mathcal{M}] - \frac{iN}{2} \text{TR} \log [S_0^{-1}] \\
&= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left\{ \bar{\psi}_0(-p) \Sigma_1(p) \psi_0(p) + \bar{\psi}_0^c(-p) \Sigma_2(p) \psi_0^c(p) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi}_0(-p) \Sigma_3(p) \psi_0^c(p) + \bar{\psi}_0^c(-p) \Sigma_4(p) \psi_0(p) \right\} + \dots, \\
\Sigma_1(p) = \Sigma_2(p) &= \frac{\not{p} N}{4 \cdot 2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 - x(1-x)p^2}, \quad \Sigma_3(p) = \Sigma_4(p) = 0. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

2 点関数を Table 5 にまとめておく。これを見て分かるように、これら補助場はゼロ質量を持つ場として実現されている。

$\mathcal{F}(-p) \Gamma^{(2)}(p) \mathcal{G}(p)$	$A_R(p)$	$A_I(p)$	$\psi_0^c(p)$	$\psi_0(p)$	$F_0(p)$	$F_0^*(p)$
$A_R(-p)$	$\Pi(p)$	0	0	0	0	0
$A_I(-p)$	0	$\Pi(p)$	0	0	0	0
$\bar{\psi}_0(-p)$	0	0	$\frac{1}{\not{p}} \Pi(p)$	0	0	0
$\bar{\psi}_0^c(-p)$	0	0	0	$\frac{1}{\not{p}} \Pi(p)$	0	0
$F_0^*(-p)$	0	0	0	0	$\frac{1}{p^2} \Pi(p)$	0
$F_0(-p)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{p^2} \Pi(p)$

Table 5: Two-point functions. $\Pi(p) = \frac{p^2 N}{4 \cdot 2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 - x(1-x)p^2}$.

この有質量解では、大域的 $O(N)$ 対称性は破れていないが 2 種類の dilatation 変換不変性、 R -symmetry、そし

て大域的 $U(1)$ 対称性が破れてしまうように見えている。ここでもその対称性の回復については議論せず、section 4 で行う。

3.2 Weak Coupling Theory: $a^2 \neq 0$

これも Lagrangian (2.3) から出発する。但し今度は $a^2 \neq 0$ の理論を考える。この理論を weak coupling theory と呼ぼう¹¹。Lagrangian は次のものである。但し F_i, F_i^* は既に積分された表式を載せる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_m A_i^* \partial^m A_i + i \bar{\psi}_i \gamma^m \partial_m \psi_i + \frac{1}{2} F_0 (A_i^2 - a^2) + \frac{1}{2} F_0^* (A_i^{*2} - a^2) - A_0^* A_0 A_i^* A_i \\ & - \frac{1}{2} A_i (\bar{\psi}_0^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \psi_0) - \frac{1}{2} A_i^* (\bar{\psi}_0 \psi_i^c + \bar{\psi}_i \psi_0^c) - \frac{1}{2} A_0 \bar{\psi}_i^c \psi_i - \frac{1}{2} A_0^* \bar{\psi}_i \psi_i^c . \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.2.1 Effective Action and Effective Potential

$A_i, A_i^*, \psi_i, \bar{\psi}_i, F_i, F_i^*$ を積分する。やり方は strong coupling theory と同様である。その結果得られる有効作用は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}\Phi_0 \mathcal{D}\Phi_0^\dagger \exp(iS_{\text{eff}}), \quad \mathcal{D}\Phi_0 = \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\psi_0 \mathcal{D}F_0, \quad \mathcal{D}\Phi_0^\dagger = \mathcal{D}A_0^* \mathcal{D}\bar{\psi}_0 \mathcal{D}F_0^*, \\ S_{\text{eff}} = & \frac{iN}{2} \text{Tr} \log \det [D_A^{-1}] - \frac{iN}{2} \text{Tr} \log \det [S^{-1}] \\ & - \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} [D_B^{-1} - D_B^{-1} D_A D_B^{-1}] X_i^c - \frac{1}{2} a^2 \int d^2x (F_0 + F_0^*). \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここで、(3.26) で登場する各変数は strong coupling theory で定義されているものと同じである。有効作用から有効ポテンシャルを求める。

$$\text{Tr} \log \det [D_c^{-1}] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log [(-k^2 + m^2)^2 - f^2] \int d^2x, \quad (3.27a)$$

$$\text{Tr} \log \det [S_c^{-1}] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log \det [(-k^2 + m)(-1)] \int d^2x. \quad (3.27b)$$

ここで D_c^{-1} や S_c^{-1} は以下で構成されている。

$$D_c^{-1} = D_A^{-1}(B_i = 0, A_0 = m, F_0 = f e^{i\theta}), \quad S_c^{-1} = S^{-1}(B_i = 0, A_0 = m, F_0 = f e^{i\theta}).$$

A_0 の真空期待値は、 R -symmetry 変換を行うことで実数部分にのみ押しつけることが可能であるが、 F_0 については位相変換で 1 つのパラメータに押しつけることはできない。

$$\langle A_0(x) \rangle = \langle A_0^*(x) \rangle = m, \quad \langle F_0(x) \rangle = f e^{i\theta}, \quad \langle F_0^*(x) \rangle = f e^{-i\theta}. \quad (3.28)$$

A_i についても位相変換で 1 つの期待値に押しつけることが可能でないので、別々に真空期待値を与えてある。

¹¹strong coupling theory と同様の発想で、 $a^2 \neq 0$ なので、結合定数が無限大ではない、という意味で weak coupling theory と呼ぶ。

まとめると有効ポテンシャルが次のようになる。

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \log [(-k^2 + m^2)^2 - f^2] - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \log [-k^2 + m^2] - \frac{1}{2} f e^{i\theta} (\phi_i^2 - a^2) - \frac{1}{2} f e^{-i\theta} (\phi_i^{*2} - a^2) + m^2 \phi_i^* \phi_i. \quad (3.29)$$

1 行目が複素スカラー場 A_i, A_i^* のループ寄与 と Dirac フェルミオン ψ_i のループ寄与、2 行目が拘束条件からの寄与である。また結合定数 a^2 について、今後

$$a^2 \equiv \frac{N}{g^2},$$

とする。 g が摂動論で登場する結合定数である。

3.2.2 Gap Equations

有効ポテンシャルの停留点を探す。ここではパラメータは $\phi_i, \phi_i^*, m, f, \theta$ であるので、これらの微分で有効ポテンシャルが停留点をとる条件を列挙しよう。 $f e^{i\theta}$ については極座標であることに注意する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} V_{\text{eff}} = 0 &= -f e^{i\theta} \phi_i + m^2 \phi_i^*, \\ \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} V_{\text{eff}} = 0 &= -f e^{-i\theta} \phi_i^* + m^2 \phi_i, \\ \frac{\partial}{\partial m} V_{\text{eff}} = 0 &= 2m \left\{ \phi_i^* \phi_i + N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-k^2 + m^2} \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial f} V_{\text{eff}} = 0 &= \frac{N}{g^2} \cos \theta - \frac{1}{2} (\phi_i^2 e^{i\theta} + \phi_i^{*2} e^{-i\theta}) - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{f}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2}, \\ \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} V_{\text{eff}} = 0 &= -\frac{N}{g^2} \sin \theta - \frac{i}{2} (\phi_i^2 e^{i\theta} - \phi_i^{*2} e^{-i\theta}). \end{aligned}$$

これらを次のように書き直す。

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_i (m^4 - f^2) = \phi_i^* (m^4 - f^2), \\ 0 &= 2m \left\{ \phi_i^* \phi_i + N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-k^2 + m^2} \right\}, \\ \frac{N}{g^2} &= \phi_i^2 + f e^{-i\theta} N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2}, \\ \frac{N}{g^2} &= \phi_i^{*2} + f e^{i\theta} N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

この 1 階微分の方程式に適当な真空期待値を代入したものを gap equation と呼ぶ。

3.2.3 Massless Solution

ここでも超対称な真空を探すのが目的であるので、次を仮定する。

$$f = 0. \quad (3.31)$$

$f = 0, m^2 = 0$ のときは gap equation (3.30) により、

$$\frac{N}{g^2} = \phi_i^2 = \phi_i^{*2}, \quad (3.32)$$

が得られる。この ϕ_i の値は Figure 3 で与えられるようにゼロではない。拘束条件が F -term にのみ登場した結果、結合定数は繰り込まれていない。

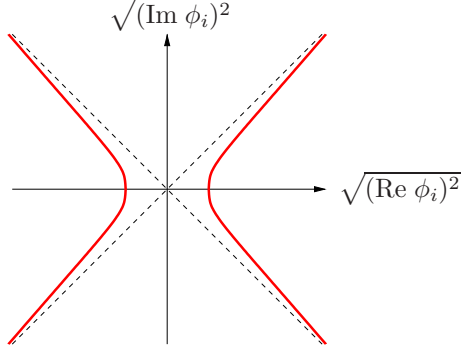


Figure 3: Weak coupling theory, massless case.

この真空での補助場 A_0, ψ_0 の 2 点関数を求めておこう。strong coupling theory のときと同様にして、Table 6 のように補助場の 2 点関数が求められる。

$\mathcal{F}(-p)\Gamma^{(2)}(p)\mathcal{G}(p)$	$A_0(p)$	$A_0^*(p)$	$\psi_0^c(p)$	$\psi_0(p)$	$F_0(p)$	$F_0^*(p)$
$A_0^*(-p)$	$\frac{1}{2}\Pi(p)$	0	0	0	0	0
$A_0(-p)$	0	$\frac{1}{2}\Pi(p)$	0	0	0	0
$\bar{\psi}_0(-p)$	0	0	$\frac{1}{2p}\Pi(p)$	0	0	0
$\bar{\psi}_0^c(-p)$	0	0	0	$\frac{1}{2p}\Pi(p)$	0	0
$F_0^*(-p)$	0	0	0	0	$\frac{1}{2p^2}\Pi(p)$	0
$F_0(-p)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2p^2}\Pi(p)$

Table 6: Two-point functions. $\Pi(p) = -\phi_i^* \phi_i + \frac{p^2 N}{4 \cdot 2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\lambda^2 - x(1-x)p^2}$.

この真空解は strong coupling theory でのゼロ質量解と同じである。つまり補助場は粒子描像を取らない。

3.2.4 Massive Solution

A_i や ψ_i が質量を持つとき、すなわち $m \neq 0$ であるときは、Figure 4 のように f の値によって 4 通りの状態が存在する。そのそれぞれについて安定な真空が存在するかを考察しよう。

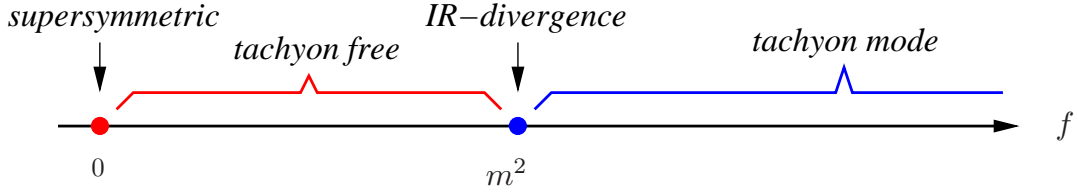


Figure 4: Weak coupling theory, massive case.

1. supersymmetric case : $f = 0$

超対称な解を考察する。

$$0 = m^4 \phi_i = m^4 \phi_i^* = 2m \phi_i^* \phi_i, \quad (3.33a)$$

$$\frac{N}{g^2} = \phi_i^2 = \phi_i^{*2}. \quad (3.33b)$$

拘束条件が F -term にのみ登場するため、結合定数には紫外発散が登場せず、したがって繰り込まれない。よって非超対称模型と異なり、拘束条件が補助場の真空期待値に直接影響を与えてしまっている。したがって上のような方程式以上繰り込み点を導入することができず、解が構成できない。よって、超対称な解は存在できない。

2. tachyonic case : $f > m^2$

このとき A_i の伝播関数にタキオンが登場する。これは物理的には不安定な真空の周りを考察していることになるので、安定な真空を探すには適していない。

3. tachyon free case : $0 < f < m^2$

タキオンが登場しない ($m^2 - f \geq 0$)、赤外発散がない ($m^2 \neq f$)、という条件を課す。

$$\begin{aligned} 0 &= (m^4 - f^2) \phi_i = (m^4 - f^2) \phi_i^*, \\ 0 &= \phi_i^* \phi_i + N \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \left\{ \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} - \frac{1}{-k^2 + m^2} \right\}, \\ \frac{N}{g^2} &= \phi_i^2 + f e^{-i\theta} N \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2}, \\ \frac{N}{g^2} &= \phi_i^{*2} + f e^{i\theta} N \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

gap equation (3.34) から読みとれる、質量の縮退が解ける様子を Figure 5 に表す。実際に安定な真空であれば、この縮退が解ける様子が実現されている。

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_i = \phi_i^*, \\ 0 &= \frac{1}{8\pi} \log \frac{m^4}{m^4 - f^2}, \end{aligned}$$

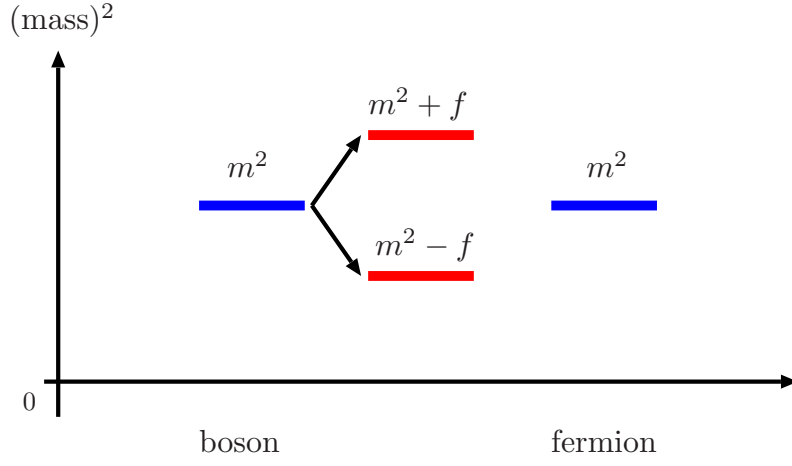


Figure 5: Mass splitting under supersymmetry breaking (massive boson).

$$\frac{1}{g^2} = \frac{e^{i\theta}}{8\pi} \log \frac{m^2 + f}{m^2 - f} = \frac{e^{-i\theta}}{8\pi} \log \frac{m^2 + f}{m^2 - f}. \quad (3.35)$$

これより、この関係は

$$m^2 \neq 0, \quad f = 0, \quad g^2 = \infty, \quad (3.36)$$

である。しかしこれは仮定に反する。

4. IR-divergent case : $f = m^2$

赤外発散がない条件 ($m^2 \neq f$) を外した解を考察する。このときの gap equation (3.30) は次のようになる。

$$0 = \phi_i^* \phi_i + N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{-k^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{-k^2 + 2m^2} - \frac{1}{-k^2 + m^2} \right\}, \quad (3.37a)$$

$$\frac{N}{g^2} = \phi_i^2 + e^{-i\theta} \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \left\{ \frac{1}{-k^2} - \frac{1}{-k^2 + 2m^2} \right\}, \quad (3.37b)$$

$$\frac{N}{g^2} = \phi_i^{*2} + e^{i\theta} \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \left\{ \frac{1}{-k^2} - \frac{1}{-k^2 + 2m^2} \right\}. \quad (3.37c)$$

gap equation から読みとれる、縮退が解ける様子を Figure 6 に表す。

赤外発散の切断 λ ($\lambda^2 \ll 1$) を導入して、gap equation を書き換える。

$$\phi_i \neq 0 \text{ or } \phi_i = 0, \quad (3.38a)$$

$$0 = \phi_i^* \phi_i + \frac{N}{8\pi} \log \frac{m^2}{\lambda^2} > 0, \quad (3.38b)$$

$$\frac{N}{g^2} = \phi_i^2 - e^{-i\theta} \frac{N}{8\pi} \log \frac{\lambda^2}{2m^2}, \quad (3.38c)$$

$$\frac{N}{g^2} = \phi_i^{*2} - e^{i\theta} \frac{N}{8\pi} \log \frac{\lambda^2}{2m^2}. \quad (3.38d)$$

これは明らかに (3.38b) が矛盾を起こしている。したがってこれをみたく解も存在しない。

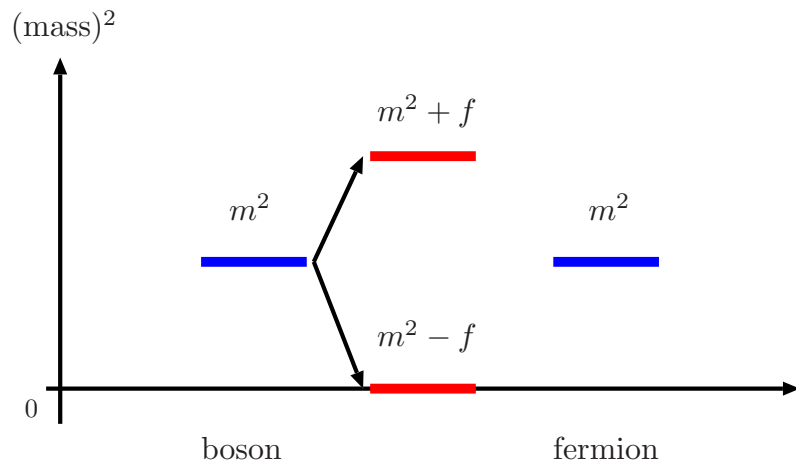


Figure 6: Mass splitting under supersymmetry breaking (massless boson).

以上より、weak coupling theory で有質量の場合では安定な真空は存在しない。

4 Realization of Symmetries

ここで、主要項 (leading order, LO) で登場した安定真空、不安定真空を列挙する (Table 7)。それぞれの真空でどの対称性が保存され、もしくは破れるかも列挙しよう。

vacua	Φ_0 dynamics	$O(N)$	dilatation	R	chiral $U(1)$	global $U(1)$	$R \times \text{global } U(1)$
$a^2 = 0, m = 0$	no-particle	×	○	○	○	×	×
$a^2 = 0, m \neq 0$	massless pole	○	×	×	○	×	○
$a^2 \neq 0, m = 0$	no-particle	×	○	○	○	–	–
$(a^2 \neq 0, m \neq 0)$	(no solution)	–	–	–	–	–	–

Table 7: Supersymmetric various vacua.

$D = 2$ 理論では連続対称性は破れていない。しかしこの Table 7 を見るとどの真空が選ばれても連続対称性が破れてしまっているように見える。しかしこれは回避できる。これをこれから議論しよう。

4.1 Phase Symmetry Realization

ここでは strong coupling theory での有質量解の対称性の回復を考察する。

有質量解では位相変換対称性が破れているように見える。具体的には R -symmetry と $U(1)_V$ 対称性が破れているように「見えて」しまう。これは $D = 2$ 理論では許されていない。したがって破れていないように構成しなおす必要がある。さらに、実際には破れていないことを見なければならぬ。

とりあえず補助場 A_0, A_0^* が真空期待値を持ったことでその真空では Lagrangian がどのようになっているのか、見てみよう。補助場を、次のように実場 2 つで表現していたことを思い出そう。

$$A_0(x) \equiv m + A_R(x) + iA_I(x), \quad A_0^*(x) \equiv m + A_R(x) - iA_I(x). \quad (4.1)$$

これを用いて、最初の Lagrangian (3.2) を書き直す。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_m A_i^* \partial^m A_i + \bar{\psi}_i i \gamma^m \partial_m \psi_i - \frac{m}{2} (\bar{\psi}_i \psi_i^c + \bar{\psi}_i^c \psi_i) \\ & + \frac{1}{2} F_0 A_i^2 + \frac{1}{2} F_0^* A_i^{*2} - (2m A_R + A_R^2 + A_I^2) A_i^* A_i \\ & - \frac{1}{2} A_i (\bar{\psi}_0^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \psi_0) - \frac{1}{2} A_i^* (\bar{\psi}_0 \psi_i^c + \bar{\psi}_i \psi_0^c) - \frac{1}{2} (A_R + iA_I) \bar{\psi}_i^c \psi_i - \frac{1}{2} (A_R - iA_I) \bar{\psi}_i \psi_i^c. \end{aligned} \quad (4.2)$$

この場の配位では、 R -symmetry と大域的 $U(1)$ 対称性は、フェルミオン ψ_i が Majorana 質量項を持っているために破れてしまうように「見える」。大域的 $U(1)$ 変換は不変である¹²。

¹²Dirac matrix の表示の変換によっては Dirac 質量項を持たせて chiral $U(1)$ 対称性が破れているように見える表現を構成することもできる。そうした方が appendix H のつながりが明快であるが、ここではあえてその表示はとっていない。

この理論を、補助場 A_R, A_I が運動項を獲得する有効作用で考察する。必要なのは、長距離領域で登場する、指数関数の肩に乗ったゼロ質量自由スカラー場の存在である。

Table 5 を参考にして、補助場の運動項の部分をもう一度ここで記述しよう。

$$S_{\text{eff}} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \{ A_R(-p)\Pi(p)A_R(p) + A_I(-p)\Pi(p)A_I(p) + \dots \}. \quad (4.3)$$

appendix H にならって、長距離領域での振舞いを見たいので、これ以降の相互作用項は無視できる。また、長距離領域だけを見るなら、2 点関数 $\Pi(p)$ も次のようになる。

$$\Pi(p) = \frac{p^2 N}{4 \cdot 2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 - x(1-x)p^2} \xrightarrow{p^2 \rightarrow 0} \frac{1}{2} p^2 \cdot \frac{N}{4\pi m^2}. \quad (4.4)$$

よって有効作用が次のように記述される。

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &\sim \frac{N}{4\pi m^2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} p^2 A_R(-p)A_R(p) + \frac{1}{2} p^2 A_I(-p)A_I(p) \dots \right\} \\ &= \frac{N}{4\pi m^2} \int d^2x \{ \partial_m A_0^* \partial^m A_0 + \dots \}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで複素場 A_0 を次のように再定義する。

$$A_0(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}, \quad A_0^*(x) = \rho(x)e^{-i\theta(x)}, \quad \langle A_0(x) \rangle = \langle A_0^*(x) \rangle = m = \langle \rho(x) \rangle. \quad (4.6)$$

ここで $\theta(x)$ の真空期待値はとらない。1 自由度だけを期待値にするので、位相まで固定しなくてもよいのである。

この配位で有効作用 (4.5) を再構成しよう。

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \frac{N}{4\pi m^2} \int d^2x \{ |\partial_m(\rho(x)e^{i\theta(x)})|^2 + \dots \} \\ &= \frac{N}{4\pi m^2} \int d^2x \{ (\partial_m \rho(x))^2 + (\partial_m \theta(x))^2 \rho^2(x) + \dots \}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

長距離領域で重要なのは $\theta(x)$ の運動項だけである。よって $\rho(x)$ については真空期待値で置き換えておく。

$$S_{\text{eff}} = \frac{N}{4\pi} \int d^2x (\partial_m \theta(x))^2. \quad (4.8)$$

これにより、 $\theta(x)$ が長距離領域ではゼロ質量自由スカラー場として登場しているのが分かる。この、長距離領域での $\theta(x)$ 伝播関数は次のようになる。

$$\langle \theta(x)\theta(y) \rangle = -\frac{1}{N} \log|x-y|. \quad (4.9)$$

これは (4.8) から運動方程式を解くと導かれる。

このゼロ質量自由スカラー場 $\theta(x)$ の働きによって、 R -symmetry を破るような 2 点関数がゼロになることを確認しよう。次のような 2 点関数を構成する。

$$G(x, y) \equiv \langle \bar{\psi}_i \psi_i^c(x) \bar{\psi}_k \psi_k^c(y) \rangle. \quad (4.10)$$

補助場 A_0 は、拘束条件の下では (2.13b) となっている。つまりこれより、フェルミオンの二次の部分は次のように記述できる。

$$\bar{\psi}_i \psi_i^c(x) = -2(A_i^* A_i) A_0(x) = -2(A_i^* A_i) \rho(x) e^{i\theta(x)}. \quad (4.11)$$

これを用いて相関関数を書き直す。

$$G(x, y) = 4 \langle (A_i^* A_i \rho)(x) (A_k^* A_k \rho)(y) \rangle \langle e^{i\theta(x)} e^{i\theta(y)} \rangle. \quad (4.12)$$

$\theta(x)$ はゼロ質量自由場であったことを思い出そう。ゼロ質量であるがために、赤外発散の振舞いが強く、次の相関関数がゼロになる。

$$\langle e^{i\theta(x)} e^{i\theta(y)} \rangle = 0. \quad (4.13)$$

つまりこれより、 R -symmetry 変換に対して不変でない相関関数はゼロになっていることになる。したがって、物理的に R -symmetry は破れていない。もっと簡単に言うと、赤外では相互作用がないために相関関数は全て伝播関数の積に分解できる。ここで良く見ると、不変でない相関関数は Table 5 で現れているように伝播関数がゼロである。

さらに位相変換不変な相関関数も見てみよう。

$$G(x, y) \equiv \langle \bar{\psi}_i^c \psi_i(x) \bar{\psi}_k \psi_k^c(y) \rangle. \quad (4.14)$$

これは R -symmetry の位相変換で不変である。これも先程と同様に補助場で書き換える。

$$G(x, y) = 4 \langle (A_i^* A_i \rho)(x) (A_k^* A_k \rho)(y) \rangle \langle e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(y)} \rangle. \quad (4.15)$$

$\theta(x)$ が長距離領域ではゼロ質量かつ自由場であることによって、上のように相関部分が完全に分離できるのである。さらに、 $\langle e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(y)} \rangle = |x - y|^{-1/N}$ なので、次のようになることが分かる。

$$G(x, y) = 4 \langle (A_i^* A_i \rho)(x) (A_k^* A_k \rho)(y) \rangle |x - y|^{-1/N}. \quad (4.16)$$

これにより、 N が非常に大きい有限である限り、ゆっくりとこの相関関数はゼロに近づく。この振舞いは Kosterlitz-Thouless type の、対称性が破れていない低温度相での振舞いに類似する。

まったく同様にして、strong coupling theory での大域的 $U(1)$ 対称性の破れも起こっていないことが示される。したがって安定な真空では位相変換の対称性は破れていない。

4.2 Dilatation Symmetry Realization

Dilatation 変換についてはどうか。実はこの再定義 (4.6) では dilatation 変換は破れたままに見える。したがって、破れていないように見える場の再定義を行う。

内部対称性の議論を生かしたまま、dilatation 変換まで適応できるようにするため、更なる場の定義を行う。新しい場 $\phi(x)$ を次のように導入する。

$$A_0(x) = m e^{\phi(x) + i\theta(x)}, \quad \langle A_0(x) \rangle = m, \quad \langle \phi(x) \rangle = 0. \quad (4.17)$$

このとき補助場 A_0 の各変換則を次のように再定義する。

$$A_0(x) \rightarrow e^{i\alpha} A_0(x), \quad \implies \quad \phi(x) \rightarrow \phi(x), \quad \theta(x) \rightarrow \theta(x) + \alpha, \quad R\text{-symmetry}, \quad (4.18a)$$

$$A_0(x) \rightarrow e^a A_0(x), \quad \implies \quad \phi(x) \rightarrow \phi(x) + a, \quad \theta(x) \rightarrow \theta(x), \quad \text{dilatation symmetry}. \quad (4.18b)$$

有効作用 S_{eff} を先程と同様に書き直そう。

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \frac{N}{4\pi m^2} \int d^2x \{ |\partial_m A_0|^2 + \dots \} \\ &= \frac{N}{4\pi} \int d^2x e^{2\phi(x)} \{ (\partial_m \phi(x))^2 + (\partial_m \theta(x))^2 + \dots \} \\ &\sim \frac{N}{4\pi} \int d^2x \{ (\partial_m \phi(x))^2 + (\partial_m \theta(x))^2 + \dots \}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

この領域では、作用は dilatation 変換、位相変換ともに不変である。

それではここで、位相変換のときと同様に相関関数の振舞いを見てみよう。例えば次の関数を用意する。

$$G(x, y) = \langle |A_0|^2(x) |A_0|^2(y) \rangle. \quad (4.20)$$

(4.17) を用いるとこの相関関数は、長距離領域では次のように振舞う。

$$G(x, y) = m^4 \langle e^{2\phi(x)} e^{2\phi(y)} \rangle = m^4 e^{4\langle \phi(x)\phi(y) \rangle} = \frac{m^4}{|x-y|^{4/N}}. \quad (4.21)$$

つまり長距離領域では相関関数はゼロになる。対称性が破れていないということがこれでわかる。

4.3 $O(N)$ Symmetry Realization

ここではゼロ質量解について考察する。strong coupling theory、weak coupling theory に共通するので、strong coupling theory について考察しよう。

ゼロ質量解のとき、補助場は真空期待値を持たなかったためその真空では質量次元を持つパラメータは存在しない。そのため、dilatation 変換について不変である。また同じく質量次元を持つパラメータがないため、フェルミオンは質量項を持たず、位相変換に対しても不変である。しかし $O(N)$ 場 A_i が真空期待値を持つため、大域的 $O(N)$ 対称性が破れているように見えてしまう。しかしこの対称性も回復することが可能である。

strong coupling theory でゼロ質量解のとき、 $O(N)$ 対称性の他に大域的 $U(1)$ 対称性も破れているように見える。したがってそれらを同時に回復する場の再定義を行う。

$$A_i(x) \equiv \left[\exp(iT_\alpha \xi_\alpha(x)) \right]_{ij} \phi_j. \quad (4.22)$$

ここで T_α は $O(N)$ 変換のうち破れた生成子であり、 A_i がベクトル表現であると定義したので T_α も基本表現をとる。またこの表現行列は反対称である。一般の時空次元の言葉で言えば、 $\xi_\alpha(x)$ は $O(N)$ 対称性の破れから登場する複素 NG boson であり破れた次元の数だけ添字が走る。最後に、 ϕ_j は、 $A_i(x)$ の真空期待値である。

ここまで来れば後は同じ議論の繰り返しである。長距離領域の相関関数が次のように書かれる。

$$\langle A_i(x)A_j(y) \rangle \sim \delta_{ij}|x-y|^{-1/N}. \quad (4.23)$$

もはや具体的な表記はしないが、現象のみ述べておこう。大域的 $U(1)$ 変換に不変でない相関関数も、 $O(N)$ 変換に不変でない相関関数も、ゼロ質量自由スカラー場の赤外発散が強く効いてゼロになる。もしくは始めから対角的に取っていたので、不変でない相関関数は始めからゼロである。また変換に対して不変な相関関数は長距離領域では $|x-y|^{-1/N}$ のような振舞いをする。

5 Beyond the Leading Order Contributions

我々はこれまで 2 つの理論を別々に評価して来たが、これらはつながらないのであろうか。つまり繰り込み群で一方の理論が他方に流れて行くことはないであろうか。これを考察するには LO ではできない。何故ならどこからも発散が登場せず、波動関数繰り込みも、結合定数繰り込みもなく、全てが有限量だったからである。つまり繰り込み群が構成できなかった。繰り込み群を構成するには、 $1/N$ 展開の高次の項、特に 2 次の項 (next-to-leading order, NLO) を考察する必要がある。

5.1 Renormalization Group Flow: Two Scenarios

繰り込み群で weak coupling theory から strong coupling theory につなげる場合、そのシナリオは少なくとも 2 通りが考えられる。紫外領域でつながる場合と、赤外領域でつながる場合がある。それぞれを概略図を用いて考えよう¹³。

但し両方の場合で次の仮定を行う。

- strong coupling theory では β 関数はゼロ。
- 非自明な紫外 (赤外) 固定点は多くても 1 つとする。

1 つめの仮定は、LO で安定な真空が (F -term からの考察だけであるが) 共形不変となることを反映させる。2 つめは、非自明な固定点が複数個あっても、それは議論が混乱するだけで本質ではないことを反映させる。

5.1.1 Asymptotically Free Scenario

赤外領域で weak coupling theory が strong coupling theory につながる場合を考える。2 つの仮定から、定数 a^2 の β 関数、さらに結合定数 g に読み変えた β 関数の振舞いを予想しよう。

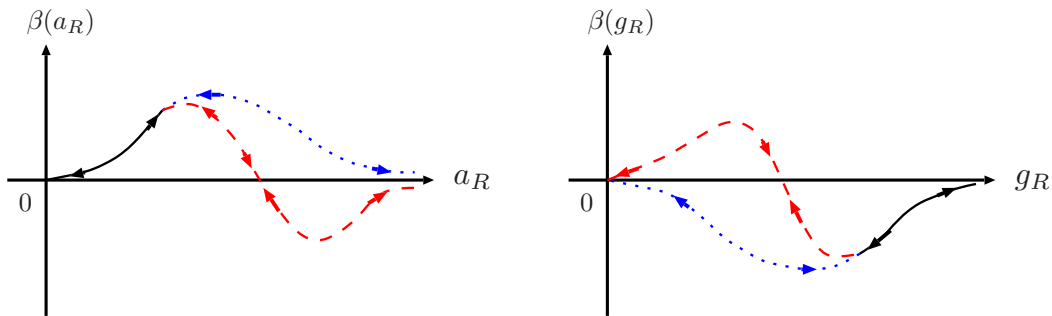


Figure 7: RG flow about constant a and g .

¹³あくまで概念図でしかないので、結合定数無限大の極限の振舞いなどはいいかげんである。

Figure 7 に登場する $\beta(a), \beta(g)$ はそれぞれ次のように定義されているとする。

$$\beta(a_R) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} a_R \Big|_{a, \Lambda: \text{fixed}}, \quad \beta(g_R) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_R \Big|_{g, \Lambda: \text{fixed}}. \quad (5.1)$$

ここで、 μ は繰り込み点であり、 a_R, g_R はそれぞれ繰り込まれた定数である。

定数 a^2 と結合定数とは $a^2 = N/g^2$ で結ばれているので、Figure 7 のように振舞いが逆になる。実線は仮定 1 から決まる振舞いであるが、 $a^2 \rightarrow \infty$ もしくは $g \rightarrow 0$ の振舞いはこれからの具体的な計算を見ないと分からない。計算の結果、紫外領域で $a^2 \rightarrow \infty$ に流れる場合を点線で、赤外で $a^2 \rightarrow \infty$ に流れる場合を破線で記述してある。 g について対応する振舞いは同じ色で記述される。赤外で $a^2 \rightarrow \infty$ につながる場合、仮定 2 より紫外固定点が 1 つ登場する。

点線のシナリオのとき、結合定数で解釈すると、つまり非線形模型で解釈すると、理論は漸近的自由性を持つ。この振舞いは非超対称 $O(N)$ 模型や $\mathcal{N} = 1$ 超対称模型と同じである。しかし破線のシナリオならば、この理論は漸近的自由ではないことになる。

5.1.2 Asymptotically Non-Free Scenario

次に紫外発散で理論がつながる場合を考察しよう。

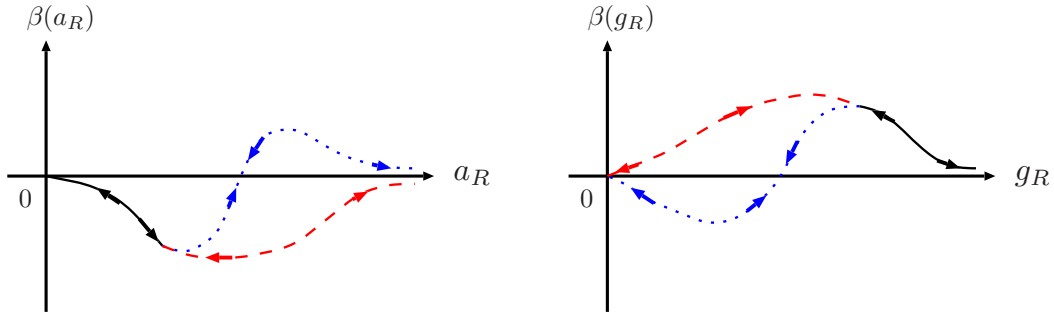


Figure 8: RG flow about constant a and g .

やはり実線は仮定 1 からの帰結で決まっている。 $a^2 \rightarrow \infty$ に赤外でつながる場合を破線で、紫外でつながる場合を点線で記述する。紫外でつながる場合は仮定 2 より、赤外固定点が現れる。

この場合結合定数の振舞いから、点線で表されるシナリオは理論が漸近的自由であることになる。しかし破線のシナリオでは、理論は漸近的自由性を持たない。

実際にここで扱っている模型は後者のシナリオで非自明な固定点がないもの、つまり漸近自由でない振舞いを示すであろうことが予想される。超対称な模型では F -term は繰り込みを受けないが、結合定数はまさにこの F -term に存在する。結合定数に発散が現れるのは波動関数繰り込みとの関連だけである。一方波動関数繰り込みでは、繰

り込み因子 Z とスペクトル関数 $\rho(\sigma^2)$ とが次のように関係付けられている。

$$1 = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) = Z + \int_0^\infty d\sigma^2 \tilde{\rho}(\sigma^2). \quad (5.2)$$

但し σ は考えている粒子の質量であり、 $\rho(\sigma^2)$ がスペクトル関数、 $\tilde{\rho}(\sigma^2)$ は 2 粒子状態以上でのスペクトル関数である。この関係より、正定値理論で考えている限り、

$$0 \leq Z \leq 1, \quad (5.3)$$

という関係が結論付けられる。結合定数はこの繰り込み因子の逆数で登場するのが後で紹介される。それによると、どうやら理論は漸近的自由ではないと見られる。

6 Renormalization in Higher Order Contributions

この目標は、weak coupling theory の不安定真空が高次補正を受けることで結合定数に紫外発散が現れ、繰り込み群を考慮に入れることで別の理論に流れて行く様子を調べることである。ここでの高次補正の構成方法は、拘束条件に目を付けて A_i の伝播関数の波動関数繰り込みに NLO を付加させるものである。

A_i などの伝播関数などは LO では何ら量子補正を受けない古典的なものであったが、補助場が A_i 伝播関数にループとして寄与した場合、それは NLO での量子補正を与えることになる。さらに、場の拘束条件は

$$A_i^2(x) = A_i^{*2}(x) = a^2 = \frac{N}{g^2}. \quad (6.1)$$

であったことを思い出すと¹⁴、 A_i の波動関数に量子補正が起こるということは、結合定数に量子補正が登場するということになる。

6.1 Propagators

この議論は weak coupling theory で、超対称ゼロ質量解を真空に持つところで行う。そのため、 A_i, A_0, ψ_0, F_0 の LO での伝播関数を与える必要がある。しかしそれらは全て section 3 で求められているので、もう一度ここに列挙しておこう。

$$D_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{-p^2}, \quad A_i \text{ propagator}, \quad S_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{-p}, \quad \psi_i \text{ propagator}, \quad (6.2a)$$

$$D_A(p) = -[\Pi(p)]^{-1}, \quad A_0 \text{ "propagator"}, \quad (6.2b)$$

$$S_\psi(p) = -\not{p} \cdot [\Pi(p)]^{-1}, \quad \psi_0 \text{ "propagator"}, \quad (6.2c)$$

$$D_F(p) = -p^2 \cdot [\Pi(p)]^{-1}, \quad F_0 \text{ "propagator"}, \quad (6.2d)$$

$$\Pi(p) = -\phi_i^* \phi_i + \frac{N}{8\pi} p^2 \int_0^1 dx \frac{1}{\lambda^2 - x(1-x)p^2}. \quad (6.2e)$$

6.2 Wave Function Renormalization

では A_i 伝播関数の、補助場によるループ寄与を考察しよう。

A_i 伝播関数への、補助場のループによる補正寄与は Figure 9 にある 3 種類である。ここでもそれぞれ議論の簡単化のためにグラフに名前を付けておく。但しここで、 $1/N$ 展開の高次補正だけを見たいので、同じオーダーでの補正となる A_i のループなどは一切考慮しない。

$1/N$ 展開の NLO 補正に寄与するのはこの 3 種だけである。Lagrangian (3.25) を見る限りでは、Figure 10 に登場するグラフも構成できると一見思ってしまうのだが、補助場 A_0, ψ_0, F_0 の伝播関数を構成する段階で、これ

¹⁴最初の Lagrangian (3.25) から補助場 F_0, F_0^* を積分して追い出すと拘束条件が場の方程式で登場する。

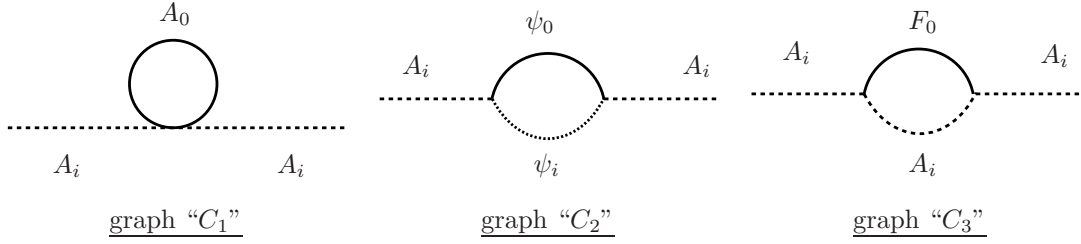


Figure 9: One-loop corrections in A_i propagator.

らのグラフは全て A_i の伝播関数に吸収される。それは (3.6) で示されているが、もう一度その表式を載せる。

$$\begin{aligned}
X'_i &= X_i + D_A D_B^{-1} X_i^c \\
&\simeq X_i + \begin{pmatrix} 1/\partial^2 \cdot A_0^* A_0 & -1/\partial^2 \cdot F_0^* \\ -1/\partial^2 \cdot F_0 & 1/\partial^2 \cdot A_0^* A_0 \end{pmatrix} X_i^c, \quad X_i = \begin{pmatrix} B_i \\ B_i^* \end{pmatrix}, \quad X_i^c = \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_i^* \end{pmatrix}. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

X'_i が、補助場を混合してできた、再定義された A_i である。この X_i を用いて補助場の伝播関数を構成していた。したがって Figure 10 はこの再定義された場の伝播関数にはもはや登場しない。



Figure 10: Rejected graphs.

では、再定義された場 A_i に関して登場する、ループ補正グラフ “ C_1 ”, “ C_2 ”, “ C_3 ” それぞれについて考察する。

1. graph “ C_1 ” contribution

Lagrangian (3.25) でこのグラフを構成する相互作用項は

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_0^* A_0 A_i^* A_i, \quad S_{\text{int}} = \int d^2x \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (6.4)$$

である。これを 1 回用いる。

$$\begin{aligned}
\langle A_i(k_1) A_j^*(-k_2) e^{iS_{\text{int}}} \rangle_0 &\simeq \langle A_i(k_1) A_j^*(-k_2) iS_{\text{int}} \rangle_0 \\
&= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_{ia}(k_1) \frac{1}{i} D_{bj}(k_2) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} [D_A(p) \delta_{ab}] \cdot (-i). \quad (6.5)
\end{aligned}$$

この補正による 1 粒子既約部分のグラフを $-i\Sigma_{ab}^1(k)$ として表す¹⁵。

$$-i\Sigma_{ab}^1(k) = -i\delta_{ab} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} D_A(p). \quad (6.6)$$

¹⁵定義は appendix B 参照。

2. graph “C₂” contribution

Lagrangian (3.25) でこのグラフを構成する相互作用項は

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -A_i \overline{\psi}_0^c \psi_i - A_i^* \overline{\psi}_i \psi_0^c \equiv \mathcal{L}_{\text{int}}^1 + \mathcal{L}_{\text{int}}^2, \quad S_{\text{int}}^i = \int d^2x \mathcal{L}_{\text{int}}^i, \quad (6.7)$$

である。これを 1 回ずつ用いる。

$$\begin{aligned} \langle A_i(k_1) A_j^*(-k_2) e^{iS_{\text{int}}} \rangle_0 &\simeq \langle A_i(k_1) A_j^*(-k_2) (iS_{\text{int}}^1) (iS_{\text{int}}^2) \rangle_0 \\ &= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_{ia}(k_1) \frac{1}{i} D_{bj}(k_2) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \text{tr} \left[S_{ab}(p - k_1) \frac{1}{i} S_\psi(p) \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

この補正による 1 粒子既約部分グラフ $-i\Sigma_{ab}^2(k)$ は次の通り。

$$-i\Sigma_{ab}^2(k) = -i \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \text{tr} [S_{ab}(p - k) S_\psi(p)]. \quad (6.9)$$

3. graph “C₃” contribution

Lagrangian (3.25) でこのグラフを構成する相互作用項は

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{2} F_0 A_i^2 + \frac{1}{2} F_0^* A_i^{*2} \equiv \mathcal{L}_{\text{int}}^1 + \mathcal{L}_{\text{int}}^2, \quad S_{\text{int}}^i = \int d^2x \mathcal{L}_{\text{int}}^i, \quad (6.10)$$

である。これを 1 回ずつ用いる。

$$\begin{aligned} \langle A_i(k_1) A_j^*(-k_2) e^{iS_{\text{int}}} \rangle_0 &\simeq \langle A_i(k_1) A_j^*(-k_2) (iS_{\text{int}}^1) (iS_{\text{int}}^2) \rangle_0 \\ &= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_{ia}(k_1) \frac{1}{i} D_{bj}(k_2) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \left[-D_{ab}(p - k_1) \frac{1}{i} D_F(p) \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

これから出る 1 粒子既約部分グラフ $-i\Sigma_{ab}^3(k)$ はこのようになる。

$$-i\Sigma_{ab}^3(k) = i \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} D_{ab}(p - k) D_F(p). \quad (6.12)$$

これら “C₁”, “C₂”, “C₃” 全ての 1 粒子既約部分グラフの和が、 A_i 波動関数の繰り込み因子として登場する。

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab}^{(\text{all})}(k) &= \Sigma_{ab}^1(k) + \Sigma_{ab}^2(k) + \Sigma_{ab}^3(k) \\ &= k^2 \delta_{ab} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \frac{-1}{-(p - k)^2} D_A(p) \equiv k^2 \delta_{ab} \cdot \Sigma'(k). \end{aligned} \quad (6.13)$$

appendix B を参照して、完全伝播関数、波動関数の繰り込み因子が決定される。

$$D_{ab}^{(\text{full})}(k) = \frac{Z \delta_{ab}}{-k^2}, \quad (6.14a)$$

$$Z^{-1} = 1 - \Sigma'(0) = 1 - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \frac{-1}{-p^2} D_A(p). \quad (6.14b)$$

これにより、波動関数の繰り込み因子と、繰り込まれる前の場 A_i , 繰り込まれた後の場 A_i^R が次で関係付けられる。

$$A_i = Z^{\frac{1}{2}} A_i^R. \quad (6.15)$$

6.3 Coupling Constant Renormalization

(6.1) から、結合定数 g に関する繰り込みを考察する。(6.1) を繰り込まれた場で記述し直そう。

$$Z(A_i^R(x))^2 = \frac{N}{g^2}. \quad (6.16)$$

この期待値を求めよう。繰り込まれた場 $A_i^R(x)$ の真空期待値が ϕ_i^R で、量子的揺らぎの場が $B_i^R(x)$ で与えられる。またこの真空では超対称性のため、 $\langle A_i(x)A_i(y) \rangle$ という相関関数はゼロになっている¹⁶。

$$\langle A_i^R(x)A_i^R(x) \rangle = \langle (\phi_i^R + B_i^R(x))(\phi_i^R + B_i^R(x)) \rangle = (\phi_i^R)^2 + \langle B_i^R(x)B_i^R(x) \rangle = (\phi_i^R)^2. \quad (6.17)$$

したがって拘束条件の期待値は次のようになる。

$$Z(\phi_i^R)^2 = \frac{N}{g^2}. \quad (6.18)$$

まだここまでの結合定数は繰り込まれる前のものであった。これを、繰り込まれた結合定数 g_R を用いて書き直す。すなわち繰り込まれた結合定数をここで定義する。

$$\begin{aligned} \frac{N}{g_R^2} &\equiv Z^{-1} \frac{N}{g^2} \\ &= \frac{N}{g^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi} \int^{\Lambda^2} dt \frac{1}{t} \left[\phi_i^* \phi_i + t \frac{N}{8\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\lambda^2 + x(1-x)t} \right]^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

これは解析的には非常に難解な形式をしている。したがって補助場の 2 点関数を解析的に解きやすいように近似しよう。紫外発散部分に興味があるので、次のように近似する¹⁷。

$$\int_0^1 dx \frac{t}{\lambda^2 + x(1-x)t} \sim 2 \log \frac{t}{\lambda^2}. \quad (6.20)$$

これは (3.19) に登場する変数 a^2 を次のように近似して得られる。

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{t} \right)^{-\frac{1}{2}} \sim 2, \quad \frac{2a+1}{2a-1} \sim 1 + \frac{t}{\lambda^2} \sim \frac{t}{\lambda^2}. \quad (6.21)$$

これを用いて (6.19) を書き直そう。

$$\begin{aligned} \frac{N}{g_R^2} &= Z^{-1} \frac{N}{g^2} = \frac{N}{g^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi} \int^{\Lambda^2} dt \frac{1}{t} \left[\phi_i^* \phi_i + \frac{N}{4\pi} \log(t/\lambda^2) \right]^{-1} \right\} \\ &\simeq \frac{N}{g^2} \left\{ 1 + \frac{1}{N} \log \left(\log \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} + \frac{4\pi}{N} \phi_i^* \phi_i \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

まだここでは紫外発散切断が入っている。ここで紫外発散切断が無限大極限を取ったときを考えよう。そのとき繰り込まれた結合定数 g_R を有限に保っておくと、繰り込まれる前の結合定数は無限大になる。これより、理論は紫外部分を繰り込むと結合定数が小さくなるのがわかる。つまり漸近的自由ではないと言うわけである。

¹⁶ そうなるように場を再定義していた。またこの真空では補助場も全て対角化されている。Table 6 参照。

¹⁷ 最初の 2 点関数導出で、紫外発散部分の寄与を落として 2 点関数を定義している。それからここで紫外発散部分の振舞いを見るための近似を行うのはナンセンスにも思われるが、そもそも低エネルギー有効理論としての 2 点関数を定義しているのでこれでよい。高エネルギーでの物理現象を低エネルギー理論で記述して振舞いを見るのが繰り込み群の考え方の一つである。

一応解析的にも見ていこう。赤外発散切断 λ を繰り込み点 μ で置き換える。そして β 関数を定義しよう。

$$\beta(g_R) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_R, \quad (6.23a)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{1}{g_R^2} = -\frac{2}{g_R^3} \beta(g_R) = -\frac{2}{g^2 N} \left(\log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{4\pi}{N} \phi_i^* \phi_i \right)^{-1}, \quad (6.23b)$$

$$\therefore \beta(g_R) = \frac{g_R}{N} \left(\log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{4\pi}{N} \phi_i^* \phi_i \right)^{-1}. \quad (6.23c)$$

よって、この模型が切断理論で運動量パラメータが切断 Λ より大きな値は取らない、つまり理論には必ず切断が含まれるとした場合は、この β 関数は確かに漸近的非自由であることを表している。しかし理論は切断に寄らない、もしくは切断が無限大の極限をとっているという理論とみなすと、これは特異な振舞いをする。

$$\beta(g_R) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0. \quad (6.24)$$

この、無限大極限を取る立場では、結合定数は無限大で繰り込まれても β 関数はゼロと言う不思議な結果を出す。この原因は、繰り込み因子に切断が対数の対数で入っていることに起因する。

残念なことに、我々の研究は現在ここで止まっている。今後の課題はこの切断の扱い、繰り込みと β 関数の振舞いを精密化し、納得の行くように再構成することにある。しかし定性的には次のことが示されたことになる。

1. 結合定数が有限である理論、つまり weak coupling theory は繰り込み群で流れ、紫外極限で結合定数が無限大になり、strong coupling theory につながる。つまり漸近的自由ではない。
2. strong coupling theory は始めから結合定数が無限大であり、他の理論に流れることはない。つまり $\beta = 0$ で理論は共形不変である。実際、dilatation 変換に対して不変である。また結合定数が有限の理論は、紫外極限で全て自由場理論に流れて行く。

この結論は、非超対称な非線形 $O(N)$ 模型、 $\mathcal{N} = 1$ の $O(N)$ 模型とは振舞いが全く異なる。これらの模型は結合定数が D -term に導入されているため、結果として漸近的自由な振舞いをする。この点が、 $\mathcal{N} = 2$ に拡張した点での大きな違いである。

7 Conclusion and Discussions

この論文では $D = 2$ での $\mathcal{N} = 2$ 超対称模型の 1 つを具体的に構成して、非摂動論的解析を行った。具体的には $1/N$ 展開を用いている。

もう一度この論文で展開した内容全体をまとめておこう。

Summary

$D = 2$ 時空での $\mathcal{N} = 2$ 超対称非線形模型を、補助場を導入することで線形化した模型から出発した。target 空間が Kähler 多様体であるためにこの模型には古典的には strong coupling theory と weak coupling theory に大別できる。

Strong coupling theory については $1/N$ 展開の LO のみを考察することで量子論的な真空が 2 つ得られた。これらは両方とも超対称性を保っている。一方は、はじめから運動項を持っていた $O(N)$ 対称性で基本表現に入る場が質量を獲得し、補助場も運動項を得ることができた。これら補助場はゼロ質量で登場するのであるが、これが重要であった。

$O(N)$ 基本表現に入る場、その中でも Dirac フェルミオンが Majorana 質量を獲得したために、理論が最初持っていた $U(1)$ 対称性が破れてしまったように見える。しかしこれは、補助場の再定義を行うことで、対称性が破れていないことが確かめられた。ここで、先程述べたゼロ質量であることが強く起因している。この再定義により、この解では、理論が持つ全ての対称性、超対称性、 $O(N)$ 対称性、大域的 $U(1)$ 対称性、chiral $U(1)$ 対称性、dilatation 変換不変性、が全て破れていないことが確認された。これは Coleman's theorem と矛盾していない。さらに、この理論では結合定数が一切の紫外発散を持たない。つまり繰り込みを受けていない。つまりこの理論では真空は共形不変性を持つことも分かった。

もう 1 つの真空解は $O(N)$ 基本表現の場がゼロ質量で登場する。このとき、これらの場が真空期待値を持つてしまうために $O(N)$ 対称性が破れてしまう。また補助場が粒子描像を持たない場として登場する。 $O(N)$ 場が真空期待値を持つてしまうことで $O(N)$ 対称性が破れているように見えるが、長距離領域ではこの対称性は回復する。その機構は位相変換対称性が回復する機構と同じである。

Weak coupling theory においても同様に $1/N$ 展開で解析を行った。この場合、target 空間が Kähler 多様体、つまり複素多様体であることが非常に厄介なものになる。LO までの解析では、ポテンシャルの停留点は 1 つしか得られなかった。それは $O(N)$ 場がゼロ質量で登場する真空解である。ゼロ質量であるために $O(N)$ 対称性が破れるように見え、補助場が粒子描像を持たない。しかしここでも対称性が長距離領域では回復している。

さらに、この理論でも結合定数は紫外発散を持たず、繰り込みを受けない。したがって LO では strong coupling theory などに繰り込み群で流れるは許されない。

この2つの理論はどのようにつながるのであろうか。繰り込み群を考慮したいが $1/N$ 展開では発散が波動関数にも、結合定数にもでないために繰り込み群が構成できない。したがって我々は NLO の考察に取り組むことにした。まずは NLO 補正を入れても、非繰り込み定理のために結合定数は F -term からは発散を受けず、したがって繰り込み群が構成できないことを確認した。その後、場の波動関数繰り込み因子を用いて結合定数に発散を持たせ、繰り込み群が構成できるようにしたが、紫外発散切断が β 関数などに残ってしまった。これを改善する方法は現在まだ良く分かっていないが、状況として、理論が漸近的非自由であることは定性的にわかった。これによって、strong coupling theory と weak coupling theory は紫外極限でつながることになる。別の言い方をすれば、strong coupling theory はいつまでもそのまま他の理論に流れることはないが、結合定数が無限大でなく有限量であれば、赤外極限で全て自由場理論に流れて行くことになっている。これらの振舞いは、以前から良く知られていた非超対称 $O(N)$ 模型や、 $\mathcal{N} = 1$ 超対称な $O(N)$ 模型とは全く異なる振舞いをしている。そういった点で、ここで取り上げた $\mathcal{N} = 2$ 超対称な模型は新しい描像を提供したことになる。

Problems

この模型はいろいろな所でまだ完全に理解されていない部分がある。以下にそれを列挙する。

- Strong coupling theory において、対称性が全て回復するために、2つの停留点の解がそのまま両方生き残っている。1つは $O(N)$ 場が質量を持つ解、もう1つはゼロ質量の解である。これらの真空解のつながりは一体どういうものか、どちらが最終的に実現されるのか、それを決定する要素が今のところ分かっていない。
- NLO まで考察して結合定数に発散を登場させたとき、繰り込み因子 Z には紫外発散切断 Λ が残る。 $\beta(g_R)$ にもその依存性が残ってしまう。spacetime が格子となっている場合には、この紫外発散は有限であっても良いが、その場合格子上にフェルミオンを乗せることはまだ完成されていない。つまり超対称性を構成できるかどうか不明である。また紫外発散を無限大に取ると $\beta(g_R)$ はゼロになってしまう。これでは発散は登場しても理論が繰り込み群として流れて行かないようになる。これを回避するために Wilson 的な繰り込み群を構成すると、繰り込み群の流れで非自明な固定点が現れて、理論がそこに流れて行くかも知れない。そのような理論を構成するには、target 空間の非コンパクト方向に対して省略した任意関数 $f(\Phi_i^* \Phi_i)$ を復活させる必要がある。

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta f(\Phi_i^* \Phi_i) + \frac{1}{2} \left(\int d^2\theta \Phi_0 (\Phi_i^2 - a^2) + (\text{c.c.}) \right). \quad (7.1)$$

しかしまだこの考察は行っていない。

- 漸近的非自由な理論となっている場合、 $O(N)$ 場を積分して得られた有効作用 S_{eff} がどういうモノか、まだはっきりと理解できない。漸近的自由な理論の場合、 $O(N)$ 場を積分した有効作用は、QCD との類似で言えば、 $O(N)$ 場が「閉じ込め」られているくらいの低エネルギー有効理論であるという解釈ができる。しか

し漸近的非自由な理論では、有効作用に同じような解釈をつけることが難しい。単に $O(N)$ 場を見ない理論、としか言えない。

この模型に関する今後の課題は、上に挙げた様々な問題を解決することである。

Next Studies

これからの研究の方針をここで挙げておこう。

この模型は本来ならば Kähler potential に任意関数が含まれるのであるが、計算を見通し良くするためにその任意関数を固定している。しかし任意関数は、target 空間が複素化され、非コンパクトになり、QNG boson が登場するために必要となった関数である。この任意関数を復活させることで、様々な任意の Kähler 多様体を考察することができる。

その具体的な応用例として、弦理論とのつながりを考えることが可能である。任意関数を復活させた Kähler 多様体に Ricci 平坦条件を課すことで、target 空間に $\mathcal{N} = 2$ の超対称性が存在する理論とのつながりが見えて来る。但し target 空間が非コンパクトである模型から出発しているので、これまでにまだ余り知られていない構造が豊富に得られそうである。これは non-compact Calabi-Yau manifold を研究している分野にもつながることができるであろう。その他にも弦理論の解析方法のひとつとして非線形模型を用いることは既に確固たる地位を築いている。ここで培ったテクニックを用いて弦理論を研究するのは、個人的に非常に興味を持たれることである。

また、appendix M は我々の研究成果の 1 つでもある。これはもともと、BKMU classification での B type に当たる、compact Kähler 多様体を持つ非線形模型の線形起源を探求する、という研究のひとつの成果である。ここで培った解析方法などを、他に可能性のある模型に応用することは、B type でさらに HSS となっている模型を非摂動論的に完全に理解することにつながる。こちらの方面も今後共同研究などを通して研究して行きたい。

Acknowledgements

この修士論文を書くにあたり、指導教官である 東島 清 教授には大変有用な御指導を頂きました。無知である私に対して、些細な部分まで丁寧に議論を交わしてくださいました。心より感謝致します。また 太田 信義 助教授は私達の研究内容に大きな興味を持って頂き、有用な議論も展開することができました。ありがとうございます。M1 の始めから M2 の半ばにかけて、場の量子論のゼミを面倒見てくださった 窪田 高弘 助教授にも、感謝致します。ためになるトピックをたくさん聞かせて頂きました。

この研究をするきっかけを提供してくださった、東京工業大学の 新田 宗土さんにもひとかたならぬお世話を頂きました。遠いところからもいろいろと面倒を見て頂き、感謝しています。また 横井 直人さんには日頃から素粒子論について熱心に議論して頂きました。ありがとうございました。

藤井 亮さん、家島 健さん、富野 弾さんにはこの論文の構成や内容について様々な議論を交わしてくださいました、ありがとうございます。

共同研究を通じて、同期の 都築 誠 さんにも非常にお世話になりました。彼の発想には時々感嘆されました。この場を借りて感謝をさせていただきます。

この修士論文を丁寧に読み直して頂いた 進藤 哲央さん、伊藤悦子さん、西原 康介さんにも、感謝致します。

いろいろ挙げればきりがありませんが、素粒子論研究室内外の学生、教官、事務の方々や、他大学の様々な人の御指導、交流のおかげで、このように修士論文と言う形で一応の区切りを付けることができました。本当にありがとうございました。

A Non-Perturbative Analysis: $1/N$ Expansion

本文では摂動論的展開方法、つまり \hbar 展開もしくは結合定数での展開を採用せず、非摂動論的展開を用いている。ここでは \hbar に代わって $1/N$ で展開する一般的な議論を簡単に紹介しよう [28]。

生成汎関数から有効作用を構成する方法から述べておく。場 ϕ で構成される作用 S_1 と外場 J が与えられたとき、連結、非連結を問わず相関関数を与える生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ と、連結相関関数だけ与える生成汎関数 $\mathcal{W}[J]$ とは次で定義される。

$$\mathcal{Z}[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp i(S_1[\phi] + J \cdot \phi) \equiv \exp(i\mathcal{W}[J]), \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathcal{W}[J] = -i \log \int \mathcal{D}\phi \exp i(S_1[\phi] + J \cdot \phi), \quad (\text{A.1b})$$

$$J \cdot \phi \equiv \int d^2x J(x)\phi(x). \quad (\text{A.1c})$$

Legendre 変換をして有効作用 Γ を構成しよう。

$$\Gamma[\varphi] \equiv \mathcal{W}[J] - J \cdot \varphi, \quad \varphi(x) \equiv \frac{\delta}{\delta J(x)} \mathcal{W}[J]. \quad (\text{A.2})$$

これを用いると、 Γ と S_1 とは次の関係で結ばれる。

$$\Gamma[\varphi] = -i \log \int \mathcal{D}\phi \exp i(S_1[\phi] + J \cdot (\phi - \varphi)). \quad (\text{A.3})$$

今 Γ, S_1 がある因子 a で次のようにくり出している場合を考えよう。

$$a\Gamma[\varphi] = -i \log \int \mathcal{D}\phi \exp ia(S_1[\phi] + J \cdot (\phi - \varphi)). \quad (\text{A.4})$$

このとき、 ϕ の伝播関数は $1/a$ に比例し (伝播関数は S_1 の中に ϕ の 2 点関数の逆行列として登場している)、相互作用項は a に比例していることになる。したがって、Feynman グラフを書いた場合、そこに伝播関数が P 本、相互作用点が V 個存在していたら、そのグラフは a^{V-P} が全体にかかっていることになる。ここで、グラフにループが L 個入っていたとすると、 P, V, L には

$$P - (V - 1) = L, \quad (\text{A.5})$$

という関係が成り立っているので、ループが L 個入っているものは結局 a^{1-L} に比例することになる。今 Γ も a でくりだしているので、非ループグラフは a^0 のオーダーで、1 ループは $1/a$ 、2 ループは $1/a^2$ といった感じでループ補正のオーダーが入って来ることになる。

ちなみに、摂動論的展開を行っている場合は、 $a = 1/\hbar$ であるので、ループ展開はそのまま摂動論的展開である。 \hbar は固定しておいて、他の因子で展開すると、それは非摂動論的展開ということになる。

この議論を、本文に近い形式に応用してみよう。 $a = N$ としてこれ以降考えよう。

本文に出て来る設定と同じように、複素場 Φ_i は最初から運動項を持つ場として、複素場 Φ_0 は補助場として導入する。また、明記していないが複素共役の項も存在しているとして、次の生成汎関数から出発する。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J_0] &= \int \mathcal{D}\Phi_i \mathcal{D}\Phi_0 \exp i(S_1[\Phi_i, \Phi_0] + J_0 \cdot \Phi_0) \\ &= \int \mathcal{D}\Phi_0 \exp i(S_2[\Phi_0, \langle \Phi_i \rangle] + J_0 \cdot \Phi_0) = \exp(i\mathcal{W}[J_0]), \end{aligned} \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathcal{W}[J_0] = -i \log \int \mathcal{D}\Phi_0 \exp i(S_2[\Phi_0, \langle \Phi_i \rangle] + J_0 \cdot \Phi_0), \quad (\text{A.6b})$$

$$J_0 \cdot \Phi_0 \equiv \int d^2x J_0(x) \Phi_0(x). \quad (\text{A.6c})$$

出発点で採用している作用 S_1 は本文と同様に Φ_i が二次までしか入っていないものとする。つまり経路積分が完全に実行できて、有効作用 S_2 は正確なものが得られるようにしている。 J_0 は補助場の外場である。さらに $\mathcal{W}[J_0]$ は連結相関関数の生成汎関数である。この積分によって、 S_2 は全体に N という因子がかかるので、それをくくり出しておこう。

$$S_2[\Phi_0, \langle \Phi_i \rangle] \equiv N S'_2[\Phi_0, \langle \Phi_i \rangle]. \quad (\text{A.7})$$

この再定義に併せて、生成汎関数 $\mathcal{W}[J_0]$ 、外場 J_0 も再定義しておく。

$$\mathcal{W}[J_0] \equiv N \mathcal{W}'[J'_0], \quad J'_0 \equiv J_0/N. \quad (\text{A.8})$$

S_2 の理論から言えば、補助場 Φ_0 はここでようやく運動項を獲得したと言うことでまだ古典論であって、この補助場の量子補正をこれから考えることになる。

Legendre 変換を $\Phi_0(x)$ に対して行う。

$$\Gamma[\Phi_0^c] = \mathcal{W}[J_0] - J_0 \cdot \Phi_0^c, \quad (\text{A.9a})$$

$$\Phi_0^c(x) \equiv \frac{\delta}{\delta J_0(x)} \mathcal{W}[J_0], \quad J_0(x) = -\frac{\delta}{\delta \Phi_0^c(x)} \Gamma[\Phi_0^c]. \quad (\text{A.9b})$$

ここで、 N をくくり出す再定義を行うことで、これら有効作用も変更される。

$$\Gamma[\Phi_0^c] = \mathcal{W}[J_0] - J_0 \cdot \Phi_0^c = N \{ \mathcal{W}'[J'_0] - J'_0 \cdot \Phi_0^c \} \equiv N \Gamma'[\Phi_0^c], \quad (\text{A.10a})$$

$$\Phi_0^c = \frac{\delta}{\delta J_0(x)} \mathcal{W}[J_0] = \frac{\delta}{\delta J'_0(x)} \mathcal{W}'[J'_0]. \quad (\text{A.10b})$$

以後この Γ' を用いる。

これから、 $\Phi_0(x) = \Phi_0^c(x) + \tilde{\Phi}_0(x)$, $\mathcal{D}\Phi_0 = \mathcal{D}\tilde{\Phi}_0$ へとずらした理論 (shifted Lagrangian) を用いて有効作用を得ることができる。

$$\begin{aligned} \Gamma'[\Phi_0^c, \langle \Phi_i \rangle] &= -\frac{i}{N} \log \int \mathcal{D}\Phi_0 \exp iN(S'_2[\Phi_0, \langle \Phi_i \rangle] + J'_0 \cdot (\Phi_0 - \Phi_0^c)) \\ &= -\frac{i}{N} \log \int \mathcal{D}\tilde{\Phi}_0 \exp iN(S'_2[\Phi_0^c + \tilde{\Phi}_0, \langle \Phi_i \rangle] - (\delta\Gamma'/\delta\Phi_0^c) \cdot \tilde{\Phi}_0) = S'_2[\Phi_0^c, \langle \Phi_i \rangle] + \tilde{\Gamma}'[\Phi_0^c, \langle \Phi_i \rangle], \end{aligned} \quad (\text{A.11a})$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}'[\Phi_0^c, \langle \Phi_i \rangle] &= -\frac{i}{N} \log \int \mathcal{D}\tilde{\Phi}_0 \exp iN (\tilde{\Phi}_0^\dagger \cdot iD_F^{-1}\tilde{\Phi}_0 + S'_{\text{int}}[\Phi_0^c, \tilde{\Phi}_0, \langle \Phi_i \rangle] - (\delta\tilde{\Gamma}'/\delta\Phi_0^c) \cdot \tilde{\Phi}_0) \\
&= \frac{i}{N} \log \text{Det}(iD_F^{-1}[x; \Phi_0^c, \langle \Phi_i \rangle]) - \frac{i}{N} \log \left[\frac{\int \mathcal{D}\tilde{\Phi}_0 \exp iN (\tilde{\Phi}_0^\dagger \cdot iD_F^{-1}\tilde{\Phi}_0 + S'_{\text{int}} - (\delta\tilde{\Gamma}'/\delta\Phi_0^c) \cdot \tilde{\Phi}_0)}{\int \mathcal{D}\tilde{\Phi}_0 \exp iN (\tilde{\Phi}_0^\dagger \cdot iD_F^{-1}\tilde{\Phi}_0)} \right].
\end{aligned} \tag{A.11b}$$

有効作用 Γ' の初項 S'_2 に比べ第 2 項 $\tilde{\Gamma}'$ が $1/N$ 倍されている。つまり $1/N$ 展開で言えばオーダーが 1 つ上がっている。さらに $\tilde{\Gamma}'$ の内訳を見ると、初項は補助場の 1 ループ寄与を表し、第 2 項はそれ以上の、相互作用から来る項である。さらなる高次の寄与もこの第 2 項から登場する¹⁸。

また有効ポテンシャルは次のようになる。

$$\Gamma'(\langle \Phi_0^c \rangle, \langle \Phi_i \rangle) \equiv -V'(\langle \Phi_0^c \rangle, \langle \Phi_i \rangle) \int d^2x, \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
V'(\langle \Phi_0^c \rangle, \langle \Phi_i \rangle) &= V'_{\text{cl}}(\langle \Phi_0^c \rangle, \langle \Phi_i \rangle) \\
&+ \frac{1}{N} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log \det [D_F^{-1}(p; \langle \Phi_0^c \rangle, \langle \Phi_i \rangle)] + \frac{i}{N} \left\langle \exp iN S'_{\text{int}}(\tilde{\Phi}_0, \langle \Phi_0^c \rangle, \langle \Phi_i \rangle) \right\rangle_{\text{1PI}}.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

最初の項は Γ' でも触れたように LO でも登場する寄与であり、第 2 項は補助場 Φ_0 の 1 ループ寄与、第 3 項は補助場の 2 ループ以上の、一粒子既約な真空グラフである。括弧の記号は次の意味を持つ相関関数で、さらに 1 粒子既約なものである。

$$\langle F[\tilde{\Phi}_0] \rangle_0 \equiv \exp \left[\frac{\delta}{\delta\tilde{\Phi}_0} \cdot D_F \frac{\delta}{\delta\tilde{\Phi}_0^\dagger} \right] F[\tilde{\Phi}_0] \Big|_{\tilde{\Phi}_0=0} = \exp \left[\int d^2x d^2y \frac{\delta}{\delta\tilde{\Phi}_0(x)} D_F(x-y) \frac{\delta}{\delta\tilde{\Phi}_0^\dagger(y)} \right] F[\tilde{\Phi}_0] \Big|_{\tilde{\Phi}_0=0}. \tag{A.14}$$

任意のオーダーでの伝播関数は、次のようにして求められる。

$$D_F^{(\text{full})}(x-y) = \langle \tilde{\Phi}_0(x) \tilde{\Phi}_0^\dagger(y) \exp(iN S'_{\text{int}}) \rangle_0. \tag{A.15}$$

運動量表示の 2 点関数と 内線伝播関数には次の関係がある。

$$\Pi(p) = -D_F^{-1}(p). \tag{A.16}$$

¹⁸ここでは具体的な模型に付いては言及しないが、非線形模型や Gross-Neveu model に適用されている [29][30][31]。更に超対称模型にも容易に一般化できる。その例として [32] 等がある。

B Momentum Representations

有効作用に登場する相互作用項を運動量表示する準備を行う。その表示の方が後の計算に便利だからである。

まずは一般公式から。任意の場を $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ とし、伝播関数を $D(x-y)$ と書く。

$$A(x) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{-ipx} A(p), \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{\delta}{\delta A(x)} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{+ipx} \frac{\delta}{\delta A(p)}, \quad \frac{\delta}{\delta F(p)} F(k) = (2\pi)^2 \delta^2(p-k). \quad (\text{B.1b})$$

$$\text{Tr}[DADB] = \int \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p_2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^2(p_1+p_2) \frac{1}{i} D(k) A(p_1) \frac{1}{i} D(p_2+k) B(p_2), \quad (\text{B.2a})$$

$$\int d^2 x \{ADBDC\} = \int \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p_2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p_3}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^2(p_1+p_2+p_3) A(p_1) \frac{1}{i} D(p_2+p_3) B(p_2) \frac{1}{i} D(p_3) C(p_3). \quad (\text{B.2b})$$

これを用いる。ちなみにこの表示のとき、相互作用点に流れ込む運動量は内向きである。

さらに完全伝播関数も次のように運動量表示される。(フェルミオンは左微分。)

$$(2\pi)^2 \delta^2(p_1-p_2) \frac{1}{i} \tilde{D}_F^{(\text{full})}(p_2) \equiv \langle F(p_1) F^*(-p_2) e^{iS_2^{\text{int}}} \rangle_0, \quad (\text{B.3a})$$

$$\langle \cdots \rangle_0 \equiv \exp \left[\frac{\delta}{\delta F} \cdot \frac{1}{i} \tilde{D}_F \frac{\delta}{\delta F^*} - \frac{\delta}{\delta \psi} \cdot \frac{1}{i} \tilde{S}_\psi \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta}{\delta A} \cdot \frac{1}{i} \tilde{D}_A \frac{\delta}{\delta A^*} \right] (\cdots) \Big|_{\text{fields}=0}, \quad (\text{B.3b})$$

$$\frac{\delta}{\delta F} \cdot \frac{1}{i} \tilde{D}_F \frac{\delta}{\delta F^*} \equiv \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\delta}{\delta F(p)} \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) \frac{\delta}{\delta F^*(-p)}, \quad (\text{B.3c})$$

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p), \quad (\text{B.3d})$$

$$\tilde{D}_F(p) : \text{内線 propagator}, \quad \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) : \text{外線 propagator}. \quad (\text{B.3e})$$

具体的に完全伝播関数を構成してみよう。ループ補正による 1 粒子既約部分グラフを $-i\Sigma(p)$ として表現すると、完全伝播関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \tilde{D}_F^{(\text{full})}(p) &= \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) + \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) \{ -i\Sigma(p) \} \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) + \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) \left[\{ -i\Sigma(p) \} \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) \right]^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) \left[1 + \Sigma(p) \tilde{D}_F \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

古典的なゼロ質量伝播関数は一般にベキ関数で $\tilde{D}_F(p) = -1/p^2$ と記述できる。また 1 粒子既約部分が運動量とその他に分離できる次のような場合、完全伝播関数は次のようにまとめられる。

$$\frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) = \frac{1}{i} \frac{1}{-p^2} \frac{1}{1 - \Sigma'(p)}, \quad \Sigma(p) = p^2 \Sigma'(p). \quad (\text{B.5})$$

ここで波動関数の繰り込み因子を定義しよう。定義は運動量がゼロの付近である。

$$\frac{1}{i} \tilde{D}_F(p) \simeq \frac{1}{i} \frac{Z}{-p^2}, \quad Z^{-1} = 1 - \Sigma'(0). \quad (\text{B.6})$$

C Gap Equations in NLO – Non-Renormalization –

ここでは F -term で入っている結合定数は、それだけでは繰り込まれないことを見る。方法は、LO と同じようにして NLO での有効ポテンシャルから停留点を探しだし、その点でも結合定数が発散を受けないことを確認する。

Appendix A を用いて、高次の補正を構成しよう。LO で構成した有効作用 (3.5), (3.26) は、補助場に着目すればそれはまだ “古典論” だった。今度は 補助場のループまで考慮した有効作用を構成する。こうすることで高次の寄与まで理論に採り入れることができるようになる。ここでは LO で安定な真空を得ることができなかった weak coupling theory に着目する。

出発点は “古典論” (3.26) である。

$$S_2 = \frac{iN}{2} \text{TR} \log [D_A^{-1}] - \frac{iN}{2} \text{TR} \log [S^{-1}] - \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} [D_B^{-1} - D_B^{-1} D_A D_B^{-1}] X_i^c - \frac{1}{2} a^2 \int d^2x (F_0 + F_0^*). \quad (3.26)$$

補助場を定数部分ずらす。

$$\begin{aligned} A_0(x) &\rightarrow m + A_R(x) + iA_I(x), & A_0^*(x) &\rightarrow m + A_R(x) - iA_I(x), \\ \psi_0(x) &\rightarrow 0 + \psi(x), & \bar{\psi}_0(x) &\rightarrow 0 + \bar{\psi}(x), \\ F_0(x) &\rightarrow fe^{i\theta} + F(x), & F_0^*(x) &\rightarrow fe^{-i\theta} + F^*(x). \end{aligned} \quad (C.1)$$

各種行列が次のようになる。

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \begin{pmatrix} i\partial & -m \cdot \mathbf{1} \\ -m \cdot \mathbf{1} & i\partial \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -A_R + iA_I \cdot \mathbf{1} \\ -A_R - iA_I \cdot \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \equiv S_0^{-1} + S'^{-1}, \\ S &= S_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-S'^{-1} S_0)^n, & S_0 &= \begin{pmatrix} -\Delta i\partial & -m\Delta \cdot \mathbf{1} \\ -m\Delta \cdot \mathbf{1} & -\Delta i\partial \end{pmatrix}, \\ D_A^{-1} &= \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & -fe^{-i\theta} \\ -fe^{i\theta} & \Delta^{-1} \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} A_R^2 + A_I^2 + 2mA_R & -F^* \\ -F & A_R^2 A_I^2 + 2mA_R \end{pmatrix} + \overline{\mathcal{M}} S \mathcal{M} \right\} \\ &= D_0^{-1} + D'^{-1}, & \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} 0 & \psi^c \\ \psi & 0 \end{pmatrix}, & \overline{\mathcal{M}} &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \bar{\psi}^c & 0 \end{pmatrix}, \\ D_B^{-1} &= D_{B0}^{-1} + D'^{-1}, & D_{B0}^{-1} &= \begin{pmatrix} m^2 & -fe^{-i\theta} \\ -fe^{i\theta} & m^2 \end{pmatrix}, \\ D_A &= D_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-D'^{-1} D_0)^n, & D_0 &= \begin{pmatrix} \Delta_C & fe^{-i\theta} \Delta_B \\ fe^{i\theta} \Delta_B & \Delta_C \end{pmatrix}, \\ \Delta^{-1} &\equiv \partial^2 + m^2, & \Delta_B^{-1} &\equiv (\Delta^{-1})^2 - f^2, & \Delta_C &\equiv \Delta_B \Delta^{-1}. \end{aligned}$$

これを用いると、場の全ての展開ができることになる。

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{iN}{2} \text{TR} \log [D_0^{-1}] - \frac{iN}{2} \text{TR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-D_0 D'^{-1})^m - \frac{iN}{2} \text{TR} \log [S_0^{-1}] + \frac{iN}{2} \text{TR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-S_0 S'^{-1})^m \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} [D_{B0}^{-1} + D'^{-1}] X_i^c + \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} \left[D_{B0}^{-1} D_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-D'^{-1} D_0)^n D_{B0}^{-1} \right] X_i^c \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} \left[D_{B0}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-D_0 D'^{-1})^{n+1} \right] X_i^c - \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-D'^{-1} D_0)^{n+1} D_{B0}^{-1} \right] X_i^c \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} \left[D'^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-D_0 D'^{-1})^{n+1} \right] X_i^c \\
&\quad - a^2 f \cos \theta \int d^2x - \frac{1}{2} a^2 \int d^2x (F + F^*) . \tag{C.2}
\end{aligned}$$

まずはここから非ループグラフを構成する。つまり LO 寄与を構成する。高次の寄与は、LO の補正 (1/N 補正) として構成する。

C.1 Two-Point Functions

$\phi_i, \phi_i^*, m, f, \theta$ をパラメータとして全ての 2 点関数を構成すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
S_2 &\simeq \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left\{ \bar{\psi}(-p) \Sigma_1(p) \psi(p) + \bar{\psi}(-p) \Sigma_2(p) \psi^c(p) + \bar{\psi}^c(-p) \Sigma_3(p) \psi(p) \right. \\
&\quad + A_R(-p) \Pi_1^A(p) A_R(p) + A_I(-p) \Pi_2^A(p) A_I(p) + A_I(-p) \Pi_3^A(p) A_R(p) \\
&\quad + F^*(-p) \Pi_1^F(p) F(p) + F(-p) \Pi_2^F(p) F(p) + F^*(-p) \Pi_3^F(p) F^*(p) \\
&\quad \left. + A_R(-p) \Pi_1^{AF}(p) F(p) + A_R(-p) \Pi_2^{AF}(p) F^*(p) + A_I(-p) \Pi_3^{AF}(p) F(p) + A_I(-p) \Pi_4^{AF}(p) F^*(p) \right\} , \\
\Sigma_1(p) &= N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} \frac{\not{p} + \not{k}}{-(p+k)^2 + m^2} + \phi_i^* \phi_i \frac{\not{p}}{-p^2 + m^2} = \Sigma'_1(p) \cdot \not{p} , \\
\Sigma'_1(p) &= N \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} 2(1-y) \frac{[2y-1]k^2 + (1-y)^2 m^2 - y^2(1-y)p^2}{\{-k^2 + m^2 - y(1-y)p^2 - (2xy - 2x - y + 1)f\}^3} + \phi_i^* \phi_i \frac{1}{-p^2 + m^2} , \\
\Sigma_2(p) &= \Sigma'_2(p) \cdot \mathbf{1} , \\
\Sigma'_2(p) &= \frac{1}{2} N m f e^{i\theta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} \frac{1}{-(p+k)^2 + m^2} + \frac{1}{2} \phi_i^{*2} \frac{m}{-p^2 + m^2} , \\
\Sigma_3(p) &= (\Sigma_2(p))^* , \\
\Pi_1^A(p) &= -N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{m^2 + k \cdot (p+k)}{[-k^2 + m^2][-(p+k)^2 + m^2]} \\
&\quad + 2N m^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{[-k^2 + m^2][-(p+k)^2 + m^2] + f^2}{\{(-k^2 + m^2)^2 - f^2\} \{[-(p+k)^2 + m^2]^2 - f^2\}} \\
&\quad + \phi_i^* \phi_i \left\{ -1 + \frac{4m^2(-p^2 + m^2)}{(-p^2 + m^2)^2 - f^2} \right\} + (\phi_i^2 e^{i\theta} + \phi_i^{*2} e^{-i\theta}) \frac{2m^2 f}{(-p^2 + m^2)^2 - f^2} , \\
\Pi_2^A(p) &= N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \left\{ -\frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} + \frac{m^2 + k \cdot (p+k)}{[-k^2 + m^2][-(p+k)^2 + m^2]} \right\} - \phi_i^* \phi_i ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_3^A(p) &= 0, \\
\Pi_1^F(p) &= \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} \frac{-(p+k)^2 + m^2}{[-(p+k)^2 + m^2]^2 - f^2} + \phi_i^* \phi_i \frac{-p^2 + m^2}{(-p^2 + m^2)^2 - f^2}, \\
\Pi_2^F(p) &= \frac{N}{4} f^2 e^{-2i\theta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} \frac{1}{[-(p+k)^2 + m^2]^2 - f^2} + \frac{1}{2} \phi_i^2 \frac{f e^{-i\theta}}{(-p^2 + m^2)^2 - f^2}, \\
\Pi_3^F(p) &= (\Pi_2^F(p))^*, \\
\Pi_1^{AF}(p) &= -2Nm f e^{-i\theta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + m^2}{(-k^2 + m^2)^2 - f^2} \frac{1}{[-(p+k)^2 + m^2]^2 - f^2} \\
&\quad - 2\phi_i^* \phi_i \frac{m f e^{-i\theta}}{(-p^2 + m^2)^2 - f^2} - 2\phi_i^2 \frac{m(-p^2 + m^2)}{(-p^2 + m^2)^2 - f^2}, \\
\Pi_2^{AF}(p) &= (\Pi_1^{AF}(p))^*, \\
\Pi_3^{AF}(p) &= \Pi_4^{AF}(p) = 0.
\end{aligned}$$

C.2 Effective Potential

NLO での有効ポテンシャルを構成する。構成方法などは appendix A を参考にする。

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}}, \quad (\text{C.4a})$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{LO}} &= \frac{N}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log [(-p^2 + m^2)^2 - f^2] - N \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log [-p^2 + m^2] \\
&\quad - \frac{1}{2} f e^{i\theta} (\phi_i^2 - a^2) - \frac{1}{2} f e^{-i\theta} (\phi_i^{*2} - a^2) + m^2 \phi_i^* \phi_i, \quad (\text{C.4b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{NLO}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log \det \left[- \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Sigma'_1(p) \cdot \not{p} & \Sigma'_2(p) \cdot \mathbf{1} \\ \Sigma'_3(p) \cdot \mathbf{1} & \frac{1}{2} \Sigma'_1(p) \cdot \not{p} \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log \det [-\Pi_2^A(p)] + \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log \det \left[- \begin{pmatrix} \Pi_1^A(p) & \frac{1}{2} \Pi_1^{AF}(p) & \frac{1}{2} \Pi_2^{AF}(p) \\ \frac{1}{2} \Pi_2^{AF}(p) & \frac{1}{2} \Pi_1^F(p) & \Pi_3^F(p) \\ \frac{1}{2} \Pi_1^{AF}(p) & \Pi_2^F(p) & \frac{1}{2} \Pi_1^F(p) \end{pmatrix} \right] \quad (\text{C.4c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log \left[-\frac{1}{4} p^2 (\Sigma'_1)^2 + \Sigma'_2 \Sigma'_3 \right] + \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log [-\Pi_2^A] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \log \left[-\frac{1}{4} \Pi_1^A (\Pi_1^F)^2 - \frac{1}{4} \Pi_3^F (\Pi_1^{AF})^2 - \frac{1}{4} \Pi_2^F (\Pi_2^{AF})^2 + \Pi_1^A \Pi_2^F \Pi_3^F + \frac{1}{4} \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \right]. \quad (\text{C.4d})
\end{aligned}$$

C.3 Gap Equations

NLO まで含めた gap equation は以下の 5 つの関係式である。

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial \phi_i} V_{\text{eff}} \Big|_{f=0} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \{V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}}\} \Big|_{f=0}, \quad (\text{C.5a})$$

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} V_{\text{eff}} \Big|_{f=0} = \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \{V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}}\} \Big|_{f=0}, \quad (\text{C.5b})$$

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial m} V_{\text{eff}} \Big|_{f=0} = \frac{\partial}{\partial m} \{V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}}\} \Big|_{f=0}, \quad (\text{C.5c})$$

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial f} V_{\text{eff}} \Big|_{f=0} = \frac{\partial}{\partial f} \{V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}}\} \Big|_{f=0}, \quad (\text{C.5d})$$

$$0 \equiv \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} V_{\text{eff}} \Big|_{f=0} = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \{V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}}\} \Big|_{f=0}. \quad (\text{C.5e})$$

我々は LO での超対称性を実現する真空の、NLO の補正を見たいので、超対称な解 ($f = 0$) をあらかじめ課しておく。また、繰り込み群の流れ (renormalization group flow, RG flow) を考察するのに直接関係があるのは、(C.5d) (C.5e) である。

C.4 Supersymmetric Massless Condition

V_{NLO} の各種定数での微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} V_{\text{NLO}} &= -2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Sigma'_1} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Sigma'_1 \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_1^A} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_1^A \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_2^A} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_2^A \right) \\ &\quad + \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_1^F} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_1^F \right), \end{aligned} \quad (\text{C.6a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} V_{\text{NLO}} &= -2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Sigma'_1} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Sigma'_1 \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_1^A} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_1^A \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_2^A} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_2^A \right) \\ &\quad + \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_1^F} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_1^F \right), \end{aligned} \quad (\text{C.6b})$$

$$\frac{\partial}{\partial m} V_{\text{NLO}} = 0, \quad (\text{C.6c})$$

$$\frac{\partial}{\partial f} V_{\text{NLO}} = 0, \quad (\text{C.6d})$$

$$\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} V_{\text{NLO}} = 0. \quad (\text{C.6e})$$

但し登場する各関数は次のようになっている。

$$\Pi_1^A = -N \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \left\{ \frac{1}{-k^2} + \frac{k \cdot (p+k)}{[-k^2][-(p+k)^2]} \right\} - \phi_i^* \phi_i, \quad (\text{C.7a})$$

$$\Pi_2^A = -N \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \left\{ \frac{1}{-k^2} - \frac{k \cdot (p+k)}{[-k^2][-(p+k)^2]} \right\} - \phi_i^* \phi_i, \quad (\text{C.7b})$$

$$\Pi_1^F = \frac{N}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-k^2} \frac{1}{-(p+k)^2} - \phi_i^* \phi_i \frac{1}{p^2}, \quad (\text{C.7c})$$

$$\Sigma'_1 = N \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^2k}{(2\pi)^i} 2(1-y) \frac{(2y-1)k^2 - y^2(1-y)p^2}{[-k^2 - y(1-y)p^2]^3} - \phi_i^* \phi_i \frac{1}{p^2}, \quad (\text{C.7d})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_1^A = -\phi_i^*, \quad \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_2^A = -\phi_i^*, \quad \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_1^F = -\phi_i^* \frac{1}{p^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi_i} \Sigma'_1 = -\phi_i^* \frac{1}{p^2}, \quad (\text{C.7e})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_1^A = -\phi_i, \quad \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_2^A = -\phi_i, \quad \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_1^F = -\phi_i \frac{1}{p^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Sigma'_1 = -\phi_i \frac{1}{p^2}. \quad (\text{C.7f})$$

C.5 Supersymmetric Massive Condition

まずは $f = 0, m \neq 0$ のみを課そう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} V_{\text{NLO}} &= - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^i} \left\{ -\frac{1}{4} p^2 (\Sigma'_1)^2 + \Sigma'_2 \Sigma'_3 \right\}^{-1} \left[-\frac{1}{2} p^2 \Sigma'_1 \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Sigma'_1 \right) + \Sigma'_2 \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Sigma'_3 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^{2i}} \left\{ -\Pi_1^A (\Pi_1^F)^2 + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \right\}^{-1} \\ &\quad \times \left[-(\Pi_1^F)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_1^A \right) - 2\Pi_1^A \Pi_1^F \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_1^F \right) + \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_1^F \right) + \Pi_1^F \Pi_2^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_1^{AF} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^{2i}} \frac{1}{\Pi_2^A} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \Pi_2^A \right), \end{aligned} \quad (\text{C.8a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i^*} V_{\text{NLO}} &= - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^i} \left\{ -\frac{1}{4} p^2 (\Sigma'_1)^2 + \Sigma'_2 \Sigma'_3 \right\}^{-1} \left[-\frac{1}{2} p^2 \Sigma'_1 \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Sigma'_1 \right) + \Sigma'_3 \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Sigma'_2 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^{2i}} \left\{ -\Pi_1^A (\Pi_1^F)^2 + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \right\}^{-1} \\ &\quad \times \left[-(\Pi_1^F)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_1^A \right) - 2\Pi_1^A \Pi_1^F \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_1^F \right) + \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_1^F \right) + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_2^{AF} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^{2i}} \frac{1}{\Pi_2^A} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} \Pi_2^A \right), \end{aligned} \quad (\text{C.8b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} V_{\text{NLO}} &= - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^i} \left\{ -\frac{1}{4} p^2 (\Sigma'_1)^2 + \Sigma'_2 \Sigma'_3 \right\}^{-1} \left[-\frac{1}{2} p^2 \Sigma'_1 \left(\frac{\partial}{\partial m} \Sigma'_1 \right) + \Sigma'_3 \left(\frac{\partial}{\partial m} \Sigma'_2 \right) + \Sigma'_2 \left(\frac{\partial}{\partial m} \Sigma'_3 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^{2i}} \left\{ -\Pi_1^A (\Pi_1^F)^2 + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \right\}^{-1} \\ &\quad \times \left[-(\Pi_1^F)^2 \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_1^A \right) - 2\Pi_1^A \Pi_1^F \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_1^F \right) \right. \\ &\quad \left. + \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_1^F \right) + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_2^{AF} \right) + \Pi_1^F \Pi_2^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_1^{AF} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^{2i}} \frac{1}{\Pi_2^A} \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_2^A \right), \end{aligned} \quad (\text{C.8c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f} V_{\text{NLO}} &= - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^i} \left\{ -\frac{1}{4} p^2 (\Sigma'_1)^2 + \Sigma'_2 \Sigma'_3 \right\}^{-1} \left[\Sigma'_3 \left(\frac{\partial}{\partial f} \Sigma'_2 \right) + \Sigma'_2 \left(\frac{\partial}{\partial f} \Sigma'_3 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^{2i}} \left\{ -\Pi_1^A (\Pi_1^F)^2 + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \right\}^{-1} \\ &\quad \times \left[-(\Pi_1^F)^2 \left(\frac{\partial}{\partial f} \Pi_1^A \right) - (\Pi_1^{AF})^2 \left(\frac{\partial}{\partial f} \Pi_3^A \right) \right. \\ &\quad \left. - (\Pi_2^{AF})^2 \left(\frac{\partial}{\partial f} \Pi_2^A \right) + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial f} \Pi_2^{AF} \right) + \Pi_1^F \Pi_2^{AF} \left(\frac{\partial}{\partial f} \Pi_1^{AF} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.8d})$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} V_{\text{NLO}} &= - \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \left\{ -\frac{1}{4} p^2 (\Sigma'_1)^2 + \Sigma'_2 \Sigma'_3 \right\}^{-1} \left[\Sigma'_3 \left(\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma'_2 \right) + \Sigma'_2 \left(\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma'_3 \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \left\{ -\Pi_1^A (\Pi_1^F)^2 + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \Pi_2^{AF} \right\}^{-1} \\
&\quad \times \left[-(\Pi_1^F)^2 \left(\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \Pi_1^A \right) - (\Pi_1^{AF})^2 \left(\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \Pi_3^A \right) \right. \\
&\quad \left. - (\Pi_2^{AF})^2 \left(\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \Pi_2^A \right) + \Pi_1^F \Pi_1^{AF} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \Pi_2^{AF} \right) + \Pi_1^F \Pi_2^{AF} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} \Pi_1^{AF} \right) \right]. \quad (\text{C.8e})
\end{aligned}$$

LO の解にならって $f = 0$, $m \neq 0$ のときは $\phi_i = 0$, $\phi_i^* = 0$ としてみよう。すると gap equation は次のように非常に簡単になる。

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} V_{\text{NLO}} = 0, \quad (\text{C.9a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i^*} V_{\text{NLO}} = 0, \quad (\text{C.9b})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m} V_{\text{NLO}} &= -2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Sigma'_1} \left(\frac{\partial}{\partial m} \Sigma'_1 \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_1^A} \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_1^A \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_2^A} \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_2^A \right) \\
&+ \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\Pi_1^F} \left(\frac{\partial}{\partial m} \Pi_1^F \right), \quad (\text{C.9c})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial f} V_{\text{NLO}} = 0, \quad (\text{C.9d})$$

$$\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \theta} V_{\text{NLO}} = 0. \quad (\text{C.9e})$$

ここで登場する各関数は次のようになっている。

$$\Pi_1^A = -N \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \left\{ \frac{1}{-k^2 + m^2} + \frac{m^2 + k \cdot (p+k)}{[-k^2 + m^2][-(p+k)^2 + m^2]} - \frac{2m^2}{[-k^2 + m^2][-(p+k)^2 + m^2]} \right\}, \quad (\text{C.10a})$$

$$\Pi_2^A = -N \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \left\{ \frac{1}{-k^2 + m^2} - \frac{m^2 + k \cdot (p+k)}{[-k^2 + m^2][-(p+k)^2 + m^2]} \right\}, \quad (\text{C.10b})$$

$$\Pi_1^F = \frac{N}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{[-k^2 + m^2][-(p+k)^2 + m^2]}, \quad (\text{C.10c})$$

$$\Sigma'_1 = N \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} 2(1-y) \frac{(2y-1)k^2 + (1-y)m^2 - y^2(1-y)p^2}{[-k^2 + m^2 - y(1-y)p^2]^3}, \quad (\text{C.10d})$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \Pi_1^A = -2Nm \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{p \cdot (p+k)[-k^2 - (p+k)^2 + 2m^2]}{[-k^2 + m^2]^2 [-(p+k)^2 + m^2]^2}, \quad (\text{C.10e})$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \Pi_2^A = -2Nm \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{(p+k) \cdot (p+2k)[-k^2 - (p+k)^2 + 2m^2]}{[-k^2 + m^2]^2 [-(p+k)^2 + m^2]^2}, \quad (\text{C.10f})$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \Pi_1^F = -Nm \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 - (p+k)^2 + 2m^2}{[-k^2 + m^2]^2 [-(p+k)^2 + m^2]^2}, \quad (\text{C.10g})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m} \Sigma'_1 &= 2Nm \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} 2(1-y) \\
&\quad \times \left\{ \frac{(1-y)}{[-k^2 + m^2 - y(1-y)p^2]^3} - 3 \frac{(2y-1)k^2 + (1-y)m^2 - y^2(1-y)p^2}{[-k^2 + m^2 - y(1-y)p^2]^4} \right\}. \quad (\text{C.10h})
\end{aligned}$$

はたして LO の解は満たされている (もしくは $1/N$ 程度のずれが登場する) のであろうか。さらに、NLO ではじめて見える解があるのだろうか。次のように strong coupling theory での LO からのずれを Table 8 で、weak coupling theory のそれを Table 9 に列挙しよう。

結論は、超対称を課している場合では、ゼロ質量条件を課している方は LO と同じ解しか登場せず、それが満たされている。有質量条件を課している方は、それだけでは解析不能で、さらに $\phi_i = \phi_i^* = 0$ とすると (つまり $O(N)$ 対称性が破れないとすると)、解はやはり LO と同じものしか登場せず、それは LO と同じ程度に満たされている。LO で解がなかった weak coupling theory で、有質量解のものは、NLO でも解ではない。F-term 拘束ということもあり、結合定数は NLO でも繰り込まれない。

さらに、超対称性を課さない解の探求も、解析不能である。

strong coupling theory	$f = 0, m = 0$		$f = 0, m \neq 0$	
	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$
LO				
$\partial_{\phi_i} V_{\text{LO}}$	trivial	trivial	$\phi_i = 0$	解なし
$\partial_{\phi_i^*} V_{\text{LO}}$	trivial	trivial	$\phi_i^* = 0$	解なし
$\partial_m V_{\text{LO}}$	trivial	trivial	$\phi_i^* \phi_i = 0$	解なし
$\partial_f V_{\text{LO}}$	$\phi_i^2 + \phi_i^{*2} = 0$	$\phi_i^2 + \phi_i^{*2} = 0$	$\phi_i^2 + \phi_i^{*2} = 0$	$\phi_i^2 + \phi_i^{*2} = 0$
停留解の存在	1 つ	無限個	1 つ	なし

strong coupling theory	$f = 0, m = 0$		$f = 0, m \neq 0$	
	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$
NLO				
$\partial_{\phi_i} V_{\text{NLO}}$	0	$\phi_i^* \cdot (\dots)$	0	(\dots)
$\partial_{\phi_i^*} V_{\text{NLO}}$	0	$\phi_i \cdot (\dots)$	0	(\dots)
$\partial_m V_{\text{NLO}}$	0	0	$m \cdot (\dots)$	(\dots)
$\partial_f V_{\text{NLO}}$	0	0	0	(\dots)
$f^{-1} \partial_\theta V_{\text{NLO}}$	0	0	0	(\dots)

strong coupling theory	$f = 0, m = 0$		$f = 0, m \neq 0$	
	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$
LO + NLO				
$\partial_{\phi_i} (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	0	$\phi_i^* \cdot (\dots)$	0	(\dots)
$\partial_{\phi_i^*} (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	0	$\phi_i \cdot (\dots)$	0	(\dots)
$\partial_m (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	0	0	$m \cdot (\dots)$	(\dots)
$\partial_f (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	0	0	0	(\dots)
$f^{-1} \partial_\theta V_{\text{NLO}}$	0	0	0	(\dots)
停留解の存在	何も変えない	特に変わらない	δm^2 を与える	解析不能

Table 8: Strong coupling theory. The result of NLO contributions.

weak coupling theory LO	$f = 0, m = 0$		$f = 0, m \neq 0$	
	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$
$\partial_{\phi_i} V_{\text{LO}}$	trivial	trivial	$\phi_i = 0$	解なし
$\partial_{\phi_i^*} V_{\text{LO}}$	trivial	trivial	$\phi_i^* = 0$	解なし
$\partial_m V_{\text{LO}}$	trivial	trivial	$\phi_i^* \phi_i = 0$	解なし
$\partial_f V_{\text{LO}}, f^{-1} \partial_\theta V_{\text{LO}}$	解なし	$\frac{N}{g^2} = \phi_i^2 = \phi_i^{*2}$	解なし	$\frac{N}{g^2} = \phi_i^2 = \phi_i^{*2}$
停留解の存在	なし	無限個	なし	なし

weak coupling theory NLO	$f = 0, m = 0$		$f = 0, m \neq 0$	
	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$
$\partial_{\phi_i} V_{\text{NLO}}$	$\phi_i^* \cdot (\dots)$	$\phi_i^* \cdot (\dots)$	0	(\dots)
$\partial_{\phi_i^*} V_{\text{NLO}}$	$\phi_i \cdot (\dots)$	$\phi_i \cdot (\dots)$	0	(\dots)
$\partial_m V_{\text{NLO}}$	0	0	$m \cdot (\dots)$	(\dots)
$\partial_f V_{\text{NLO}}$	0	0	0	(\dots)
$f^{-1} \partial_\theta V_{\text{NLO}}$	0	0	0	(\dots)

weak coupling theory LO + NLO	$f = 0, m = 0$		$f = 0, m \neq 0$	
	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$	$\phi_i = 0, \phi_i^* = 0$	$\phi_i \neq 0, \phi_i^* \neq 0$
$\partial_{\phi_i} (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	0	$\phi_i^* \cdot (\dots)$	0	(\dots)
$\partial_{\phi_i^*} (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	0	$\phi_i \cdot (\dots)$	0	(\dots)
$\partial_m (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	0	0	$m \cdot (\dots)$	(\dots)
$\partial_f (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	解なし	0	0	(\dots)
$f^{-1} \partial_\theta (V_{\text{LO}} + V_{\text{NLO}})$	解なし	0	解なし	(\dots)
停留解の存在	相変わらずなし	特に変わりなし	相変わらずなし	解析不能

Table 9: Weak coupling theory. The result of NLO contributions.

D Renormalization in Higher Order Contributions

ここでは本文にある波動関数繰り込みの議論の元になった、補助場 F_0 の波動関数繰り込みに付いて計算をまとめてある。当初は、結合定数に波動関数繰り込みを付加させるには、Lagrangian に唯一結合定数とつながっている補助場 F_0 の波動関数繰り込みを考えればよいであろうとしていた。しかし計算を進めるうち、この F_0 の波動関数繰り込みは $O(N)$ 場 A_i の波動関数繰り込みが最終的に全てを司っていることが分かったため、本文では直接 A_i の波動関数繰り込みを通じて結合定数の発散を考察している。

D.1 Preliminaries for Renormalization

$1/N$ 展開の高次の寄与を見て、結合定数が繰り込みを受けるかどうか考察する。そのため、weak coupling theory での、超対称なゼロ質量解 $a^2 \neq 0, m = f = 0, \phi_i \neq 0$ での NLO を構成する。つまり $1/N$ 展開での補助場による 1 ループ補正をみる。結合定数は F_0 の tadpole 項にのみ登場するので、直接 a^2 の繰り込みをみることは難しいが、 F_0 の波動関数繰り込みを介して繰り込みが行われると考えればよい。そのため、 F_0 の伝播関数の 1 ループ補正を考察するとよいことになる¹⁹。

そのループ補正に寄与するには相互作用項が必要なのであるが、NLO を見るのであれば、 F_0 を 1 つ以上含む 3 点相互作用と、 F_0 を 2 つ以上含む 4 点相互作用を探してくればよい。それ以外の相互作用点からの寄与は、 $1/N$ 展開では 3 次以上の寄与しか与えないので、ここでは無視することができる。

必要な材料を以下に列挙する。出発点はやはり (3.26) であるが、ここでは $f = m = 0, \phi_i \neq 0$ を課している。

$$S_2^{\text{int}} = -\frac{iN}{2} \text{TR} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} (-D_0 D'^{-1})^m - \frac{1}{2} \int d^2x X_i^{c\dagger} \left[D'^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-D_0 D'^{-1})^{n+1} \right] X_i^c, \quad (\text{D.1})$$

$$\Delta = \frac{1}{\partial^2}, \quad G = A^* A - \bar{\psi} \Delta i \not{\partial} \psi, \quad G^* = A^* A - \overline{\psi^c} \Delta i \not{\partial} \psi^c,$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad D'^{-1} = \begin{pmatrix} G & -F^* \\ -F & G^* \end{pmatrix},$$

$$D'^{-1} D_0 D'^{-1} \simeq \begin{pmatrix} F^* \Delta F & -F^* \Delta G^* - G \Delta F^* \\ -F \Delta G - G^* \Delta F & F \Delta F^* \end{pmatrix},$$

$$(D_0 D'^{-1})^2 \simeq \begin{pmatrix} \Delta F^* \Delta F & -\Delta F^* \Delta G^* - \Delta G \Delta F^* \\ -\Delta F \Delta G - \Delta G^* \Delta F & \Delta F \Delta F^* \end{pmatrix},$$

$$D'^{-1} (D_0 D'^{-1})^2 \simeq \begin{pmatrix} G \Delta F^* \Delta F + F^* \Delta G^* \Delta F + F^* \Delta F \Delta G & -F^* \Delta F \Delta F^* \\ -F \Delta F^* \Delta F & G^* \Delta F \Delta F^* + F \Delta G \Delta F^* + F \Delta F^* \Delta G^* \end{pmatrix},$$

$$(D_0 D'^{-1})^3 \simeq \begin{pmatrix} \Delta G \Delta F^* \Delta F + \Delta F^* \Delta G^* \Delta F + \Delta F^* \Delta F \Delta G & -\Delta F^* \Delta F \Delta F^* \\ -\Delta F \Delta F^* \Delta F & \Delta G^* \Delta F \Delta F^* + \Delta F \Delta G \Delta F^* + \Delta F \Delta F^* \Delta G^* \end{pmatrix},$$

¹⁹これ以降補助場を表す添字は数式の中では省略される事がある。つまり F_0 を F とする。同様に A_0 も A として記述する場合がある。

$$D'^{-1}(D_0 D'^{-1})^3 \simeq \begin{pmatrix} F^* \Delta F \Delta F^* \Delta F & 0 \\ 0 & F \Delta F^* \Delta F \Delta F^* \end{pmatrix},$$

$$(D_0 D'^{-1})^4 \simeq \begin{pmatrix} \Delta F^* \Delta F \Delta F^* \Delta F & 0 \\ 0 & \Delta F \Delta F^* \Delta F \Delta F^* \end{pmatrix}.$$

ただしここで \simeq は有用な項だけ取り出している、という意味である。

これらをすべてまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} S_2^{\text{int}} &= \frac{iN}{2} \left\{ \frac{1}{3} \right\} \left\{ \text{Tr}[\Delta G \Delta F^* \Delta F] + \text{Tr}[\Delta F^* \Delta G^* \Delta F] + \text{Tr}[\Delta F^* \Delta F \Delta G] \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr}[\Delta G^* \Delta F \Delta F^*] + \text{Tr}[\Delta F \Delta G \Delta F^*] + \text{Tr}[\Delta F \Delta F^* \Delta G^*] \right\} \\ &\quad - \frac{iN}{2} \left\{ \frac{1}{4} \right\} \left\{ \text{Tr}[\Delta F^* \Delta F \Delta F^* \Delta F] + \text{Tr}[\Delta F \Delta F^* \Delta F \Delta F^*] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2 x \left\{ G \Delta F^* \Delta F + F^* \Delta G^* \Delta F + F^* \Delta F \Delta G + G^* \Delta F \Delta F^* + F \Delta G \Delta F^* + F \Delta F^* \Delta G^* \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2 x \left\{ F^* \Delta F \Delta F^* \Delta F + F \Delta F^* \Delta F \Delta F^* \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \phi_i^2 \int d^2 x \left\{ F \Delta F^* \Delta F - F \Delta G - G^* \Delta F \right\} + \frac{1}{2} \phi_i^{*2} \int d^2 x \left\{ F^* \Delta F \Delta F^* - F^* \Delta G^* - G \Delta F^* \right\}. \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

この相互作用項を用いて全てのオーダーを含む ($1/N$ 展開) 伝播関数を構成することができる。完全伝播関数 $D_F^{(\text{full})}$ は以下のように定義される。(フェルミオンは左微分。)

$$\begin{aligned} D_F^{(\text{full})}(x-y) &\equiv \langle F(x) F^*(y) e^{iS_2^{\text{int}}} \rangle_0, \\ \langle \cdots \rangle_0 &\equiv \exp \left[\frac{\delta}{\delta F} \cdot D_F \frac{\delta}{\delta F^*} - \frac{\delta}{\delta \psi} \cdot S_\psi \frac{\delta}{\delta \psi} + \frac{\delta}{\delta A} \cdot D_A \frac{\delta}{\delta A^*} \right] (\cdots) \Big|_{\text{fields}=0}, \\ \frac{\delta}{\delta F} \cdot D_F \frac{\delta}{\delta F^*} &\equiv \int d^2 x d^2 y \frac{\delta}{\delta F(x)} D_F(x-y) \frac{\delta}{\delta F^*(y)}, \quad \frac{\delta}{\delta F(x)} F(y) = \delta^2(x-y). \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

D.2 Loop Corrections

D.2.1 Propagators

ここでまず A_0 , ψ_0 , F_0 の LO での伝播関数を定義する。今ここでは weak coupling theory でのゼロ質量解に、高次の補正を導入しようとしているので、内線伝播関数は次のようになっている²⁰。

$$D_A(p) = -[\Pi(p)]^{-1} = \left[-\phi_i^* \phi_i - \frac{N}{4\pi} \log \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) \right]^{-1}, \quad A_0 \text{ propagator}, \quad (\text{D.4a})$$

$$S_\psi(p) = -\left[\frac{1}{p} \Pi(p) \right]^{-1} = -\not{p} \cdot \left[-\phi_i^* \phi_i - \frac{N}{4\pi} \log \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) \right]^{-1}, \quad \psi_0 \text{ propagator}, \quad (\text{D.4b})$$

$$D_F(p) = -\left[\frac{1}{p^2} \Pi(p) \right]^{-1} = -p^2 \cdot \left[-\phi_i^* \phi_i - \frac{N}{4\pi} \log \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) \right]^{-1}, \quad F_0 \text{ propagator}. \quad (\text{D.4c})$$

²⁰ここでは始めから補助場の伝播関数に対数表示を用いている。但し今のところは Minkowski 計量で、space-like にとってある。

但しこれらは全てタキオンであることを忘れてはならない。また繰り込みはどの点で行ってもよいので、簡単な表記である space-like な表現で行う。つまり繰り込みを space-like 領域で行うとする。以後、この具体的な表記はループ補正の具体的な計算まで使わない。

D.2.2 Four-Point Vertex

S_2^{int} の中で 3 点相互作用の部分を $S_{\text{int}}^{(3)}$ 、4 点相互作用部分を $S_{\text{int}}^{(4)}$ と記述する。 $S_{\text{int}}^{(4)}$ の考察が簡単なので、まずはそちらからの寄与を見ておく。 $S_{\text{int}}^{(4)}$ を計算の都合上さらに 7 つに分解する。

$$\begin{aligned}
S_{\text{int}}^{(4)} &= S_{\text{I}} + S_{\text{II}} + S_{\text{III}} + S_{\text{IV}} + S_{\text{V}} + S_{\text{VI}} + S_{\text{VII}}, \\
S_{\text{I}} &= \frac{iN}{2} \frac{1}{3} \text{Tr}[\Delta G \Delta F^* \Delta F] - \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2x G \Delta F^* \Delta F, \\
S_{\text{II}} &= \frac{iN}{2} \frac{1}{3} \text{Tr}[\Delta F^* \Delta G^* \Delta F] - \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2x F^* \Delta G^* \Delta F, \\
S_{\text{III}} &= \frac{iN}{2} \frac{1}{3} \text{Tr}[\Delta F^* \Delta F \Delta G] - \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2x F^* \Delta F \Delta G, \\
S_{\text{IV}} &= \frac{iN}{2} \frac{1}{3} \text{Tr}[\Delta G^* \Delta F \Delta F^*] - \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2x G^* \Delta F \Delta F^*, \\
S_{\text{V}} &= \frac{iN}{2} \frac{1}{3} \text{Tr}[\Delta F \Delta G \Delta F^*] - \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2x F \Delta G \Delta F^*, \\
S_{\text{VI}} &= \frac{iN}{2} \frac{1}{3} \text{Tr}[\Delta F \Delta F^* \Delta G^*] - \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2x F \Delta F^* \Delta G^*, \\
S_{\text{VII}} &= -\frac{iN}{4} \text{Tr}[\Delta F^* \Delta F \Delta F^* \Delta F] + \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \int d^2x F^* \Delta F \Delta F^* \Delta F.
\end{aligned}$$

これらを用いて、tadpole グラフを含まず、かつ真空泡も含まない、補助場のループグラフの寄与を得ることができる。以下にそれを列挙する。

$$\begin{aligned}
\langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{Ib}} \rangle_0 &= \langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{IIIb}} \rangle_0 = \langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{IVb}} \rangle_0 = \langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{VIb}} \rangle_0 \\
&= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_F(k_1) \frac{1}{i} D_F(k_2) \left[\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} D_A(p) i \mathcal{K}^{\text{Ib}}(-p, p, -k_1, k_2) \right], \\
\langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{If}} \rangle_0 &= \langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{IIIIf}} \rangle_0 = \langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{IVIf}} \rangle_0 = \langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{VIIf}} \rangle_0 \\
&= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_F(k_1) \frac{1}{i} D_F(k_2) \left[\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \text{tr}[-S_\psi(p) i \mathcal{K}^{\text{If}}(-p, p, -k_1, k_2)] \right], \\
\langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{Ib}} \rangle_0 &= \langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{Vb}} \rangle_0 \\
&= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_F(k_1) \frac{1}{i} D_F(k_2) \left[\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} D_A(p) i \mathcal{K}^{\text{Ib}}(-k_1, -p, p, k_2) \right], \\
\langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{If}} \rangle_0 &= \langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{VIf}} \rangle_0 \\
&= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_F(k_1) \frac{1}{i} D_F(k_2) \left[\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} \text{tr}[-S_\psi(p) i \mathcal{K}^{\text{If}}(-k_1, -p, p, k_2)] \right], \\
\langle F(k_1) F^*(-k_2) i S_{\text{VII}} \rangle_0 &= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_F(k_1) \frac{1}{i} D_F(k_2) \left[\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} D_F(p) \{4i \mathcal{K}^{\text{VII}}(-p, p, -k_1, k_2)\} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^{\text{Ib}}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\frac{N}{6} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-q^2} \frac{1}{-(p_3 + p_4 + q)^2} \frac{1}{-(p_4 + q)^2}, \\
\mathcal{K}^{\text{If}}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \frac{N}{6} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-q^2} \frac{\not{p}_2 + \not{p}_3 + \not{p}_4 + \not{q}}{-(p_2 + p_3 + p_4 + q)^2} \frac{1}{-(p_3 + p_4 + q)^2} \frac{1}{-(p_4 + q)^2}, \\
\mathcal{K}^{\text{Ib}}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\frac{N}{6} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-q^2} \frac{1}{-(p_2 + p_3 + p_4 + q)^2} \frac{1}{-(p_4 + q)^2} - \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \frac{1}{-(p_2 + p_3 + p_4)^2} \frac{1}{-p_4^2}, \\
\mathcal{K}^{\text{If}}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \frac{N}{6} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-q^2} \frac{1}{-(p_2 + p_3 + p_4 + q)^2} \frac{\not{p}_3 + \not{p}_4 + \not{q}}{-(p_3 + p_4 + q)^2} \frac{1}{-(p_4 + q)^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \frac{1}{-(p_2 + p_3 + p_4)^2} \frac{\not{p}_3 + \not{p}_4}{-(p_3 + p_4)^2} \frac{1}{-p_4^2}, \\
\mathcal{K}^{\text{VII}}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \frac{N}{4} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-q^2} \frac{1}{-(p_2 + p_3 + p_4 + q)^2} \frac{1}{-(p_3 + p_4 + q)^2} \frac{1}{-(p_4 + q)^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \phi_i^* \phi_i \frac{1}{-(p_2 + p_3 + p_4)^2} \frac{1}{-(p_3 + p_4)^2} \frac{1}{-p_4^2}.
\end{aligned}$$

D.2.3 Three-Point Vertex

S_2^{int} の中で 3 点相互作用にあたるものを次のように分類する。

$$S_{\text{int}}^{(3)} = S_1 + S_2, \quad (\text{D.5a})$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \phi_i^2 \int d^2x [F \Delta F^* \Delta F - F \Delta G - G^* \Delta F] = S_1^1 + S_1^2 + S_1^3, \quad (\text{D.5b})$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \phi_i^{*2} \int d^2x [F^* \Delta F \Delta F^* - F^* \Delta G^* - G \Delta F^*] = S_2^1 + S_2^2 + S_2^3. \quad (\text{D.5c})$$

相互作用項 2 つからの寄与を考えるので、組み合わせが問題となるが、伝播関数への寄与を考えた場合、連結するグラフを与えるのは次の組み合わせだけであるとわかる。

$$\begin{aligned}
\langle FF^* e^{iS_2^{\text{int}}} \rangle_0 &\simeq \frac{1}{2!} \langle FF^* (iS_1 + iS_2)(iS_1 + iS_2) \rangle_0 = \langle FF^* (iS_1)(iS_2) \rangle_0 \\
&= \langle FF^* (iS_1^1)(iS_2^1) \rangle_0 + \langle FF^* (iS_1^2)(iS_2^2) \rangle_0 + \langle FF^* (iS_1^2)(iS_2^3) \rangle_0 \\
&\quad + \langle FF^* (iS_1^3)(iS_2^2) \rangle_0 + \langle FF^* (iS_1^3)(iS_2^3) \rangle_0.
\end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

これらを用いて、tadpole グラフも真空泡も含まない、補助場のループグラフの寄与を構成される。

$$\begin{aligned}
&\langle F(k_1) F^*(-k_2)(iS_{1b}^1)(iS_{2b}^1) \rangle_0 \\
&= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_F(k_1) \frac{1}{i} D_F(k_2) \\
&\quad \times \left[\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2 i} D_F(p) \left\{ 4i\mathcal{K}_1^1(k_2, -p - k_2, p) \frac{1}{i} D_F(p + k_2) i\mathcal{K}_2^1(-p, p + k_2, -k_2) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + 2i\mathcal{K}_1^1(p, -k_1, -p + k_1) \frac{1}{i} D_F(-p + k_1) i\mathcal{K}_2^1(-p, k_2, p - k_1) \right\} \right], \quad (\text{D.7a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle F(k_1) F^*(-k_2)(iS_{1b}^2)(iS_{2b}^2) \rangle_0 = \langle F(k_1) F^*(-k_2)(iS_{1b}^2)(iS_{2b}^3) \rangle_0 \\
&= \langle F(k_1) F^*(-k_2)(iS_{1b}^3)(iS_{2b}^2) \rangle_0 = \langle F(k_1) F^*(-k_2)(iS_{1b}^3)(iS_{2b}^3) \rangle_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_F(k_1) \frac{1}{i} D_F(k_2) \\
&\quad \times \left[\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} D_A(p + k_1) i\mathcal{K}_{1b}^3(k_2, -p - k_1, p) \frac{1}{i} D_A(p) i\mathcal{K}_{2b}^3(-p, p + k_1, -k_1) \right], \tag{D.7b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle F(k_1) F^*(-k_2) (iS_{1f}^2) (iS_{2f}^2) \rangle_0 = \langle F(k_1) F^*(-k_2) (iS_{1f}^2) (iS_{2f}^3) \rangle_0 \\
&= \langle F(k_1) F^*(-k_2) (iS_{1f}^3) (iS_{2f}^2) \rangle_0 = \langle F(k_1) F^*(-k_2) (iS_{1f}^3) (iS_{2f}^3) \rangle_0 \\
&= (2\pi)^2 \delta^2(k_1 - k_2) \frac{1}{i} D_F(k_1) \frac{1}{i} D_F(k_2) \\
&\quad \times \left[\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 i} \text{tr} \left[-S_\psi(p + k_1) i\mathcal{K}_{1f}^3(k_2, -p - k_1, p) \frac{1}{i} S_\psi(p) i\mathcal{K}_{2f}^3(-p, p + k_1, -k_1) \right] \right], \tag{D.7c}
\end{aligned}$$

荷電共役変換と運動量の付け換えで、上のように簡単にまとめられる。上で用いた各記号は次のようになっている。

$$\mathcal{K}_{1f}^1(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \phi_i^2 \frac{1}{-(p_2 + p_3)^2 - p_3^2}, \quad \mathcal{K}_{2f}^1(p_4, p_5, p_6) = \frac{1}{2} \phi_i^{*2} \frac{1}{-(p_5 + p_6)^2 - p_6^2}, \tag{D.7d}$$

$$\mathcal{K}_{1b}^2(p_1, p_2, p_3) = -\frac{1}{2} \phi_i^2 \frac{1}{-(p_2 + p_3)^2}, \quad \mathcal{K}_{2b}^2(p_4, p_5, p_6) = -\frac{1}{2} \phi_i^{*2} \frac{1}{-(p_5 + p_6)^2}, \tag{D.7e}$$

$$\mathcal{K}_{1b}^3(p_1, p_2, p_3) = -\frac{1}{2} \phi_i^2 \frac{1}{-p_3^2}, \quad \mathcal{K}_{2b}^3(p_4, p_5, p_6) = -\frac{1}{2} \phi_i^{*2} \frac{1}{-p_6^2}, \tag{D.7f}$$

$$\mathcal{K}_{1f}^2(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \phi_i^2 \frac{1}{-(p_2 + p_3)^2} \frac{\not{p}_3}{-p_3^2}, \quad \mathcal{K}_{2f}^2(p_4, p_5, p_6) = \frac{1}{2} \phi_i^{*2} \frac{1}{-(p_5 + p_6)^2} \frac{\not{p}_6}{-p_6^2}, \tag{D.7g}$$

$$\mathcal{K}_{1f}^3(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \phi_i^2 \frac{\not{p}_2 + \not{p}_3}{-(p_2 + p_3)^2} \frac{1}{-p_3^2}, \quad \mathcal{K}_{2f}^3(p_4, p_5, p_6) = \frac{1}{2} \phi_i^{*2} \frac{\not{p}_5 + \not{p}_6}{-(p_5 + p_6)^2} \frac{1}{-p_6^2}. \tag{D.7h}$$

D.3 Field Mixing

4点相互作用からの寄与を Figure 11 と 12 で、3点相互作用からの寄与を Figure 13 で表そう。以下の議論のため、それぞれのグラフに名前を付けておく。「graph “ A_i ”」は F_0 の2点関数のうち A_i のループ部分に寄与するグラフを表し、「graph “ B_i ”」は F_0 の2点関数で $\phi_i^* \phi_i$ 部分に寄与するグラフを表す。

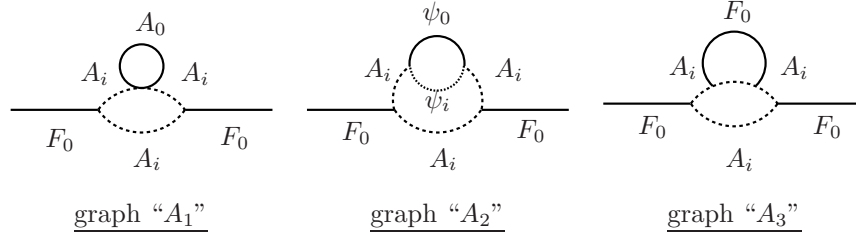


Figure 11: Four vertex interactions, two-loop graphs.

実はこれらのグラフ全てが F_0 の伝播関数の NLO 補正で登場するわけではない。理論は A_i などの $O(N)$ 場を積分した (3.26) である。この積分された A_i は、伝播関数として $A_0^* A_0$ や F_0 と混合している²¹。同様に ψ_i も ψ_0 と混合している。しかし Figure 11, 12, 13 には、混合されるべきグラフまで登場してしまっている。したがっ

²¹具体的な混合の仕方は (3.6) で与えられている。

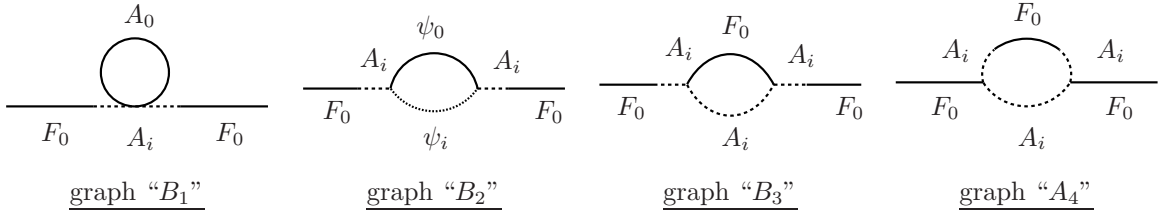


Figure 12: Four vertex interactions, one-loop graphs.

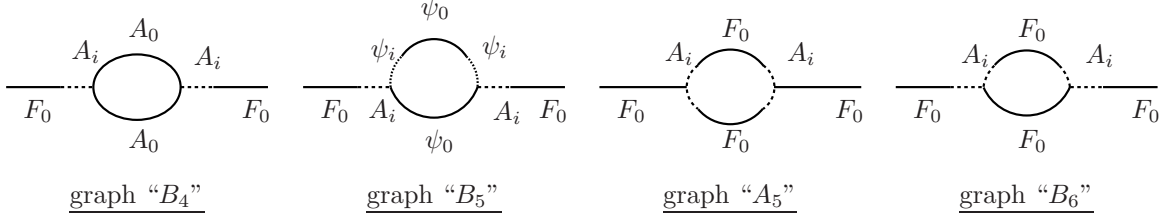


Figure 13: Three vertex interactions, one-loop graphs.

て場の混合を考慮しなければならない。混合を考えることでこれらのグラフは随分消去される事になる。

(3.6) から読み取れることは、グラフが次のように吸収されて行くことである。

- graph “A₅” は graph “A₄” へ吸収される。
これは A_i - F_0 混合で起こる。
- graph “B₅”, “B₆” はそれぞれ graph “B₂”, “B₃” に吸収される。
それぞれ ψ_i - ψ_0 混合、 A_i - F_0 混合で引き起こされる。
- graph “A₄”, “B₄” はさらに F_0 の LO での 2 点関数に吸収される。
それぞれ F_0 の 2 点関数の A_i ループ部分、 $\phi_i^* \phi_i$ 部分に吸収される。これも A_i - F_0 混合で引き起こされる。

この混合を考慮に入れた結果、 F_0 伝播関数の補正に寄与するグラフは、2 ループグラフ “A₁”, “A₂”, “A₃” と 1 ループグラフ “B₁”, “B₂”, “B₃” だけとなる。さらにこれらは、実は A_i の伝播関数が補助場 A_0 , ψ_0 , F_0 のループで補正されるグラフである。つまり、 F_0 の高次補正は、 A_i の、補助場による補正だけが寄与することになる。

その A_i の補正であるが、計算が重複するのではやここでは結果しか述べないが次のようになる。

$$A_i(x) = Z^{\frac{1}{2}} A_i^R(x),$$

$$Z^{-1} = 1 + \frac{1}{4\pi} \int^{\Lambda^2} dt \frac{1}{t} \left[\phi_i^* \phi_i + t \frac{N}{8\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\lambda^2 + x(1-x)t} \right]^{-1}. \quad (\text{D.8})$$

D.4 Wave Function Renormalization

この再定義を用いて F_0 の伝播関数の補正を見よう。以後の議論は細かな計算は必要としない。

A_i を繰り込まれた場 A_i^R と繰り込み因子で書き直し、発散部分を取り除き、ループグラフ “ A_i ”, “ A_2 ”, “ A_3 ”, 非ループグラフ “ B_1 ”, “ B_2 ”, “ B_3 ” を書き直すと、それらの補正グラフは、何と F_0 の 2 点関数そのもの (の定数倍) になっている。appendix B の最後に書いている 1 粒子既約部分グラフを $-i\Sigma$ で表示すると、それが 2 点関数になっているのである。

$$-i\Sigma(p) = \alpha \frac{1}{p^2} \Pi(p). \quad (\text{D.9})$$

ここで α は適当な定数である。実際にはこれまでの計算によってその定数まではっきりわかるのであるが、以後の議論には影響がないため、このままとする。

1 粒子既約グラフを用いて、補助場 F_0 の伝播関数の補正をみる。appendix B と同様の議論により次のようになる。

$$\frac{1}{i} D_F^{(\text{full})}(p) = \frac{1}{i} D_F(p) \frac{1}{1 + \Sigma(p) D_F(p)} = \frac{1}{i} D_F(p) \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (\text{D.10})$$

一方規格化を行うことで、 F_0 の波動関数繰り込み因子 Z_F を導入すると、それらは次のように関係付けられる。

$$\frac{1}{i} D_F^{(\text{full})}(p) \equiv \frac{1}{i} D_F(p) Z_F, \quad Z_F = \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (\text{D.11})$$

これより、補助場の波動関数繰り込みは有限であり、発散は登場しない。

D.5 Coupling Constant Renormalization

この模型は超対称であった。1 つの superfield でまとめられる場合は全て同じ波動関数繰り込みを受ける。よって superfield Φ_i, Φ_0 はそれぞれ次のように繰り込まれる。

$$\Phi_i = Z^{\frac{1}{2}} \Phi_i^R. \quad (\text{D.12})$$

理論には波動関数繰り込みしか登場しないので、Lagrangian を次のように分解することができるはずである。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^4\theta \Phi_i^* \Phi_i + \frac{1}{2} \left\{ \int d^2\theta \Phi_0 (\Phi_i^2 - a^2) + \int d^2\bar{\theta} \Phi_0^* (\Phi_i^{*2} - a^2) \right\} \\ &= \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_C. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

但し $\mathcal{L}_R, \mathcal{L}_C$ はそれぞれ繰り込まれた Lagrangian と counter term である。

$$\mathcal{L}_R = \int d^4\theta \Phi_i^{R*} \Phi_i^R + \frac{1}{2} \left\{ \int d^2\theta \Phi_0^R (\Phi_i^{R2} - a_R^2) + \text{c.c.} \right\}, \quad \mathcal{L}_C = (Z - 1) \int d^4\theta \Phi_i^{R*} \Phi_i^R. \quad (\text{D.14})$$

\mathcal{L}_C がこの波動関数繰り込みの部分だけ登場させるには、結合定数 a^2 と superfield Φ_0 を次のようにスケール変換して「規格化」を行うと良い。

$$a^2 = Z a_R^2, \quad \Phi_0 = Z^{-1} \Phi_0^R. \quad (\text{D.15})$$

これで結合定数に波動関数繰り込みの因子を付加させることができた。これは結局 (6.19) と同じ形式である。

$$\frac{N}{g_R^2} = Z^{-1} \frac{N}{g^2}. \quad (\text{D.16})$$

E Spontaneous Symmetry Breaking in Four Dimensions

自発的対称性の破れとそれに伴う定理を、 $D = 4$ 理論において紹介する [28]。

E.1 Nambu-Goldstone Theorem

- Wigner phase

ある変換が作用積分の対称性を持ちながら、それが真空の対称性を持つ場合と持たない場合がある。ここでは真空に対して対称性を持つ場合、Wigner phase について考察する。このとき、変換群 G の生成子 T^A に対応する保存電荷 Q^A を真空に作用させると次のことが言える。

$$Q^A|0\rangle = 0. \quad (\text{E.1})$$

このように表記できるのは、保存カレント j_μ^A の空間積分において無限遠での場が十分に早く落ち、電荷 Q^A が well-defined であるからである。このとき、(E.1) を証明しよう。

Q^A が Lorentz scalar の場合、という用語が生じる可能性がある (例えば Hamiltonian は Lorentz scalar ではない)、カレント j_μ^A が Lorentz vector の場合、を考えよう。このとき、 Q^A は空間積分をしているので空間並進不変であり、また $dQ^A/dt = 0$ なので時間発展不変である。つまり次の交換関係が成り立つ。

$$[iP_\mu, Q^A] = \partial_\mu Q^A = 0. \quad (\text{E.2})$$

但し Q^A が well-defined、つまり $j_{\mu=0}^A$ の空間積分で無限遠では十分減衰しているとする。スペクトル条件 $P_\mu|0\rangle = 0$ より、この交換関係に真空を作用させると次の関係を得る。

$$P_\mu Q^A|0\rangle = Q^A P_\mu|0\rangle = 0, \quad \therefore Q^A|0\rangle = c|0\rangle, \quad c : \text{constant}. \quad (\text{E.3})$$

これにさらに左から真空を作用させると、比例定数 c がゼロであることが得られる。

$$\begin{aligned} \langle 0|Q^A|0\rangle &= c\langle 0|0\rangle = c \\ &= \int d^3x \langle 0|j_{\mu=0}^A(x)|0\rangle = \int d^3x \langle 0|e^{iPx} j_{\mu=0}^A(0) e^{-iPx}|0\rangle \\ &= \int d^3x \langle 0|j_{\mu=0}^A(0)|0\rangle = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\therefore Q^A|0\rangle = 0. \quad (\text{E.5})$$

もう 1 つ例を挙げる。電荷 Q^A が Lorentz 生成子 $M_{\mu\nu}$ のときを考える。Poincaré 代数では次の関係が成立している。

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho).$$

これに真空を作用させると、やはり上と同じような議論が展開される。

$$P_\mu M_{\rho\sigma} |0\rangle = M_{\rho\sigma} P_\mu |0\rangle + ig_{\mu\rho} P_\sigma |0\rangle - ig_{\mu\sigma} P_\rho |0\rangle = 0,$$

$$\therefore M_{\rho\sigma} |0\rangle = c_{\rho\sigma} |0\rangle = 0.$$

これは、Lorentz 対称性は自発的に破れてはいないことを示す。

• Nambu-Goldstone phase

変換群 G の代数 \mathcal{G} を成す生成子 T^A が、真空に対して破れたもの X^a と破れずに生き残ったもの S^α に分かれる。破れていない生成子同士の代数はまた破れていない生成子となるので、破れていない生成子は代数全体に対して部分代数 \mathcal{H} を成す。破れた生成子は、破れていない生成子を付加できる不定性があるが、一切含まれていないものを次で定義しよう。

$$\{T^A \in \mathcal{G}\} = \{S^\alpha \in \mathcal{H}, X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}\}, \quad \text{tr}(S^\alpha X^a) = 0. \quad (\text{E.6})$$

形式的な表記 $Q^A |0\rangle \neq 0$ を、well-defined なもの書き換えよう。

ある局所演算子 $\Phi(y)$ を用意する。これは y 近傍でのみ定義されている。この $\Phi(y)$ の、電荷 Q^a による変換が以下で与えられる。

$$[iQ^a, \Phi(y)] = i \int d^3x [j_{\mu=0}^a(x), \Phi(y)] = \delta^a \Phi(y). \quad (\text{E.7})$$

この空間積分は、交換関係が y 近傍でのみ定義されてゼロにならず、その外ではゼロになるので、無限遠での振る舞いを心配することがなく、well-defined になる。この関係式の両側から真空を作用させて、次の表式を得る。

$$\langle 0 | [iQ^a, \Phi(y)] | 0 \rangle = i \int_{y \text{ 近傍}} d^3x \langle 0 | [j_{\mu=0}^a(x), \Phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \delta^a \Phi(y) | 0 \rangle \neq 0. \quad (\text{E.8})$$

これを満たす局所的演算子 $\Phi(y)$ が少なくとも 1 つ存在するとき、自発的に対称性が破れているという。

• Nambu-Goldstone theorem

簡単のため、保存カレント j_μ^a は Lorentz vector、 $\Phi(y)$ は Lorentz scalar であるとして次の定理を記述する。しかし一般にはこれに限ったことではない。

1. 理論が並進不変性、Lorentz 共変性を持つ。
2. 保存カレント j_μ^a , $\partial^\mu j_\mu^a = 0$ を持つ。
3. $X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}$ に対し、 $\langle 0 | [iQ^a, \Phi(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | \delta^a \Phi(x) | 0 \rangle \neq 0$ を満たす局所的演算子 $\Phi(x)$ が存在する。

このとき、理論にはゼロ質量粒子 (Nambu-Goldstone particle) が存在し、 j_μ^a に結合している。

• The Proof of Nambu-Goldstone theorem

ここでも保存カレント j_μ^a は Lorentz vector、 $\Phi(x)$ は Lorentz scalar であるとする。

$$\begin{aligned} \langle 0 | [j_\mu^a(x), \Phi(y)] | 0 \rangle &= \langle 0 | \left[e^{iPx} j_\mu^a(0) e^{-iPx} e^{iPy} \Phi(0) e^{-iPy} - e^{iPy} \Phi(0) e^{-iPy} e^{iPx} j_\mu^a(0) e^{-iPx} \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | j_\mu^a(0) e^{-iP(x-y)} \Phi(0) | 0 \rangle - \langle 0 | \Phi(0) e^{-iP(y-x)} j_\mu^a(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

ここでは次の並進共変性を用いている。

$$j_\mu^a(x) = e^{iPx} j_\mu^a(0) e^{-iPx}, \quad \Phi(y) = e^{iPy} \Phi(0) e^{-iPy}. \quad (\text{E.10})$$

さらに次の完全性を導入しよう。

$$\sum_{n, n'} |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| = 1. \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned} (\text{E.9}) &= \sum_{n, n'} \langle 0 | j_\mu^a(0) e^{-iP(x-y)} |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| \Phi(0) | 0 \rangle - \sum_{n, n'} \langle 0 | \Phi(0) e^{-iP(y-x)} |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| j_\mu^a(0) | 0 \rangle \\ &= \sum_{n, n'} \left\{ \langle 0 | j_\mu^a(0) |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| \Phi(0) | 0 \rangle e^{-ip_n(x-y)} - \langle 0 | \Phi(0) |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| j_\mu^a(0) | 0 \rangle e^{ip_n(x-y)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

次に中間状態についての積分 $1 = \int d^4k \delta^4(p_n - k)$ を挿入する。

$$\begin{aligned} (\text{E.12}) &= \int d^4k \sum_{n, n'} \delta^4(p_n - k) \left\{ \langle 0 | j_\mu^a(0) |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| \Phi(0) | 0 \rangle e^{-ik(x-y)} \right\} \\ &\quad - \int d^4k \sum_{n, n'} \delta^4(p_n - k) \left\{ \langle 0 | \Phi(0) |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| j_\mu^a(0) | 0 \rangle e^{ik(x-y)} \right\} \\ &\equiv \int d^4k (2\pi)^{-3} \left\{ \rho_\mu^a(k) e^{-ik(x-y)} - \tilde{\rho}_\mu^a(k) e^{ik(x-y)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

ただしここで次を用いている。

$$\begin{aligned} \rho_\mu^a(k) &= (2\pi)^3 \sum_{n, n'} \delta^4(p_n - k) \langle 0 | j_\mu^a(0) |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| \Phi(0) | 0 \rangle, \\ \tilde{\rho}_\mu^a(k) &= (2\pi)^3 \sum_{n, n'} \delta^4(p_n - k) \langle 0 | \Phi(0) |n\rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n'| j_\mu^a(0) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

この $\rho_\mu^a(k)$, $\tilde{\rho}_\mu^a(k)$ はスペクトル条件 $k^0 \geq 0$ 、Lorentz 不変の条件により次のように表記される。

$$\rho_\mu^a(k) = k_\mu \rho^a(k^2) \theta(k^0), \quad \tilde{\rho}_\mu^a(k) = k_\mu \tilde{\rho}^a(k^2) \theta(k^0).$$

さらにタキオンがないという条件より $\rho^a(k^2)$, $\tilde{\rho}^a(k^2)$ には条件がつく。

$$\rho^a(k^2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma^2 \delta(k^2 - \sigma^2) \rho^a(\sigma^2) = \int_0^{\infty} d\sigma^2 \delta(k^2 - \sigma^2) \rho^a(\sigma^2)$$

$$\tilde{\rho}^a(k^2) = \int_0^\infty d\sigma^2 \delta(k^2 - \sigma^2) \tilde{\rho}^a(\sigma^2).$$

これらを (E.13) に代入する。

$$\begin{aligned} \text{(E.13)} &= \int d^4k (2\pi)^{-3} \int_0^\infty d\sigma^2 \delta(k^2 - \sigma^2) \left\{ k_\mu \rho^a(\sigma^2) \theta(k^0) e^{-ik(x-y)} - k_\mu \tilde{\rho}^a(\sigma^2) \theta(k^0) e^{ik(x-y)} \right\} \\ &= \int_0^\infty d\sigma^2 \rho^a(\sigma^2) i\partial_\mu \int d^4k (2\pi)^{-3} \delta(k^2 - \sigma^2) \theta(k^0) e^{-ik(x-y)} \\ &\quad + \int_0^\infty d\sigma^2 \tilde{\rho}^a(\sigma^2) i\partial_\mu \int d^4k (2\pi)^{-3} \delta(k^2 - \sigma^2) \theta(k^0) e^{ik(x-y)}. \end{aligned} \quad \text{(E.14)}$$

ここで少し不変デルタ関数 $i\Delta(x-y)$ について考察する。これは次のように定義されている。

$$\begin{aligned} i\Delta(x-y; \sigma^2) &= \int d^4k (2\pi)^{-3} \delta(k^2 - \sigma^2) \varepsilon(k^0) e^{-ik(x-y)} \\ &= \int d^4k (2\pi)^{-3} \delta(k^2 - \sigma^2) \theta(k^0) e^{-ik(x-y)} - \int d^4k (2\pi)^{-3} \delta(k^2 - \sigma^2) \theta(k^0) e^{ik(x-y)} \\ &\equiv i\Delta_+(x-y; \sigma^2) - i\Delta_+(y-x; \sigma^2). \end{aligned}$$

不変デルタ関数の性質より、space-like に離れているとき、つまり $(x-y)^2 < 0$ のときはゼロになるので、次の関係があることになる。

$$\Delta_+(x-y; \sigma^2) = \Delta_+(y-x; \sigma^2) \quad \text{for } (x-y)^2 < 0.$$

また、任意の交換関係も space-like に離れているときはゼロになるので、今考えているものも (E.14) に代入して次のようになる。

$$0 = \text{(E.14)} = \int_0^\infty d\sigma^2 [\rho^a(\sigma^2) + \tilde{\rho}^a(\sigma^2)] i\partial_\mu (i\Delta_+(x-y; \sigma^2)), \quad \therefore \rho^a(\sigma^2) = -\tilde{\rho}^a(\sigma^2). \quad \text{(E.15)}$$

この関係 (E.15) は時空に依存していないので、任意の場合に適用できる。すなわちこれより、交換関係は次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \langle 0 | [j_\mu^a(x), \Phi(y)] | 0 \rangle &= \int_0^\infty d\sigma^2 \rho^a(\sigma^2) i\partial_\mu [i\Delta_+(x-y; \sigma^2) - i\Delta_+(y-x; \sigma^2)] \\ &= \int_0^\infty d\sigma^2 (i\rho^a(\sigma^2)) i\partial_\mu \Delta(x-y; \sigma^2), \\ \rho_\mu^a(k) &= (2\pi)^3 \sum_{n, n'} \langle 0 | j_\mu^a(0) | n \rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n' | \Phi(0) | 0 \rangle = k_\mu \rho^a(k^2) \theta(k^0). \end{aligned}$$

ここで便宜上 $i\rho^a(\sigma^2) \rightarrow \rho^a(\sigma^2)$ と定義しなおす。

$$\langle 0 | [j_\mu^a(x), \Phi(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho^a(\sigma^2) i\partial_\mu \Delta(x-y; \sigma^2), \quad \text{(E.16a)}$$

$$-ik_\mu \rho^a(\sigma^2 = k^2) \theta(k^0) = \rho_\mu^a(k) = (2\pi)^3 \sum_{n, n'} \langle 0 | j_\mu^a(0) | n \rangle \eta_{nn'}^{-1} \langle n' | \Phi(0) | 0 \rangle. \quad \text{(E.16b)}$$

この表式 (E.16a) の導出を用いることで、 $j_\mu^a(x)$ と $\Phi(x)$ の 2 点 Green 関数、 $\langle 0 | T j_\mu^a(x) \Phi(y) | 0 \rangle$ を求めることができる。

$$\langle 0 | T j_\mu^a(x) \Phi(y) | 0 \rangle = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \partial_\mu \Delta_F(x-y; \sigma^2). \quad (\text{E.17})$$

さらにこの (E.17) の両辺に $\int d^4x i\partial^\mu$ を作用させる。そのとき Heisenberg 場で書かれた Noether current の保存 $\partial^\mu j_\mu^a = 0$ を用いる。

$$\begin{aligned} & \int d^4x i\partial^\mu \langle 0 | T j_\mu^a(x) \Phi(y) | 0 \rangle \\ &= \int d^4x i\partial^\mu \langle 0 | \left\{ \theta(x^0 - y^0) j_\mu^a(x) \Phi(y) + \theta(y^0 - x^0) \Phi(y) j_\mu^a(x) \right\} | 0 \rangle \\ &= \int d^4x i \langle 0 | \left\{ \delta(x^0 - y^0) j_0^a(x) \Phi(y) + \theta(x^0 - y^0) \partial^\mu j_\mu^a(x) \Phi(y) \right. \\ &\quad \left. - \delta(x^0 - y^0) \Phi(y) j_0^a(x) + \theta(x^0 - y^0) \Phi(y) \partial^\mu j_\mu^a(x) \right\} | 0 \rangle \\ &= i \int d^3x \langle 0 | [j_0^a(x), \Phi(y)] | 0 \rangle \Big|_{x^0=y^0} \\ &\quad + i \int d^4x \left\{ \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | T \partial^\mu j_\mu^a(x) \Phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | T \Phi(y) \partial^\mu j_\mu^a(x) | 0 \rangle \right\} \\ &= \langle 0 | [iQ^a, \Phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \delta^a \Phi(y) | 0 \rangle \neq 0, \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

$$\begin{aligned} & \int d^4x i\partial^\mu \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \partial_\mu \Delta_F(x-y; \sigma^2) \\ &= i \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \int d^4x \square_x \Delta_F(x-y; \sigma^2) = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \int d^4x e^{ipx} i \square_x \Delta_F(x-y; \sigma^2) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) i \int d^4x e^{ipx} \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{-k^2}{\sigma^2 - k^2 - i\varepsilon} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^\infty d\sigma^2 e^{ipy} \frac{\rho(\sigma^2)(-ip^2)}{i(\sigma^2 - p^2 - i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

(E.18), (E.19) がゼロでない値を持つためには、 $\rho(\sigma^2)$ にゼロ質量 1 粒子離散スペクトル部分が含まれていなければならない。

$$\rho(\sigma^2) = \omega \delta(\sigma^2) + \tilde{\rho}(\sigma^2), \quad \omega \neq 0. \quad (\text{E.20})$$

従って (E.20) を (E.19) に代入して (E.18) と比較することにより、order parameter と呼ばれる真空期待値の関係が得られる。

$$\omega = \langle 0 | \delta^a \Phi(y) | 0 \rangle. \quad (\text{E.21})$$

また、スペクトル関数 (E.16b), (E.20) を比較することで、ゼロ質量 1 粒子スペクトルを持つ粒子状態がカレント $j_\mu^a(x)$ と場 $\Phi(y)$ に同時にゼロでない値で結合していることがわかる。

$$\langle 0 | j_\mu^a(0) | \mathbf{p}(m=0) \rangle \neq 0, \quad \langle \mathbf{p}(m=0) | \Phi(0) | 0 \rangle \neq 0. \quad (\text{E.22})$$

ここで与えられた証明は、相互作用の全てのオーダーで NG boson がゼロ質量であることを述べている。

E.2 Example: Nambu-Jona-Lasinio Model

- Nambu-Jona-Lasinio model

Nambu-Jona-Lasinio 模型を、 N 個の Dirac spinor を用いて記述する。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{G}{N}[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2]. \quad (\text{E.23})$$

この系は $U(1)_V$ 変換に対して不変であるだけでなく、chiral $U(1)$ 変換に対しても不変である。ここでは chiral $U(1)$ 変換のカレントと電荷を構成しよう。

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{i\gamma_5\theta}\psi \simeq (1 + i\gamma_5\theta)\psi \equiv \psi + \theta\delta_5\psi, \\ j_{5\mu} &= (\partial\mathcal{L}/\partial^\mu\psi)\delta_5\psi = -\bar{\psi}i\gamma_\mu\gamma_5\psi, \\ Q_5 &= \int d^3x j_{5\mu=0}(x) = -\int d^3x \psi^\dagger\gamma_5\psi(x). \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

この系では正準共役量が

$$\pi_\psi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi} = \bar{\psi}i\gamma^0 = i\psi^\dagger, \quad \{\psi(\mathbf{x}), \pi_\psi(\mathbf{y})\} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

で与えられる。これを用いてやると次の計算が容易になる。

$$\begin{aligned} [iQ_5, \bar{\psi}\psi(x)] &= -\int d^3y [\pi_\psi\gamma_5\psi(y), \bar{\psi}\psi(x)] = 2\bar{\psi}i\gamma_5\psi(x), \\ [iQ_5, \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)] &= -2\bar{\psi}\psi(x). \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

よって、この Dirac フェルミオンが真空凝縮を起こして期待値を持つことになるなら、複合場 $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ には NG boson が現れることになる。

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}\psi(x) | 0 \rangle &= -\frac{N}{2G}m \neq 0, \\ \Rightarrow \langle 0 | [iQ_5, \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)] | 0 \rangle &= -2\langle 0 | \bar{\psi}\psi(x) | 0 \rangle = \frac{N}{G}m \neq 0. \end{aligned}$$

- 補助場の導入

(E.23) の生成汎関数を、 ψ の外場を η として導入する。

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp i \int d^4x [\mathcal{L}_{\text{NJ}} + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi}]. \quad (\text{E.26})$$

この生成汎関数から Green 関数を生成するには、外場の左微分を適当な回数だけ行えばよい。これにさらに次の因子を掛ける。

$$1 = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp i \int d^4x \left[-\frac{N}{2\lambda} (\sigma'(x)^2 + \pi'(x)^2) \right]. \quad (\text{E.27})$$

$$\sigma'(x) = \sigma(x) + \frac{\lambda}{N} \bar{\psi} \psi(x), \quad \pi'(x) = \pi(x) + \frac{\lambda}{N} \bar{\psi} i\gamma_5 \psi(x). \quad (\text{E.28})$$

実際に代入するのであるが、パラメータ λ の次元などを考慮し、4-Fermi 相互作用を湯川型相互作用に書き換えるように $\lambda = 2G$ ととる。

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp i \int d^4x [\mathcal{L}_Y(\psi, \bar{\psi}, \sigma, \pi) + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi}], \quad (\text{E.29a})$$

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{N}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) - \bar{\psi} (\sigma + i\gamma_5 \pi) \psi. \quad (\text{E.29b})$$

- **Effective action, Effective potential**

ここからは補助場 $\sigma(x), \pi(x)$ の振る舞いを見るため、はじめに存在したフェルミオン $\psi(x)$ を積分し、 $\sigma(x), \pi(x)$ で記述された有効作用を求める。フェルミオンであることに注意することで、次のように与えられる。

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp iN S_B[\sigma, \pi], \quad (\text{E.30a})$$

$$S_B[\sigma, \pi] = -\frac{1}{2\lambda} \int d^4x (\sigma^2 + \pi^2) - i \log \text{Det} [i\cancel{\partial} - (\sigma + i\gamma_5 \pi)], \quad (\text{E.30b})$$

$$\Gamma[\sigma, \pi] = S_B[\sigma, \pi] + O(1/N). \quad (\text{E.30c})$$

ここでは $O(1/N)$ のオーダーから先は考慮せず、せいぜい 1 ループまでしかみない。その仮定の下での有効ポテンシャルは次のようになる。

$$\begin{aligned} V(\sigma, \pi) &= -S_B[\sigma(x) = \sigma, \pi(x) = \pi] \\ &= \frac{1}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) - \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \log \det [\cancel{k} - (\sigma + i\gamma_5 \pi)], \end{aligned} \quad (\text{E.31a})$$

$$= \frac{1}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) - 2 \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \log(\sigma^2 + \pi^2 - k^2 - i\epsilon), \quad (\text{E.31b})$$

$$= V(0, 0) + \frac{1}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^4 \log \left(1 + \frac{\sigma'^2}{\Lambda^2} \right) - \sigma'^4 \log \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma'^2} \right) + \sigma'^2 \Lambda^2 \right]. \quad (\text{E.31c})$$

最後の等式では運動量を Euclid 化し、紫外部分を取り除き、紫外発散切断 Λ を導入している。また $\sigma'^2 = \sigma^2 + \pi^2$ である。

- **Self-consistency conditions**

有効ポテンシャル (E.31a) を直接 σ で微分することで、停留条件を求めることも可能である。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_0} &= \frac{\sigma_0}{\lambda} - \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \sigma} \log \det [\cancel{k} - \sigma] \Big|_{\sigma=\sigma_0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \log \det [\cancel{k} - \sigma] &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \text{tr} \log [\cancel{k} - \sigma] = \text{tr} \left[\frac{1}{\sigma - \cancel{k}} \right], \\ \therefore -\sigma_0 &= -\lambda \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr} \left[\frac{1}{\sigma_0 - \cancel{k}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

最後の等式の意味を考察しよう。湯川型相互作用に書き換えられた Lagrangian (E.29b) を補助場 $\sigma(x)$ について解くと、 $\sigma(x) = -(\lambda/N)\bar{\psi}\psi$ が得られる。これより、また、フェルミオンの真空凝縮 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \sigma_0 \neq 0$ より、(E.32) はフェルミオン $\psi(x)$ のループ計算にあたるのがわかる。また ψ はもともと 4 点相互作用であったため、このループ計算はフェルミオンの 2 点関数にループがついた形を示している。Lagrangian の中に、2 点関数として入る項は質量項であり、上の計算より、そのループ寄与による質量がまたもとの σ_0 となる、ということがわかる。符号は Lagrangian に寄与するものと一致している。この表式 (E.32) が成り立つとき、理論は自己無矛盾であるという。また、これを条件として理論に課すことを、self-consistency condition という。

- 2 点関数

有効作用 $\Gamma[\sigma, \pi] = S_B[\sigma, \pi]$ において、補助場 $\pi(x)$ の 2 点関数を調べ、その振る舞いを見る。まず表記を簡単にするためにも、次の表記を復習する。

$$(i\cancel{\partial} - \sigma_0)S_F(x-y) = i\delta^4(x-y), \quad S_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{\sigma_0 - \cancel{k} - i\varepsilon}, \quad \rightarrow \quad iS_F^{-1} = i\cancel{\partial} - \sigma_0.$$

これを用いて有効作用 $\Gamma[\sigma, \pi] = S_B[\sigma, \pi]$ を記述する。

$$\begin{aligned} \Gamma[\sigma, \pi] &= -\frac{1}{2\lambda} \int d^4x (\sigma^2 + \pi^2) - i \log \text{Det}[iS_F^{-1} - i\gamma_5 \pi] \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \int d^4x (\sigma^2 + \pi^2) - i \text{Tr} \text{Ln}[iS_F^{-1} - i\gamma_5 \pi]. \end{aligned}$$

有効作用から 2 点関数を求めるのだが、それは $\pi(x)$ で 2 回汎関数微分を行うことで得られる。

$$\Gamma_\pi^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\delta}{\delta\pi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\pi(x_2)} \Gamma[\sigma, \pi] \Big|_{\substack{\sigma=\sigma_0 \\ \pi=0}}.$$

$\text{Tr} \text{Ln}[iS_F^{-1} - i\gamma_5 \pi]$ を π について展開する。

$$\text{Tr} \text{Ln}[iS_F^{-1} - i\gamma_5 \pi] = \text{Tr} \text{Ln}[iS_F^{-1}] - \text{Tr}[(-i\gamma_5 \pi) \cdot iS_F] + \frac{(-1)^2}{2!} \text{Tr}[(-i\gamma_5 \pi) \cdot iS_F \cdot (-i\gamma_5 \pi) \cdot iS_F] + \dots$$

2 点関数に寄与するのは第 3 項のみであるので、それを積分形式に書き換えておく。

$$\begin{aligned} &\text{Tr}[(-i\gamma_5 \pi) \cdot iS_F \cdot (-i\gamma_5 \pi) \cdot iS_F] \\ &= - \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \delta^4(y_1 - y_3) \text{tr}[(-i\gamma_5 \pi(y_1)) iS_F(y_1 - y_2) (-i\gamma_5 \pi(y_2)) iS_F(y_2 - y_3)] \\ &= - \int d^4y_1 d^4y_2 \text{tr}[(-i\gamma_5 \pi(y_1)) iS_F(y_1 - y_2) (-i\gamma_5 \pi(y_2)) iS_F(y_2 - y_1)]. \end{aligned}$$

負号はフェルミオンの寄与である。これより次のように 2 点関数が表される。

$$\begin{aligned} \Gamma_\pi^{(2)}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{\lambda} \delta^4(x_1 - x_2) \\ &\quad + \frac{i}{2} \int d^4y_1 d^4y_2 \frac{\delta}{\delta\pi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\pi(x_2)} \text{tr}[(-i\gamma_5 \pi(y_1)) iS_F(y_1 - y_2) (-i\gamma_5 \pi(y_2)) iS_F(y_2 - y_1)] \end{aligned}$$

$$\equiv \Gamma_1^{(2)}(x_1, x_2) + \Gamma_2^{(2)}(x_1, x_2).$$

これをそのまま汎関数微分を実行してもかまわないが、ここではまず運動量表示に変換して、その後に運動量表示での汎関数微分を実行する。そのため運動量表示での汎関数微分をここで考察する。

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\pi(p)}\pi(k) &= \left[\int d^4x e^{-ipx} \frac{\delta}{\delta\pi(x)} \right] \left[\int d^4y e^{iky} \pi(y) \right] = \int d^4x d^4y e^{-ipx} e^{iky} \delta^4(x-y) \\ &= \int d^4x e^{i(p-k)x} = (2\pi)^4 \delta^4(p-k). \end{aligned}$$

まず運動量表示での 2 点関数を構成する。全体の運動量保存を考慮して次のように与える。

$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx_1} e^{-iqx_2} \Gamma_\pi^{(2)}(x_1, x_2) = \tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(q) (2\pi)^4 \delta^4(p+q).$$

これを用いて $\Gamma_1^{(2)}$, $\Gamma_2^{(2)}$ のそれぞれについて計算を実行する。

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx_1} e^{-iqx_2} \Gamma_1^{(2)}(x_1, x_2) &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx_1} e^{-iqx_2} \left[-\frac{1}{\lambda} \delta^4(x_1 - x_2) \right] = -\frac{1}{\lambda} (2\pi)^4 \delta^4(p+q), \\ \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx_1} e^{-iqx_2} \Gamma_2^{(2)}(x_1, x_2) &= \frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta\pi(p)} \frac{\delta}{\delta\pi(q)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[(-i\gamma_5 \pi(k-\ell)) \frac{1}{\sigma_0 - \not{k}} (-i\gamma_5 \pi(\ell-k)) \frac{1}{\sigma_0 - \not{\ell}} \right] \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} (2\pi)^8 [\delta^4(k-\ell-p) \delta^4(\ell-k-q) + \delta^4(\ell-k-p) \delta^4(k-\ell-q)] \\ &\quad \times \text{tr} \left[(-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - \not{k}} (-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - \not{\ell}} \right] \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p+q) \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[(-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - \not{k}} (-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - (\not{k} + \not{q})} \right] \\ &\quad + (2\pi)^4 \delta^4(p+q) \frac{i}{2} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[(-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - (\not{\ell} + \not{q})} (-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - \not{\ell}} \right] \\ &= -(2\pi)^4 \delta^4(p+q) \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr} \left[(-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - \not{k}} (-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - (\not{k} + \not{q})} \right]. \end{aligned}$$

まとめると運動量表示の 2 点関数が次のようになる。

$$\tilde{\Gamma}_\pi^{(2)}(q) = -\frac{1}{\lambda} - \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr} \left[(-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - \not{k}} (-i\gamma_5) \frac{1}{\sigma_0 - (\not{k} + \not{q})} \right]. \quad (\text{E.33})$$

F Nonlinear Sigma Models in Two Dimensions

ここでは超対称でない3つの基礎的な NLSM ($O(N)$, CP^{N-1} , Gross-Neveu) についての紹介を行う。解析方法は $1/N$ 展開、つまり非摂動的解析である [33][34][35]。

F.1 $O(N)$ Model

ここで考えるのは $D = 2$ 時空での $O(N)$ 変換不変な模型である。 N 成分実場 $\phi_i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) を考えよう。時空の計量は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(+-)$ とする。

$$\phi^T(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)), \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(+-). \quad (\text{F.1})$$

この実場 $\phi(x)$ に次の拘束条件を課す。

$$\phi^T(x)\phi(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x)\phi_i(x) = \frac{1}{g^2}. \quad (\text{F.2})$$

つまり $\phi(x)$ は S^{N-1} に拘束されているとする。

この実場 $\phi(x)$ が大域的 $O(N)$ 変換に対して次のように変換されるとする。つまり実場は $O(N)$ 変換に対しては N 表現 N 、つまり基本表現とする。

$$\phi'_i(x) = R_{ij}\phi_j(x). \quad (\text{F.3})$$

この変換に対して、拘束条件 (F.2) は不変である。

ここで、大域的 $O(N)$ 変換に対して不変な Lagrangian を構成する。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^T(\partial^\mu\phi), \quad (\text{F.4a})$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi')^T(\partial^\mu\phi') = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^T R^T R(\partial^\mu\phi) = \mathcal{L}. \quad (\text{F.4b})$$

簡単にまず摂動的な考察を行う。一般に時空次元が D のときであるとしよう。実場の真空期待値が

$$\langle\phi(x)\rangle = 0, \quad (\text{F.5})$$

であるとき、この Lagrangian で表される系は自発的対称性の破れを起こさず、ただゼロ質量な自由場を記述するものとなっている。しかしここでは拘束条件 (F.2) を課している。このため、 N 個の実場 $\phi_i(x)$ が同時に $\langle\phi_i(x)\rangle = 0$ となる事は許されていない。つまり N 個の $\phi_i(x)$ のうちいずれかはゼロでない真空期待値を持つことになり、 $O(N)$ 対称性が自発的に破れてしまう。($D = 2$ のときは後で簡単に触れるが、自発的には破れない。)

この模型は S^{N-1} 上の $O(N)$ 変換なので、 $\phi_i(x)$ の真空期待値として次のようにとることが可能である。

$$\phi_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad \phi_N(x) = \frac{1}{g} \neq 0. \quad (\text{F.6})$$

この期待値を手で選択したことにより S^{N-1} 上の $O(N)$ 対称性が $O(N-1)$ に破れ、破れた自由度

$$\frac{1}{2}N(N-1) - \frac{1}{2}(N-1)(N-2) = N-1, \quad (\text{F.7})$$

だけゼロ質量の NG boson が現れる ($\phi_i(x)$ ($i=1, \dots, N-1$) の量子論的ゆらぎとして)。また $\phi_N(x)$ のゆらぎからは有質量ボソンが現れる。

しかし今の模型では時空次元が $D=2$ の場合を考えている。摂動論的にはあまり深く追求しないで現象のみ言及するにとどめておくが、このときゼロ質量 NG boson は紫外発散だけでなく赤外発散も起こしている。この赤外発散を回避しようとする、実場は質量を持つようになり、結果として系の $O(N)$ 対称性が回復する。

この、 $D=2$ では実場が有質量になり対称性が自発的に破れることはない、ということを見非摂動論的に見ていこう。ここでは N が 1 より十分大きいとする。また結合定数と Large- N とは以下の関係にあるとする。

$$g^2 N : \text{fixed}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (\text{F.8})$$

有効作用を求めたいため、 $\phi(x)$ を古典的な定数部分 φ と量子的な補正部分 $\phi'(x)$ に分解する。またその有効作用を求める際、次の拘束条件が課される。

$$\phi(x) = \varphi + \phi'(x), \quad \langle \phi(x) \rangle = \varphi, \quad \int d^2x \phi'(x) = 0 \quad (\text{F.9})$$

では、考察する模型の Lagrangian と拘束条件、そしてそれに伴う生成汎関数を与えよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))^T (\partial^\mu \phi(x)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\partial_\mu \phi_i(x))^2, \quad \phi^T(x) \phi(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \phi_i(x) = \frac{1}{g^2}, \quad (\text{F.10a})$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{2} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2\right) \left(\prod_x \delta\left(\phi^2 - \frac{1}{g^2}\right)\right) \left(\delta\left(\int d^2x \phi(x) - \varphi \int d^2x\right)\right). \quad (\text{F.10b})$$

生成汎関数の中にある無限個のデルタ関数を、汎関数 Fourier 変換を用いて書き直す。

$$\prod_x \delta\left(\phi^2 - \frac{1}{g^2}\right) = \int [d\lambda] \exp\left(\frac{i}{2} \int d^2x \lambda(x) \left\{\phi^2(x) - \frac{1}{g^2}\right\}\right). \quad (\text{F.11})$$

これを生成汎関数 (F.10b) に代入する。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\lambda \exp\left(\frac{i}{2} \int d^2x [(\partial_\mu \phi)^2 - \lambda\{\phi^2 - \frac{1}{g^2}\}]\right) \left(\delta\left(\int d^2x \phi(x) - \varphi \int d^2x\right)\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\lambda \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^2x d^2y \phi^T(x) [\partial^2 + \lambda]_{x,y} \phi(y) + \frac{i}{2g^2} \int d^2x \lambda(x)\right). \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

ここで拘束条件 (F.9) を実行すると、生成汎関数 (F.12) の中の $\phi'(x)$ の 1 次の部分は積分から落ちて、2 次の部分のみが残る。またその 2 次部分も Gauss 積分が実行できる。そこで実際にこの実場を積分して、それから得られる有効作用 S_{eff} を導出しよう。

$$\int \mathcal{D}\phi' \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^2x d^2y \phi'^T(x) [\partial^2 + \lambda]_{x,y} \phi'(y)\right) = \{\text{Det}(\partial^2 + \lambda)_{x,y}\}^{-\frac{N}{2}} = \exp\left(-\frac{N}{2} \text{Tr Ln}(\partial^2 + \lambda)_{x,y}\right).$$

ここで Tr , Ln は時空座標を無限次元行列の足としたときの trace と log を表す。すなわち以下の関係が Tr にはあることになる。

$$\text{Tr} M_{x,y} = \int d^2x d^2y \delta^2(x-y) M(x,y) .$$

この表式は後に実際に計算する。とりあえずここではこのままで生成汎関数を再表示しよう。

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\lambda \exp\left(-\frac{N}{2} \text{Tr} \text{Ln}(\partial^2 + \lambda)_{x,y} - \frac{i}{2} \int d^2x \lambda(x) \left\{ \varphi^2 - \frac{1}{g^2} \right\}\right) \quad (\text{F.13a})$$

$$\equiv \int \mathcal{D}\lambda \exp(i S_{\text{eff}}[\lambda(x), \varphi]) ,$$

$$S_{\text{eff}}[\lambda(x), \varphi] = -\frac{1}{2} \left\{ \varphi^2 - \frac{1}{g^2} \right\} \int d^2x \lambda(x) + \frac{iN}{2} \text{Tr} \text{Ln}(\partial^2 + \lambda)_{x,y} . \quad (\text{F.13b})$$

次に、理論の真空を探すために有効作用 (F.13b) から有効ポテンシャルを構成する。有効ポテンシャルは次のように定義される。

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\lambda(x) = \lambda_c, \varphi] &= -V(\lambda_c, \varphi) \int d^2x \\ &= -\frac{1}{2} \lambda_c \left\{ \varphi^2 - \frac{1}{g^2} \right\} \int d^2x + \frac{iN}{2} \text{Tr} \text{Ln}(\partial^2 + \lambda_c)_{x,y} . \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \text{Ln}(\partial^2 + \lambda_c)_{x,y} &= \int d^2x d^2y \delta^2(x-y) \text{Ln} \left(\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} e^{-ikx} e^{ily} (2\pi)^2 \delta^2(k-l) [-k^2 - \lambda_c] \right) \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(-k^2 + \lambda_c) \int d^2x , \end{aligned}$$

これより、有効ポテンシャルの具体的な表記が次で与えられることになる。

$$V(\lambda_c, \varphi) = \frac{1}{2} \lambda_c \left\{ \varphi^2 - \frac{1}{g^2} \right\} + \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(-k^2 + \lambda_c) . \quad (\text{F.15})$$

この有効ポテンシャルを用いて理論の真空を求める方法として、有効ポテンシャルを λ_c で変分しても変化しない停留点を求めるものがある。この条件は以下で与えられる。

$$\left. \frac{\partial V(\lambda_c)}{\partial \lambda_c} \right|_{\lambda_c = \lambda_c^*} = 0 . \quad (\text{F.16})$$

これから次の関係が容易に得られる。

$$\frac{1}{g^2 N} = \frac{\varphi^2}{N} + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{\lambda_c^* - k^2} . \quad (\text{F.17})$$

この関係式 (F.17) は、実場 $\phi(x)$ の伝播関数 $\langle \phi^T(x) \phi(y) \rangle$ のループ補正が相互作用点の結合定数になれ、という self-consistency condition となっている。つまり左辺は相互作用点の結合定数、右辺第 1 項は伝播関数の期待値、そして第 2 項はループ補正項と見ることができる。したがって λ_c^* は実場 $\phi(x)$ の質量 (の 2 乗) と見ることができる。

$$\lambda_c^* \equiv m^2 . \quad (\text{F.18})$$

表式 (F.17) の積分は紫外発散を含んでいるので、ここで紫外発散切断 Λ を導入して積分しよう。その結果、表式 (F.17) は次のようになる。

$$\frac{1}{g^2 N} = \frac{\varphi^2}{N} + \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{\Lambda^2}{\lambda_c^*} \right). \quad (\text{F.19})$$

このままでは結合定数は発散しているので、繰り込まれた結合定数に置き換える必要がある。この繰り込まれた結合定数 g_R と繰り込まれていない結合定数 g を次のように結ぶ。

$$\frac{1}{g_R^2 N} = \frac{1}{g^2 N} - \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right). \quad (\text{F.20})$$

ここで μ は scale parameter と呼ばれる任意定数である。この繰り込まれた結合定数で再び表式 (F.17) を記述すると、それは有限な関係を与えることができる。

$$\frac{1}{g_R^2 N} = \frac{\varphi^2}{N} + \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{\mu^2}{\lambda_c^*} \right). \quad (\text{F.21})$$

これから、補助場 $\lambda(x)$ の真空期待値 λ_c^* が次のように実場の真空期待値 φ と繰り込まれた結合定数 g_R 、そして scale parameter μ で表すことができる。

$$\lambda_c^* = \mu^2 \exp \left(\frac{4\pi\varphi^2}{N} \right) \exp \left(-\frac{4\pi}{g_R^2 N} \right) \equiv M^2 \exp \left(\frac{4\pi\varphi^2}{N} \right), \quad (\text{F.22a})$$

$$M^2 = \mu^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{g_R^2 N} \right). \quad (\text{F.22b})$$

M は繰り込み群変換に対して不変な mass scale である。したがってこれより、実場の真空期待値 φ が拘束条件 (F.2) があるにもかかわらず非摂動的には $\varphi^2 = 0$ と、全てゼロにすることができる。これは、摂動的には真空期待値がゼロとならず、大域的 $O(N)$ 対称性が自発的に破れていたという描像と異なり、 $O(N)$ 対称性を保っていることを意味している。またその非摂動効果により、もともとゼロ質量であった実場 $\phi(x)$ が表式 (F.17) によって質量 $m^2 = \lambda_c^* = M^2$ を獲得している。これも非摂動効果の著しい点である。

ついでながら、有効ポテンシャルを繰り込まれた結合定数で書き直すとどのようになるのかを考察しよう。まず表式 (F.15) の中の積分を実行した物を与える。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V(\lambda_c, \varphi) &= \frac{1}{2} \lambda_c^* \left(\varphi^2 - \frac{1}{g_R^2} \right) - \frac{1}{8\pi} \lambda_c^* \left(\log \frac{\lambda_c^*}{\mu^2} - 1 \right) + (\text{divergent constant}) \\ &\simeq \frac{M^2}{8\pi} \exp(4\pi\varphi^2). \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

実は最後の項は繰り込まれた結合定数を用いて書き直しても発散が押えられていない。これは、理論の真空状態にはもともと最後の項だけエネルギーを持っていると解釈される。つまりゼロ点のエネルギーの取り方が上の考察のままでは誤りであることになっている。したがってこの分だけの真空のエネルギーを引いておく。

(F.23) をみると、ポテンシャルの最小点は $\varphi = 0$ の点で実現されている。つまり拘束条件があったにも関わらず $O(N)$ 対称性が破れていないのである。これは理論が質量を持ち、かつ紫外発散が結合定数に登場して繰り込

まれるために起こる現象である。本文では、拘束条件が F -term にのみ登場するのであるが、 $\mathcal{N} = 2$ の超対称性を持つため、 F -term には非繰り込み定理が働く。そのため結合定数が一切紫外発散を受けず、繰り込まれない。そのためどうしても拘束条件が直接真空期待値に作用してしまうのである。

F.2 CP^{N-1} Model

次に今度は複素場に拡張した模型を考察する。次のような設定をしよう。

$$\phi^T(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)), \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(+-), \quad (\text{F.24a})$$

$$\phi^\dagger(x)\phi(x) = 1 \quad (\text{constraint}). \quad (\text{F.24b})$$

この拘束条件は大域的 $U(N)$ 変換に対して不変である。この大域的 $U(N)$ 変換を局所の変換に部分的に拡張する。つまり $U(N)$ 群の部分群である $U(1)$ 群をゲージ化する。その際ゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入する。これらの場合は局所的 $U(1)$ 変換に対して次のように変換されるとする。

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{ie\theta(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \quad (\text{F.25})$$

これらの変換に対して不変な次の Lagrangian をこれから考察しよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{e^2}(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi). \quad (\text{F.26})$$

但し共変微分 D_μ は次で定義されている。

$$D_\mu\phi(x) = (\partial_\mu - iA_\mu)\phi(x). \quad (\text{F.27})$$

実数補助場 $\lambda(x)$ を用いて、拘束条件を考慮した生成汎関数を次のように与える。

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \exp\left(\frac{i}{e^2} \int d^2x \{ (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \lambda(\phi^\dagger\phi - 1) \}\right). \quad (\text{F.28})$$

部分積分し、複素場 $\phi(x)$ を積分して、有効作用を構成する。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \exp\left(-\frac{i}{e^2} \int d^2x \phi^\dagger \{ (D_\mu D^\mu) + \lambda \} \phi + \frac{i}{e^2} \int d^2x \lambda\right) \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \exp\left(\frac{i}{e^2} \int d^2x \lambda - N \text{Tr} \text{Ln}[(\partial_\mu - iA_\mu)^2 + \lambda]\right) \\ &\equiv \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda \exp(iS_{\text{eff}}), \end{aligned} \quad (\text{F.29a})$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{e^2} \int d^2x \lambda + iN \text{Tr} \text{Ln}[(\partial_\mu - iA_\mu)^2 + \lambda]. \quad (\text{F.29b})$$

e^2N を固定して $N \rightarrow \infty$ とする極限での考察をすると、この有効作用は 2 項とも同じオーダーで効いて来る。停留点での振舞は $O(N)$ 模型と全く同じであり、補助場は真空期待値を獲得して複素場の質量を与える。一方補助

場としてのゲージ場は、Lorentz 不変性より真空期待値はゼロとなる。つまり鞍点では次のようになり、 $O(N)$ 模型のときと全く同様の考察が適用できて、複素場は対称性を壊さない。

$$\langle \lambda(x) \rangle = m^2, \quad \langle A_\mu(x) \rangle = 0. \quad (\text{F.30})$$

ここからは、補助場でしかなかったゲージ場が量子補正によって運動項を獲得する機構を考察する。そのためには有効作用の停留点からのずれを見なければならない。そのため、補助場 $\lambda(x)$, $A_\mu(x)$ の真空期待値からのずれを次のようにとって考察をすれば良い。

$$\lambda(x) = \langle \lambda(x) \rangle + \sigma(x) = m^2 + \sigma(x), \quad A_\mu(x) = \langle A_\mu(x) \rangle + B_\mu(x) = B_\mu(x), \quad (\text{F.31a})$$

$$\int d^2x \sigma(x) = 0, \quad \int d^2x B_\mu(x) = 0. \quad (\text{F.31b})$$

停留点での有効作用を S_0 、量子補正を S_q とおくと、具体的にそれらは次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \frac{1}{e^2} \int d^2x (m^2 + \sigma(x)) + iN \text{Tr} \text{Ln} [(\partial_\mu - iB_\mu)^2 + m^2 + \sigma] \\ &= S_0 + S_q, \end{aligned} \quad (\text{F.32a})$$

$$S_0 = \frac{1}{e^2} \int d^2x m^2 + iN \text{Tr} \text{Ln} [\partial^2 + m^2], \quad (\text{F.32b})$$

$$S_q = iN \text{Tr} \text{Ln} \left[1 + \frac{1}{\partial^2 + m^2} (\sigma - i\vec{\partial}^\mu B_\mu - iB_\mu \partial^\mu - B_\mu B^\mu) \right]. \quad (\text{F.32c})$$

ここで微分記号 $\vec{\partial}^\mu B_\mu$ は、その直後の B_μ だけでなく積分されている複素場も叩いている、という意味である。具体的には次のようになるが、煩わしいので以後も $\vec{\partial}^\mu B_\mu$ という表記を行う。

$$\vec{\partial}^\mu B_\mu \equiv \partial^\mu B_\mu + B_\mu \partial^\mu.$$

量子補正と言ってもそんなに高いオーダーまでは見ず、複素場の 1 ループ補正までを見る。これに寄与して来るのは場の 2 点関数までであるので、 S_q をそこまで展開しよう。

$$\begin{aligned} S_q &= -\frac{i}{2} N \text{Tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} \sigma \frac{1}{\partial^2 + m^2} \sigma \right] \\ &\quad - iN \text{Tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} B_\mu B_\nu \eta^{\mu\nu} \right] + \frac{i}{2} N \text{Tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} (\vec{\partial}^\mu B_\mu + B_\mu \partial^\mu) \frac{1}{\partial^2 + m^2} (\vec{\partial}^\nu B_\nu + B_\nu \partial^\nu) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

場の 1 点関数、つまり具体的には次の関数は寄与しない。なぜなら場の真空期待値が本質的に効いて来るだけであり、それは量子補正での拘束条件 (F.31b) によって落ちるからである。

$$\text{Tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} \sigma \right] = 0, \quad \text{Tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} (\vec{\partial}^\mu B_\mu + B_\mu \partial^\mu) \right] = 0.$$

では (F.33) の各項を具体的に計算していこう。準備として以下のものを構成しておく。

$$\langle x | \sigma | y \rangle = \sigma(x) \delta^2(x - y),$$

$$\begin{aligned}
\langle x | \frac{1}{\partial^2 + m^2} | y \rangle &= \frac{1}{\partial_x^2 + m^2} \delta^2(x-y) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{m^2 - k^2}, \\
\langle x | (\vec{\partial}^\mu B_\mu + B_\mu \partial^\mu) | y \rangle &= (\vec{\partial}_x^\mu B_\mu(x) + B_\mu(x) \partial_x^\mu) \delta^2(x-y) \\
&= \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-ik(x-y)} e^{-iqx} (-i) \{2k^\mu + q^\mu\} \tilde{B}_\mu(q).
\end{aligned}$$

これらを用いると各項が簡単に求められる。

$$\text{Tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} \sigma \frac{1}{\partial^2 + m^2} \sigma \right] = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(m^2 - k^2)(m^2 - (k+q)^2)} \tilde{\sigma}(-q) \tilde{\sigma}(q), \quad (\text{F.34})$$

$$\text{Tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} B_\mu B_\nu \eta^{\mu\nu} \right] = \eta^{\mu\nu} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{m^2 - k^2} \tilde{B}_\mu(-q) \tilde{B}_\nu(q), \quad (\text{F.35})$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left[\frac{1}{\partial^2 + m^2} (\vec{\partial}^\mu B_\mu + B_\mu \partial^\mu) \frac{1}{\partial^2 + m^2} (\vec{\partial}^\nu B_\nu + B_\nu \partial^\nu) \right] \\
= \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{-(2k+q)^\mu (2k+q)^\nu}{(m^2 - k^2)(m^2 - (k+q)^2)} \tilde{B}_\mu(-q) \tilde{B}_\nu(q).
\end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

これにより、有効作用の量子補正 S_q が次のように簡単になることが分かる。

$$S_q = \frac{N}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} [\Pi(q) \tilde{\sigma}(-q) \tilde{\sigma}(q) + \Pi^{\mu\nu}(q) \tilde{B}_\mu(-q) \tilde{B}_\nu(q)], \quad (\text{F.37a})$$

$$\Pi(q) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{m^2 - k^2}, \quad (\text{F.37b})$$

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{(2k+q)^\mu (2k+q)^\nu}{(m^2 - k^2)(m^2 - (k+q)^2)} + 2\eta^{\mu\nu} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{m^2 - k^2}. \quad (\text{F.37c})$$

ゲージ場としての効果はこの $\Pi^{\mu\nu}(q)$ である。これが Ward 恒等式を満たすとき、ゲージ場が量子補正によって運動項を得たことになる。実際にこの $\Pi^{\mu\nu}(q)$ を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(q) &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{(m^2 - k^2)(m^2 - (k+q)^2)} \{ (2k+q)^\mu (2k+q)^\nu + 2\eta^{\mu\nu} (m^2 - (k+q)^2) \} \\
&= \int_0^1 dx \int \frac{d^2 \ell}{(2\pi)^2 i} \frac{F(\ell, q, x)}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \\
\ell^\mu &= k^\mu + xq^\mu, \quad \Delta = m^2 - x(1-x)q^2, \\
F(\ell, q, x) &= -2\eta^{\mu\nu} \left(-\frac{2}{d} + 1 \right) \ell^2 + 2\eta^{\mu\nu} (m^2 - (1-x)^2 q^2) + (2x-1)^2 q^\mu q^\nu.
\end{aligned}$$

上の計算途中では Feynman パラメータを導入している。また、Lorentz 不変性より、 ℓ の 1 次の項は落ちる。2 次の項は以下のような置き換えが可能である。但し次元を 2 から微小にずらして $D = 2 - \varepsilon$ としている。つまり次元正則化の方法の準備をしている。

$$\ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{D} \eta^{\mu\nu} \ell^2.$$

次元正則化を用いるため、さらに ℓ^μ を Wick rotation して次元を D に変える。

$$\ell^0 = i\ell_E^0, \quad \ell^i = \ell_E^i, \quad (\text{F.38})$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(q) &= \int_0^1 dx \int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{2(-\frac{2}{D}+1)\eta^{\mu\nu}\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} + \int_0^1 dx \int \frac{d^D \ell_E}{(2\pi)^D} \frac{2\eta^{\mu\nu}(m^2 - (1-x)^2 q^2) + (2x-1)^2 q^\mu q^\nu}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} (-2\eta^{\mu\nu} \Delta) \\
&\quad + \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \{2\eta^{\mu\nu} \Delta + 2\eta^{\mu\nu}(-2x^2 + 3x - 1)q^2 + (2x-1)^2 q^\mu q^\nu\} \\
&= -(\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} (2x-1)^2. \tag{F.39}
\end{aligned}$$

最後の計算では実は次に比例した項も見かけ上残って来るように見える。しかし Feynman パラメータを新たに導入して、そのパラメータの交換について反対称となってしまうので、この積分はゼロとなることが具体的に実行しなくてもわかる。

$$\int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} \{\eta^{\mu\nu} q^2 (2x-1)\} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x+y-1) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} (x-y) = 0.$$

表式 (F.39) より、次のように Ward 恒等式を満たすことは明らかとなる。

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = -(q^2 q^\nu - q^\nu q^2) \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{D}{2}} (2x-1)^2 = 0. \tag{F.40}$$

これより、量子補正によりゲージ場の運動項が得られたことがわかる。なお、詳しくは見なかったが、補助場 $\lambda(x)$ の量子補正 $\Pi(q)$ には、微分項が入ってないのでゲージ場のような運動項は登場せず、相変わらず補助場である。

F.3 Gross-Neveu Model

これまでにはボソンのみの系についての模型を挙げてきたが、ここではフェルミオンのみの系を考察する。 $O(N)$ 基本表現として変換する N 重項 Majorana フェルミオン ψ_i からなる次の Lagrangian を用意する。

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{4} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2. \tag{F.41}$$

この模型は Gross-Neveu model と呼ばれる。

この Gross-Neveu model は離散的な chiral 対称性を持つ。つまり以下の変換に対して不変である。

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = \gamma_5 \psi_i, \quad \bar{\psi}_i \rightarrow \bar{\psi}'_i = -\bar{\psi}_i \gamma_5. \tag{F.42}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{i}{2} \bar{\psi}'_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi'_i + \frac{g}{4} (\bar{\psi}'_i \psi'_i)^2 = \frac{i}{2} (-\bar{\psi}_i \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu (\gamma_5 \psi_i) + \frac{g}{4} (-\bar{\psi}_i \gamma_5 \gamma_5 \psi_i)^2 \\
&= \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{4} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \\
&= \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

ここで補助場を次のように導入しよう。

$$\sigma(x) = -g \bar{\psi}_i \psi_i. \tag{F.43}$$

この補助場を用いて、Lagrangian (F.41) に等価な系を考えると、その系における Lagrangian は次のように書き表すことができる。

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{4g} \sigma^2 - \frac{1}{2} \sigma \bar{\psi}_i \psi_i. \quad (\text{F.44})$$

この Lagrangian における相互作用は 3 点までである。一方 (F.41) はフェルミオンの 4 点相互作用まで含まれる。

この (F.44) で表される系の生成汎関数 \mathcal{Z} を書き下そう。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}\sigma \exp(iS) \\ &= \int \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}\sigma \exp\left(\frac{i}{2} \int d^2x \left\{ \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma) \psi_i - \frac{1}{2g} \sigma^2 \right\}\right). \end{aligned} \quad (\text{F.45})$$

ではフェルミオン ψ_i を積分して、そこから得られる有効作用、また有効ポテンシャルを求めよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}\sigma \exp\left(\frac{i}{2} \int d^2x \left\{ \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma) \psi_i - \frac{1}{2g} \sigma^2 \right\}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\sigma \exp\left\{-\frac{i}{4g} \int d^2x \sigma^2 + N \text{Tr} \text{Ln} \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma)\right\} \\ &\equiv \int \mathcal{D}\sigma \exp(iS_{\text{eff}}), \end{aligned} \quad (\text{F.46a})$$

$$S_{\text{eff}}[\sigma(x)] = \frac{N}{i} \text{Tr} \text{Ln} \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma(x)) - \frac{1}{4g} \int d^2x \sigma^2(x). \quad (\text{F.46b})$$

gN を固定させて $N \rightarrow \infty$ の極限をとる操作を行う (Large- N limit)。このとき、有効作用 (F.46b) は両項とも同じオーダーで効いてくる。Large- N 極限をとることで効いてくるものを見るため、saddle point を探そう。そのため、場 $\sigma(x)$ を定数 σ_c と置く。つまり真空期待値を σ_c (ゼロであっても良いため、具体的な数値は与えない) と置くことになる。

$$S_{\text{eff}}[\sigma(x) = \sigma_c] \equiv -V(\sigma_c) \int d^2x. \quad (\text{F.47})$$

実際に計算を実行するため、次の計算を行う。

$$\begin{aligned} \text{Tr} \text{Ln} \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma_c) &= \int d^2x d^2y \langle x | \log \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma_c) | y \rangle \langle y | x \rangle \\ &= \int d^2x d^2y [\log \det(i\partial_x - \sigma_c) \delta^2(x-y)] \delta^2(y-x) \\ &= \int d^2x \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log \det(\not{k} - \sigma_c \cdot \mathbf{1}) \\ &= \int d^2x \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\sigma_c^2 - k^2). \end{aligned} \quad (\text{F.48})$$

但し最後の計算においては次の計算を行っている。

$$\begin{aligned} \int d^2k \log \det(\not{k} - \sigma_c \cdot \mathbf{1}) &= \int d^2k \left\{ \frac{1}{2} \log \det(\not{k} - \sigma_c \cdot \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \log \det(-\not{k} - \sigma_c \cdot \mathbf{1}) \right\} \\ &= \int d^2k \frac{1}{2} \log \det[(\sigma_c^2 - k^2) \cdot \mathbf{1}] = \int d^2k \log(\sigma_c^2 - k^2). \end{aligned}$$

これにより、有効ポテンシャルの具体的な表式が次で与えられる。

$$V(\sigma_c) = \frac{\sigma_c^2}{4g} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \log(\sigma_c^2 - k^2). \quad (\text{F.49})$$

これ以降は実は $O(N)$ 模型と全く同じである。

物理的には、これ以降の考察によって 1 ループ項に質量 $m^2 = \sigma_c^2$ が存在するために、Majorana フェルミオンが質量を獲得したことがわかる。これは chiral 対称性が保たれなくなることを意味する。つまり対称性が破れていることになる。

今の場合、離散的な chiral 対称性が破れたのであるが、これが連続的な chiral 対称性の場合、そうはならない。次に紹介する Coleman's theorem によって、 $D = 2$ の理論では連続対称性は破れないからである。

G Coleman's Theorem

ここでは S. Coleman によって指摘された、 $D = 2$ 時空では連続対称性の自発的破れが起こらないと言う Coleman's theorem を紹介する [26]。

G.1 Introduction and Conclusions

$D = 4$ 時空における Nambu-Goldstone theorem (appendix E) では、連続対称性から作られる Noether current と、それから作られるチャージを用いて、対称性が自発的に破れる相と、破れないで保たれる相があることを紹介した。もう一度ここで簡単に挙げておく。連続対称性に伴う Noether current j_μ が定義されて、

$$\partial^\mu j_\mu = 0, \quad (\text{G.1})$$

をみたま。このカレントによって構成される場の変換則が、

$$\delta\phi(y) \equiv i \int d^3x [j_0(x_0, \mathbf{x}), \phi(y)], \quad (\text{G.2})$$

となるが、この $\delta\phi(y)$ がゼロでないとき、対称性が自発的に破れているという。

しかし $D = 2$ 時空では、「対称性は自発的破れを起こさない」。言い替えると、「Nambu-Goldstone boson が登場しない」。これについて、証明を行う。まずその証明の前いくつかのコメントを挙げておこう。

1. ここでの証明には $D = 2$ 時空でのスカラー場の運動学に非常に依存している。つまり $D = 2$ 時空理論に特有のものである。
2. この証明は、連続対称性についてのみである。離散的な対称性については当てはまらない。
3. Higgs 機構は起こっても構わない。

G.2 Lemma

証明に使う関数とその振舞いをここで準備しよう。次のような関数を定義する。

$$f(x) \leq f(y), \text{ if } x/y \geq 1. \quad (\text{G.3})$$

つまりこれは原点から単調減少をする、値が正の関数である。また次のように運動量を再定義する。

$$k_\pm = k_0 \pm k_1. \quad (\text{G.4})$$

これらは rapidity α を用いた Lorentz 変換で次のように変換される。

$$k_\pm \rightarrow e^{\pm\alpha} k_\pm. \quad (\text{G.5})$$

[補題] $F(k_+, k_-)$ を、正定値で Lorentz 変換に対して不変な分散関数とする。また $f(k_-)$ を先に定義した単調減少関数とする。このとき以下の関係式を構成できる。

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int dk_- f(\lambda k_-) F(k_+, k_-) = c\delta(k_+),$$

ここで c はある正の定数である。

[証明] 任意の λ において、極限をとる関数は正の分散関数である。(G.3) により、この関数は λ について原点からの単調減少な振舞いをする。したがって極限操作で極限值が存在し、それは正で線形な汎関数となっている。Lorentz 変換 (G.5) を施しても、この極限汎関数 $g(k_+)$ と $g(e^\alpha k_+)$ は同じ振舞いをする。ここで g は無限階微分可能で、原点から十分遠いところでは十分早くゼロになる、任意のテスト関数である。この g を (G.3) で定義した単調減少関数とすると、この関数は原点付近にのみ制限された関数となる (つまりデルタ関数となる) ことがわかる。

G.3 The Proof

では本題に入る。次のように 3 つの関数を定義しよう。

$$F(k) = \int d^2x e^{ik \cdot x} \langle 0 | \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle, \quad (\text{G.6a})$$

$$F_\mu(k) = \int d^2x e^{ik \cdot x} \langle 0 | j_\mu(x) \phi(0) | 0 \rangle, \quad (\text{G.6b})$$

$$F_{\mu\nu}(k) = \int d^2x e^{ik \cdot x} \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle. \quad (\text{G.6c})$$

(G.1) にあるようなカレント保存則により、次のようになる。

$$k^\mu F_\mu(k) = 0, \quad (\text{G.7})$$

この関係により、

$$F_\mu(k) = \sigma k_\mu \delta(k^2) \theta(k_0) + \epsilon_{\mu\nu} k^\nu \rho(k^2) \theta(k_0), \quad (\text{G.8})$$

となることが分かる。ここで σ はある定数 (Nambu-Goldstone theorem という崩壊定数) であり、 ρ は分散関数である。この関係を用いると、対称性による場の変換が

$$\begin{aligned} \langle 0 | \delta\phi(0) | 0 \rangle &= i \langle 0 | \int dx_1 [j_0(x_0, x_1), \phi(0)] | 0 \rangle \\ &= \frac{i\sigma}{4\pi}, \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

のようになり、崩壊定数で表すことができる。ここで (G.8) の第 2 項は x_1 について奇関数なので寄与しない。

任意のテスト関数 $h(x)$ と任意の数 a, b を用いた状態

$$\int d^2x h(x) [a j_0(x) + b \phi(0)] | 0 \rangle$$

は正定値でなければならない。これは F_{00} と F が正の分散であり、

$$\left[\int d^2k F(k) |\tilde{h}(k)|^2 \right] \left[\int d^2k F_{00}(k) |\tilde{h}(k)|^2 \right] \geq \left| \left[\int d^2k F_0(k) |\tilde{h}(k)|^2 \right] \right|^2, \quad (\text{G.10})$$

という関係があることを意味する。ここで \tilde{h} はテスト関数 h の Fourier 変換である。

このテスト関数 h を次のようにおこう。

$$\tilde{h}(k) = f(\lambda k_-)g(k_+) + f(\lambda k_+)g(k_-). \quad (\text{G.11})$$

ここで f は (G.3) で定義した単調減少関数とし、 g を、台にゼロ点を含まないテスト関数とする。 h は偶関数であるので、(G.8) の奇関数部分は次の関係に寄与しない。

$$\int d^2k F_0(k) |\tilde{h}(k)|^2 = \sigma |f(0)|^2 \int dk_+ |g(k_+)|^2. \quad (\text{G.12})$$

これは λ に依存していないことに注意しよう。

一方、 λ が十分に大きな領域では、(G.11) の 2 つの項にはもはや共通する台が存在しない。したがって (G.10) の左辺の積分は 2 つの項の和に分解される。補題と g の台の仮定により、最初の積分は λ が無限大に行く極限でゼロになる。一方 F_{00} は正の分散であるので、二つ目の積分が単調減少を起こす。これにより、

$$\sigma = 0, \quad (\text{G.13})$$

が導かれる。これは崩壊定数がゼロ、つまり対称性が自発的に破れないということの意味する。

H Realization of Symmetries in Two Dimensions

Appendix F で紹介した Gross-Neveu model は、 $1/N$ 展開によってフェルミオンが質量を獲得したために、離散的な chiral $U(1)$ 対称性が破れてしまっている。これを連続的な chiral 対称性を持つ模型に適用すると、今度はそうはならない。appendix G によると $D = 2$ では連続対称性は自発的に破れることはない。ここでどうにかして chiral $U(1)$ 対称性を回復する手段を考えなくてはならない [36][37][38][39]。

H.1 Two Point Function

まず 対称性が破れていない場合や破れた場合、2 点関数が長距離領域でどのように振舞うのかを議論する。最も簡単な複素スカラー場の $U(1)$ 対称性について見てみよう。

$$\mathcal{L} = \partial_m \phi^* \partial^m \phi - g^2 (\phi^* \phi - a^2)^2. \quad (\text{H.1})$$

$D \neq 2$ では、自発的に対称性が破れる相が存在し、そのときの 2 点関数は次のように振舞う。

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle \phi^*(x) \phi(0) \rangle \neq 0. \quad (\text{H.2})$$

対称性が破れていない、そして質量を持った相では 2 点関数は指数関数的に減衰する。

$$\langle \phi^*(x) \phi(0) \rangle \stackrel{|x| \rightarrow \infty}{\sim} e^{-mx}, \quad m > 0. \quad (\text{H.3})$$

$D = 2$ 理論では appendix G で見たように連続対称性が破れない。そのため 2 点関数が (H.3) のように振舞う相しか存在しないと期待される。しかし、この“高温度相”に加えて、ほとんど自発的に対称性が破れ、相関関数が

$$\langle \phi^*(x) \phi(0) \rangle \sim |x|^{-\alpha}, \quad (\text{H.4})$$

のように振舞う相が存在することが可能である。この相は Kosterlitz-Thouless type でいう“低温度相”に類似するものである。この相では、例えば chiral 対称性を持つ理論でもフェルミオンは Dirac 質量を獲得することができ、しかも chiral 対称性は破れない現象が実現されている。

H.2 Soluble Model

では chiral $U(1)$ 対称性を持つ Lagrangian を構成してみよう。

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^m\partial_m\psi + \frac{1}{2}(\partial_m\sigma)^2 - \frac{1}{2}\lambda\left\{\bar{\psi}(1+\gamma_3)\psi e^{i\sigma/a} + \bar{\psi}(1-\gamma_3)\psi e^{-i\sigma/a}\right\}. \quad (\text{H.5})$$

chiral 対称性は次のようになっている。

$$\psi \rightarrow e^{i\beta\gamma_3}\psi, \quad \sigma \rightarrow \sigma - 2\beta a. \quad (\text{H.6})$$

この対称性が自発的に破れていない場合、この対称性のためにフェルミオンは Dirac 質量を持つことが許されないように思われる。しかし実際には Dirac 質量を持ちながら、chiral 対称性は破れないようにすることが可能である。

この Lagrangian は厳密にそれを見ることができる。では次のようにフェルミオンをボソン化して新しいボソン c を導入しよう。

$$i\bar{\psi}\gamma^m\partial_m\psi \equiv \frac{1}{2}(\partial_m c)^2, \quad (\text{H.7a})$$

$$\bar{\psi}(1 \pm \gamma_3)\psi \equiv \exp(\pm i\sqrt{4\pi}c), \quad \bar{\psi}\gamma^m\psi \equiv -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^{mn}\partial_n c. \quad (\text{H.7b})$$

これを用いて Lagrangian (H.5) を記述しなおそう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_m\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_m c)^2 - \frac{1}{2}\lambda\left\{\exp\left(i\left\{\sigma/a + \sqrt{4\pi}c\right\}\right) + \exp\left(-i\left\{\sigma/a + \sqrt{4\pi}c\right\}\right)\right\}. \quad (\text{H.8})$$

さらに新しいボソン $\tilde{c}, \tilde{\sigma}$ を定義する。

$$\tilde{c} \equiv \frac{\sqrt{4\pi}c + \sigma/a}{\sqrt{4\pi + 1/a^2}}, \quad \tilde{\sigma} \equiv \frac{-c/a + \sqrt{4\pi}\sigma}{\sqrt{4\pi + 1/a^2}}. \quad (\text{H.9})$$

これにより、 $\tilde{c}, \tilde{\sigma}$ を用いて (H.5) が完全に書き換えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_m\tilde{c})^2 + \frac{1}{2}(\partial_m\tilde{\sigma})^2 - \lambda\cos(\beta\tilde{c}), \quad \beta = \sqrt{4\pi + 1/a^2}. \quad (\text{H.10})$$

ここに $\tilde{\sigma}$ はゼロ質量自由スカラー場として登場している。また \tilde{c} は sine-Gordon 場である。sine-Gordon 場のスペクトルは完全に知られている。ここでは β が $\sqrt{4\pi}$ より大きいので、理論には有質量フェルミオンのみがソリトンとして存在している。それはすなわち Lagrangian (H.5) で登場していた $\psi, \bar{\psi}$ である。つまりフェルミオンは質量を獲得している。

では chiral 対称性が存在するにも関わらずどのようにして質量を獲得したのであろうか。質量と chiral 対称性の関係を見るために、chiral 対称性の軸性カレント J_{3m} を構成しよう。まず (H.5) から Noether current として構成する。

$$J_{3m} = \bar{\psi}\gamma_m\gamma_3\psi - 2a\partial_m\sigma. \quad (\text{H.11})$$

これを $\tilde{c}, \tilde{\sigma}$ で構成しなおす。

$$J_{3m} = -\sqrt{\frac{1}{\pi} + 4\pi a^2}\partial_m\tilde{\sigma}. \quad (\text{H.12})$$

軸性カレントに登場するのは $\tilde{\sigma}$ だけである。 \tilde{c} は寄与していない。すなわち、 \tilde{c} は chiral 対称性に対して不変である。これより、 \tilde{c} から再構成されるフェルミオンも chiral 対称性に対して不変である。基本的粒子として導入された ψ は chiral 対称性に対して (H.6) で定義したように不変ではないのであるが、 \tilde{c} から構成される物理的フェルミオンは不変なのである。では物理的フェルミオン $\tilde{\psi}$ を構成しよう。

$$\tilde{\psi}\gamma^m\tilde{\psi} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^{mn}\partial_n\tilde{c}. \quad (\text{H.13})$$

Lagrangian (H.10) をこの $\tilde{\psi}$ で再構成する。

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^m\partial_m\tilde{\psi} - \lambda\bar{\psi}\tilde{\psi} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1+4\pi a^2} \right) (\bar{\psi}\gamma^m\tilde{\psi})^2 + \frac{1}{2}(\partial_m\tilde{\sigma})^2. \quad (\text{H.14})$$

(H.14) からわかるように、フェルミオン $\tilde{\psi}$ は Dirac 質量項 $\lambda\bar{\psi}\tilde{\psi}$ を獲得している。また $\tilde{\sigma}$ はゼロ質量スカラー場として登場している。

Lagrangian (H.5), (H.14) それぞれの摂動展開を考えてみよう。摂動展開係数として選ばれるパラメータは $1/a$ である。但し a は 1 より十分大きいとする。(H.5) を $1/a$ で展開するとそのそれぞれの項でフェルミオン ψ は Dirac 質量項 $\lambda\bar{\psi}\psi$ を獲得することがわかる。 σ は相変わらずゼロ質量である。ここで $a \rightarrow \infty$ とすると理論は自由場理論となる。しかし、この展開を行うと chiral 対称性について不変でないフェルミオン ψ が Dirac 質量を持つために chiral 対称性が破れてしまうが、それは $D = 2$ 時空理論としては許されない。したがってこの Lagrangian は $1/a$ の展開という形での摂動論が破綻している。しかし (H.14) を $1/a$ で展開しても、Dirac 質量項を持っているフェルミオン $\tilde{\psi}$ は依然として chiral 対称性に対して不変であるし、 $\tilde{\sigma}$ もゼロ質量のままである。そして $a \rightarrow \infty$ とすることでこの Lagrangian も自由場理論を記述することができる。したがって (H.14) は摂動論として非常に良い性質を持ったものである。この意味で以前 $\tilde{\psi}$ を物理的フェルミオンと呼んだのである。

残る問題は、chiral 対称性は破れたのかそうではないのか、である。

(H.5) での $1/a$ による摂動論ではフェルミオン ψ は Dirac 質量を獲得している。そして、フェルミオンの伝播関数のうち chiral 対称性に対して対称でない部分はゼロになっていない。つまり Dirac 質量がゼロになっていないということである。しかしこれは、フェルミオン $\tilde{\psi}$ が chiral 対称性に対して不変である限り、chirality が保存されていないということを必ずしも意味しない。それは (H.14) で見たとおりである。しかし appendix G から、非対称な部分は必ずゼロでないとならない。もしゼロでないなら、chiral 対称性が自発的に破れてしまうということになるからである。ではここで、非対称部分が実際にゼロになることを見よう。

ψ_+ , ψ_- をそれぞれ chirality が正、負であるフェルミオン成分としよう。そのエルミート共役も定義する。chiral 変換 $\psi \rightarrow e^{i\beta\gamma_3}\psi$ に関してそれぞれ次のように変換される。

$$\psi_+ \rightarrow e^{i\beta}\psi_+, \quad \psi_+^* \rightarrow e^{-i\beta}\psi_+^*, \quad (\text{H.15a})$$

$$\psi_- \rightarrow e^{-i\beta}\psi_-, \quad \psi_-^* \rightarrow e^{i\beta}\psi_-^*. \quad (\text{H.15b})$$

chiral 変換に対して不変でない相関関数は

$$G(x, y) = \langle \psi_+(x)\psi_-^*(y) \rangle, \quad (\text{H.16})$$

である。これを計算するために、フェルミオン ψ を、自由スカラー場 $\tilde{\sigma}$ とフェルミオン $\tilde{\psi}$ を使って表現しなおす。適当なボソン化を行うことで次のように変換される。

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{1+4\pi^2 a^2}}, \quad (\text{H.17a})$$

$$\psi_+ = e^{ib\tilde{\sigma}}\tilde{\psi}_+, \quad \psi_+^* = e^{-ib\tilde{\sigma}}\tilde{\psi}_+^*, \quad (\text{H.17b})$$

$$\psi_- = e^{-ib\tilde{\sigma}}\tilde{\psi}_-, \quad \psi_-^* = e^{ib\tilde{\sigma}}\tilde{\psi}_-^*. \quad (\text{H.17c})$$

これによって chiral 変換に対して不変でない相関関数 $G(x, y)$ は次のように書き換わる。

$$G(x, y) = \langle \psi_+(x)\psi_-^*(y) \rangle = \langle e^{ib\tilde{\sigma}(x)}\tilde{\psi}_+(x)e^{ib\tilde{\sigma}(y)}\tilde{\psi}_-^*(y) \rangle. \quad (\text{H.18})$$

$\tilde{\sigma}$ と $\tilde{\psi}$ は互いに相互作用しないので次のようにそれぞれを分離することができる。

$$G(x, y) = \langle e^{ib\tilde{\sigma}(x)}e^{ib\tilde{\sigma}(y)} \rangle \langle \tilde{\psi}_+(x)\tilde{\psi}_-^*(y) \rangle. \quad (\text{H.19})$$

この $\tilde{\sigma}$ 部分は実は $\langle e^{ib\tilde{\sigma}(x)}e^{ib\tilde{\sigma}(y)} \rangle = 0$ となるので、全体として chiral 非対称相関関数 $G(x, y)$ はゼロとなる [37]。

もう少し精密に議論してみよう。先に述べたように (H.5) を摂動として扱うとき、展開は $1/a$ もしくは同等ながら b で行う。このとき $\tilde{\sigma}$ 伝播関数部分は次のようになると予想される。

$$\langle e^{ib\tilde{\sigma}(x)}e^{ib\tilde{\sigma}(y)} \rangle = 1 + O(b^2). \quad (\text{H.20})$$

しかし、ゼロ質量スカラー場であるので、赤外発散の影響で、これはゼロになってしまうのである。

chiral 変換で対称な部分を計算することも興味を持たれる。変換に対して不変な相関関数では例えば次が定義される。

$$\langle \psi_+(x)\psi_+^*(0) \rangle = \langle e^{ib\tilde{\sigma}(x)}e^{-ib\tilde{\sigma}(0)} \rangle \langle \tilde{\psi}_+(x)\tilde{\psi}_+^*(0) \rangle. \quad (\text{H.21})$$

しかしゼロ質量スカラー場部分は、

$$\langle e^{ib\tilde{\sigma}(x)}e^{-ib\tilde{\sigma}(0)} \rangle = |x|^{-b^2/4\pi}. \quad (\text{H.22})$$

となっている²²。一方フェルミオン部分は、有質量であるがゆえに非常に離れたところで

$$\langle \tilde{\psi}_+(x)\tilde{\psi}_+^*(0) \rangle = e^{-m|x|}, \quad (\text{H.23})$$

となる。ここで m は質量である。したがって (H.21) の長距離領域での振舞いは

$$\langle \psi_+(x)\psi_+^*(0) \rangle = |x|^{-b^2/4\pi}e^{-m|x|}, \quad (\text{H.24})$$

となる。指数関数的に減衰するものにベキ乗の補正が加わるのは、 ψ が 1 粒子既約な極として存在するのではなく切断として寄与することを意味している。これが、 ψ が chiral 不変でない一方で $\tilde{\psi}$ が chiral 不変である理由である。こういった意味でも ψ を基本的と呼び、 $\tilde{\psi}$ を物理的と呼んだのである。

²²適当に次元をあわせるパラメータ、例えば赤外発散切断が入っている。

この模型の考察の最後として、フェルミオンの二次 $\langle \bar{\psi}(1 + \gamma_3)\psi(x)\bar{\psi}(1 - \gamma_3)\psi(0) \rangle$ の相関を調べよう。appendix G によればこれは長距離領域でゼロでなければならない。実際に、

$$\bar{\psi}(1 \pm \gamma_3)\psi(x) = \bar{\tilde{\psi}}(1 \pm \gamma_3)\tilde{\psi}(x)e^{\pm 2ib\tilde{\sigma}(x)}, \quad (\text{H.25})$$

であるので、相関関数を構成すると、

$$\langle \bar{\psi}(1 + \gamma_3)\psi(x)\bar{\psi}(1 - \gamma_3)\psi(0) \rangle = \langle \bar{\tilde{\psi}}(1 + \gamma_3)\tilde{\psi}(x)\bar{\tilde{\psi}}(1 - \gamma_3)\tilde{\psi}(0) \rangle \langle e^{2ib\tilde{\sigma}(x)}e^{-2ib\tilde{\sigma}(0)} \rangle, \quad (\text{H.26})$$

となる。フェルミオン部分は非常に大きい $|x|$ で定数に近づくが、ゼロ質量スカラー場の部分は $|x|^{-b^2/\pi}$ のように減衰する。したがってこの相関関数は全体としてベキ乗で減衰する。この振舞いははじめに述べた、(H.4) であるような低温度相であることを表している。

この厳密に解ける模型を通じて、連続対称性が破れないという定理は chiral 非対称な相関関数がゼロになることを見た。これは $D = 2$ 理論では NG boson が存在しないことを意味する。連続対称性を破る相関関数がゼロでなくても、Ward 恒等式に対して特異な寄与をすることで、相変わらず Ward 恒等式がみたされるように働くのが、NG boson である。 $D = 2$ 理論ではそれはできない。しかしだからといってゼロ質量スカラー場が存在できないとは言っていない。この模型で登場したゼロ質量スカラー場 $\tilde{\sigma}$ は NG boson ではない。このゼロ質量スカラー場は低エネルギー定理に関連することがないからである。ここでは、chiral 変換で不変でない部分はゼロになった。そのおかげで NG boson が Ward 恒等式に関与する部分は存在しなくなったのである。

この模型では chiral 対称性に関して $\psi \rightarrow e^{i\beta\gamma_3}\psi$ と変換されるフェルミオンが導入されている。普通、chiral 対称性が破れないならば、物理的フェルミオンがゼロ質量であると思うであろう。摂動ではこれは正しいのであるが、もっと正確に言うところである。「対称性が破れず、またフェルミオン 2 点関数に極が存在する場合、そのフェルミオンはゼロ質量である。」もしも物理的フェルミオンが基本的フェルミオンと同じ量子数を持たず、そのために 2 点関数が 1 粒子既約なものでなければ、もはや chiral 対称性が物理的フェルミオンの質量をゼロにするかは言及できない。

まとめを行う。たとえ $\bar{\psi}\psi$ の相関関数が長距離領域を持っていないとしても、ベキ乗で減衰する 2 点関数が存在するがために、長距離領域を持つ物理的相関関数があるといっても差し支えない。この「ほとんど長距離領域の振舞いとみてよい」相関関数には、ゼロ質量粒子の存在が必要である。

ここで挙げた模型にさらに場を追加することで、もはや厳密には解析できないが同様の現象が起こっている Gross-Neveu model を構成できる。したがってこれからはこの Gross-Neveu model を考察しよう。

H.3 Chiral Gross-Neveu Model

N 個の Dirac フェルミオン $\psi_k, k = 1, \dots, N$ を用意して次の Gross-Neveu model を見よう。

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_k\gamma^m\partial_m\psi_k + \frac{g}{N}\{(\bar{\psi}_k\psi_k)^2 + (\bar{\psi}_ki\gamma_3\psi_k)^2\}. \quad (\text{H.27})$$

この模型には chiral $U(1)$ 対称性 $\psi_k \rightarrow e^{i\beta\gamma_3}\psi_k$ がある。ここで補助場 σ, π を次のように定義して導入しよう。

$$\sigma \equiv \bar{\psi}_k\psi_k, \quad \pi \equiv \bar{\psi}_ki\gamma_3\psi_k. \quad (\text{H.28})$$

これを用いて Lagrangian (H.27) を書き直す。

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_k\gamma^m\partial_m\psi_k - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \sqrt{\frac{g}{N}}\bar{\psi}_k(\sigma + i\gamma_3\pi)\psi_k. \quad (\text{H.29})$$

chiral 変換で場は次のように変換する。

$$\psi_k \rightarrow e^{i\beta\gamma_3}\psi_k, \quad \sigma + i\pi \rightarrow e^{2i\beta}(\sigma + i\pi). \quad (\text{H.30})$$

$1/N$ 展開を実行するために Dirac フェルミオンを経路積分で追い出して有効作用を構成する。

$$S_{\text{eff}} = iN\text{Tr}\log\left(i\cancel{\partial} + \sqrt{\frac{g}{N}}(\sigma + i\gamma_3\pi)\right) - \frac{1}{2}\int d^2x\{\sigma^2(x) + \pi^2(x)\}. \quad (\text{H.31})$$

この有効作用 (H.31) から有効ポテンシャルを構成し、 $1/N$ 展開でポテンシャルの最低点を構成すると、補助場 σ が真空期待値を持つので Dirac フェルミオンが質量を獲得し、chiral 対称性を破ってしまうように見えるが、これは実は先ほどの可解模型での (H.5) にあたる。これを回避する方法は非常に簡単である。つまり Kosterlitz-Thouless 現象を起こさせる。具体的には次のように場の再定義を行えばよい。(これは先の可解模型でのボソン化やそれによるフェルミオン $\tilde{\psi}$ の構成、ゼロ質量スカラー場 $\tilde{\sigma}$ の導入にあたる。)

$$\sigma(x) + i\pi(x) \equiv \rho(x)e^{i\theta(x)}. \quad (\text{H.32})$$

この新しい場 $\rho(x), \theta(x)$ を用いる。 $\rho(x)$ の真空期待値の周りで展開すれば、それは chiral 対称性を破らないものになっている。ここで注意しなければならないのは、 $\theta(x)$ に決まった真空期待値 (例えばゼロ) を「与えない」ことである。もし与えてしまうと、そこを中心として対称性が破れてしまう。

新しい場 $\rho(x)$ と $\theta(x)$ を用いて有効作用 (H.31) を再構成しよう。

$$S_{\text{eff}} = iN\text{Tr}\log\left(i\cancel{\partial} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{N}}\rho e^{i\gamma_3\theta}\right) - \frac{1}{2}\int d^2x\rho^2(x). \quad (\text{H.33})$$

赤外部分の振舞いを解析したいなら、 $\rho(x)$ を適当な c 数に置き換えればよい。言い換えると、 $\rho(x)$ は赤外部分には重要な寄与を及ぼさないので単に真空期待値で置き換えてもかまわないということである。赤外部分で重要な役割を果たすのはゼロ質量の $\theta(x)$ である。しかもこの $\theta(x)$ の寄与する部分のうち、 $(\partial_m\theta)^2$ の部分のみが赤外に寄与する。ここだけ取り上げた有効作用は次のようになる。

$$S_{\text{eff}} = \frac{N}{4\pi}\int d^2x(\partial_m\theta(x))^2. \quad (\text{H.34})$$

さて、可解模型の時と同様に、対称性を破る相関関数とその長距離領域を考察しよう。例えば前と同様に $\langle\bar{\psi}_k(1 + \gamma_3)\psi_k(x)\bar{\psi}_\ell(1 - \gamma_3)\psi_\ell(0)\rangle$ を見る。これより、

$$\bar{\psi}_k(1 \pm \gamma_3)\psi_k = \sigma \mp i\pi = \rho e^{\mp i\theta}, \quad (\text{H.35})$$

を用いると、 $\langle \rho(x)e^{-i\theta(x)}\rho(0)e^{i\theta(0)} \rangle$ を計算しなければならないことになる。ここで長距離領域、つまり赤外部分を見るので、 ρ は真空期待値で置き換える。したがって実際に考察するのは、ゼロ質量場 (H.34) を用いた $\langle e^{-i\theta(x)}e^{i\theta(0)} \rangle$ である。これは $|x|^{-1/N}$ で寄与する。よって相関関数は長距離領域では次のような形をとる。

$$\langle \bar{\psi}_k(1+\gamma_3)\psi_k(x)\bar{\psi}_\ell(1-\gamma_3)\psi_\ell(0) \rangle \sim c|x|^{-1/N}. \quad (\text{H.36})$$

この相関関数 (H.36) は非常にありがたい振舞いを示している。 $N \rightarrow \infty$ としたとき、この相関関数は定数に近づくので長距離領域の寄与が誤った増加を起こし、対称性が破れるので、この N は有限にとる。有限に、しかし非常に大きく保っておくと、この相関関数は $|x| \rightarrow \infty$ で非常にゆっくりではあるがゼロになる。つまり「ほとんど長距離領域の振舞いをもつ低温度相」が $1/N$ 展開で実現されている。この展開方法ではフェルミオンが Dirac 質量を持つとしても良いことがわかる (可解模型で (H.21) で見たように、フェルミオンの質量が登場する)。また $1/N$ 展開では、長距離領域の寄与に必要なゼロ質量スカラー場が出現することを正しく見ることができる。つまり θ である。これは NG boson ではない。このゼロ質量場 θ をうまく扱うことで、 $1/N$ 展開による解析は非常によい解析方法となることができる。

I Notations of $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetry in Four Dimensions

この appendix では、appendix J, K での $D = 2, \mathcal{N} = 2$ 超対称性の構成を見る前に、まず $D = 4, \mathcal{N} = 1$ 超対称性のごく簡単な復習を行う。ここで使われる規約は Ref. [7] による。従って詳細は [7] を参照されたい。ここでは時空の計量を $\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \text{diag.}(-+++)$ で定義してある。この appendix ではそれに従う²³。

Weyl スピノール $\psi_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ を用いると、Majorana スピノール ψ^M は次のように定義される。

$$\psi^M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}^M = \begin{pmatrix} -\psi^\alpha, & -\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1})$$

ただし Dirac 行列の表示をここでは以下のようにしてある。

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

ここで、 σ^i は 2×2 Pauli 行列である。余分な行列 $\sigma^0, \bar{\sigma}^i$ などは、

$$\bar{\sigma}^0 = \sigma^0, \quad \bar{\sigma}^i = -\sigma^i, \quad (\text{I.3})$$

で定義されている。この Pauli 行列を用いると、Weyl スピノールには次の関係が現れる。

$$\psi\sigma^\mu\bar{\chi} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\psi, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger. \quad (\text{I.4})$$

共変微分 $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ で定義される chiral superfield は次のようになっている。

$$\begin{aligned} \phi(y, \theta) &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y), \\ \phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\theta F(x), \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

ここで、 $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ である。

vector superfield も次のようになっている。

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) \\ &\quad + i\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right] - i\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right], \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

但し、Wess-Zumino gauge に固定すると、この vector superfield は次のように簡略化される。

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu + i\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \quad (\text{I.7})$$

Dimensional reduction の準備として、Majorana スピノールと Weyl スピノールの関係を列挙しておこう。

$$\bar{\psi}_i^M \psi_i^M = -\psi_i\psi_i - \bar{\psi}_i\bar{\psi}_i, \quad (\text{I.8a})$$

²³appendix J, K では時空の計量も反転させる。

$$\overline{\psi}_i^M \gamma_5 \psi_i^M = i\psi_i \psi_i - i\overline{\psi}_i \overline{\psi}_i, \quad (\text{I.8b})$$

$$\overline{\psi}_i^M \gamma^\mu \psi_i^M = -\psi_i \sigma^\mu \overline{\psi}_i - \overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \psi_i = 0, \quad (\text{I.8c})$$

$$\overline{\psi}_i^M \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i^M = -i\psi_i \sigma^\mu \overline{\psi}_i + i\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \psi_i = 2i\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \psi_i, \quad (\text{I.8d})$$

$$\overline{\psi}_i^M \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i^M = -\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}_i - \overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i = -2\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i, \quad (\text{I.8e})$$

$$\overline{\psi}_i^M \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi_i^M = i\psi_i \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}_i - i\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i = 0. \quad (\text{I.8f})$$

この関係式は 4 次元積分 $\int d^4x$ の中でのみ成立している。つまり適当な箇所部分積分を行っている。

J Dimensional Reduction to Two Dimensions

時空計量を、我々の解析を行っている計量に変換しよう。

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \text{diag.}(-+++)= -\text{diag.}(+---) = -\eta_{\mu\nu}, \quad (\text{J.1})$$

さらに appendix I で登場していた Dirac 行列 γ^μ を変換する。

$$\gamma^\mu = \Gamma^\mu, \quad i\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 = \Gamma_5, \quad (\text{J.2a})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\tilde{\eta}^{\mu\nu} = 2\eta^{\mu\nu} = \{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\}. \quad (\text{J.2b})$$

記法に混乱を生じるかも知れないが、以下、 $D=4$ での Dirac 行列を Γ^μ で、 $D=2$ での Dirac 行列を γ^m で表記しよう。それぞれの表示をここで定義しておく。

$$\Gamma^m = \gamma^m \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^m \\ \gamma^m & 0 \end{pmatrix}, \quad m=0,1, \quad (\text{J.3a})$$

$$\Gamma^2 = i\gamma_3 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_3 \\ i\gamma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3 = \mathbf{1} \otimes i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{J.3b})$$

$$\Gamma_5 = \mathbf{1} \otimes \sigma_3, \quad C_4 = i\Gamma^1\Gamma^2 = \gamma^0 \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & \gamma^0 \end{pmatrix} = -C_2 \otimes \mathbf{1}, \quad (\text{J.3c})$$

$$\gamma^0 = \sigma_2, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma_3 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3, \quad (\text{J.3d})$$

$$C_2 = -\gamma^0, \quad (\text{J.3e})$$

$$C_2 = -C_2^T = -C_2^* = C_2^\dagger = C_2^{-1}, \quad (\text{J.3f})$$

$$C_2^{-1}\gamma^\mu C_2 = -\gamma^{\mu T}, \quad C_2^{-1}\gamma_3 C_2 = -\gamma_3^T. \quad (\text{J.3g})$$

$D=4$ Majorana スピノール ψ^M は appendix I で $\psi^M = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}$ で与えられていた。ここで ψ, ψ' は Weyl スピノールである。Majorana 条件 $\psi^M = C_4 \overline{\psi^M}^T$ は、上の Dirac 行列の定義を用いると次のようになっている。

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \overline{\psi'}^T \\ -C_2 \overline{\psi}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ -\chi \end{pmatrix}, \quad \chi = C_2 \overline{\psi}^T = \psi^*. \quad (\text{J.4})$$

$D=4$ Majorana スピノールが時空の x^2 と x^3 に依存していない、という最も簡単な dimensional reduction を考えよう。このとき ψ^M は $D=2$ Dirac スピノールを用いて書き直すことができる。具体的には $D=4$ Weyl スピノールが $D=2$ Dirac スピノールとなっている。そこで、 $D=4$ Majorana スピノールと $D=2$ Dirac スピノールの関係を次で挙げておこう ($\mu=0,1,2,3; m=0,1$)。

$$\overline{\psi_i^M} \psi_j^M = -\overline{\psi_i^c} \psi_j - \overline{\psi_i} \psi_j^c, \quad (\text{J.5a})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma_5 \psi_j^M = -\overline{\psi}_i^c \psi_j + \overline{\psi}_i \psi_j^c, \quad (\text{J.5b})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma^m \psi_i^M = \overline{\psi}_i^M \Gamma^2 \psi_i^M = \overline{\psi}_i^M \Gamma^3 \psi_i^M = 0, \quad (\text{J.5c})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma^m \Gamma_5 \psi_i^M = 2\overline{\psi}_i \gamma^m \psi_i, \quad (\text{J.5d})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma^2 \Gamma_5 \psi_i^M = 2i\overline{\psi}_i \gamma_3 \psi_i, \quad (\text{J.5e})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma^3 \Gamma_5 \psi_i^M = -2\overline{\psi}_i \psi_i, \quad (\text{J.5f})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma^m \partial_m \psi_i^M = 2\overline{\psi}_i \gamma^m \partial_m \psi_i, \quad (\text{J.5g})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma^2 \partial_2 \psi_i^M = 2i\overline{\psi}_i \gamma_3 \partial_2 \psi_i, \quad (\text{J.5h})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma^3 \partial_3 \psi_i^M = -2\overline{\psi}_i \partial_3 \psi_i, \quad (\text{J.5i})$$

$$\overline{\psi}_i^M \Gamma^\mu \Gamma_5 \partial_\mu \psi_i^M = 0. \quad (\text{J.5j})$$

この関係式も 4 次元積分 $\int d^4x$ の内部でのみ成立する。また、ここで登場した $D = 2$ での荷電共役変換は次で与えられる。

$$\psi^c = C_2 \overline{\psi}^T = -\gamma^0 \overline{\psi}^T = \psi^*, \quad \overline{\psi}^c = \psi^T \gamma^0. \quad (\text{J.6})$$

K Extended $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetry in Two Dimensions

Appendix I やその reduction で得られた appendix J とは独立に、 $D = 2$, $\mathcal{N} = 2$ の超対称性代数と場の表現を構成しよう。まずは定義である。

K.1 Definitions

K.1.1 Metric and Spinors

$D = 2$ Minkowski metric: $\eta_{mn} = \text{diag.}(+, -)$, $\varepsilon_{mn} = -\varepsilon_{nm} = -\varepsilon^{mn} = \varepsilon^{nm}$, $\varepsilon_{01} = \varepsilon^{10} = 1$.

$D = 2$ Clifford algebra: $\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\eta^{mn}$.

Majorana representations of Dirac gamma matrices: $\gamma^0 = \sigma_2$, $\gamma^1 = i\sigma_1$, $\gamma_3 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$.

Charge conjugation: $C_2 = -\gamma^0$.

Dirac spinor: $\psi^\alpha = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$, $\psi^\alpha \in \mathbb{C}$, $\psi^c \equiv C_2 \bar{\psi}^T$, $\bar{\psi}^c = -\psi^T C_2$.

Hermite conjugate: $\psi^{\dagger\alpha} \equiv (\psi^{*1}, \psi^{*2})$.

K.1.2 Lorentz Transformations

$D = 2$ Minkowski Lorentz transformation: $\psi'^\alpha = U^\alpha{}_\beta \psi^\beta$.

Spinor representation of $U^\alpha{}_\beta$: $U^\alpha{}_\beta = [\exp(-\frac{i}{2}\omega_{mn}S^{mn})]^\alpha{}_\beta$, $S^{mn} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^m, \gamma^n]$.

S^{01} : $S^{01} = \frac{i}{2}\sigma_3$, $\omega_{01} = \theta$, $U^\alpha{}_\beta = [\exp(\frac{1}{4}\theta\sigma_3)]^\alpha{}_\beta$.

K.1.3 Lorentz Scalar, Vector

Dirac conjugate: $\bar{\psi}_\alpha \equiv [\psi^\dagger(\gamma^0)]_\alpha = \psi^{\dagger\beta}(\gamma^0)_{\beta\alpha} = (i\psi^{*2}, -i\psi^{*1})$,

$$\bar{\psi}^\alpha = (-\gamma^0)^{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta = (-\gamma^0)^{\alpha\beta}(-\gamma^0)_{\beta\rho}(-\gamma^0)^{\rho\lambda}\psi_\lambda^\dagger = (-\gamma^0)^{\alpha\lambda}\psi_\lambda^\dagger.$$

Upper and lower index: $\psi_\alpha = \psi^\beta(\gamma^0)_{\beta\alpha} = (-\gamma^0)_{\alpha\beta}\psi^\beta$, $\psi^\alpha = (-\gamma^0)^{\alpha\beta}\psi_\beta$.

Lorentz scalar: $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}e^{-\frac{1}{4}\theta\sigma_3}e^{\frac{1}{4}\theta\sigma_3}\psi = \bar{\psi}\psi$.

Scalar, vector: $\bar{\psi}\chi = \bar{\psi}_\alpha\chi^\alpha = \chi_\alpha\bar{\psi}^\alpha = \bar{\chi}^c\psi^c$, $\chi_\alpha\psi^\alpha = \psi_\alpha\chi^\alpha = \bar{\chi}^c\psi$,

$$\bar{\chi}_\alpha(\gamma^m)^\alpha{}_\beta\psi^\beta = -\psi_\beta(\gamma^m)^\beta{}_\lambda\bar{\chi}^\lambda = -\bar{\psi}^c\gamma^m\chi^c.$$

Hermite conjugate: $(\psi_\alpha\chi^\alpha)^\dagger = \chi^{\dagger\alpha}\psi_\alpha^\dagger = \bar{\chi}_\alpha\bar{\psi}^\alpha = \bar{\psi}_\alpha\bar{\chi}^\alpha$.

K.2 Supersymmetry

以上の定義を用いて、これから $D = 2, \mathcal{N} = 2$ の超対称性を構成する。 $D = 2$ Dirac スピノールは $D = 4$ Weyl スピノールであったことを考えると、その構成はほとんど $D = 4, \mathcal{N} = 1$ 超対称性と同様である。

K.2.1 Supersymmetry Algebra

Fermionic generator Q, \bar{Q} を用いて超対称性代数を定義する。

$$\{Q^\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2(\gamma^m)^\alpha{}_\beta P_m, \quad \{Q^\alpha, Q^\beta\} = \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0, \quad (\text{K.1a})$$

$$[Q^\alpha, P_m] = [\bar{Q}_\alpha, P_m] = [P_m, P_n] = 0. \quad (\text{K.1b})$$

K.2.2 Super-Poincaré Translation

ここでは super-Poincaré/Lorentz 生成子 P_m, Q, \bar{Q} の作用を定義する。ここで Q, \bar{Q} は Dirac スピノールである。次のように super-Poincaré/Lorentz group element $\Omega(x, \theta, \bar{\theta}), G(y, \epsilon, \bar{\epsilon})$ を定義しよう。

$$\Omega(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv \exp[ix^m P_m + \bar{Q}\bar{\theta} - \theta Q], \quad G(y, \epsilon, \bar{\epsilon}) \equiv \exp[iy^m P_m + \bar{Q}\bar{\epsilon} - \epsilon Q]. \quad (\text{K.2})$$

$\theta, \bar{\theta}, \epsilon, \bar{\epsilon}$ は全て Dirac スピノールパラメータである。またこの group element は次の関係を満たす。

$$\Omega(-x, -\theta, -\bar{\theta}) = \Omega^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = \Omega^{-1}(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (\text{K.3})$$

さて、次のように左から group element G を作用させて super-Poincaré translation を定義しよう。

$$\begin{aligned} G(y, \epsilon, \bar{\epsilon})\Omega(x, \theta, \bar{\theta}) &= \exp[iy^m P_m + \bar{Q}\bar{\epsilon} - \epsilon Q] \exp[ix^m P_m + \bar{Q}\bar{\theta} - \theta Q] \\ &= \exp[i(x^m + y^m + i(\bar{\epsilon}\gamma^m\theta - \bar{\theta}\gamma^m\epsilon))P_m + \bar{Q}(\bar{\theta} + \bar{\epsilon}) - (\theta + \epsilon)Q] \\ &= \Omega(x', \theta', \bar{\theta}'), \end{aligned} \quad (\text{K.4a})$$

$$x'^m = x^m + y^m + i(\bar{\epsilon}\gamma^m\theta - \bar{\theta}\gamma^m\epsilon), \quad \theta' = \theta + \epsilon, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\epsilon}. \quad (\text{K.4b})$$

K.2.3 Differential Representations

今度は生成子 P, Q, \bar{Q} の微分表現を構成する。

$$\begin{aligned} G(y)\Omega(x) &= \Omega(x + y) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iy^m P_m)^n \Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (y^m \partial_m)^n \Omega(x), \\ \therefore P_m &= -i\partial_m. \end{aligned} \quad (\text{K.5})$$

$$\begin{aligned}
G(\epsilon)\Omega(x, \theta) &= \Omega(x^m - i\bar{\theta}\gamma^m\epsilon, \theta + \epsilon) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\epsilon Q)^n \Omega(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\epsilon \frac{\partial}{\partial \theta} + i\epsilon \gamma^m \bar{\theta} \partial_m \right]^n \Omega(x, \theta), \\
\therefore Q^\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_\alpha + i(\gamma^m \bar{\theta})^\alpha \partial_m = \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + i(\gamma^m \bar{\theta})^\alpha \partial_m, \quad \left(\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_\alpha \equiv -\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \right). \tag{K.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(\bar{\epsilon})\Omega(x, \bar{\theta}) &= \Omega(x^m + i\bar{\epsilon}\gamma^m\theta, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\bar{Q}\bar{\epsilon})^n \Omega(x, \bar{\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \bar{\epsilon} - i\theta \gamma^m \bar{\epsilon} \partial_m \right]^n \Omega(x, \bar{\theta}), \\
\therefore \bar{Q}_\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \right)_\alpha - i(\theta \gamma^m)_\alpha \partial_m = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} - i(\theta \gamma^m)_\alpha \partial_m, \quad \left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \right)^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} \right). \tag{K.7}
\end{aligned}$$

これらの表現は超対称性代数を満たす。

K.2.4 Super-Covariant Derivative

超対称性変換を起こすとスピノールは共変でないので、共変微分を定義する。

$$D^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} - i(\gamma^m \bar{\theta})^\alpha \partial_m, \quad \bar{D}_\alpha \equiv -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} + i(\theta \gamma^m)_\alpha \partial_m. \tag{K.8}$$

このとき、以下の関係式が得られる。

$$\{D^\alpha, \bar{D}_\beta\} = 2i(\gamma^m)^\alpha{}_\beta \partial_m, \tag{K.9a}$$

$$\{D^\alpha, D^\beta\} = \{\bar{D}_\alpha, \bar{D}_\beta\} = 0, \quad \{D^\alpha, Q^\beta\} = \{\bar{D}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0, \tag{K.9b}$$

$$\{D^\alpha, \bar{Q}_\beta\} = \{Q^\alpha, \bar{D}_\beta\} = 0. \tag{K.9c}$$

K.3 Superfield

ではここで一般的な superfield を構成しよう。superfield は superspace $(x^m, \theta, \bar{\theta})$ 上の関数として定義される。Grassmann odd の性質を持つ $\theta, \bar{\theta}$ でこの superfield を展開しよう。

$$\begin{aligned}
F(x, \theta, \bar{\theta}) &= A(x) + \theta[\psi_1(x) + \gamma_3 \psi_2(x) + \gamma^m \partial_m \psi_3(x)] + \bar{\theta}[\bar{\chi}_1(x) + \gamma_3 \bar{\chi}_2(x) + \gamma^m \partial_m \bar{\chi}_3(x)] \\
&\quad + \theta\theta X(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} Y(x) + \bar{\theta}[\bar{M}(x) + \gamma_3 \bar{N}(x)]\theta + \bar{\theta}\gamma^m \theta V_m(x) \\
&\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta[\lambda_1(x) + \gamma_3 \lambda_2(x) + \gamma^m \partial_m \lambda_3(x)] + \theta\bar{\theta}\bar{\theta}[\bar{\phi}_1(x) + \gamma_3 \bar{\phi}_2(x) + \gamma^m \partial_m \bar{\phi}_3(x)] \\
&\quad + \theta\bar{\theta}\bar{\theta}\theta D(x), \tag{K.10}
\end{aligned}$$

$\psi_i(x), \bar{\chi}_i(x), \lambda_i(x), \bar{\phi}_i(x)$ は全て Dirac スピノールである。ここで、次の関係式を用いている (Fierz 恒等式)。

$$\psi^\alpha \chi_\beta = -\frac{1}{2}(\chi\psi)\delta^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}(\chi\gamma_3\psi)(\gamma_3)^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}(\chi\gamma_m\psi)(\gamma^m)^\alpha{}_\beta, \tag{K.11a}$$

$$\gamma^m \gamma^n = \eta^{mn} - \varepsilon^{mn} \gamma_3, \quad \gamma^m \gamma_3 = \varepsilon^{mn} \gamma_n. \tag{K.11b}$$

Dirac スピノールを再定義して、以下の形式の general superfield が得られる。

$$\begin{aligned}
F(x, \theta, \bar{\theta}) &= A(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\
&+ \theta\theta X(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}Y(x) + \bar{\theta}[M(x) + \gamma_3 N(x)]\theta + \bar{\theta}\gamma^m\theta V_m(x) \\
&+ \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\phi}(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x).
\end{aligned} \tag{K.12}$$

K.3.1 Chiral Superfield

Chiral superfield は次の条件を満たす superfield として定義される。

$$\bar{D}_\alpha \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \tag{K.13}$$

ここで次の関係を確認しておこう。

$$\bar{D}_\alpha \theta = 0, \quad \bar{D}_\alpha y^m = 0, \quad y^m \equiv x^m + i\bar{\theta}\gamma^m\theta. \tag{K.14}$$

$$\tag{K.15}$$

共変微分 \bar{D}_α と chiral superfield Φ を (y, θ) superspace を用いて書き直すと非常に簡単になる。

$$\bar{D}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha}, \tag{K.16a}$$

$$\Phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y). \tag{K.16b}$$

この chiral superfield を $(x, \theta, \bar{\theta})$ superspace で書き直すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= A(x) + i\bar{\theta}\gamma^m\theta\partial_m A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) \\
&+ \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta(\bar{\theta}\gamma^m\partial_m\psi(x)) + \theta\theta F(x).
\end{aligned} \tag{K.17}$$

anti-chiral superfield も次のように定義される。

$$D^\alpha \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = 0, \tag{K.18a}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) &= A^*(x) - i\bar{\theta}\gamma^m\theta\partial_m A^*(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A^*(x) \\
&+ \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}(\partial_m\bar{\psi}(x)\gamma^m\theta) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x).
\end{aligned} \tag{K.18b}$$

K.3.2 Real Superfield

Real superfield はエルミートな superfield として定義される。

$$V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = V(x, \theta, \bar{\theta}). \tag{K.19}$$

$\theta, \bar{\theta}$ で展開されると次のようになる。

$$\begin{aligned}
V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] \\
& + \bar{\theta}\gamma^m\theta V_m(x) + \bar{\theta}\theta X(x) - i\bar{\theta}\gamma_3\theta Y(x) \\
& + i\theta\theta\left[\bar{\theta}\bar{\chi}(x) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^m\partial_m\chi(x)\right] - i\bar{\theta}\bar{\theta}\left[\theta\chi(x) + \frac{i}{2}\partial_m\bar{\chi}(x)\gamma^m\theta\right] \\
& + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) - \frac{1}{2}\square C(x)\right].
\end{aligned} \tag{K.20}$$

Wess-Zumino gauge に固定すると次のようになる。

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = \bar{\theta}\gamma^m\theta V_m(x) + \bar{\theta}\theta X(x) - i\bar{\theta}\gamma_3\theta Y(x) + i\theta\theta\bar{\chi}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\chi(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \tag{K.21}$$

L Kähler Potential

本文では直接登場する計算ではないが、摂動論を展開するときには非常に重要なものであるので、ここで Kähler potential の展開について簡単な紹介を行う [7]。

Kähler potential $K(\theta, \bar{\theta})$ が与えられたとき、Lagrangian は以下のように定義される。

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\theta, \bar{\theta}). \quad (\text{L.1})$$

この Kähler potential を実際に展開して非線形表現の展開を与えるのであるが、次のように考えてみよう。

$$K(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{N,M} C_{N,M} \Phi^{i_1} \Phi^{i_2} \dots \Phi^{i_N} \Phi^{j_1 \dagger} \Phi^{j_2 \dagger} \dots \Phi^{j_M \dagger} \equiv \sum_{N,M} C_{N,M} K_N(\Phi) K_M(\Phi^\dagger), \quad (\text{L.2a})$$

$$K_N(\Phi) = \Phi^{i_1} \Phi^{i_2} \dots \Phi^{i_N}, \quad K_M(\Phi^\dagger) = \Phi^{j_1 \dagger} \Phi^{j_2 \dagger} \dots \Phi^{j_M \dagger}. \quad (\text{L.2b})$$

$D = 2, \mathcal{N} = 2$ の chiral superfield $\Phi(y, \theta)$, $\Phi^\dagger(y^\dagger, \bar{\theta})$ を component field で展開すると以下のように記述できる。
($y^m = x^m + i\bar{\theta}\gamma^m\theta$ である。)

$$\begin{aligned} \Phi(y, \theta) &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\ &= A(x) + i\bar{\theta}\gamma^m\theta\partial_m A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta[\bar{\theta}\gamma^m\partial_m\psi(x)] + \theta\theta F(x), \end{aligned} \quad (\text{L.3a})$$

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(y^\dagger, \bar{\theta}) &= A^*(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^\dagger) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^\dagger) \\ &= A^*(x) - i\bar{\theta}\gamma^m\theta\partial_m A^*(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}[\partial_m\bar{\psi}(x)\gamma^m\theta] + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x), \end{aligned} \quad (\text{L.3b})$$

$$\begin{aligned} \Phi^i\Phi^{j\dagger}|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= -\frac{1}{4}A^i\square A^{j*} - \frac{1}{4}\square A^i \cdot A^{j*} + \frac{1}{2}\partial_m A^i\partial^m A^{j*} - \frac{i}{2}\partial_m\bar{\psi}^j\gamma^m\psi^i + \frac{i}{2}\bar{\psi}^j\gamma^m\partial_m\psi^i + F^i F^{j*} \\ &= \partial_m A^i\partial^m A^{j*} + i\bar{\psi}^j\gamma^m\partial_m\psi^i + F^i F^{j*} + (\text{total derivative terms}). \end{aligned} \quad (\text{L.3c})$$

これを $K_N(\Phi)$, $K_M(\Phi^\dagger)$ に応用する。

$$\begin{aligned} K_N(\Phi) &= \prod_{k=1}^N [A^k(y) + \sqrt{2}\theta\psi^k(y) + \theta\theta F^k(y)] \\ &= K_N(A) + \sqrt{2}\theta\psi^i \frac{\partial K_N(A)}{\partial A^i} + \theta\theta \left\{ F^i \frac{\partial K_N(A)}{\partial A^i} - \frac{1}{2}\psi^i\psi^j \frac{\partial^2 K_N(A)}{\partial A^i\partial A^j} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{L.4a})$$

$$\begin{aligned} K_M(\Phi^\dagger) &= \prod_{k=1}^M [A^{k*}(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^k(y^\dagger) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^{k*}(y^\dagger)] \\ &= K_M(A^*) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^i \frac{\partial K_M(A^*)}{\partial A^{i*}} + \bar{\theta}\bar{\theta} \left\{ F^{i*} \frac{\partial K_M(A^*)}{\partial A^{i*}} - \frac{1}{2}\bar{\psi}^i\bar{\psi}^j \frac{\partial^2 K_M(A^*)}{\partial A^{i*}\partial A^{j*}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{L.4b})$$

$$\begin{aligned} K_N K_M|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \frac{\partial K_N(A)}{\partial A^i} \frac{\partial K_M(A^*)}{\partial A^{j*}} \left\{ \partial_m A^i\partial^m A^{j*} + i\bar{\psi}^j\gamma^m\partial_m\psi^i + F^i F^{j*} \right\} \\ &\quad + \frac{\partial^2 K_N(A)}{\partial A^i\partial A^k} \frac{\partial K_M(A^*)}{\partial A^{j*}} \left\{ -\frac{1}{2}\psi^i\psi^k F^{j*} + i\partial_m A^k\bar{\psi}^j\gamma^m\psi^i \right\} \\ &\quad + \frac{\partial K_N(A)}{\partial A^i} \frac{\partial^2 K_M(A^*)}{\partial A^{j*}\partial A^{k*}} \left\{ -\frac{1}{2}F^i\bar{\psi}^j\bar{\psi}^k \right\} + \frac{\partial^2 K_N(A)}{\partial A^i\partial A^k} \frac{\partial^2 K_M(A^*)}{\partial A^{j*}\partial A^{\ell*}} \left\{ \frac{1}{4}(\psi^i\psi^k)(\bar{\psi}^j\bar{\psi}^\ell) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{L.4c})$$

ここで以下の関係式を用いている。

$$\partial_m K_N(A) = \partial_m A^i \frac{\partial K_N(A)}{\partial A^i}, \quad \partial_m K_M(A^*) = \partial_m A^{j*} \frac{\partial K_M(A^*)}{\partial A^{j*}}. \quad (\text{L.5})$$

ここで、 $C_{N,M}$ まで含めた $K(\Phi, \Phi^\dagger)$ の様々な変分を以下で定義する。

$$g_{ij^*} \equiv \frac{\partial^2 K(A, A^*)}{\partial A^i \partial A^{j^*}}, \quad (\text{L.6a})$$

$$g_{ij^*,k} \equiv \frac{\partial g_{ij^*}}{\partial A^k} = g_{\ell j^*} \Gamma_{ik}^\ell = g_{kj^*,i}, \quad (\text{L.6b})$$

$$g_{ij^*,k^*} \equiv \frac{\partial g_{ij^*}}{\partial A^{k^*}} = g_{i\ell^*} \Gamma_{j^*k^*}^{\ell^*} = g_{ik^*,j^*}, \quad (\text{L.6c})$$

$$\Gamma_{ij^*}^k \equiv g^{k\ell^*} \frac{\partial g_{j\ell^*}}{\partial A^i}, \quad (\text{L.6d})$$

$$R_{ij^*k\ell^*} = g_{im^*} R^{m^*}_{j^*k\ell^*} = g_{k\ell^*,ij^*} - g^{mn^*} g_{m\ell^*,j^*} g_{kn^*,i}. \quad (\text{L.6e})$$

この表式を用いると、Kähler potential には最終的に次のような展開が与えられる。

$$\begin{aligned} K(\Phi, \Phi^\dagger)|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= g_{ij^*} \left\{ \partial_m A^{j^*} \partial^m A^i + i \bar{\psi}^j \gamma^m \partial_m \psi^i + F^{j^*} F^i \right\} \\ &+ g_{\ell j^*} \Gamma_{ik}^\ell \left\{ -\frac{1}{2} \psi^i \psi^k F^{j^*} + i \partial_m A^k \bar{\psi}^j \gamma^m \psi^i \right\} + g_{i\ell^*} \Gamma_{j^*k^*}^{\ell^*} \left\{ -\frac{1}{2} F^i \bar{\psi}^j \bar{\psi}^{\ell^*} \right\} \\ &+ g_{ij^*,k\ell^*} \left\{ \frac{1}{4} (\psi^i \psi^k) (\bar{\psi}^j \bar{\psi}^{\ell^*}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{L.7})$$

補助場 F^i を消去しよう。

$$F^i = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i \psi^j \psi^k, \quad F^{i^*} = \frac{1}{2} \Gamma_{j^*k^*}^{i^*} \bar{\psi}^j \bar{\psi}^k. \quad (\text{L.8})$$

Lagrangian に代入する。

$$\mathcal{L} = g_{ij^*}(A, A^*) \partial_m A^{j^*} \partial^m A^i + i g_{ij^*}(A, A^*) \bar{\psi}^j \gamma^m (D_m \psi)^i + \frac{1}{4} R_{ij^*k\ell^*}(A, A^*) (\psi^i \psi^k) (\bar{\psi}^j \bar{\psi}^{\ell^*}). \quad (\text{L.9})$$

但し次の共変微分を導入している。

$$(D_m \psi)^i = \partial_m \psi^i + \partial_m A^j \Gamma_{jk}^i \psi^k. \quad (\text{L.10})$$

M $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Q^N Model in Two Dimensions

ここでは Table 2 に列挙されている模型のうちの 1 つ、 $Q^{N-2}(\mathbf{C}) = SO(N)/SO(N-2) \times U(1)$ について、 $D = 2$ に dimensional reduction して簡単に解析する [23]。

M.1 Lagrangian and Symmetries

$D = 2$ 時空での $\mathcal{N} = 2$ 超対称 Lagrangian を次で定義する。

$$\mathcal{L}_{\text{linear}} = \int d^4\theta (\Phi_i^\dagger \Phi_i e^{2V} - cV) + \left(\int d^2\theta \Phi_0 \Phi_i^2 + \text{h.c.} \right). \quad (\text{M.1})$$

この Lagrangian は $Q^{N-2}(\mathbf{C}) = SO(N)/SO(N-2) \times U(1)$ の線形起源である。補助場 $\Phi_0, \Phi_i^\dagger, V$ をすべて積分した非線形 Lagrangian は次のようになっている。

$$\mathcal{L}_{\text{nonlinear}} = \int d^4\theta c \log \left\{ 1 + \varphi_a^\dagger \varphi_a + \frac{1}{4} (\varphi_a^\dagger)^2 (\varphi_a)^2 \right\}. \quad (\text{M.2})$$

vector superfield V だけを積分したものは本文で与えられている $\mathcal{N} = 2, O(N)$ 模型の strong coupling theory となっている。

(M.1) を component field で書き直そう。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & F_i^* F_i + \partial_m A_i^* \partial^m A_i + i \bar{\psi}_i \gamma^m \partial_m \psi_i \\ & + V_m [i A_i^* \partial^m A_i - i \partial^m A_i^* \cdot A_i + \bar{\psi}_i \gamma^m \psi_i] + M (\bar{\psi}_i \psi_i) - N (\bar{\psi}_i i \gamma_3 \psi_i) \\ & + A_i (\bar{\lambda} \psi_i^c + \bar{\psi}_i \lambda^c) + A_i^* (\bar{\lambda}^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \lambda) \\ & + (D + V_m V^m - M^2 - N^2) A_i^* A_i - \frac{1}{2} c D \\ & + \{ F_0 A_i^2 + F_0^* A_i^{*2} \} + \{ F_i A_i A_0 + F_i^* A_i^* A_0^* \} \\ & - A_i (\bar{\psi}_0^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \psi_0) - A_i^* (\bar{\psi}_0 \psi_i^c + \bar{\psi}_i \psi_0^c) - \frac{1}{2} A_0 \bar{\psi}_i^c \psi_i - \frac{1}{2} A_0^* \bar{\psi}_i \psi_i^c. \end{aligned} \quad (\text{M.3})$$

解析のため、Wess-Zumino gauge に固定して展開している。

この模型は次の 3 種類の $U(1)$ 対称性を持っている。簡単に列挙しておく。

1. Local $U(1)$ symmetry

θ parameter を不変に保つ 局所的 $U(1)$ 対称性。

$$\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{i\alpha(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}), \quad \Phi_0(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{-2i\alpha(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi_0(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (\text{M.4})$$

2. Global $U(1)$ symmetry

$D = 4$ における R -symmetry が起源の $U(1)$ 対称性。

$$\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \Phi_i(x, e^{i\alpha} \theta, e^{-i\alpha} \bar{\theta}), \quad \Phi_0(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{2i\alpha} \Phi_0(x, e^{i\alpha} \theta, e^{-i\alpha} \bar{\theta}), \quad (\text{M.5a})$$

$$\lambda(x) \rightarrow e^{i\alpha}\lambda(x). \quad (\text{M.5b})$$

3. Global chiral $U(1)$ symmetry

$D = 4$ Lorentz 変換を起源とする chiral $U(1)$ 対称性。

$$\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \Phi_i(x, e^{i\gamma_3\alpha}\theta, \bar{\theta}e^{i\gamma_3\alpha}), \quad \Phi_0(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \Phi_0(x, e^{i\gamma_3\alpha}\theta, \bar{\theta}e^{i\gamma_3\alpha}), \quad (\text{M.6a})$$

$$\lambda(x) \rightarrow e^{i\gamma_3\alpha}\lambda(x), \quad M(x) - i\gamma_3 N(x) \rightarrow e^{-2i\gamma_3\alpha}(M(x) - i\gamma_3 N(x)). \quad (\text{M.6b})$$

まとめて Table 10 に列挙しておく。

symmetries	Φ_i	A_i	ψ_i	F_i	Φ_0	A_0	ψ_0	F_0	V	V_m	$M - i\gamma_3 N$	λ	D	θ
local $U(1)$	1	1	1	1	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0
global $U(1)$	0	0	-1	-2	2	2	1	0	0	0	0	1	0	1
global chiral $U(1)$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	-2	1	0	1
global + local $U(1)$	1	1	0	-1	0	0	-1	-2	0	0	0	1	0	1

Table 10: $U(1)$ symmetries and their charges.

The last line denotes the mixed $U(1)$ symmetry of the global $U(1)$ and the local $U(1)$, which we will consider below.

M.2 Effective Potential

経路積分形式で考察する。

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi_i^\dagger \mathcal{D}\Phi_i \mathcal{D}\Phi_0^\dagger \mathcal{D}\Phi_0 \mathcal{D}V \exp\left(i \int d^2x \mathcal{L}_{\text{linear}}\right), \quad (\text{M.7})$$

$$\mathcal{D}\Phi_i = \mathcal{D}A_i \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}F_i, \quad \mathcal{D}\Phi_i^\dagger = \mathcal{D}A_i^* \mathcal{D}\bar{\psi}_i \mathcal{D}F_i^*,$$

$$\mathcal{D}\Phi_0 = \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\psi_0 \mathcal{D}F_0, \quad \mathcal{D}\Phi_0^\dagger = \mathcal{D}A_0^* \mathcal{D}\bar{\psi}_0 \mathcal{D}F_0^*,$$

$$\mathcal{D}V = \mathcal{D}V_m \mathcal{D}M \mathcal{D}N \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}D.$$

\mathcal{Z} は生成汎関数である。ここでは $O(N)$ 場 A_i, ψ_i が外線で登場することはないので、外場は省略してある。

$O(N)$ 場 A_i, ψ_i, F_i とそれらの複素共役場を積分することで有効作用と有効ポテンシャルが得られる。有効作用そのものには興味がないので、補助場すべてを定数場に置き換えよう。

$$A_0(x) = \phi_0, \quad A_0^*(x) = \phi_0^*, \quad F_0(x) = F_c, \quad F_0^*(x) = F_c^*,$$

$$\psi_0(x) = \bar{\psi}_0(x) = \lambda(x) = \bar{\lambda}(x) = 0,$$

$$M(x) = M_c, \quad N(x) = N_c, \quad D(x) = D_c, \quad V_m(x) = 0. \quad (\text{M.8})$$

ここで $O(N)$ 場を積分する。

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi_0 \mathcal{D}\Phi_0^\dagger \mathcal{D}V \exp(iS_{\text{eff}}), \quad (\text{M.9a})$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{iN}{2} \text{Tr} \log \det [D_c^{-1}] - \frac{iN}{2} \text{Tr} \log \det [S_c^{-1}] + \int d^2x \mathcal{L}_0. \quad (\text{M.9b})$$

(M.9b) に登場する種々の行列は次で定義されている。

$$D_c^{-1} = \begin{pmatrix} \partial^2 + \phi_0^* \phi_0 - D_c + M_c^2 + N_c^2 & -2F_c^* \\ -2F_c & \partial^2 + \phi_0^* \phi_0 - D_c + M_c^2 + N_c^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{M.10a})$$

$$S_c^{-1} = \begin{pmatrix} i\gamma^m \partial_m + M_c \cdot \mathbf{1} - i\gamma_3 N_c & -\phi_0^* \cdot \mathbf{1} \\ -\phi_0 \cdot \mathbf{1} & i\gamma^m \partial_m + M_c \cdot \mathbf{1} + i\gamma_3 N_c \end{pmatrix}, \quad (\text{M.10b})$$

$$\mathcal{L}_0 = F_c \phi_i^2 + F_c^* \phi_i^{*2} - \phi_0^* \phi_0 \phi_i^* \phi_i + (D_c - M_c^2 - N_c^2) \phi_i^* \phi_i - \frac{N}{g^2} D_c. \quad (\text{M.10c})$$

最後に、Fayet-Iliopoulos 定数 c を次のように置き換える。

$$c = \frac{2N}{g^2}. \quad (\text{M.11})$$

有効ポテンシャルは次のようにして得ることができる。

$$S_{\text{eff}}|_{\text{constant fields}} = -V_{\text{eff}} \int d^2x. \quad (\text{M.12})$$

これによって、これから解析を行う有効ポテンシャルが得られる。

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \log [(-k^2 + X^2 + Y^2 - D_c)^2 - 4F_c^* F_c] - \frac{N}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \log [(-k^2 + X^2 + Y^2)^2 - 4X^2 Y^2] \\ - F_c \phi_i^2 - F_c^* \phi_i^{*2} + (X^2 + Y^2 - D_c) \phi_i^* \phi_i + \frac{N}{g^2} D_c. \quad (\text{M.13})$$

但し X^2 と Y^2 は次の置き換えで与えられている。

$$Y^2 \equiv M_c^2 + N_c^2, \quad X^2 \equiv \phi_0^* \phi_0. \quad (\text{M.14})$$

M.3 Gap Equations and Vacua

有効ポテンシャル (M.13) をすべての定数場 $D_c, F_c, F_c^*, \phi_i, \phi_i^*, X, Y$, で微分をとり、その微分係数がゼロになればという、真空を探す停留条件は以下のとおり。

$$0 = \frac{N}{g^2} - \phi_i^* \phi_i - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + X^2 + Y^2 - D_c}{(-k^2 + X^2 + Y^2 - D_c)^2 - 4F_c^* F_c}, \quad (\text{M.15a})$$

$$0 = -\phi_i^2 - 2N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{F_c^*}{(-k^2 + X^2 + Y^2 - D_c)^2 - 4F_c^* F_c}, \quad (\text{M.15b})$$

$$0 = -\phi_i^{*2} - 2N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{F_c}{(-k^2 + X^2 + Y^2 - D_c)^2 - 4F_c^* F_c}, \quad (\text{M.15c})$$

$$0 = \phi_i \{4F_c^* F_c - (X^2 + Y^2 - D_c)^2\}, \quad (\text{M.15d})$$

$$0 = \phi_i^* \{4F_c^* F_c - (X^2 + Y^2 - D_c)^2\}, \quad (\text{M.15e})$$

$$0 = 2X \left\{ \frac{N}{g^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + X^2 - Y^2}{(-k^2 + X^2 + Y^2)^2 - 4X^2 Y^2} \right\}, \quad (\text{M.15f})$$

$$0 = 2Y \left\{ \frac{N}{g^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 - X^2 + Y^2}{(-k^2 + X^2 + Y^2)^2 - 4X^2 Y^2} \right\}. \quad (\text{M.15g})$$

我々はまず超対称性が自発的に破れていない真空を探す。もし破れていない真空が見つからない場合、破れた条件をおいて探せばよい。しかしその必要はない。超対称性を保つ真空解が存在するからである。

超対称性が破れない条件は次のものである。

$$F_c = F_c^* = D_c = 0. \quad (\text{M.16})$$

これを課すと上の停留条件は幾分簡単なものになる。

$$\phi_i [X^2 + Y^2] = 0, \quad \phi_i^* [X^2 + Y^2] = 0, \quad \phi_i^2 = \phi_i^{*2} = 0, \quad (\text{M.17a})$$

$$\frac{N}{g^2} = \phi_i^* \phi_i + N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-k^2 + X^2 + Y^2}, \quad (\text{M.17b})$$

$$0 = 2X \left\{ \frac{N}{g^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 + X^2 - Y^2}{(-k^2 + X^2 + Y^2)^2 - 4X^2 Y^2} \right\}, \quad (\text{M.17c})$$

$$0 = 2Y \left\{ \frac{N}{g^2} - N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{-k^2 - X^2 + Y^2}{(-k^2 + X^2 + Y^2)^2 - 4X^2 Y^2} \right\}. \quad (\text{M.17d})$$

最後の2つの gap equation からは、 X と Y がどちらかはゼロでないとならないことを示している。つまりどちらもゼロでない解は存在しない。ではこの2つのパラメータの場合わけを考察しよう。

1. $X = 0$ の場合

この場合、赤外発散を避けるために必然的に $Y \neq 0$ が選択される。その結果 gap equation がかなり限定される。

$$\phi_i = \phi_i^* = 0, \quad \frac{N}{g^2} = N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-k^2 + Y^2}. \quad (\text{M.18})$$

この gap equation は、 $O(N)$ 対称性が破れず、 $O(N)$ 場が質量 $m^2 = Y^2$ を持つことを意味している。また真空では、超対称性が保たれていることがわかる。

$$V_{\text{eff}} = 0. \quad (\text{M.19})$$

この真空では $O(N)$ 場が質量を獲得する。また超対称性を保つために複素スカラー場 A_i と Dirac フェルミオン ψ_i が同じ質量を持つ。ここで、Dirac フェルミオンは Dirac 質量項を獲得したことになるので、理論が

当初持っていた chiral $U(1)$ 対称性を破ることになる。しかしこれは回避できる。Schwinger 機構を用いて、ゲージ場に chiral $U(1)$ 対称性の破れからくる NG boson を吸収させて、物理的状態から NG boson を消去することができる。

実はこの真空は CP^{N-1} model と同一である [21][40][41]。我々はこの相を “Schwinger Phase” と呼ぶことにする [42]。

2. $Y = 0$ の場合

この場合は今度は $X \neq 0$ でなければならない。またこの条件によって gap equation が次のようになる。

$$\phi_i = \phi_i^* = 0, \quad \frac{N}{g^2} = N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{-k^2 + X^2}. \quad (\text{M.20})$$

この場合も超対称性が保たれていることが保証される。

$$V_{\text{eff}} = 0. \quad (\text{M.21})$$

ここでも $O(N)$ 対称性は破れていないことがわかる。またここでは X が質量となり、 $O(N)$ 場は質量を獲得する。この場合、Dirac フェルミオンは今度は Majorana 質量項を獲得する。それにより、chiral $U(1)$ 対称性は破れずにすむが、今度は大域的 $U(1)$ 対称性と局所的 $U(1)$ 対称性が破れる。ここではよく知られた Higgs 機構によって、理論に登場する NG boson をゲージ場に吸収させて、Coleman’s theorem から回避できる。

この真空はこれまでに知られていなかった新しい真空で我々はこの相を “Higgs Phase” と呼ぶことにする。

3. $X = Y = 0$ という条件は赤外発散を起こすため満たされない。

M.4 Schwinger Phase

Schwinger phase のダイナミクスについて考察する。ここでは次のように真空期待値が与えられている。

$$\phi_0 = \phi_0^* = F_c = F_c^* = 0, \quad (\text{M.22a})$$

$$N_c = D_c = \langle \lambda \rangle = \langle \psi_0 \rangle = \langle V_m \rangle = 0, \quad (\text{M.22b})$$

$$M_c = -Y \neq 0. \quad (\text{M.22c})$$

これを代入した Lagrangian が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -A_i^* [\partial^2 + Y^2] A_i + \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i^c \right) \begin{pmatrix} i\gamma^m \partial_m - Y & 0 \\ 0 & i\gamma^m \partial_m - Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_i^c \end{pmatrix} \\ & + V_m \left(iA_i^* \partial^m A_i - \partial^m A_i^* \cdot A_i + \bar{\psi}_i \gamma^m \psi_i \right) + V_m V^m A_i^* A_i \\ & + A_i \left(\bar{\lambda} \psi_i^c + \bar{\psi}_i \lambda^c \right) + A_i^* \left(\bar{\lambda}^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \lambda \right) - A_i \left(\bar{\psi}_0^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \psi_0 \right) - A_i^* \left(\bar{\psi}_0 \psi_i^c + \bar{\psi}_i \psi_0^c \right) \\ & - \left(-2YM' + M'^2 + N'^2 \right) A_i^* A_i + M' \left(\bar{\psi}_i \psi_i \right) - N' \left(\bar{\psi}_i i\gamma_3 \psi_i \right) \end{aligned}$$

$$-A_0^* A_0 A_i^* A_i - \frac{1}{2} A_0 \overline{\psi}_i^c \psi_i - \frac{1}{2} A_0^* \overline{\psi}_i \psi_i^c + D A_i^* A_i - \frac{N}{g^2} D + F_0 A_i^2 + F_0^* A_i^{*2} . \quad (\text{M.23})$$

$O(N)$ 場は $m = |Y|$ の質量を獲得しているが、補助場は $m = |2Y|$ の質量を獲得することを見てみよう。そのために、有効作用から補助場の 2 点関数を構成する。

$$S_{\text{eff}} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \sum_{i,j} \tilde{\mathcal{F}}_i(-p) \Pi_{\mathcal{F}_i \mathcal{G}_j}(p) \tilde{\mathcal{G}}_j(p) + \dots , \quad (\text{M.24})$$

その結果を chiral superfield の部分を Table 11 に、vector superfield の部分を Table 12 に列挙する。ここですべての関数に

$$R(p^2) = \frac{N}{2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{Y^2 - x(1-x)p^2} . \quad (\text{M.25})$$

がついているのであるが、表記の都合上、省略してある。また、Table 12 に登場する Levi-Civita テンソルなどを次で定義してある。

$$\epsilon_{01} = -\epsilon^{01} = 1 , \quad \epsilon^{mn} = -\epsilon^{nm} , \quad (\text{M.26a})$$

$$\gamma_m \gamma_n = \eta_{mn} + \epsilon_{mn} \gamma_3 , \quad \epsilon_{mn} \epsilon_{kl} = -\eta_{mk} \eta_{nl} + \eta_{ml} \eta_{nk} . \quad (\text{M.26b})$$

$\langle \mathcal{F} \mathcal{G} \rangle$	$\langle \mathcal{F} A_0 \rangle$	$\langle \mathcal{F} A_0^* \rangle$	$\langle \mathcal{F} \psi_0 \rangle$	$\langle \mathcal{F} \psi_0^c \rangle$	$\langle \mathcal{F} F_0 \rangle$	$\langle \mathcal{F} F_0^* \rangle$
$\langle A_0^* \mathcal{G} \rangle$	$\frac{1}{8}(p^2 - 4Y^2)$	0	0	0	0	0
$\langle A_0 \mathcal{G} \rangle$	0	$\frac{1}{8}(p^2 - 4Y^2)$	0	0	0	0
$\langle \overline{\psi}_0 \mathcal{G} \rangle$	0	0	$\frac{1}{2}(\not{p} + 2Y)$	0	0	0
$\langle \overline{\psi}_0^c \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	$\frac{1}{2}(\not{p} + 2Y)$	0	0
$\langle F_0^* \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$\langle F_0 \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$

Table 11: Two point functions of component fields in the chiral superfield Φ_0 .

\mathcal{F} and \mathcal{G} denote arbitrary fields. The multiplications by the coefficient $R(p^2)$ defined by Eq. (M.25) are omitted in all components.

Table 12 には非対角成分が存在する。これが場の混合が起こっている部分であり、その混合を対角化するために場の再定義を行う。

$$D'(p) = D(p) - 2Y M'(p) , \quad (\text{M.27a})$$

$$N''(p) = N'(p) + 2iY \frac{\epsilon_{mk} p^k}{p^2} V^m(p) . \quad (\text{M.27b})$$

こうして対角化された 2 点関数を Table 13 に列挙しておく。

実は N' は chiral $U(1)$ 対称性の破れに伴って登場した NG boson である。しかしこれがゲージ場に吸収されることで、ゲージ場が自由度を獲得した分、 N'' は非物理的状態になっている。この N' - V_m mixing が Schwinger

$\langle \mathcal{F} \mathcal{G} \rangle$	$\langle \mathcal{F} \lambda \rangle$	$\langle \mathcal{F} \lambda^c \rangle$	$\langle \mathcal{F} D \rangle$	$\langle \mathcal{F} M' \rangle$	$\langle \mathcal{F} N' \rangle$	$\langle \mathcal{F} V_n \rangle$
$\langle \bar{\lambda} \mathcal{G} \rangle$	$\frac{1}{2}(\not{p} + 2Y)$	0	0	0	0	0
$\langle \bar{\lambda}^c \mathcal{G} \rangle$	0	$\frac{1}{2}(\not{p} + 2Y)$	0	0	0	0
$\langle D \mathcal{G} \rangle$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}Y$	0	0
$\langle M' \mathcal{G} \rangle$	0	0	$\frac{1}{2}Y$	$\frac{1}{4}p^2$	0	0
$\langle N' \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}p^2$	$\frac{i}{2}Y \epsilon_{nk} p^k$
$\langle V_m \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	$-\frac{i}{2}Y \epsilon_{mk} p^k$	$-\frac{1}{4}(\eta_{mn} p^2 - p_m p_n)$

Table 12: Two point functions of component fields in the vector superfield V .

Note that the multiplications by the coefficient $R(p^2)$ defined by Eq. (M.25) are omitted in all components.

$\langle \mathcal{F} \mathcal{G} \rangle$	$\langle \mathcal{F} \lambda \rangle$	$\langle \mathcal{F} \lambda^c \rangle$	$\langle \mathcal{F} D' \rangle$	$\langle \mathcal{F} M' \rangle$	$\langle \mathcal{F} N'' \rangle$	$\langle \mathcal{F} V_n \rangle$
$\langle \bar{\lambda} \mathcal{G} \rangle$	$\frac{1}{2}(\not{p} + 2Y)$	0	0	0	0	0
$\langle \bar{\lambda}^c \mathcal{G} \rangle$	0	$\frac{1}{2}(\not{p} + 2Y)$	0	0	0	0
$\langle D' \mathcal{G} \rangle$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
$\langle M' \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	$\frac{1}{4}(p^2 - 4Y^2)$	0	0
$\langle N'' \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}p^2$	0
$\langle V_m \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}(p^2 - 4Y^2)\{\eta_{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2}\}$

Table 13: Diagonal two point functions of component fields in the vector superfield V .

Note again that the multiplications by the coefficient $R(p^2)$ defined by Eq. (M.25) are omitted in all components.

機構である。一方、 D - M mixing は、chiral $U(1)$ 対称性の破れに伴って登場した NG boson N' のゼロ質量超対称場 M を有質量にして超対称性が保たれる機構となっている。

これら 2 点関数の逆行列がいわば伝播関数なのであるが、ゲージ場についてはゲージ固定を行わないと伝播関数が定義できないので、適当にゲージ固定項を導入する。また、場の再定義によって場の大きさを規格化しておく。

$$D_{A_0}(p) = \frac{i}{p^2 - 4Y^2}, \quad S_{\psi_0}(p) = \frac{i}{\not{p} + 2Y}, \quad D_{F_0}(p) = i, \quad (\text{M.28a})$$

$$S_\lambda(p) = \frac{i}{\not{p} + 2Y}, \quad D_{D'}(p) = -i, \quad D_{M'}(p) = \frac{i}{p^2 - 4Y^2}, \quad D_{N''}(p) = \frac{i}{p^2}, \quad (\text{M.28b})$$

$$D_V^{mn}(p) = -\frac{i}{p^2 - 4Y^2} \left\{ \eta^{mn} - (1 - \alpha) \frac{p^m p^n}{p^2} \right\}, \quad (\text{M.28c})$$

この規格化に伴って、 $O(N)$ 場の伝播関数は N 倍される。それは、補助場の伝播関数は $O(N)$ 場に比べて $1/N$ のオーダーだからである。また $D = 2$ 時空なので、フェルミオン質量項の符号については特に重要な意味を持っていないので、気にしなくてもよい。

Feynman グラフを用いてこの伝播関数を記述すると、補助場がどの $O(N)$ 場の複合場なのかが一目瞭然なので、列挙しておこう。

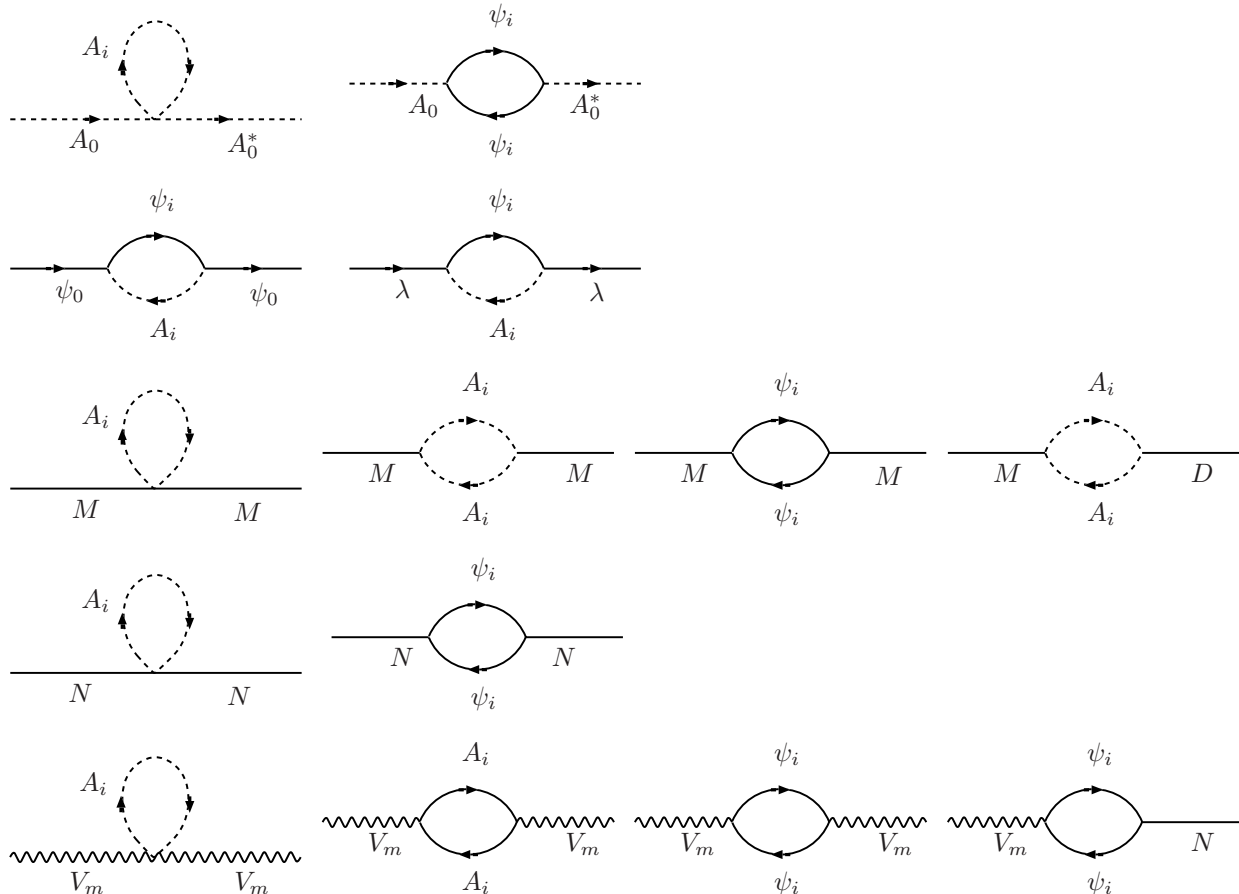


Figure: Feynman diagrams for two point functions of auxiliary fields in the Schwinger phase.

M.5 Higgs Phase

Higgs phase は $X \neq 0$ の真空なのでそれに伴って A_0 を再定義する。

$$A_0(x) = X + A_R(x) + iA_I(x), \quad A_0^*(x) = X + A_R(x) - iA_I(x). \quad (\text{M.29})$$

これによって Lagrangian が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -A_i^* [\partial^2 + X^2] A_i + \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_i^c \right) \begin{pmatrix} i\gamma^m \partial_m & -X \\ -X & i\gamma^m \partial_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_i^c \end{pmatrix} \\ & + V_m \left(iA_i^* \partial^m A_i - \partial^m A_i^* \cdot A_i + \bar{\psi}_i \gamma^m \psi_i \right) + V_m V^m A_i^* A_i \\ & + A_i \left(\bar{\lambda} \psi_i^c + \bar{\psi}_i \lambda^c \right) + A_i^* \left(\bar{\lambda}^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \lambda \right) \\ & - M'^2 A_i^* A_i + M' \left(\bar{\psi}_i \psi_i \right) - N'^2 A_i^* A_i - N' \left(\bar{\psi}_i i\gamma_3 \psi_i \right) - A_i \left(\bar{\psi}_0^c \psi_i + \bar{\psi}_i^c \psi_0 \right) - A_i^* \left(\bar{\psi}_0 \psi_i^c + \bar{\psi}_i \psi_0^c \right) \\ & - \left(2XA_R + A_R^2 + A_I^2 \right) A_i^* A_i - \left(A_R + iA_I \right) \bar{\psi}_i^c \psi_i - \left(A_R - iA_I \right) \bar{\psi}_i \psi_i^c \\ & + DA_i^* A_i - \frac{N}{g^2} D + F_0 A_i^2 + F_0^* A_i^{*2}. \end{aligned} \quad (\text{M.30})$$

ここでも補助場の 2 点関数を列挙しよう (Table 14)。表記の都合上、次の関数がすべてにかかっているが省略する。

$$R(p^2) \equiv \frac{N}{2\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{X^2 - x(1-x)p^2}, \quad (\text{M.31a})$$

$$Q_{mn}(p) \equiv \left\{ X^2 \eta_{mn} - \frac{1}{4} (\eta_{mn} p^2 - p_m p_n) \right\} R(p^2) \equiv \tilde{Q}_{mn}(p) R(p^2). \quad (\text{M.31b})$$

Table 14 を見ればわかるように Higgs phase では chiral superfield と vector superfield が全体で混合している (Schwinger phase では別々に混合していた)。これを対角化するために場の再定義を行う。

$$A'_I(p) = A_I(p) + \frac{2iXp^m}{p^2} V_m(p), \quad D'(p) = D(p) - 2XA_R(p), \quad (\text{M.32a})$$

$$\psi'_0(p) = \psi_0(p) + \lambda^c(p), \quad \lambda'(p) = \lambda(p) - \psi_0^c(p). \quad (\text{M.32b})$$

この再定義の結果得られる 2 点関数を Table 15 と Table 16 に挙げる。

場の混合の解説を行う。 A_I - V_m は Higgs 機構からくる。 A_I は大域的 $U(1)$ 対称性と局所的 $U(1)$ 対称性の破れからくる NG boson であり、局所的 $U(1)$ 対称性から登場するゲージ場 V_m に吸収されている。また A_R - D mixing と ψ_0 - λ mixing は、ともにゼロ質量だった場を、超対称性を保つために有質量にする機構である。

Higgs phase でも伝播関数を定義しよう。適当に場の再定義とゲージ固定項の導入を行うことで、次のように与えられる。

$$D_{M'}(p) = \frac{i}{p^2 - 4X^2}, \quad D_{N'}(p) = \frac{i}{p^2 - 4X^2}, \quad D_{A_R}(p) = \frac{i}{p^2 - 4X^2}, \quad D_{A'_I}(p) = \frac{i}{p^2}, \quad (\text{M.33a})$$

$\langle \mathcal{F} \mathcal{G} \rangle$	$\langle \mathcal{F} A_R \rangle$	$\langle \mathcal{F} A_I \rangle$	$\langle \mathcal{F} \psi_0 \rangle$	$\langle \mathcal{F} \psi_0^c \rangle$	$\langle \mathcal{F} F_0^* \rangle$	$\langle \mathcal{F} F_0 \rangle$	$\langle \mathcal{F} D \rangle$	$\langle \mathcal{F} \lambda \rangle$	$\langle \mathcal{F} \lambda^c \rangle$	$\langle \mathcal{F} M' \rangle$	$\langle \mathcal{F} N' \rangle$	$\langle \mathcal{F} V_n \rangle$
$\langle A_R \mathcal{G} \rangle$	$\frac{1}{4}p^2$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}X$	0	0	0	0	0
$\langle A_I \mathcal{G} \rangle$	0	$\frac{1}{4}p^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{i}{2}p_n X$
$\langle \bar{\psi}_0 \mathcal{G} \rangle$	0	0	$\frac{1}{2}\not{p}$	0	0	0	0	0	$-X$	0	0	0
$\langle \bar{\psi}_0^c \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	$\frac{1}{2}\not{p}$	0	0	0	$-X$	0	0	0	0
$\langle F_0 \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0
$\langle F_0^* \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0
$\langle D \mathcal{G} \rangle$	$-\frac{1}{2}X$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0
$\langle \bar{\lambda} \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	$-X$	0	0	0	$\frac{1}{2}\not{p}$	0	0	0	0
$\langle \bar{\lambda}^c \mathcal{G} \rangle$	0	0	$-X$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}\not{p}$	0	0	0
$\langle M' \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}(p^2 - 4X^2)$	0	0
$\langle N' \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}(p^2 - 4X^2)$	0
$\langle V_m \mathcal{G} \rangle$	0	$\frac{i}{2}p_m X$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\tilde{Q}_{mn}(p)$

Table 14: Two point functions in the Higgs phase.

The multiplications of the coefficient $R(p^2)$ defined by Eq. (M.31a) are omitted in all components.

$\langle \mathcal{F} \mathcal{G} \rangle$	$\langle \mathcal{F} A_R \rangle$	$\langle \mathcal{F} D' \rangle$	$\langle \mathcal{F} A'_I \rangle$	$\langle \mathcal{F} V_n \rangle$
$\langle A_R \mathcal{G} \rangle$	$\frac{1}{4}(p^2 - 4X^2)$	0	0	0
$\langle D' \mathcal{G} \rangle$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$\langle A'_I \mathcal{G} \rangle$	0	0	$\frac{1}{4}p^2$	0
$\langle V_m \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	$-\frac{1}{4}(p^2 - 4X^2)\{\eta_{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2}\}$

Table 15: The two point functions of A_R , D' , A_I , V_m .

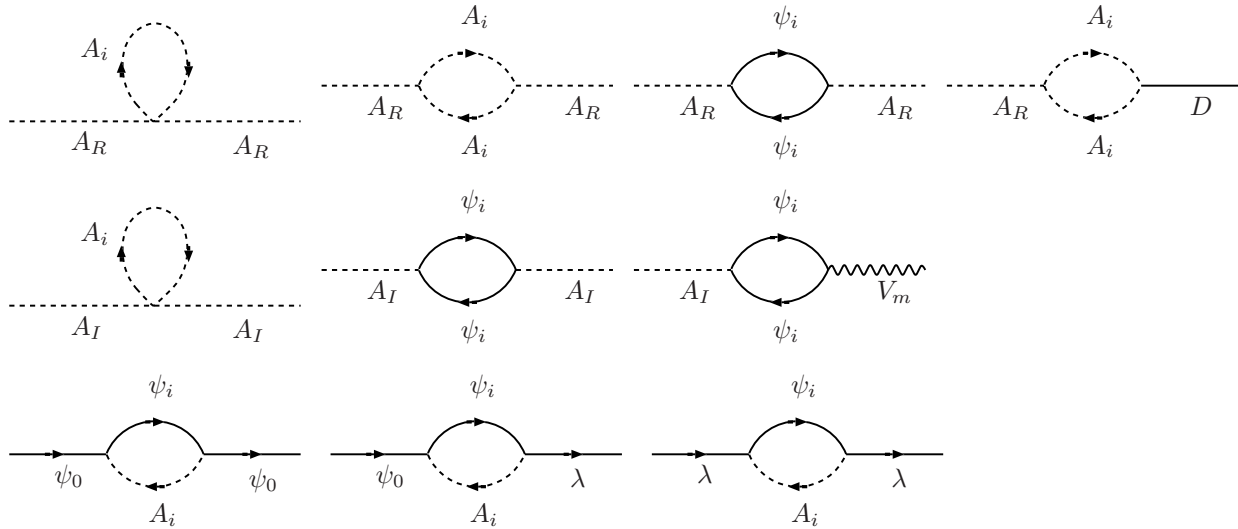
$\langle \mathcal{F} \mathcal{G} \rangle$	$\langle \mathcal{F} \psi'_0 \rangle$	$\langle \mathcal{F} \lambda^{c'} \rangle$	$\langle \mathcal{F} \psi_0^{c'} \rangle$	$\langle \mathcal{F} \lambda' \rangle$
$\langle \bar{\psi}'_0 \mathcal{G} \rangle$	$\frac{1}{2}(\not{p} + 2X)$	0	0	0
$\langle \bar{\lambda}^c \mathcal{G} \rangle$	0	$\frac{1}{2}(\not{p} - 2X)$	0	0
$\langle \bar{\psi}_0^c \mathcal{G} \rangle$	0	0	$\frac{1}{2}(\not{p} + 2X)$	0
$\langle \bar{\lambda}' \mathcal{G} \rangle$	0	0	0	$-\frac{1}{2}(\not{p} - 2X)$

Table 16: The two point functions of ψ'_0 and λ .

$$S_{\psi'_0}(p) = \frac{i}{\not{p} - 2X}, \quad S_{\lambda'}(p) = \frac{i}{\not{p} - 2X}, \quad (\text{M.33b})$$

$$D_V^{mn}(p) = -\frac{i}{p^2 - 4X^2} \left\{ \eta^{mn} - (1 - \alpha) \frac{p^m p^n}{p^2} \right\}, \quad D_{D'}(p) = i, \quad D_{F_0}(p) = i, \quad (\text{M.33c})$$

これらの Feynman グラフも与えられる。



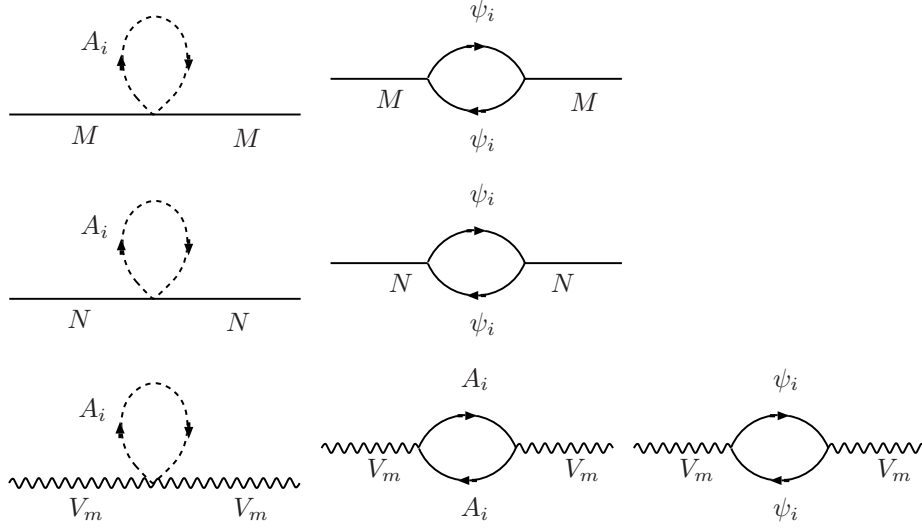


Figure: Feynman diagrams for two point functions of auxiliary fields in the Higgs phase.

M.6 Asymptotic Freedom

最後にこの模型の漸近的自由性を確認する。Schwinger phase でも Higgs phase でもどちらでも同じであるので、Higgs phase で議論しよう。

gap equation において、紫外発散切断 Λ を導入しよう。

$$\frac{1}{g^2} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{i - k^2 + X^2} = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{X^2}, \quad (\text{M.34a})$$

$$\frac{1}{g_R^2} = \frac{1}{g^2} - \frac{1}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\mu^2}{X^2}. \quad (\text{M.34b})$$

したがって簡単に β 関数 $\beta(g_R)$ を計算することができる。

$$\beta(g_R) = \frac{\partial}{\partial \log \mu} g_R = -\frac{g_R^3}{4\pi} < 0. \quad (\text{M.35})$$

これを見ればわかるように、理論は漸近自由である。

References

- [1] M. Peskin, D. V. Schroeder, “*An Introduction to Quantum Field Theory*”, Addison Wesley (1995).
- [2] S. Weinberg, “*The Quantum Theory of Fields*”, Cambridge University Press (1995).
- [3] H. Georgi and S. L. Glashow, “*Unity of All Elementary Particle Forces*”, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 438.
- [4] H. Fritzsch and P. Minkowski, “*Unified Interactions of Leptons and Hadrons*”, Ann. Phys. **93** (1975) 193.
- [5] P. C. West, “*Introduction to Supersymmetry and Supergravity (extended second ed.)*”, World Scientific (1990).
- [6] M. F. Sohnius, “*Introducing Supersymmetry*”, Phys. Rep. **128** (1985) 39.
- [7] J. Wess, J. Bagger, “*Supersymmetry and Supergravity (2nd ed.)*”, Princeton University Press.
- [8] P. van Nieuwenhuizen, “*Supergravity*”, Phys. Rep. **68** (1981) 189.
- [9] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, “*Kaluza-Klein Supergravity*”, Phys. Rep. **130** (1986) 1.
- [10] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “*Superstring Theory*”, Cambridge University Press (1987).
- [11] J. Polchinski, “*String Theory*”, Cambridge University Press (1998).
- [12] E. Abdalla, M. Cristina, B. Abdalla, K. D. Rothe, “*Non-Perturbative Methods in 2-Dimensional Quantum Field Theory*”, World Scientific (1991).
- [13] N. Seiberg, “*Electric-Magnetic Duality in Supersymmetric Nonabelian Gauge Theories*”, Nucl. Phys. **B435** (1995) 129, hep-th/9411149.

N. Seiberg and E. Witten, “*Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, and Confinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*”, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19, hep-th/9407087, Erratum-ibid. **B430** (1994) 485; “*Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD*”, Nucl. Phys. **B431** (1994) 484, hep-th/9408099.

P. C. Argyres, M. R. Plesser and N. Seiberg, “*The Moduli Space of Vacua of $\mathcal{N} = 2$ SUSY QCD and Duality in $\mathcal{N} = 1$ in SUSY QCD*”, Nucl. Phys. **B471** (1996) 159, hep-th/9603042.

J. H. Schwarz, “*Lectures on Superstring and M Theory Dualities*”, hep-th/9607201.
- [14] J. Polchinski, “*TASI Lectures on D-Branes*”, hep-th/9611050.

J. Polchinski, “*Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges*”, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724, hep-th/9510017.

- [15] B. Zumino, “*Supersymmetry and Kähler Manifolds*”, Phys. Lett. **87B** (1979) 203.
- [16] M. Bando, T. Kuramoto, T. Maskawa and S. Uehara, “*Structure of Nonlinear Realization in Supersymmetric Theories*”, Phys. Lett. **138B** (1984) 94; “*Nonlinear Realization in Supersymmetric Theories*”, Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 313, 1207.
- [17] K. Itoh, T. Kugo and H. Kunitomo, “*Supersymmetric Nonlinear Realization for Arbitrary Kählerian Coset Space G/H* ”, Nucl. Phys. **B263** (1986) 295.
- [18] K. Higashijima and M. Nitta, “*Quantum Equivalence of Auxiliary Field Methods in Supersymmetric Theories*”, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 833, hep-th/9911225.
- [19] K. Higashijima and M. Nitta, “*Supersymmetric Nonlinear Sigma Models as Gauge Theories*”, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 635, hep-th/9911139.
- [20] K. Higashijima and M. Nitta, “*Supersymmetric Nonlinear Sigma Models*”, hep-th/0006025.
- [21] A D’adda, P. Di Vecchia and M. Lüscher, “*Confinement and Chiral Symmetry Breaking in CP^{N-1} Models with Quarks*”, Nucl. Phys. **B152** (1979) 125.
- [22] S. Aoyama, “*The Supersymmetric $U(N, R)$ Sigma Model and its $O(2)$ Extended Supersymmetry*”, Nuovo Cim. **57A** (1980) 176.
- [23] K. Higashijima, T. Kimura, M. Nitta and M. Tsuzuki, “*Large- N Limit of $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Q^N Model in Two Dimensions*”, to appear in Prog. Theor. Phys. **105** (2001), hep-th/0010272.
- [24] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, “*Vacuum Configurations for Superstrings*”, Nucl. Phys. **258** (1985) 46.
- B. R. Greene, “*String Theory on Calabi-Yau Manifolds*”, hep-th/9702155.
- [25] D. Gepner, “*Space-Time Supersymmetry in Compactified String Theory and Superconformal Models*”, Nucl. Phys. **B296** (1988) 757.
- [26] S. Coleman, “*There are no Goldstone Bosons in Two Dimensions*”, Comm. Math. Phys. **31** (1973) 259.
- [27] U. Ellwanger, “*Supersymmetric σ -Models in Four Dimensions as Quantum Theories*”, Nucl. Phys. **B281** (1987) 489.
- [28] 九後汰一郎, “*ゲージ場の量子論*”, 培風館 (1989).
- [29] R. G. Root, “*Suppression of the Goldstone Boson in a Gross-Neveu Model*”, Phys. Rev. **D11** (1975) 831.

- [30] J. F. Schonfeld, “*Higher Orders in N^{-1} in the Gross-Neveu Model*”, Nucl. Phys. **B95** (1975) 148.
- [31] V. G. Koures and K. T. Mahanthappa, “*Renormalization of a (2+1)-dimensional supersymmetric nonlinear σ model in $1/N$ expansion*”, Phys. Rev. **D43** (1991) 3428.
- [32] S. Yahikozawa, “*Supersymmetry Breaking to the Next-to-Leading Order in $1/N$ Expansion in Two Dimensional Supersymmetric Theories*”, Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 1431.
- [33] K. Higashijima, “*Theory of Dynamical Symmetry Breaking*”, Prog. Theor. Phys. Suppl. **104** (1991) 1.
- [34] A. M. Polyakov, “*Gauge Fields and Strings*”, Harwood Academic Publishers (1987).
- [35] S. Coleman, “*Aspects of Symmetry*”, Cambridge University Press (1985).
- [36] E. Witten, “*Chiral Symmetry, the $1/N$ Expansion, and the $SU(N)$ Thirring Model*”, Nucl. Phys. **B145** (1978) 110.
- [37] S. Coleman, “*Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model*”, Phys. Rev. **D11** (1975) 2088.
- [38] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, “*Ordering, Metastability and Phase Transitions in Two-Dimensional Systems*”, J. Phys. **C6** (1973) 1181.
- [39] I. Affleck, “*On the Realization of Chiral Symmetry in (1+1) Dimensions*”, Nucl. Phys. **B265** (1986) 448.
- [40] A. D’adda, M. Lüscher and P. Di Vecchia, “*A $1/N$ Expandable Series of Nonlinear Sigma Models with Instantons*”, Nucl. Phys. **B146** (1978) 63.
- [41] P. Di Vecchia and S. Ferrara, “*Classical Solutions in Two-Dimensional Supersymmetric Field Theories*”, Nucl. Phys. **B130** (1977) 93.
- [42] J. Schwinger, “*Gauge Invariance and Mass*”, Phys. Rev. **125** (1962) 397; “*Gauge Invariance and Mass II*”, Phys. Rev. **130** (1962) 2425.