

修士論文

p -brane による超対称ゲージ理論の解析

大竹 由記子

筑波大学大学院 博士課程 物理学研究科 2 年

学籍番号 965208

平成 10 年 1 月 29 日

要旨

この論文では、超対称ゲージ理論 (SQCD) と超弦理論について、1994 ~ 1996 年の研究の進展をレビューする。

まず、4 次元 $N = 1$ $SU(N_c)$ SQCD で、基本表現のフレーバー N_f 個が質量ゼロで入っているとき、 $N_f < N_c$ ではスーパーポテンシャルが生成され、超対称で安定な真空が消えることをみる。更に、 $\frac{3}{2}N_c \leq N_f \leq 3N_c$ では、ゲージ群が異なる 2 つの理論が、同一の非自明な赤外固定点を持つことをみる。この 2 つの理論の関係を Seiberg duality と呼ぶ。また、4 次元 $N = 2$ SQCD の真空は、Higgs 相と Coulomb 相に大別できる。対称性により、Higgs 相は量子補正を受けないことが示される。一方 Coulomb 相は量子補正を受け、Seiberg-Witten 曲線と呼ばれる楕円曲線で完全に記述されることをみる。

次に、超弦理論における双対性について説明し、type IIA 超弦理論の強結合極限が M 理論という 11 次元の理論であることをみる。また、ソリトン解である p -brane について説明する。 p -brane のうち D(irichlet) p -brane は、開弦の励起を持ち、その世界体積上の低エネルギー有効理論は $(p + 1)$ 次元の SYM である。これを用いて、type IIA 理論の中に 4 次元 $N = 1, 2$ SQCD を低エネルギー有効理論として持つ brane 配位を構成することができる。さらに type IIA から M 理論の記述に移ることを考えると、 $N = 2$ SQCD の Seiberg-Witten 曲線が、brane の広がりとして得られる。また、 $N = 1$ SQCD のスーパーポテンシャルの情報が、M 理論から要請される brane 配位に含まれることが分かる。

目次

1	序論	1
2	超対称ゲージ理論	3
2.1	超対称性	3
2.1.1	超対称代数	3
2.1.2	超対称性を持つ理論の特徴	4
2.1.3	$N = 1$ SQCD の作用	6
2.1.4	$N = 2$ SQCD の作用	10
2.2	$N = 1$ SQCD	12
2.2.1	古典的 moduli 空間	12
2.2.2	$N_f < N_c$ での量子論的 moduli 空間	13
2.2.3	$N_f = N_c, N_c + 1$ での量子論的 moduli 空間	17
2.2.4	$N_f > N_c + 1$: Seiberg duality	20
2.2.5	$N = 1$ SQCD まとめ	23
2.3	$N = 2$ SQCD	23
2.3.1	古典的 moduli 空間	24
2.3.2	量子論的 Coulomb branch	28
2.3.3	量子論的 Higgs branch	32
2.3.4	$N = 2$ SQCD の moduli 空間 まとめ	36
2.4	$N = 2$ SQCD と $N = 1$ SQCD	36
2.4.1	随伴表現の物質場の質量 μ による $N = 2$ の破れ ($\mu \rightarrow \infty$)	37
2.4.2	随伴表現の物質場の質量 μ による $N = 2$ の破れ ($\mu < \infty$)	39
3	超弦理論と双対性	43
3.1	弦理論	43
3.1.1	弦の作用と古典解	43
3.1.2	正準量子化	48
3.1.3	経路積分による量子化	51
3.1.4	有効ラグランジアン	53
3.1.5	開弦のゲージ群	55
3.1.6	T-duality と D-brane	57
3.2	超弦理論	59
3.2.1	超弦理論のスペクトル	59
3.2.2	有効作用からみた超弦理論の双対性	63
3.2.3	双対性と D-brane	66
4	brane による 4 次元超対称ゲージ理論の解析	69
4.1	D-brane 上での超対称ゲージ理論の構成	69
4.1.1	SQCD のスペクトルを再現する brane 配位	69
4.1.2	SQCD の変形に対応する brane 配位	71
4.1.3	brane 配位とゲージ群	75
4.1.4	D-brane による Seiberg duality の解析	76
4.2	M5-brane による $N = 2$ SQCD の解析	77
4.2.1	M 理論からみた $N = 2$ SQCD の Coulomb branch	78

4.2.2	M 理論中の D6-brane	78
4.2.3	M 理論からみた $N = 2$ の Higgs branch	80
4.3	$N = 2$ SQCD の配位の $N = 1$ の配位への変形	82
4.3.1	随伴表現の物質場に質量を持たせる変形 ($\mu < \infty$)	82
4.3.2	随伴表現の物質場に質量を持たせる変形 ($\mu \rightarrow \infty$)	85
5	まとめと今後の課題	92
6	謝辞	93

1 序論

1994年から1996年にかけて、素粒子論では二つの大きな進展があった。

一つは、超対称ゲージ理論(SQCD)の低エネルギー領域での振舞いに関する非摂動的な理解が進んだことである。超対称電荷の種類が一種類のとき $N = 1$ 超対称性、二種類の場合 $N = 2$ 超対称性と呼ぶ。1994年に発表された Seiberg と Witten の論文 [1][2] では、ゲージ群が $SU(2)$ の $N = 2$ SQCD の真空構造が厳密に解かれた。ここで明らかにされたのは、 $U(1)$ ゲージ対称性が破れず残っている Coulomb 相の $N = 2$ 超対称な真空が、Seiberg-Witten 曲線と呼ばれる楕円曲線を用いて完全に記述されるということであった。更に同年には、Seiberg によってゲージ群が $SU(N_c)$ の $N = 1$ SQCD において、基本表現のフレーバーの数 N_f が $\frac{3}{2}N_c \leq N_f \leq 3N_c$ にあるとき、理論は非自明な赤外固定点を持つことが指摘された [3]。更にこの固定点は双対的な記述を持ち、そこではゲージ群が $SU(N_f - N_c)$ となっている。このように非可換ゲージ理論において結合定数の強弱が入れ変わる双対性を、Seiberg duality という。その結果、 $N = 1$ $SU(N_c)$ SQCD の低エネルギーでの振舞いが全てのフレーバー数の場合で理解できるようになった。Seiberg duality は他のゲージ群や様々な表現を持つ物質場の場合にも拡張され [4][5][6][7] [8]、それらはことごとく高度に非自明な整合条件を満たしており、Seiberg duality の正当性が検証されている。

もう一つは、超弦理論における双対性の研究が進み、理論のスペクトルに非摂動的なソリトン解が存在することが明らかにされ [9]、強結合領域での振舞いの方が分かるようになってきたことである [10]。その著しい結果として、10次元に存在する IIA, IIB, $E_8 \times E_8$ ヘテロ, $SO(32)$ ヘテロ, $SO(32)I$, 以上5つタイプの超弦理論が互いに独立のものではなく、M理論と呼ばれる11次元の理論の持つ真空の moduli 空間上に存在するものと認識されるようになった [11]。M理論の微視的定式化はまだ確立されていないが、低エネルギー極限で11次元の超重力理論と一致することが知られている。このような議論は超弦理論の間の双対性に基いてなされたが、そこで重要な役割を果たしたのが、 p -brane と呼ばれるソリトン解である。 p -brane は、具体的には超弦の低エネルギー有効理論である超重力理論のソリトン解として得られている。更に、D(irichlet) p -brane と呼ばれる開弦を励起状態として持つ p -brane の存在も明らかにされ、10次元以下の様々な次元に超弦をコンパクト化した場合の双対性の理解を格段に促した。

p -brane の世界体積上の低エネルギー有効理論は、10次元のSYMを $(p+1)$ 次元に次元縮約したものと考えられる。従って上記の $N = 1, 2$ SQCD の結果を D-brane の世界体積上の有効ゲージ理論として再現できるかという問題が考えられる。このような試みが、実際に1996年のHanany-Wittenの論文 [12] で行われ、超弦理論で適当な p -brane 配位を取ることで、その世界体積上に3次元のSQCDを構成してみせた。3次元のSQCDについては、Intriligator-SeibergによりCoulomb相とHiggs相を写し合うミラー対称性の存在が知られていたが [13]、Hanany と Witten は IIB 型超弦の双対対称性の結果としてこのミラー対称性を説明した。この結果は直ちに4次元の場合に拡張され、Elitzur, Giveon, Kutasov は4次元 $N = 1$ SQCD の Seiberg duality を brane 配位を用いた方法で解釈できることを論じた [14]。更に Witten は、以上の結果に基づき、 $N = 2$ Seiberg-Witten 解もまた同様の方法で再構成されることを示した [15]。著しいことに、これら4次元 $N = 1, 2$ SQCD の結果は、全てM理論の観点で統一的に理解され、場の理論に現れた量子効果をことごとく再現することを確認した。

このようにして、SQCDで得られた結果を超弦理論という別の枠組から見直すことが可能になってきた。これによって、SQCDの場の理論的な解析結果をより深く理解できると思われる。また、今後は超弦理論とSQCDの上記のような対応付けを使って、場の理論で解析できなかった点を超弦理論で、超弦理論で不明な点をSQCDで、それぞれ解析することにより、この分野の研究が進むことが期待される。以上の状況を踏まえて、この修士論文では、まずSQCD及び弦理論における1994年から1996年までの研究成果をレビューする。次に、brane配位の方法を用いてSQCDの非摂動的な振舞いを超弦理論の立場で記述する方法を解説する。

第2章では、超対称ゲージ理論の基礎を説明した後、 $N = 1, 2$ のSQCDについて、その低エネルギーでの振舞いの解析をレビューする。 $N = 1$ SQCDでは、 N_f の値によって低エネルギーでの振舞いが異なる。

$N_f < N_c$ では、対称性と正則性を使って超対称性を自発的に破るようなポテンシャルが生成されることを示す。 $N_f = N_c, N_c + 1$ では、低エネルギーでの閉じ込めを仮定することで、他の N_f の結果と無矛盾な真空が得られることが分かる。また、Seiberg duality についての解説を行う。 $N = 2$ では、Seiberg-Witten 理論について簡単に説明し、量子補正を受けない Higgs 相と呼ばれる真空の構造についても説明する。

第 3 章では、弦理論の基礎を主に説明する。そして 10 次元で現れる 5 つの超弦理論及び 11 次元の M 理論が、双対性によってどのように結び付くかを、各理論の低エネルギー有効作用を実際に双対変形で結び付けることで議論する。また、D-brane と呼ばれるソリトン解を開弦の端点として導入し、双対性によって閉弦の理論にも D-brane が含まれるべきであることを説明する。

第 4 章では、brane 配位の方法を用いて、4 次元 $N = 1, 2$ の SQCD を D-brane 上の低エネルギー有効理論として構成する。これを使って、 $N = 1$ の Seiberg duality、 $N = 2$ の Seiberg-Witten 曲線を超弦理論の側から導く。最後に、場の理論によって導かれる $N = 1$ SQCD の有効ポテンシャルを使って求めたメソンの期待値が、超弦理論の M 理論中の brane の位置と一致することを、Hori, Ooguri, Oz の論文 [16] に沿って説明する。

2 超対称ゲージ理論

1994 ~ 1996 年にかけて、超対称性を持つゲージ理論 (物質場のない場合 super Yang-Mills で SYM、物質場のある場合 super QCD で SQCD と呼ぶ) の非摂動的な性質についての理解が一気に深まった。この章では、超対称性について説明した後、4次元 $N = 1, 2$ のゲージ理論の性質についてレビューを行なう。

2.1 超対称性

この節では、超対称性を導入し、その一般的な性質を調べる。また、超対称性を持つゲージ理論の作用を導く。

2.1.1 超対称代数

素粒子論において、対称性は重要な役割を担っている。場の理論という対称性とは、 d 次元時空上で定義された場 $\varphi_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$) の変換に対する作用 $S = \int d^d x \mathcal{L}(\varphi_i)$ の不変性である。連続対称性の場合、微小パラメータ ϵ^a ($a = 1, \dots, n$) が存在して

$$\text{場の変換 } \varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i = \varphi_i(x) + \epsilon^a \delta_a \varphi_i(x) \text{ に対して}$$

$$\mathcal{L}(\varphi_i) \longrightarrow \mathcal{L}'(\varphi_i) + \epsilon^a \partial_m X_a^m$$

と表される。但し、 $m = 0, 1, \dots, d-1, g_{mn} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ である。ここから、

$$\begin{aligned} \text{保存カレント } j_a^m(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m \varphi_i)} \delta_a \varphi_i(x) - X_a^m(x) \\ \text{保存電荷 } Q_a &= \int d^{d-1} x j_a^{m=0}(x) \end{aligned}$$

が導かれる。この Q_a は、

$$[\epsilon^a Q_a, \varphi_i(x)] = -i \epsilon^a \delta_a \varphi_i(x)$$

という交換関係を満たし、微小変換の生成子となっている。従って、 Q_a 同士の代数から変換のなす群が定まり、 φ_i はその表現空間の元として理解される。このように場の理論における対称性は、保存電荷のなす代数とその表現論によって記述される。

相対論的場の理論のモデルは、生成子 M_{mn} によるローレンツ対称性

$$[M_{kl}, M_{mn}] = i(g_{lm} M_{kn} - g_{ln} M_{km} - g_{km} M_{ln} + g_{kn} M_{lm}) \quad (1)$$

を持つ。これらのモデルでは、 $\varphi_i(x)$, Q_a を含む全ての演算子がローレンツ群の表現空間の元であるから、 m をベクトルの足、 α ($\dot{\alpha}$) を (反)スピノルの足として、 $\mathcal{O}_{\vec{a}}, \vec{a} = (a, m_1, \dots, m_j, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_k)$ のように変換性が明確な形に書くことにする。 $l+k$ が奇数であればフェルミ統計に従い、偶数であればボーズ統計に従う。フェルミオン演算子同士の代数は $\{Q_{\vec{a}}, Q_{\vec{b}}\}$ の反交換関係で定まり、それ以外の場合は $[Q_{\vec{a}}, Q_{\vec{b}}]$ の交換関係でよい。

ローレンツ対称性に加えて、どのような対称性が許されるだろうか。まず、 $Q_{\vec{a}}$ がボゾンの場合、ローレンツの足を持たないスカラー T_a であれば、 $[M_{mn}, T_a] = 0$ であり、矛盾なく導入することができる。交換関係は、一般に

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c \quad (2)$$

と表され、コンパクトであれば構造定数 f_{ab}^c の形によって完全に分類されている。一方、 $Q_{\vec{a}}$ がスカラーでないボゾンの場合、 $d > 1+1$ 次元で相互作用のあるモデルでは、エネルギー・運動量演算子 P_m 以外存在しないことが証明されている (Coleman-Mandula 定理 [17])。

次に $Q_{\vec{a}}$ がフェルミオンの場合を考える [18]。Coleman-Mandula 定理により保存電荷はベクトルの足を持ってないから、 $\vec{a} = (a, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_k)$ ($l+k$ は奇数) である。 $Q_{\vec{a}}$ のエルミート共役を $\bar{Q}_{\vec{a}}$ として

$$\{Q_{a,1,\dots,1,i,\dots,i}, \bar{Q}_{a,i,\dots,i,1,\dots,1}\}$$

をとると、 $l+k$ 個のベクトルの足を持つ保存電荷になってしまうから、Coleman-Mandula 定理により $l+k=1$ のみが許され、 $\{Q_{a,\alpha}, \bar{Q}_{b,\beta}\} \sim P_m$ となる。適当な基底を選べば、

$$\{Q_{i,\alpha}, \bar{Q}_{j,\beta}\} = 2\delta_{ij}(\sigma^m)_{\alpha\beta} P_m \quad (i=1, \dots, N) \quad (3)$$

とできる。

同様の議論を用いると、(1) (2) (3) 式に加えて

$$\begin{aligned} \{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} &= -2\sqrt{2}i\epsilon_{\alpha\beta} Z_{ij}^* & Z_{ij} &= a_{ij}^a T_a \\ [Q_{i\alpha}, P_m] &= 0 \\ [Q_{i\alpha}, M_{mn}] &= \frac{1}{2}(\sigma_{mn})_{\alpha}^{\beta} Q_{i\beta} \\ [Q_{i\alpha}, T_a] &= (b_a)^i_j Q_{j\alpha} \\ [Z_{ij}, \text{anything}] &= 0 & Z_{ij} &= -Z_{ji} \end{aligned} \quad (4)$$

が導かれる [18]。 Z_{ij} はセントラルチャージと呼ばれるスカラー量で他の生成子と可換である。 $Q_{i\alpha}$ から生成される対称性を、超対称性と呼ぶ。

2.1.2 超対称性を持つ理論の特徴

以下では $d=4$ 次元とし、前小節で導いた代数から超対称性を持つ理論の一般的性質を調べる。ここでの記法は Wess-Bagger [19] に従う。

1. 超対称性で不変な真空のエネルギーは 0 である。

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_{\alpha\beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{\alpha\beta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{\alpha\beta}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。スピノルの添字 α, β の上げ下げは、

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

で行う。(3) 式より

$$H = P^0 = -P_0 = \frac{1}{4}[Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_1 Q_1 + Q_2 \bar{Q}_2 + \bar{Q}_2 Q_2]$$

であるから、状態 $|\Psi\rangle$ のエネルギー固有値は $\langle \Psi | H | \Psi \rangle \geq 0$ である。超対称性を持つ真空 $|0\rangle$ に対しては $Q|0\rangle = \bar{Q}|0\rangle = 0$ だから、 $\langle 0 | H | 0 \rangle = 0$ が導かれる。

2. ボゾンとフェルミオンのスペクトルは等しい

フェルミオン数演算子を N_F とすると、 $(-1)^{N_F} Q_{\alpha} = -Q_{\alpha} (-1)^{N_F}$ だから

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(-1)^{N_F} \{Q_{i\alpha}, \bar{Q}_{j\beta}\}] &= 0 \\ &= 2\sigma_{\alpha\beta}^m \delta_{ij} \text{Tr}[(-1)^{N_F} P_m] \end{aligned}$$

である。よって、ある $P_m \neq 0$ の粒子の状態に対して $\text{Tr}(-1)^{N_F} = 0$ であり、ボゾンとフェルミオンは同じ P_m で対になっている。

スペクトルをもう少し詳しく調べる。質量 $m \neq 0$ の場合は静止系がとれて、超対称代数はセントラルチャージ Z_{ij} のないとき

$$\{Q_{i\alpha}, \bar{Q}_{j\beta}\} = 2m\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \quad \{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} = \{\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}\} = 0$$

である。これは $(a_{i\alpha})^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}}\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}$, $a_{i\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m}}Q_{i\alpha}$ と規格化しなおせば、生成消滅演算子の代数に等しい。従って、スピン j で $a_{i\alpha}\Psi_j=0$ を満たす状態 Ψ_j に $(a_{i1})^\dagger, (a_{j2})^\dagger$ を作用させることで、多重項となる状態を導くことができる。例えば $N=1$ では、

状態	スピン
Ψ_j	j
$(a_\alpha)^\dagger\Psi_j$	$j \otimes \frac{1}{2} = \left j \pm \frac{1}{2} \right $
$\frac{1}{\sqrt{2}}(a_\alpha)^\dagger(a_\beta)^\dagger = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon_{\alpha\beta}(a^\gamma)^\dagger(a_\gamma)^\dagger$	j

のようになる。相互作用可能な意味のある場合は、スピン 2 以下でなくてはならないから、 $N=1$ では $j \leq \frac{3}{2}$ となる。このようにして求められる超対称多重項は、 $N=1, 2$ では以下のとおりである。

N = 1	スピン	Ψ_0	$\Psi_{\frac{1}{2}}$	Ψ_1	$\Psi_{\frac{3}{2}}$	N = 2	スピン	Ψ_0	$\Psi_{\frac{1}{2}}$	Ψ_1
	0	2	1					0	5	4
$\frac{1}{2}$	1	2	1			$\frac{1}{2}$	4	6	4	
1		1	2	1		1	1	4	6	
$\frac{3}{2}$				1	2	$\frac{3}{2}$		1	4	
2					1	2			1	

なお、 $N > 4$ では Ψ_0 から出発してもスピンの 2 より大きい粒子が出てきてしまうから、質量を持つ粒子の入った理論の持つ超対称性は、最大でも $N=4$ である。

質量 $m=0$ の場合、 $P_m=(-E, 0, 0, E)$ という系で見ると

$$\{Q_{i\alpha}, \bar{Q}_{j\beta}\} = 2 \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{ij} \quad \{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} = \{\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}\} = 0$$

である。 $m \neq 0$ のときと同様、 Q, \bar{Q} を $\frac{1}{2\sqrt{E}}$ で規格化しなおすと生成消滅演算子の代数になる。但し $\{Q_{i2}, \bar{Q}_{j2}\} = 0$ だから、 $m \neq 0$ の場合に比べて生成消滅演算子の数が半分に減っている。これに伴って多重項に含まれる状態数が少なくなるので、『小さい表現』と呼ばれる。ヘリシティー λ を持つ状態を Ψ_λ をとすると、 \bar{Q}_{i1} を作用させることによってヘリシティーは $\lambda + \frac{1}{2}$ に上がる。 $m \neq 0$ のときと同様に、

N = 1	ヘリシティー	Ψ_{-2}	$\Psi_{-\frac{3}{2}}$	Ψ_{-1}	$\Psi_{-\frac{1}{2}}$	Ψ_0	$\Psi_{\frac{1}{2}}$	Ψ_1	$\Psi_{\frac{3}{2}}$
	2								
$\frac{3}{2}$								1	1
1							1	1	
$\frac{1}{2}$						1	1		
0					1	1			
$-\frac{1}{2}$				1	1				
-1			1	1					
$-\frac{3}{2}$		1	1						
-2		1							

である。多重項を CPT 不変にするために、 Ψ_{-2} と $\Psi_{\frac{3}{2}}$ 、 Ψ_{-1} と $\Psi_{\frac{1}{2}}$ 、 $\Psi_{-\frac{1}{2}}$ と Ψ_0 を組にする。これらを順に、重力多重項、ベクトル多重項、カイラル多重項と呼ぶ。また $N = 2$ では

ヘリシティ	Ψ_{-2}	$\Psi_{-\frac{3}{2}}$	Ψ_{-1}	$\Psi_{-\frac{1}{2}}$	Ψ_0	$\Psi_{\frac{1}{2}}$	Ψ_1
2							1
$\frac{3}{2}$						1	2
1					1	2	1
$\frac{1}{2}$				1	2	1	
0			1	2	1		
$-\frac{1}{2}$		1	2	1			
-1	1	2	1				
$-\frac{3}{2}$	2	1					
-2	1						

である。CPT 不変性から、 Ψ_{-2} と Ψ_1 、 $\Psi_{-\frac{3}{2}}$ と $\Psi_{\frac{1}{2}}$ 、 Ψ_{-1} と Ψ_0 を組にする。 Ψ_{-1} と Ψ_0 を組んだものを $N = 2$ ベクトル多重項と呼び、 $N=1$ のベクトル多重項 1 個とカイラル多重項 1 個からなる。 $\Psi_{-\frac{1}{2}}$ は単独で CPT 不変であり、 $N = 1$ のカイラル多重項 1 個に相当する。しかしこれが $N = 2$ 超対称性の下で意味のある場にならないことは、以下のように示される。 $\Psi_{-\frac{1}{2}}$ の多重項をなす状態を、複素スカラー場 ϕ 、2 成分フェルミオン場 ψ_α で表す。2 組の超対称電荷 $Q_{1\alpha}, Q_{2\beta}$ により、其々 $\phi \rightarrow \psi, \bar{\psi}$ に移ると考えられるから、一般に c を定数として

$$[\phi, \bar{Q}_1] = [\phi, Q_2] = 0$$

$$[\phi, Q_1] = 2i\psi, \quad [\phi, \bar{Q}_2] = c\bar{\psi}$$

と書ける。これと超対称代数から $\{[\phi, Q_1], \bar{Q}_1\}, \{[\phi, \bar{Q}_2], Q_2\}$ を評価すると、 $\{\psi, \bar{Q}_1\} = \sigma^m \partial_m \phi$ 、 $\{\bar{\psi}, Q_2\} = \frac{2i}{c} \sigma^m \partial_m \phi$ が導かれる。よって

$$[\phi, \{Q_1, \bar{Q}_2\}] = \left(\frac{4}{c^*} + c \right) \sigma^m \partial_m \phi^\dagger$$

である。ここでは $\{Q_1, \bar{Q}_2\} = 0$ としており、また右辺の係数は 0 ではありえないから、 $\partial_m \phi = 0$ となり ϕ は定数である。従って物理的な場としては、 $\Psi_{-\frac{1}{2}}$ が 2 個必要になる。これをハイパー多重項といい、 $N = 1$ のカイラル多重項 2 つに相当する。

スピン 2 以下という要請から、 $m = 0$ では $N = 8$ まで許される。 $N \geq 2$ の超対称代数ではセントラルチャージ Z_{ij} が入れられるが、特別な値のとき $m \neq 0$ でも小さな表現が出てくる。これは BPS 状態と呼ばれ、 $N=2$ の場合について後で具体的に見る。

2.1.3 $N = 1$ SQCD の作用

超対称代数はポアンカレ変換を拡張したものだから、 P_m による平行移動と同様に超電荷もまたある種の座標変換をひきおこすと考えよう。そこでボゾン座標 x_m に加え、 Q_α に対応するフェルミオン座標 $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}$ を導入する。拡張された座標で記述される空間を、超空間という。座標の拡張に伴って場の変数も拡張し、 $\phi(x) \rightarrow \phi(x_m, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}})$ とする。これを超場と呼ぶ。特に $N = 1$ の場合は、超場を使うと場の超対称変換性を簡単に求められる。この小節では、実際に超場を使って $N = 1$ SQCD の作用を導く。

まず座標の超対称変換性は、有限変換の演算子を $G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i(-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})}$ と書くと、(反)交換関係から

$$G(0, \xi, \bar{\xi})G(x, \theta, \bar{\theta}) = G(x + i\theta\sigma\bar{\xi} - i\xi\sigma\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi})$$

が導かれる。但し、 ξ は微小変換のパラメータとして 2 次以上を落した。よって座標に作用する Q, \bar{Q} は、具体的に

$$\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q} = \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \partial_m \right) \quad (5)$$

と書ける。 $N = 1$ の超場の一般型は、 $\theta, \bar{\theta}$ について展開して

$$F(x, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{\chi}(x) + \theta \theta m(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} n(x) \\ + \theta \sigma^m \bar{\theta} v_m(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \psi(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{d}(x)$$

である。 $f(x)$ のように x のみによる場を、成分場と呼ぶ。この成分場の微小変換は、 F に $\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}$ を作用させることにより

$$\begin{aligned} \delta_\xi f &= \xi \phi + \bar{\xi} \bar{\chi} \\ \delta_\xi \phi &= i \sigma \bar{\xi} \partial f + 2 \xi m + \sigma \bar{\xi} v \\ \delta_\xi \bar{\chi} &= i \bar{\sigma} \xi \partial f + 2 \bar{\xi} n - \bar{\sigma} \xi v \\ \delta_\xi m &= \frac{i}{2} \bar{\xi} \bar{\sigma} \partial \phi + \bar{\xi} \bar{\lambda} \\ \delta_\xi n &= \frac{i}{2} \xi \sigma \partial \bar{\chi} + \xi \psi \\ \delta_\xi v_m &= \frac{i}{2} \bar{\xi} \bar{\sigma} \bar{\sigma}_m \partial \bar{\chi} - \frac{i}{2} \xi \sigma \bar{\sigma}_m \partial \psi - \xi \sigma_m \bar{\lambda} + \bar{\xi} \bar{\sigma}_m \psi \\ \delta_\xi \bar{\lambda} &= \frac{i}{2} (\bar{\lambda}^n \lambda_m \bar{\xi}) \partial_m v_n + i (\sigma \bar{\xi}) \partial m + 2 \bar{\xi} d \\ \delta_\xi \psi &= -\frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n \xi) \partial_n v_m + i (\sigma \bar{\xi}) \partial n + 2 \xi d \\ \delta_\xi d &= -\frac{i}{2} \partial \psi \sigma \bar{\xi} - \frac{i}{2} \partial \bar{\lambda} \bar{\sigma} \xi \end{aligned} \quad (6)$$

と求まる。

前小節でみたように、 $N = 1$ の超対称多重項はカイラルやベクトルのようなものである。これらは超対称性と両立する拘束条件を、一般的な超場 F に課して得られる。例えばカイラル多重項は、(5) 式で表される Q, \bar{Q} の共変微分

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \\ \{D, Q\} = \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0$$

を使って、 $\bar{D}\Phi=0$ なる条件を満たす超場から得られる。 Φ をカイラル超場という。また、 $D\Phi^\dagger=0$ を満たすものを、反カイラル超場という。 Φ は、 $\bar{D}y=0$ を満たす $y=x+i\theta\sigma\bar{\theta}$ を使うと簡単に表せて、

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(y) + \sqrt{2} \theta \psi(y) + \theta \theta F(y) \\ &= \phi(x) + i \theta \sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi(x) + \frac{1}{4} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \square \phi(x) + \sqrt{2} \theta \psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta \theta \partial_m \psi(x) \sigma^m \bar{\theta} + \theta \theta F(x) \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ここで、 ϕ は複素スカラー場、 ψ は 2 成分スピノル場で F は補助場である。 Φ^\dagger についても同様に、 $y^\dagger = x - i\theta\sigma\bar{\theta}$ を使って

$$\Psi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi^*(y^\dagger) + \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\psi}(y^\dagger) + \bar{\theta} \bar{\theta} F^*(y^\dagger)$$

である。

n 個の (反) カイラル場 $\Phi^i(\Phi^\dagger)$ ($i = 1, \dots, n$) で書かれる一般的な超対称ラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\Phi, \Phi^\dagger) + \left[\int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.} \right] \quad (8)$$

である。ここで、 $K(\Phi, \Phi^\dagger)$ は Φ, Φ^\dagger の関数で、 $\theta, \bar{\theta}$ で展開すると一般の超場になっている。 $W(\Phi)$ は Φ のみの関数でカイラル超場になっており、スーパーポテンシャルと呼ばれる。(6) 式から、一般の超場の $\theta^2 \bar{\theta}^2$ 成分、カイラル超場の θ^2 成分は超対称変換は全微分の形になっており、ラグランジアン (8) 式は確かに超対称である。 $\int d^4\theta \theta^2 \bar{\theta}^2 = 1$, $\int d^2\theta \theta^2 = 1$ として積分を実行すると、(7) 式より、

$$\int d^4\theta K(\Phi, \Phi^\dagger) \sim \left. \frac{\partial^2 K(\Phi, \Phi^\dagger)}{\partial \Phi^i \partial \Phi^{j\dagger}} \right|_{\Phi=\phi} (\partial_m \phi^i \partial^m \phi^{j\dagger} + F^i F^{j\dagger})$$

なる項が出てくる。よって ϕ^i を局所座標とする複素 n 次元空間は、 $g_{ij} = \partial^2 K / \partial \Phi^i \partial \Phi^{j\dagger} |_{\Phi=\phi}$ を計量に持つ多様体とみなせる。このような多様体を Kähler 多様体といい、 K を Kähler ポテンシャルと呼ぶ。また、 FF^\dagger に注目すると運動方程式

$$g_{ij} F^j = - \left. \frac{\partial \bar{W}(\Phi^\dagger)}{\partial \Phi^{i\dagger}} \right|_{\bar{\theta}=0}$$

が出て、右辺は F によらない。これより F は消去されて、カイラル超場中の物理的な自由度は ϕ, ψ であり、確かにカイラル多重項に対応している。

一方ベクトル多重項からなる超場は、 $V = V^\dagger$ の条件から得られる。この条件の下での一般形は、

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta[m(x) + in(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[m(x) - in(x)] - \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) \\ & + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\xi(x)\right] - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\xi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right] \end{aligned}$$

である。ここで、カイラル超場 Λ, Λ^\dagger を用いて、ゲージ変換 $V \rightarrow V + i\Lambda - i\Lambda^\dagger$ を定義する。すると、次のゲージ固定

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x)$$

が可能で、これを Wess-Zumino ゲージと呼ぶ。但し、まだ通常のゲージ変換に対応する $v_m \rightarrow v_m + \partial_m a$ 分の自由度は残っている。この V から

$$W_\alpha = \frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V$$

を作ると、場の強さ $F_{mn} = \partial_m v \partial_n v - \partial_n v \partial_m v$ が成分場として入ってくる。この W はゲージの取り方によらず、 $\bar{D}W = 0$ を満たすからカイラル超場になっている。よって (8) 式と同様に、超対称でゲージ不変なラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^2\theta W^\alpha W_\alpha \quad (9)$$

$$= -\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{i}{4}F_{mn}\tilde{F}^{mn} - i\lambda\sigma^m D_m \bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2 \quad (10)$$

がとれる。カイラル超場の場合と同じく、 $\frac{1}{2}D^2$ の項より運動方程式で D が落ちてゲージ多重項分の自由度が残ることが確認できる。

非可換ゲージ場への拡張は、ゲージ群の生成子を T^a ($a = 1, \dots, n$) として n 個のベクトル超場を用意し、 $V = V^a T^a$ とすればよい。但しゲージ変換は $e^V \rightarrow e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda}$ ($\Lambda = \Lambda^a T^a$) で与えられるとし、

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}e^{-V}D_\alpha e^V$$

とする。このとき W_α は成分場として場の強さ $F_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m - i[v_m, v_n]$ を含み、ゲージ変換の元で $W_\alpha \rightarrow e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda}$ となるから、(9) 式と同様にラグランジアンは $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^2\theta \text{Tr} W^\alpha W_\alpha$ と書ける。通常

の Yang-Mills ラグランジアンでは、結合定数 g が (10) 式の第 1,3,4 項に $\frac{1}{g^2}$ の形で、 θ が第 2 項に $\frac{\theta}{32\pi^2}$ の形で入ってくる。これを再現するには、複素結合定数 $\tau = \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2}$ を導入して

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \text{Im} \int d^2\theta \tau \text{Tr} W^\alpha W_\alpha$$

とすればよい。なお、超対称ではないが θ 項を加えた 4 次元格子上の Z_p 模型¹ でも複素結合定数 τ が自然に現れ、 Z_p 模型の電磁双対対称性を $SL(2Z)$ 対称性として理解する上で重要であった。[20]。

以上の情報をもとに、 $N = 1$ SQCD のラグランジアンを書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^4\theta \left[Q_{iI}^\dagger (e^{2V})^I_J Q^{iJ} + \tilde{Q}_{iI} (e^{-2V})^I_J \tilde{Q}^{\dagger iJ} \right] + \frac{1}{8\pi} \text{Im} \left[\tau \int d^2\theta \text{Tr} (W^\alpha)^I_J (W_\alpha)^J_I \right] \\ &= D_m Q^\dagger D^m Q + i\bar{\psi}\sigma^m D_m \psi + F^\dagger F - i\sqrt{2}\bar{\psi}\lambda Q + i\sqrt{2}Q^\dagger \lambda\bar{\psi} + Q^\dagger D Q \\ &\quad + D_m \tilde{Q} D^m \tilde{Q}^\dagger + i\tilde{\psi}\sigma^m D_m \tilde{\psi} + \tilde{F}\tilde{F}^\dagger - i\sqrt{2}\tilde{\psi}\lambda\tilde{Q}^\dagger + i\sqrt{2}\tilde{Q}\lambda\tilde{\psi} - \tilde{Q} D \tilde{Q}^\dagger \\ &\quad + \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} - i\lambda\sigma^m D_m \bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 \right) + \frac{\theta}{32\pi^2} \text{Tr} F_{mn} \tilde{F}^{mn} \end{aligned} \quad (11)$$

但し $i = 1, \dots, N_f$ はフレーバー、 $I = 1, \dots, N_c$ はゲージを表す足であり、上付きのとき $SU(N_f)$ の基本表現として、下付きのとき反基本表現として変換する。これらは適宜省略する。物質場のゲージ変換は $Q \rightarrow e^{-i\Lambda} Q$ である。超場と成分場の関係は以下で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} Q^i(x, \theta, \bar{\theta}) &= Q^i(y) + \sqrt{2}\theta\psi^i(y) + \theta\theta F^i(y) \quad \tilde{Q}_i \text{ も同様} \\ V(x, \theta, \bar{\theta}) &= -\theta\sigma^m \bar{\theta} A_m(x) + i\theta\theta \bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} D(x) \\ &= V^a(x, \theta, \bar{\theta}) T^a \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $T^a, a = 1, \dots, N_c^2 - 1$ は $SU(N_c)$ の生成子であり、 D_m はその共変微分を表す。 $e^{\pm 2V}$ の 2 倍は、展開したとき共変微分が通常の $\partial_m - iA_m^a T^a$ になるために必要であり、 \pm は Dirac スピノルと γ 行列

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_\alpha(x) \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix} \quad \gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}$$

でラグランジアンを書き直して、 $\bar{\Psi}\gamma^m D_m \Psi$ となるよう決めた。物質場が質量を持つ場合は、スーパーポテンシャルに $\tilde{Q}_{iI} m_j^i Q^{jI}$ を加える。

SQCD のラグランジアンでは、 $\theta \rightarrow e^{-i\alpha}\theta$ に対して

$$\begin{aligned} Q(\theta) &\rightarrow Q(e^{-i\alpha}\theta) \\ \tilde{Q}(\theta) &\rightarrow \tilde{Q}(e^{-i\alpha}\theta) \\ W(\theta) &\rightarrow e^{-i\alpha} W(e^{-i\alpha}\theta) \end{aligned}$$

という $U(1)$ 対称性がある。このような超空間のパラメータの回転を伴う対称性を、 R 対称性と呼ぶ。 Q, \tilde{Q} と同じ $U(1)$ 電荷を持ち、カイラルな対称性である。

この小節の最後に、 $N = 1$ の超対称性を持つ模型について非摂動的な量子補正を議論する上で「正則性」が重要となることを、具体例を用いて説明する。 $N = 1$ のスーパーポテンシャルは、カイラル超場 Φ の正則関数である。正則関数は、漸近的な振舞いと特異性によって完全に決定されてしまうため、正則性によってスーパーポテンシャルの量子論的な振舞いが厳密に分かってしまう場合がある。例えば、スーパーポテンシャルが

$$W_{\text{tree}} = m\Phi^2 + \lambda\Phi^3 \quad (13)$$

¹ 格子上の各リンクに Z_p 変数を持たせた模型で、 $p = 2$ のとき Ising ゲージ模型、 $p \rightarrow \infty$ のとき $U(1)$ 格子ゲージ模型にあたる。

で与えられる Wess-Zumino 模型の量子補正を考える。\$m, \lambda\$ は結合定数である。この模型は、摂動論的には繰込みを受けないことが知られている。ここで、\$m, \lambda\$ がカイラル超場で、その真空期待値が結合定数であると考えよう。\$(U(1)\$ 電荷, \$U(1)_R\$ 電荷) を \$\Phi\$ について \$(1,1)\$、\$m\$ について \$(-2,0)\$、\$\lambda\$ について \$(-3,-1)\$ と決めてやれば、この模型は 2 つの \$U(1)\$ 変換に対して不変である。スーパーポテンシャルの電荷は \$(0,2)\$ でなければならないから、量子補正も含めた有効スーパーポテンシャルは

$$W_{\text{eff}} = m\Phi^2 f(t), \quad t = \frac{\Phi\lambda}{m} \quad (14)$$

と定まる。ここで \$m, \lambda \to 0\$ (但し \$m/\lambda\$ は固定) の極限をとると \$W_{\text{tree}}\$ に戻るはずだから、\$f(t) = 1 + t\$ である。一方、この極限で \$t\$ は全ての値をとるから、厳密に \$W_{\text{eff}} = W_{\text{tree}}\$ である。このように、摂動的に示されている Wess-Zumino モデルの非繰り込み定理が、非摂動的にも正しいことが分かった [21]。

2.1.4 \$N = 2\$ SQCD の作用

この小節では、\$N = 2\$ SQCD の作用を紹介する。\$N = 2\$ の特徴として、\$N = 1\$ での Kähler ポテンシャルとスーパーポテンシャルが、\$N = 2\$ では 1 つの正則関数から導かれることを確認する。また、\$N = 2\$ SQCD では一般にはセントラルチャージ \$Z_{ij} \neq 0\$ だから、この場合の多重項を第 2.1.2 節にならって調べなおす。

\$N = 2\$ の物質場はハイパー多重項で与えられ、\$N = 1\$ のカイラル超場 2 つ (\$Q, \tilde{Q}\$) を使って表される。ベクトル場は \$N = 1\$ のカイラル超場 1 つとベクトル超場 1 つ (\$\Phi, W\$) を使って表される。従って \$N = 2\$ SQCD の作用は、以下のように表されると予想される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left[Q_{iI}^\dagger (e^{2V})^I_J Q^{iJ} + \tilde{Q}_{iI} (e^{-2V})^I_J \tilde{Q}^{\dagger iJ} \right] + \int d^2\theta \sqrt{2} \text{Re} \tilde{Q}_{iI} \Phi^I Q^{iJ} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \text{Im} \left[\tau \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi_I^\dagger (e^{2V})^K_J \Phi^K + \tau \int d^2\theta \text{Tr} (W^\alpha)^I_J (W_\alpha)^J_I \right] \quad (15) \\ &= D_m Q^\dagger D^m Q + i\bar{\psi} \bar{\sigma}^m D_m \psi + F^\dagger F - i\sqrt{2} \bar{\psi} \lambda Q + i\sqrt{2} Q^\dagger \lambda \bar{\psi} + Q^\dagger D Q \\ &\quad + D_m \tilde{Q} D^m \tilde{Q}^\dagger + i\tilde{\psi} \sigma^m D_m \bar{\tilde{\psi}} + \tilde{F} \tilde{F}^\dagger - i\sqrt{2} \tilde{\psi} \lambda \tilde{Q}^\dagger + i\sqrt{2} \tilde{Q} \bar{\lambda} \tilde{\psi} - \tilde{Q} D \tilde{Q}^\dagger \\ &\quad + \sqrt{2} \text{Re} (\tilde{Q} \phi F + \tilde{F} \phi Q + \tilde{Q} F_\Phi Q - \psi \psi_\Phi \tilde{Q} - \tilde{\psi} \psi_\Phi Q - \tilde{\psi} F_\Phi \psi) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \text{Im} \tau (D_m \phi^\dagger D^m \phi + i\bar{\psi}_\Phi \bar{\sigma}^m D_m \psi_\Phi + F_\Phi^\dagger F_\Phi - i\sqrt{2} \bar{\psi}_\Phi \bar{\lambda} \phi + i\sqrt{2} \phi^\dagger \lambda \bar{\psi}_\Phi + \phi^\dagger D \phi) \\ &\quad + \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} - i\lambda \sigma^m D_m \bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 \right) + \frac{\theta}{32\pi^2} \text{Tr} F_{mn} \tilde{F}^{mn} \quad (16) \end{aligned}$$

超場と成分場の関係は、\$Q, \tilde{Q}, W(V)\$ については (12) 式であり、

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi^a(x, \theta, \bar{\theta}) T^a = \phi(y) + \sqrt{2} \theta \psi_\Phi(y) + \theta \theta F_\Phi(y)$$

とする。\$N = 2\$ SQCD のスーパーポテンシャルには \$\tilde{Q} \Phi Q\$ が含まれ、物質場のカイラル対称性が明らかに破れている。なお、質量項は \$N = 1\$ SQCD と同様に入れられる。

このラグランジアンは、\$N = 1\$ のときを拡張して、2 種類のフェルミオン座標 \$\theta_{1\alpha}, \theta_{2\alpha}\$ を導入し \$N = 2\$ 超空間・超場を定義すれば実際に導かれる [22]。\$N = 2\$ SQCD の特徴として、例えばゲージ群 \$U(1)\$ の SYM を考える。\$N = 2\$ 超空間のカイラル超場

$$\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2) = \Phi(\theta_1) + \sqrt{2} i \theta_2 W(\theta_1) - \frac{1}{4} \theta_2 \theta_2 \bar{D}_1 \bar{D}_1 \Phi^\dagger(\bar{\theta}_1)$$

から作られるゲージ不変な関数を \$\mathcal{F}(\mathcal{A})\$ とおくと、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \text{Im} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \mathcal{F}(\mathcal{A})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[\int d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} \Phi^\dagger + \int d^2\theta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha \right] \quad (17)$$

のようにして (16) 式を得ることができる [23]。つまり、 $N = 1$ の言葉で見たスーパーポテンシャルと Kähler ポテンシャルが、 $N = 2$ SQCD では 1 つの正則関数 \mathcal{F} から導かれるのである。この \mathcal{F} はプレポテンシャルと呼ばれる。

$N = 1$ のときと同じように、 $N = 2$ SQCD でも超場の座標 θ_1, θ_2 を回転を伴う R 対称性がある。 $N = 2$ の場合にはフェルミオン座標が 2 組あるので、 $\theta_a \rightarrow U_a^b \theta_b$ という $U_a^b \in SU(2)_R$ 対称性、 $\theta_a \rightarrow e^{-i\alpha} \theta_a$ という $U(1)_R$ 対称性がとれる。しかし、(16) 式のように $N = 1$ の言葉で書くと、フェルミオン座標は θ_1 組になってしまうので、 $SU(2)_R$ の $U(1)$ 部分群 ($U(1)_J$ とおく) しか見えない。 $U(1)_J$ による変換は、 $\theta_{\alpha=1} \rightarrow e^{-i\alpha} \theta_{\alpha=1}$, $\theta_{\alpha=2} \rightarrow e^{i\alpha} \theta_{\alpha=2}$ と作用する。 $U(1)_J$ はカイラル対称性ではない。

第 2.1.1 節で、 $N = 1$ と $N \leq 2$ の超対称性の違いとしてセントラルチャージの有無があげられることを見た。実際に $N = 2$ SQCD のラグランジアン (16) から Q_α を作って、その交換関係を計算すれば

$$Z = \sum_{I=1}^{N_c} (n_e^I a^I + n_m^I a_D^I) + \sum_{i=1}^{N_f} S_i m_i \quad (18)$$

を得る。但し、 $\phi = \text{diag}(a^1, \dots, a^{N_c})$ とゲージ変換により対角化しており、このとき n_e^I, n_m^I は電場 E_i^I 、磁場 B_i^I の表面積分からくる電荷及び磁荷であり、 $\sum_I n_e^I = 0, \sum_I n_m^I = 0$ を満たす。また、 $a_D = \tau a$ である。 m_i はクォークの質量項を $\sqrt{2} \text{Re} m_i \bar{Q}_{iI} Q^{iI}$ で入れたときの裸の質量であり、このとき $U(1)^{N_f}$ に破れたフレーバー対称性の保存電荷が S_i である。(18) 式は古典的に求めたものであるが、量子補正を受けても式自体は変わらないと考えられる。

ここで中心電荷が 0 でない場合のスペクトルを考えておく。第 2.1.2 節と同様に、 $m \neq 0$ のとき静止系が取れて、

$$\begin{aligned} \{Q_{i\alpha}, \bar{Q}_{j\beta}\} &= 2m \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \\ \{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} &= -2\sqrt{2}iZ^* \epsilon_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

である。これらの Q, \bar{Q} を組み直して

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{Q_{11}}{\sqrt{-iZ^*}} + \frac{\bar{Q}_{22}}{\sqrt{iZ}} \right) & a_2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{Q_{12}}{\sqrt{-iZ^*}} - \frac{\bar{Q}_{21}}{\sqrt{iZ}} \right) \\ b_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{Q_{21}}{\sqrt{-iZ^*}} + \frac{\bar{Q}_{12}}{\sqrt{iZ}} \right) & b_2 &= \frac{1}{4} \left(-\frac{Q_{22}}{\sqrt{-iZ^*}} + \frac{\bar{Q}_{11}}{\sqrt{iZ}} \right) \end{aligned}$$

とすると、これらは以下のような生成消滅演算子の代数を満たす。

$$\begin{aligned} \{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{2}|Z|} + 1 \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{2}|Z|} - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

左辺は正值演算子だから、右辺も正でなくてはならない。つまり

$$m \geq \sqrt{2}|Z| \quad (19)$$

が導かれる [24]。このような電荷・磁荷と質量の関係式は他の模型でも古典的に与えられて [25]、量子補正を受けても関係式は保たれると思われる [26]。等号が成り立つ状態を BPS 状態といい、このとき生成消滅演算子の半分が落ちるから、 $m = 0$ のときと同じく小さな表現を作っている。 $m = 0$ の状態が何らかの理由で $m \neq 0$ になった場合、自由度が増えるとは考えられないから BPS 状態に移るものと推測される。実際このことは、Higgs 機構でゲージ場が $m \neq 0$ になる場合など知られている模型については確認されている [26]。

2.2 $N = 1$ SQCD

この節では、ラグランジアン (11) 式から出発して、 $N = 1$ SQCD の低エネルギーでの古典的・量子論的な振舞いを説明する。以下、ゲージ群は $SU(N_c)$ とする。

2.2.1 古典的 moduli 空間

ラグランジアン (11) 式から、運動方程式として

$$\begin{aligned} -F &= \left. \frac{\partial W}{\partial Q^\dagger} \right|_{\theta=0} = 0 \\ -\frac{1}{g^2} D^a &= Q_{iI}^\dagger (T^a)^I_J Q^{iJ} - \tilde{Q}_{iI} (T^a)^I_J \tilde{Q}^{\dagger iJ} \end{aligned} \quad (20)$$

を得る。真空はポテンシャル最小の点であり、(11) 式には $F^\dagger F$, $\tilde{F}\tilde{F}^\dagger$, D^2 という正值の項が含まれているから、場の真空期待値は $F=0$, $D^a=0$ を満たさなくてはならない。 $\text{Tr} T^a = 0$ と (20) 式より、結局スクォークの真空期待値について

$$Q_{iI}^\dagger Q^{iJ} - \tilde{Q}_{iI} \tilde{Q}^{\dagger iJ} \propto \delta_I^J \quad (21)$$

なる条件式が導かれる。真空は連続的に縮退しており、 $\mathcal{M}_{cl} = \{Q, \tilde{Q} \mid (21) \text{ 式} \}$ なる空間を張る。このように、超対称性のある理論ではスカラー場 ϕ が自然に含まれるため、その期待値の異なる真空が無限に縮退していることが多い。 \mathcal{M}_{cl} のような空間を moduli 空間と呼ぶ。

因みに $U(1)$ ゲージ理論を考えると、真空期待値は (20) 式から $Q_i^\dagger Q^i - \tilde{Q}_i \tilde{Q}^{\dagger i} = 0$ を満たせば良いから $Q = \tilde{Q} = 0$ のゲージ対称性を破らない真空も許される。ここで、ラグランジアンにベクトル超場中の補助場 D を加えることを考えよう。これは Fayet-Iliopoulos の D -term と呼ばれる。 D は超場の $\theta^2 \bar{\theta}^2$ 成分だから、超対称変換の下で全微分の形の変化しか出ず、ラグランジアンに加えても超対称性は破れない。また、 $U(1)$ ゲージ変換のもとでも D は不変である。このとき D についての運動方程式から超対称性を破らない真空の条件は $Q_i^\dagger Q^i - \tilde{Q}_i \tilde{Q}^{\dagger i} = -1$ となり、物質場の真空期待値は 0 ではあり得ず、必ず Higgs 機構を起こすことが分かる。

\mathcal{M}_{cl} を詳しく調べるために、(21) 式を扱いやすい形に書きかえる。 Q, \tilde{Q} を行列

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{11} & \cdots & Q^{N_f 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q^{1 N_c} & \cdots & Q^{N_f N_c} \end{pmatrix} \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \cdots & \tilde{Q}_{1 N_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Q}_{N_f 1} & \cdots & \tilde{Q}_{N_f N_c} \end{pmatrix} \quad (22)$$

で表し、これらに $SU(N_c)$ のゲージ変換と $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$ のフレーバー変換を作用させて変形することを考える。まず $N_f \geq N_c$ であるとする。(22) 式の行列内の各列は、 $SU(N_c)$ のベクトルである。 N_f 個のベクトルのうち r 個が一次独立であるとする、 $SU(N_c)$ の変換で基底を取り替えることにより、

$$Q \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_r \\ c_{1(r+1)} & \cdots & c_{r(r+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1 N_c} & \cdots & c_{r N_c} \end{pmatrix}$$

とできる。また、行列内の各行は $SU(N_f)$ のベクトルで、 r 個が独立であるから、 $SU(N_f)$ の変換によって

$$Q \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r \end{pmatrix}$$

と対角化される。 \tilde{Q} についても同様で、 $N_f < N_c$ の場合も同様に対角化できるので、ゲージ変換とフレーバー変換分の自由度を除いたスクォークの真空期待値は、一般に以下で与えられることになる。

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{N_c} \end{pmatrix} \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{a}_{N_c} \end{pmatrix} \quad \text{for } N_f \geq N_c \quad (23)$$

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{N_f} \end{pmatrix} \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{a}_{N_f} \end{pmatrix} \quad \text{for } N_f \leq N_c \quad (24)$$

これらを (21) 式に代入すれば、

$$|a_i|^2 - |\tilde{a}_i|^2 = i \text{ によらない定数} \quad (25)$$

を得る。また、QCD におけるゲージ不変性から、 a_i, \tilde{a}_i の代わりにゲージ不変なパラメータで moduli 空間を表すのが適当である。 $SU(N_c)$ ではこのようなパラメータとして、不変テンソル $\delta_J^I, \epsilon_{I_1 I_2 \dots I_{N_c}}$ から

$$\text{メソン} \quad M_j^i = Q^i \tilde{Q}_j = \begin{pmatrix} a_1 \tilde{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{N_f} \tilde{a}_{N_f} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\text{バリオン} \quad \begin{aligned} B^{[i_1 i_2 \dots i_{N_c}]} &= \epsilon_{I_1 I_2 \dots I_{N_c}} Q^{i_1 I_1} Q^{i_2 I_2} \dots Q^{i_{N_c} I_{N_c}} \\ \tilde{B}_{[i_1 i_2 \dots i_{N_c}]} &= \epsilon^{I_1 I_2 \dots I_{N_c}} \tilde{Q}_{i_1 I_1} \tilde{Q}_{i_2 I_2} \dots \tilde{Q}_{i_{N_c} I_{N_c}} \end{aligned} \quad (27)$$

が作られる。 $N_f < N_c$ のときバリオンは作れず、ゲージ不変なパラメータはメソンだけである。

以上により、古典的 moduli 空間は

$$\mathcal{M}_{cl} = \{M = (26) \text{ 式}; B, \tilde{B} = (27) \text{ 式}; (25) \text{ 式} \}$$

のように求められた。以下の小節では、量子補正の入った moduli 空間 \mathcal{M}_q について、 N_f ごとに調べていく。

2.2.2 $N_f < N_c$ での量子論的 moduli 空間

2.1.3 節で見たように、 $N = 1$ の超対称性を持つラグランジアンは Kähler ポテンシャルとスーパーポテンシャルから構成される。この小節では、スーパーポテンシャルの正則性と対称性によって、 $N = 1$ SQCD の低エネルギーでの有効スーパーポテンシャル W_{eff} ²、を決定する [28]。

² W_{eff} は、あるエネルギースケール以上の重い粒子の自由度を積分して得られるもので、Wilsonian 有効作用と呼ばれる。大抵の場の理論の教科書に載っている有効作用は 1PI 有効作用と呼ばれ、全ての粒子の自由度を積分したものである。従って軽い粒子がある場合は Wilsonian 有効作用と異なり、特に質量 0 の粒子があれば赤外発散によって ill-defined になる [27]。

W_{eff} は理論の低エネルギー励起状態に対応する場について正則関数で、系の持つ対称性

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_A$	$U(1)_R$
Q	N_c	N_f	1	1	1	0
\tilde{Q}	\bar{N}_c	1	\bar{N}_f	1	1	0
W	$N_c^2 - 1$	1	1	0	0	1

のもとでの不変性を持つ。なお、 $SU(N_c)$ から $SU(N_f)_R$ までは表現の次元を、残る $U(1)$ 対称性についてはその電荷を示した。カイラルな $U(1)$ 対称性には量子異常が現れ、対応するカレントは

$$\partial_m J^m = -\frac{1}{16\pi^2} F_{mn}^a \tilde{F}^{amn} \sum_i d_2(r_i) c(i)$$

に従う。但し、 \sum_i はゲージ場と相互作用するフェルミオン ψ_i についての和で、 ψ_i は $SU(N_c)$ の r_i 表現に属し、の $U(1)$ 電荷は $c(i)$ である。 $d_2(r)$ は $SU(N_c)$ の r 表現における 2 次のカシミアで、 $d_2(N_c) = \frac{1}{2}$ と規格化した。今、カイラル $U(1)$ 対称性は $U(1)_A$ と $U(1)_R$ の 2 つであり、それぞれ成分フェルミオン場の電荷は以下のようにになっているから、

	$U(1)_A$	$U(1)_R$
ψ	1	-1
$\tilde{\psi}$	1	-1
λ	0	1

対応するカレントは

$$\begin{aligned} \partial_m J_A^m &\propto 2N_f \\ \partial_m J_R^m &\propto 2(N_c - N_f) \end{aligned}$$

のようになる。よって 2 つの $U(1)$ から、量子異常のない $U(1)$ カレント

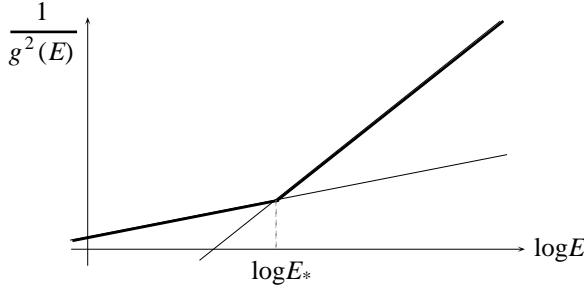
$$\partial_m \left(J_R^m + \frac{N_f - N_c}{N_f} J_A^m \right) = 0 \quad (28)$$

を作ることができて、この量子異常のない対称性を改めて $U(1)_R$ とする。ただし、 $U(1)_A$ についても、 $Q \rightarrow e^{i\alpha} Q$ と同時に $\theta \rightarrow \theta + 2N_f \alpha$ とすれば作用は不変になり、有効作用を議論する際の選択則を与える。 $N = 1$ SQCD の β 関数は

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -\frac{g^3}{16\pi^2} \frac{3N_c - N_f + N_f \gamma(g^2)}{1 - N_c(g^2/8\pi^2)} \\ \gamma(g^2) &= -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} + \mathcal{O}(g^4) \end{aligned} \quad (29)$$

であるから [29]、1-loop レベルで $2\pi i\tau = \log\left(\frac{\Lambda}{E}\right)^{(3N_c - N_f)}$ であり、上述の $U(1)_A$ のもとでの θ の変換は $\Lambda^{3N_c - N_f} \rightarrow e^{2iN_f \alpha} \Lambda^{3N_c - N_f}$ に相当する。以上をまとめると、対称性は以下のように決まる。

	$SU(N_c)$	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$	$U(1)_A$
Q	N_c	N_f	1	1	$\frac{N_f - N_c}{N_f}$	1
\tilde{Q}	\bar{N}_c	1	\bar{N}_f	-1	$\frac{N_f - N_c}{N_f}$	1
W	$N_c^2 - 1$	1	1	0	1	0
$\Lambda^{3N_c - N_f}$	1	1	1	0	0	$2N_f$



あるスケール $E = E_*$ で結合定数が一致。
高エネルギー理論と低エネルギー理論が
移り変わる。

図 1: スケールマッチング

ここで、低エネルギーでは理論は閉じ込め相にあり、正しい自由度はメソン M_j^i で与えられると仮定する。これは、

1. 超対称性のない QCD で記述される現実のクォーク・グルーオンの系が、低エネルギーでは閉じ込めを起こしてメソン及びバリオンが自由度として観測されていること
2. 格子ゲージ理論により、理論的にも閉じ込めが予想されていること

に基づくものである。よって $\int d^2\theta W_{\text{eff}}$ は M_j^i , Λ の関数で、前表に掲げた対称性を持たなくてはならないから。

$$W_{\text{eff}} = C_{N_c, N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (30)$$

と唯一定まる。 C_{N_c, N_f} は定数である。

C_{N_c, N_f} は、以下のように様々な極限での値を評価することから求められる。

1. a_{N_f} が非常に大きい場合

$a_{N_f} \rightarrow \infty$ では、フレーバー N_f の $SU(N_c)$ ゲージ理論から Higgs 機構によってフレーバー $(N_f - 1)$ の $SU(N_c - 1)$ ゲージ理論に移る。これに伴い、 W_{eff} も正しく変形しなくてはならない。つまり、 $a_{N_f} \tilde{a}_{N_f} \rightarrow \infty$ に伴って

$$C_{N_c, N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \rightarrow C_{N_c - 1, N_f - 1} \left(\frac{\tilde{\Lambda}^{3(N_c - 1) - (N_f - 1)}}{\det \tilde{M}} \right)^{\frac{1}{(N_c - 1) - (N_f - 1)}} \quad (31)$$

ここで、ティルダをつけたものは低エネルギー、すなわち Higgs 機構の影響が見える領域でのパラメータを表す。具体的には、

$$\det M = a_{N_f} \tilde{a}_{N_f} \det \tilde{M} \quad (32)$$

また $\bar{D}R$ (dimensional reduction) と呼ばれる繰り込み方法 [30] の下でのスケールマッチングは、

$$\tilde{\Lambda}^{3(N_c - 1) - (N_f - 1)} = \frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{a_{N_f} \tilde{a}_{N_f}} \quad (33)$$

である (図 1 にスケールマッチングの概念図を示した)。 (31) 式に (32)(33) 式を代入すれば、 $C_{N_c, N_f} = C_{N_c - 1, N_f - 1} \equiv C_{N_c - N_f}$ となり、定数 C_{N_c, N_f} は $N_c - N_f$ によって決まることが分かる。

2. N_f 番目のクォークの質量 $m \rightarrow \infty$

ラグランジアンに、最初から $W_{\text{tree}} = m M_{N_f}^{N_f}$ を加えておく。質量 m が十分大きければ、低エネルギーではフレーバー数が N_f から $N_f - 1$ になる。このときスケールの関係式は、 $\bar{D}R$ 法により $\tilde{\Lambda}^{3N_c - (N_f - 1)} =$

$m\Lambda^{3N_c-N_f}$ である。この場合はパラメータ m が新たに加わるので、前段落で求めた W_{eff} (30) 式が変更を受ける可能性がある。 m を入れて同じ議論を繰り返すと、

$$W_{\text{eff}} = \left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} \times f(t), \quad t = mM_{N_f}^{N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det M} \right)^{-\frac{1}{N_c-N_f}} \quad (34)$$

となる。質量が小さい領域では $f(t) = C_{N_c-N_f} + t$ であるから、

$$W_{\text{eff}} = C_{N_c, N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} + mM_{N_f}^{N_f} \quad (35)$$

が全ての領域で厳密に成り立つ。運動方程式により重い自由度 $M_{N_f}^{N_f}$ を消去すると、 C_{N_c, N_f} と C_{N_c, N_f-1} を関係付けられる。これと第1項で求めた $C_{N_c, N_f} = C_{N_c-N_f}$ により、 $C_{N_c, N_f} = (N_c - N_f)C^{\frac{1}{N_c-N_f}}$ であることが分かる。

なお、 C は N_c, N_f によらない定数で、 $N_f = N_c - 1$ の場合にはインスタントンの寄与により (30) 式が再現され [28]、 \overline{DR} 法の下では $C=1$ と計算されている [31]。 $N_f = N_c - 1$ では Higgs 機構により $SU(N_c)$ が完全に壊され、非可換部分群を持たないので漸近自由ではない。よって結合定数は低エネルギー領域でも十分小さくできるから、インスタントン計算の結果は信頼できる。よって

$$W_{\text{eff}} = (N_c - N_f) \left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} \quad (36)$$

となる。なお、 $N_f < N_c - 1$ ではゲージ群が Higgs 機構では完全には破れず、非可換部分群が残るので低エネルギーでのインスタントン計算は信頼性を失う。この場合はグルイーノ凝縮によって (36) 式が生成されると考えられている [28]。

(36) 式の確認のために、全てのクォークに大きな質量を与えた極限を考える。低エネルギー理論はフレーバーが 0 でゲージ群が $SU(N_c)$ の pure Yang-Mills 理論になる。このとき、スーパーポテンシャルは (35) 式と同様にして

$$W_{\text{eff}} + \text{Tr}mM \quad (37)$$

と導かれ、これを最小にする点は

$$\langle M_j^i \rangle = (\Lambda^{3N_c-N_f} \det m)^{\frac{1}{N_c}} \left(\frac{1}{m} \right)_j^i \quad (38)$$

である。スケールマッチングは $\Lambda^{3N_c-N_f} \det m = \tilde{\Lambda}^{3N_c}$ だから、 $m \rightarrow \infty$ の極限では \mathcal{M}_q の原点付近に $(\)^{\frac{1}{N_c}}$ からくる N_c 個の超対称な真空が存在することがわかる。これは、Witten index による議論によって求められた結果 [32] と一致しているから、(36) 式は正しいと思われる。なお、クォークの質量が厳密に 0 の場合は、 $M_j^i \rightarrow \infty$ となって真空は安定でなくなるから、低エネルギーの自由度として M_j^i をとることは適当でなく、(36) 式の W_{eff} による記述が成り立たない。しかし、質量を入れた場合の議論が無矛盾であることなどから、形式的には $m \rightarrow 0$ の場合でも上記の議論は正しく、(36) 式の W_{eff} は有効であると思われる。従って $m = 0$ のとき $F = 0$ に解はなく、超対称で安定な真空はないと結論される。

なお次の小節で紹介するように、低エネルギーの正しい自由度を評価する方法として、'tHooft の量子異常適合条件がある。これはカイラルな対称性があるときに使える方法で、今の場合厳密には $m \neq 0$ でなくてはならず、カイラル対称性は陽に破れてしまうので使えない。

2.2.3 $N_f = N_c, N_c + 1$ での量子論的 moduli 空間

$N_f = N_c$ でも、理論は閉じ込めを起こしていると仮定する。前小節で扱った $N_f < N_c$ のときと異なり、メソン M に加えてバリオン B, \tilde{B} が低エネルギーでの自由度として出てくる。しかし、これらのパラメータは独立ではない。(24) 式を (26)(27) 式に代入すると分かるように、古典的には

$$\det M - \tilde{B}B = 0 \quad (39)$$

の関係を満たす。従って古典的 moduli 空間 \mathcal{M}_{cl} 上で $B = \tilde{B} = 0, \text{rank}M \leq N_c - 2$ の点を考えると、 $d(\det M - \tilde{B}B) = 0$ となるので接線が定まらず特異である。この特異性は、これらの点での低エネルギー自由度が、 \mathcal{M}_{cl} 上の一般の点よりも多くなっているためと思われる。実際、 \mathcal{M}_{cl} の一般の点で、Higgs 機構によってゲージ群が $SU(N_c - N_f)$ に破れるのに対し、 $\text{rank}M \leq N_c - 2$ の点では $SU(N_c - \text{rank}M)$ であるから、質量が 0 のままのゲージ場が多くなっている。

ここで量子論的 moduli 空間に移ると、条件式 (39) は量子補正を受けて

$$\det M - \tilde{B}B = \Lambda^{2N_c} \quad (40)$$

となることが分かる [33]。このことは、以下のようにして確認できる。今考えている $N_f = N_c$ の理論を、質量項 $W_{\text{tree}} = \text{Tr}mM$ を加えて $m \rightarrow 0$ の極限をとったものと考え、ここで $m_{N_f}^{N_f} \rightarrow \infty$ の極限をとってみると、低エネルギーでは $N_f = N_c - 1$ の理論に落ちるから (36) 式のスーパーポテンシャルが再現されるはずである。従ってこの極限でのスーパーポテンシャルは $W_{\text{tree}} + W_{\text{eff}}$ の形で与えられるはずで、その極小は (38) 式及び $B = \tilde{B} = 0$ で与えられる。従って、 $N_f = N_c$ では (40) 式を満たす。また、 $W_{\text{tree}} = \text{Tr}mM + bB + \tilde{b}\tilde{B}$ で $m, b, \tilde{b} \rightarrow 0$ の極限をとったと考えて同様の議論を行なうと、 $\langle \tilde{B}b \rangle \neq 0$ になって (40) 式が満たされている。[34]。

(40) 式を見ると分かるように、古典的には原点に存在した特異点が、量子補正によって消えている。古典的に原点にあった特異点はゲージ群が回復することに伴うものだった。この特異点が消えるということは、ゲージ対称性 $SU(N_c)$ が、量子補正によって完全に壊れているということである。古典的な Higgs 機構では $SU(N_c - \text{rank}M)$ までしか壊せないから、残った部分群は閉じ込めによって壊されていると考えられ、Higgs 相と閉じ込め相が混在していると思われる。超対称性のない QCD でも基本表現でのみ物質が入っている場合、Higgs 相と閉じ込め相はなめらかにつながっていて区別がないことが格子ゲージ理論での解析により分かっている [35]。従って、この結果はそれほど奇妙ではない。

ところで、古典的に真空として許された $M = B = \tilde{B} = 0$ は、量子異常のない大域的対称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_R$ を保つ唯一の点であった。量子論的にはこの点は消えて、大域的対称性はもっと小さくなる。しかし、(40) 式ではカイラル対称性が完全に破れるわけではないので、残った対称性を使って 'tHooft の量子異常釣合条件を確認することができる。

ここで、'tHooft の量子異常釣合条件の概略を説明する (図 2)。まず大域的な対称性をゲージ対称性にする。新たなゲージ結合定数を充分小さくとれば、高エネルギーでの振舞いは元の理論とほとんど変わらない。一般には、このようにして作ったゲージ理論は量子異常を持ち、ill-defined である。そこで、新たなゲージ場とのみ相互作用するフェルミオン (spectator フェルミオン) を導入して量子異常を消す。図 2(a)(b) 中の spectator フェルミオンの寄与は等しいから、もとの理論の高エネルギーと低エネルギーでの自由度についての条件式 (c) が得られる。これが 'tHooft の量子異常釣合条件である。評価されるのはフェルミオンの自由度のみだが、超対称性がある場合にはボソンの自由度も決まってしまうので、低エネルギーでの自由度を完全に評価できる。実際に、以下で \mathcal{M}_q 上のいくつかの点に適用する。

1. $B = \tilde{B} = 0, M_j^i = \Lambda^2 \delta_j^i$

$$SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \times U(1)_B \times U(1)_R \rightarrow SU(N_f)_V \times U(1)_B \times U(1)_R$$

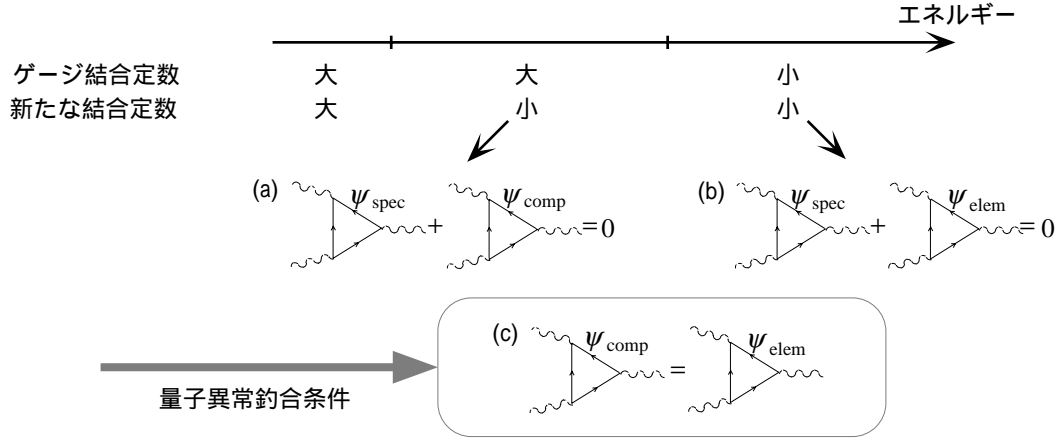


図 2: 'tHooft の量子異常釣合条件

なる対称性が残っている。このうちカイラルなのは、 $U(1)_R$ のみである。高エネルギーの自由度と低エネルギーの自由度及び変換性は

自由度	高エネルギー			低エネルギー		
	Q	\tilde{Q}	W	M	B	\tilde{B}
$SU(N_f)_V$	N_f	\bar{N}_f	1	$N_f^2 - 1$	1	1
$U(1)_B$	1	-1	0	0	N_f	$-N_f$
$U(1)_R$	0	0	1	0	0	0

である。なお、 M が $SU(N_f)_V$ の $N_f^2 - 1$ 表現になっているのは、(40) 式によって自由度が 1 個落ちていることによる。量子異常は、三角ダイアグラムの各頂点に以下の表の第一列のゲージ場が接続したもものから出る。高エネルギー、低エネルギーそれぞれで係数を計算すると、

ゲージ場	高エネルギー	低エネルギー	結果
$SU(N_f)_V^2 U(1)_R$	$-2N_c \times d_2(N_f)$	$-d_2(N_f^2 - 1)$	$-N_f$
$U(1)_B^2 U(1)_R$	$2N_f N_c \times 1^2(-1)$	$1 \times N_f^2(-1) + 1 \times (-N_f)^2(-1)$	$-2N_f^2$
$U(1)_R^3$	$2N_f N_c \times (-1)^3 + (N_c^2 - 1) \times 1^3$	$(N_f^2 - 1) \times (-1)^3 + 2 \times (-1)^3$	$-N_f^2 - 1$
$U(1)_R(\text{gravity})$	$2N_f N_c \times (-1) + (N_c^2 - 1) \times 1$	$(N_f^2 - 1) \times (-1) + 2 \times (-1)$	$-N_f^2 - 1$

となる。自由度数 \times 電荷の順に書いた。カイラル超場の R 電荷に対して成分フェルミオン場の R 電荷は 1 下がることに注意する。よって 'tHooft の量子異常釣合条件が満たされ、この点上では低エネルギーでの自由度が M, B, \tilde{B} と条件 (40) 式で与え得ることが分かる。

2. $M_j^i = 0, B = -\tilde{B} = \Lambda^{N_f}$

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_R \rightarrow SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_R$$

の対称性が残る。全てカイラル対称性で、高エネルギーの自由度と低エネルギーの自由度及び変換性は

自由度	高エネルギー			低エネルギー		
	Q	\tilde{Q}	W	M	B	\tilde{B}
$SU(N_f)_L$	N_f	1	1	N_f	1	1
$SU(N_f)_R$	1	\tilde{N}_f	1	\tilde{N}_f	1	1
$U(1)_R$	0	0	1	0	0	0

で与えられる。量子異常のあるダイアグラムの係数を計算すると、

ゲージ場	高エネルギー	低エネルギー
$SU(N_f)^3$	$\pm N_c d_3(N_f) = \pm N_f d_3(N_f)$	$\pm N_f d_3(N_f)$
$SU(N_f)^2 U(1)_R$	$N_c d_2(N_f)(-1) = -\frac{N_f}{2}$	$N_f d_2(N_f)(-1) = -\frac{N_f}{2}$

と求められる。 $d_3(N_f)$ は $SU(N_f)$ の基本表現の 3 次の Casimir を表す。 $SU(N_f)$ の添字 L, R はどちらを選んでも符合の違いしか出ないので省略した。また、 $U(1)_R^3, U(1)_R$ については前項と同じ結果を与える。よって、この点でも 'tHooft の量子異常約合条件が満たされる。

このように低エネルギーの自由度が (40) 式のもとで正しく与えられるから、これは単に真空期待値に関する条件式ではなく場そのものの満たすべき条件式であろうと考えられる。そこで、Lagrange multiplier A を導入して (40) 式をスーパーポテンシャルに取り込み、

$$W = A(\det M - \tilde{B}B - \Lambda^{2N_c}) \quad (41)$$

とする。ここで質量項 $W_{\text{tree}} = \text{Tr} m M = \sum_{i=N_f-n+1}^{N_f} m M_i^i$ を加えて n 個のスクォークを消すと、低エネルギーでは $N_f = N_c - n$ の理論に落ちる。実際に各超場の運動方程式

$$\begin{aligned} M_j^i \text{で微分} & \quad A \det M \left(\frac{1}{M} \right)_i^j + m_j^i = 0 \\ & \quad \det m \det M_h = (A \det M)^{N_f-n} = (A \det M')^{N_f-n} (\det \tilde{M})^{N_f-n} \\ A \text{で微分} & \quad \det M - \tilde{B}B - \Lambda^{2N_c} = 0 \\ B, \tilde{B} \text{で微分} & \quad B = \tilde{B} = 0 \end{aligned}$$

を使うと、

$$\begin{aligned} W_{\text{eff}} &= A(\det M - \tilde{B}B - \Lambda^{2N_c}) + \text{Tr} m M \\ &= \text{Tr} m M = \text{Tr} m M' = (N_c - n) A \det M \\ &= (N_c - n) A \det M' \det \tilde{M} = (N_c - n) A \frac{\Lambda^{2N_c}}{\det \tilde{M}} \tilde{M} \\ &= (N_f - n) \left(\frac{\Lambda^{2N_c} \det m}{\det \tilde{M}} \right)^{\frac{1}{N_f-n}} \end{aligned}$$

となるから、 $\bar{D}R$ 法により $\Lambda^{2N_c} \det m = \Lambda^{2N_c+n}$ を考慮すれば正しく (36) 式で与えられることが確認できる。

同様の方法は、 $N_f = N_c + 1$ を調べる場合も有効である。 $N_f = N_c + 1$ では、バリオン B の自由度が N_f に増える。

$$B_i = \epsilon_{ij_1 \dots j_{N_c}} Q^{j_1} \dots Q^{j_{N_c}} \quad \tilde{B}^i = \epsilon^{ij_1 \dots j_{N_c}} \tilde{Q}_{j_1} \dots \tilde{Q}_{j_{N_c}} \quad (42)$$

但し、ゲージの足についても完全反対称テンソル ϵ でつぶしてあるものとする。ここでも moduli パラメータが独立な訳ではなく、古典的には以下のような条件式がつく。

$$\det M \left(\frac{1}{M} \right)_j^i - \tilde{B}^i B_j = 0 \quad (43)$$

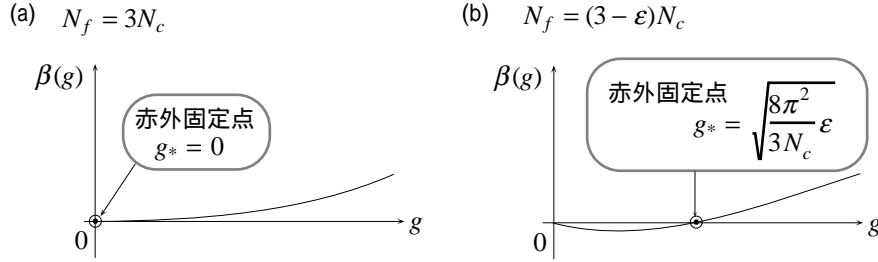


図 3: β 関数の振舞い

$$M_j^i B_i = M_j^i \tilde{B}^j = 0 \quad (44)$$

そしてこれは量子補正を受けない [33]。このことは、 $W_{\text{tree}} = m M_{N_f}^{N_f}$ を加えて N_f 番目のスクォークに質量を持たせると、スーパーポテンシャルの極小は (38) 式で与えられること、これは $m \rightarrow 0$ の極限をどう取っても (44) 式を再現することによって確認できる。

(44) 式が量子補正を受けないために、古典的 moduli 空間 \mathcal{M}_{cl} の原点での特異性はそのまま残る。従ってこの点では、moduli 空間の一般の点では表れない余分な質量 0 の粒子が出てくると考えられる。原点では 'tHooft の量子異常釣合条件が成り立ち、メソンとバリオンが正しい低エネルギーの自由度を与え得ることが示されるから、原点から離れた点ではこれらが質量を持つと考えられる。そこで、スーパーポテンシャルに対する条件として、

1. 対称性
2. moduli 空間 $\mathcal{M}_{cl} = \mathcal{M}_q$ を変えない (運動方程式として条件式 (44) が導かれる)
3. 原点では M, B, \tilde{B} が全て質量 0 で、原点からずれると質量を持つ

を課すと、

$$W_{\text{eff}} = \frac{1}{\Lambda^{2N_c-1}} (M_j^i B_i \tilde{B}^j - \det M) \quad (45)$$

が導かれ、 $\text{Tr} m M + b B + \tilde{b} \tilde{B}$ を加えて変形すると正しく $N_f < (N_c - 1)$ のスーパーポテンシャルになる [33]。なお、原点から離れるほどゲージ対称性は少なくなるので低エネルギーで弱結合であり、古典的な自由度がそのまま量子論的な自由度となる。

2.2.4 $N_f > N_c + 1$: Seiberg duality

前小節では、閉じ込めを仮定して $N_f = N_c, N_c + 1$ の \mathcal{M}_q を解析した。一方 $N_f \geq 3N_c$ では、 β 関数 (29) 式より 1-loop で $\beta > 0$ であるから、静電遮蔽によって低エネルギーでの結合定数は非常に小さくなる。従ってこの領域ではラグランジアンに表れるクォークやグルーオンがそのまま低エネルギーでの自由度となり、閉じ込めは起こっていない。このように、 N_f を大きくしていくとどこかで閉じ込めの仮定が不適当になり、前小節のような解析方法が使えなくなると考えられる。実際、 $N_f = N_c + 2$ で 'tHooft の量子異常釣合条件が満たされなくなり、メソンやバリオンは低エネルギーでの正しい自由度ではないことが分かる。

では、 $N_c + 1 < N_f \leq 3N_c$ の場合、理論はどのように振舞うと考えられるだろうか。まず $N_f = 3N_c$ での β 関数は、(29) 式より 1-loop で 0 であり、 $g = 0$ 近傍では図 3(a) のように振舞う。従って低エネルギーでは、 $g_* = 0$ の赤外固定点上の理論となる。ここからフレーバーを少し減らして $N_f = (3 - \epsilon)N_c$ ($0 < \epsilon \ll 1$) の場合を考える。(29) 式より、1-loop から負の項、2-loop の寄与では正の項が出てきて打ち消し合うから、 $g \neq 0$ で $\beta = 0$ の固定点が表れる可能性がある。実際、 $N_c g^2, \frac{N_f}{N_c}$ を変えずに $N_f, N_c \rightarrow \infty$ の極限をとると、

β 関数は図 3(b) のようになり、非自明な赤外固定点が表示れる。以上の情報から、 $N_f \leq 3N_c$ では非自明な赤外固定点を持つ理論になっていると仮定する。

ここで、固定点が存在すると仮定できる N_f の下限を考える。固定点上の理論は共形場の理論で記述されると考えられ、その表現論によりノルムが非負の状態を与える演算子 \mathcal{O} の次元は $D(\mathcal{O}) \geq 1$ でなければならない (但し等号成立は自由場の場合で、恒等演算子のみ $D = 0$ でよい) ことが知られている [36]。よって、ゲージ不変な演算子 M, B, \tilde{B} は物理的であるから、 $D(M), D(B), D(\tilde{B}) \geq 1$ でなくてはならない。これらの次元 $D(\mathcal{O})$ と R 対称性の電荷 $R(\mathcal{O})$ の間には $D(\mathcal{O}) \geq \frac{3}{2}|R(\mathcal{O})|$ の関係がある。ここで \mathcal{O} がカイラル演算子のとき等号が成立する [37]。これより

$$\begin{aligned} D(M) &= \frac{3}{2}R(M) = 3\frac{N_f - N_c}{N_f} \geq 1 \\ D(B) = D(\tilde{B}) &= \frac{3N_c(N_f - N_c)}{2N_f} \geq 1 \end{aligned} \quad (46)$$

と書ける。従って、 $N_f > \frac{3}{2}N_c$ でなくてはならない。以上、共形場の理論の表現論によって、固定点が存在しうるのは $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の領域であることが分かった。今後は、この領域では非自明な赤外固定点を持つものと仮定して議論を進める。

ところで、 $N_f = 3N_c$ では Q, \tilde{Q} が自由場で、固定点上での結合定数 g_* は 0 であった。よって $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の N_f が大きい領域では、 Q, \tilde{Q} による記述や $SU(N_c)$ ゲージ結合定数についての摂動展開が有効であると考えられる。一方、 $N_f = \frac{3}{2}N_c$ では (46) 式より $D(M) = 1$ である。複合場であるメソン M が自由場として振舞うことになるから、 g_* は大きく強結合となっていると考えられる。従って N_f が小さくなると、もともとの SQCD では解析しにくい。そこで、逆にこの領域で結合定数が小さくなるような、双対理論を探すことを考える。

まず、2 つの理論での大域的対称性は一致していなければならない。 $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$ 対称性から、双対理論でもフレーバーの数はもとと同じ N_f であると考えられる。また、2 つの理論において赤外固定点のある領域は同じはずだから、双対理論のカラー自由度を \tilde{N}_c として

$$\frac{3}{2}N_c \leq N_f \leq 3N_c \iff \frac{3}{2}\tilde{N}_c \leq N_f \leq 3\tilde{N}_c$$

が等しいと思われる。従って $\tilde{N}_c = N_f - N_c$ である。次に、moduli パラメータの次元や大域的対称性に対する変換性を一致させることを考える。双対理論の物質場を q, \tilde{q} とする。moduli パラメータ B は、双対理論で作られる『バリオン』 $b_{i_1 \dots i_{\tilde{N}_c}} = \epsilon^{I_1 \dots I_{\tilde{N}_c}} q_{I_1 i_1} \dots q_{I_{\tilde{N}_c} i_{\tilde{N}_c}}$ から、大域的対称性が合うように作れば良い。つまり、 $SU(N_f)$ の不変テンソル $\epsilon^{i_1 \dots i_{N_f}}$ を用いて

$$B^{i_1 \dots i_{N_c}} \sim \epsilon^{i_1 \dots i_{N_c} j_1 \dots j_{\tilde{N}_c}} b_{j_1 \dots j_{\tilde{N}_c}}$$

とする。 \tilde{B} についても同様である。ここから q, \tilde{q} の変換性が以下のように定まる。

	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
q	\tilde{N}_f	1	$\frac{N_c}{N_f - N_c}$	$\frac{N_c}{N_f}$
\tilde{q}	1	N_f	$-\frac{N_c}{N_f - N_c}$	$\frac{N_c}{N_f}$

メソン M_j^i の大域的対称性に対する変換性は

	$SU(N_f)_L$	$SU(N_f)_R$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
M	N_f	\tilde{N}_f	0	$2\frac{N_f - N_c}{N_f}$

であるから、双対理論でのメソン $q\tilde{q}$ とは同定できない。よって双対理論には、通常物質場とは別にゲージ不変な物質場 \tilde{M} を入れる必要がある。 \tilde{M} の変換性は M と同じにとるべきで、また次元合わせのパラメータ μ を導入して $\tilde{M} = \frac{M}{\mu}$ と表すことにする。この μ を使うと、 B と b の間の比例定数が

$$C = [-(-\mu)^{N_c - N_f} \Lambda^{3N_c - N_f}]^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

と書けることが知られている [38]。また、 $q\tilde{q}$ は双対理論のみに表れる余分な自由度であるから、スーパーポテンシャル

$$W = \frac{1}{\mu} M q\tilde{q} \quad (48)$$

を導入して消すことにする。これは、正しいスーパーポテンシャルの変換性を持つ唯一の形である。

よって、双対理論はゲージ群 $SU(N_f - N_c)$ でフレーバー N_f の SQCD に、ゲージ不変な物質場 M_j^i を加えて (48) 式のスーパーポテンシャルをつけたものと考えられる。SQCD のスケールを Λ 、双対理論のスケールを $\tilde{\Lambda}$ とすると、スケールマッチングは

$$\Lambda^{3N_c - N_f} \tilde{\Lambda}^{3(N_f - N_c) - N_f} = (-1)^{N_f - N_c} \mu^{N_f} \quad (49)$$

である。よって、2つの理論の間で強結合領域と弱結合領域が入れ替わっており、 $U(1)$ 理論の電磁双対の拡張になっている。そこで、もとの理論 (SQCD) を電気的理論、双対理論を磁氣的理論という。この双対性は、non-Abelian duality 又は Seiberg duality と呼ばれる。2つの記述を対比させると、以下のようになっている。

	電気的理論	磁氣的理論
ゲージ群	$SU(N_c)$	$SU(N_f - N_c)$
超場	Q, \tilde{Q}, W	$q, \tilde{q}, \tilde{W}, M$
スーパーポテンシャル	0	$\frac{1}{\mu} M q\tilde{q}$

前段落では、moduli 空間の原点での2つの理論の自由度を対応付けることにより、強引に双対理論を作った。もしこの結果が正しければ、moduli 空間の全領域で双対関係が成り立っているはずである。例えば $M \neq 0, B = \tilde{B} = 0$ の点を考える。この点での電気的理論は、Higgs 機構によってゲージ群 $SU(N_c - n)$ 、フレーバー $(N_f - n)$ の理論になっている。これを磁氣的理論でみると、スーパーポテンシャル (48) 式から q, \tilde{q} に質量がつくことに相当する。よってゲージ群は変わらず $SU(N_f - N_c)$ で、フレーバーは $(N_f - n)$ の理論になる。これはこの点上での電気的理論の Seiberg dual になっており、moduli 空間の原点以外でも Seiberg duality が成り立っている。示され、また、質量項によって理論を変形した場合も、やはり Seiberg duality が成り立っていることが確認されている [3]。

最後に、moduli 空間の原点で、2つの理論の間の 'tHooft の量子異常釣合条件をみる。量子異常がでるのは、下表最左列のゲージ粒子が飛ぶ場合で、全て条件が成り立っていることが確認できる。なお、 $SU(N_f)$ としては $SU(N_f)_L$ を選んだ。

ゲージ場	電気的理論	磁氣的理論	結果
$SU(N_f)^3$	$N_c d_3(N_f)$	$(N_f - N_c) d_3(\bar{N}_f) + N_f d_3(N_f)$	$N_c d_3(N_f)$
$SU(N_f)^2 U(1)_B$	$N_c d_2(N_f)$	$(N_f - N_c) d_2(N_f) \frac{N_c}{N_c - N_c}$	$N_c d_2(N_f)$
$SU(N_f)^2 U(1)_R$	$N_c d_2(N_f) \left(\frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right)$	$(N_f - N_c) d_2(\bar{N}_f) \left(\frac{N_c}{N_f} - 1 \right)$ $+ N_f d_2(N_f) \left(2 \frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right)$	$- \frac{N_c^2}{N_f} d_2(N_f)$
$U(1)_R^3$	$2 N_f N_c \left(\frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right)^3$ $+ (N_c^2 - 1) 1^3$	$2 N_f (N_f - N_c) \left(\frac{N_c}{N_f} - 1 \right)^3$ $+ \{ (N_f - N_c)^2 - 1 \} 1^3 + N_f^2 \left(2 \frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right)^3$	$- 2 \frac{N_c^4}{N_f} + N_c^2 - 1$
$U(1)_B^2 U(1)_R$	$2 N_f N_c (\pm 1)^2 \left(\frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right)$	$2 N_f (N_f - N_c) \left(\pm \frac{N_c}{N_f - N_c} \right)^2 \left(\frac{N_c}{N_f} - 1 \right)$	$- 2 N_c^2$
$U(1)_R(\text{gravity})$	$2 N_f N_c \left(\frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right)$ $+ (N_c^2 - 1)$	$2 N_f (N_f - N_c) \left(\frac{N_c}{N_f} - 1 \right)$ $+ \{ (N_f - N_c)^2 - 1 \} + N_f^2 \left(2 \frac{N_f - N_c}{N_f} - 1 \right)$	$- N_c^2 - 1$

以上で見たように、フレーバーが $\frac{3}{2}N_c \leq N_f \leq 3N_c$ の領域では、電気的理論と磁氣的理論という2つの低エネルギーで等価な記述がある。電気的理論でみると、フレーバーが大きくなるに従って赤外固定点上での結合定数は小さくなり、 $N_f = 3N_c$ では Q, \bar{Q} が自由場になる。 $N_f > 3N_c$ では赤外自由な理論だから、電気的理論による記述がよい。逆に磁氣的理論でみると、フレーバーが小さくなるに従って赤外固定点上での結合定数が小さくなり、 $N_f = \frac{3}{2}N_c$ ではメソン M や q, \bar{q} の共形次元が1で自由場になることが分かる。よって電気的理論との対応から、 $N_f < \frac{3}{2}N_c$ では磁氣的な記述で赤外自由な理論に見えらると思われる。

2.2.5 $N = 1$ SQCD まとめ

以上、この節の結果をまとめると、図4のようになる。

$N_f < N_c$ では、ADS型のスーパーポテンシャルが非摂動的に生成され、物質場の質量が0の極限では超対称性を持つ安定な真空がないことが分かった。 $N_f = N_c, N_c + 1$ では閉じ込めを仮定したが、'tHooftの量子異常約合条件が成り立つこと、質量項による変形で N_f を減らしたとき無矛盾な結果を導くことによって、正しいと思われる。 $\frac{3}{2}N_c \leq N_f \leq 3N_c$ では非自明な赤外固定点が存在し、SQCDに低エネルギーで等価と思われる磁氣的な理論が構成された。これを Seiberg duality と呼んだ。Seiberg duality によって、強結合領域と弱結合領域が入れ替わる。よって、 $N_f > 3N_c$ ではSQCDの記述で赤外自由であるのに対応し、 $N_f < \frac{3}{2}N_c$ では磁氣的な記述で赤外自由であると思われる。ここで、赤外固定点の存在は仮定であるが、全体として矛盾のない結果が導かれ、正しいと思われる。

なお、ここで評価したのはスーパーポテンシャルであり、Kählerポテンシャルについてどのような量子補正が入るかは議論されていない。結果を大きく変えるとは思えないが、この評価は今後の課題である。また、ここでの手法を $SO(N_c), Sp(2N_c)$ など別の群の場合に適用したり [4][5]、基本表現以外の場、スーパーポテンシャルを入れた場合についての考察 [6] がなされている。特に全く別の表現のフレーバーが入った理論の間の Seiberg duality [7] については、個々の理論の間の双対関係は分かっていたものの [8]、統一的な導出方法は明確でない。

2.3 $N = 2$ SQCD

この節では、 $N = 2$ SQCDのラグランジアン (16) 式から出発して、古典的 moduli 空間 \mathcal{M}_{cl} を導き、ついて量子論的振舞いを説明する。

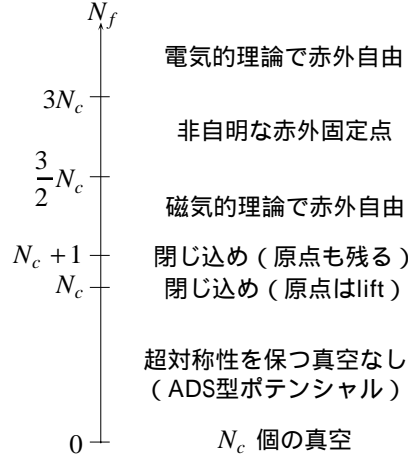


図 4: $N = 1$ SQCD の低エネルギーでの振舞い

2.3.1 古典的 moduli 空間

(16) 式にはポテンシャルとして $F_\Phi^\dagger F_\Phi$, $F^\dagger F$, $\tilde{F}^\dagger \tilde{F}$, $\frac{1}{4} D^a D^a$ が含まれており、超対称な真空では $F_\Phi = F = \tilde{F} = D^a = 0$ でなくてはならない。よって運動方程式から、

$$F_\Phi^a \text{で微分} \rightarrow -F_\Phi^{a\dagger} = \sqrt{2} \tilde{Q}_{iI} (T^a)_J^I Q^{iJ} = 0 \quad (50)$$

$$F \text{で微分} \rightarrow -F_{iI}^\dagger = \sqrt{2} \tilde{Q}_{iI} \phi_J^I = 0 \quad \phi_J^I = \phi^a (T^a)_J^I \quad (51)$$

$$\tilde{F} \text{で微分} \rightarrow -F^{iI\dagger} = \sqrt{2} \phi_I^J Q_{iJ} = 0 \quad (52)$$

$$D^a \text{で微分} \rightarrow -2D^b \text{Tr}(T^a T^b) = \phi_J^I (T^a)_K^J \phi_I^K + Q_{iI}^\dagger (T^a)_J^I Q^{iJ} - \tilde{Q}_{iI} (T^a)_J^I \tilde{Q}^{\dagger iJ} = 0 \quad (53)$$

が導かれる。

まず解のうち $\Phi \neq 0, Q = \tilde{Q} = 0$ を満たすものを考える。条件式は $D^a = 0$ だけだから、(50) ~ (52) 式は自動的に満たされる。(53) 式は

$$[\phi^\dagger, \phi] = 0$$

と書き直される。ここで、ゲージ変換分の自由度を使うと、

$$\phi = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{N_c} \end{pmatrix} \quad (54)$$

と対角化できる。但し、ゲージ群は $SU(N_c)$ なので $\sum_{i=1}^{N_c} a_i = 0$ である。更に、 a_i 同士を入れ替えても真空に属することは変わらない。この対称群を σ_{N_c} とおく。解 (54) 式を σ_{N_c} で割った空間

$$\mathcal{M}_{cl}^C = \left\{ (a_1, \dots, a_{N_c}) \in C^{N_c} \mid \sum_{i=1}^{N_c} a_i = 0 \right\} / \sigma_{N_c}$$

の一般の点では、ゲージ群が $U(1)^{N_c-1}$ に破れている。 \mathcal{M}_{cl}^C を古典的 Coulomb branch と呼ぶ。

次に $\phi = 0$ 及び $Q, \tilde{Q} \neq 0$ の解を考える。条件式は (50) (51) 式からそれぞれ

$$\rho \delta_J^I = Q^{iI} \tilde{Q}_{iJ} \quad (55)$$

$$-\nu \delta_J^I = Q^{iI} Q_{iJ}^\dagger - \tilde{Q}^{\dagger iI} \tilde{Q}_{iJ} \quad (56)$$

と求まる。但し、 $\nu \in R, \rho \in C$ は $SU(N_c), SU(N_f)$ の変換で不変な定数である。一般にこの解の下では物質場が真空期待値を持つから、この解の張る moduli 空間 M_{cl}^H を Higgs branch と呼ぶ。

$N = 1$ SQCD の場合と同様、 Q, \tilde{Q} を行列で表して、ゲージ変換とフレーバー変換を使って対角化する。 $N = 1$ SQCD の場合と異なり、 $N = 2$ ではスーパーポテンシャル中の $\tilde{Q}\Phi Q$ によって物質場のカイラル対称性は破れ、フレーバー対称性は $SU(N_f)_V$ だけである。従って、 Q, \tilde{Q} を独立には変換できない。まず Q を対角化できて

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{11} & \dots & Q^{N_f 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q^{1N_c} & \dots & Q^{N_f N_c} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_{N_c} \end{pmatrix} \quad \kappa_i \in R^+ \quad (57)$$

とする。これを条件式 (55) に代入すると、

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^{11} & \dots & \tilde{Q}^{1N_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Q}^{N_f 1} & \dots & \tilde{Q}^{N_f N_c} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\kappa}_{N_c} \\ \tilde{Q}_{(N_c+1)1} & \dots & \tilde{Q}_{(N_c+1)N_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{Q}_{N_f 1} & \dots & \tilde{Q}_{N_f N_c} \end{pmatrix} \quad \kappa_i \tilde{\kappa}_i = \rho \quad (58)$$

となり、 \tilde{Q} も上半分は対角でなることが分かる。更に $N_f > 2N_c$ のとき、条件式 (56) により

$${}^t \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 & & \lambda_1 \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\kappa}_{N_c} & & \lambda_{N_c} \end{pmatrix} \quad \lambda_i \in R^+ \quad (59)$$

$$\kappa_a^2 - \tilde{\kappa}_a^2 - \lambda_a^2 = -\nu \quad (60)$$

となる。(58) 式を使うと、(60) 式は

$$\lambda_i^2 = \kappa_i^2 - \frac{|\rho|^2}{\kappa_i^2} + \nu \quad (61)$$

と書き直される。以上により、 $N_f > 2N_c$ のときの解は (57) (58) (59) (61) 式で与えられる。 $N_f \leq 2N_c$ の場合は、(57)(59) 式からいくつか列を消して N_f 列にすれば良い。つまり、 $\lambda_1 = \dots = \lambda_i = \kappa_1 = \dots = \kappa_j = 0$, $i + j = 2N_c - N_f$ とする。こうして $N_f \leq 2N_c$ の場合の真空期待値として、以下の 2 通りが得られる。

1. Baryonic Branch

$N_f \geq N_c$ のとき $i = 2N_c - N_f, j = 0$ とできて、真空期待値の間の条件式 (58)(61) を使うと

$$Q = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \kappa_{N_f - N_c} & & \\ & & & \kappa_0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \kappa_0 \end{pmatrix}$$

$${}^t\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 & & & & & & & & \lambda_1 \\ & \ddots & & & & & & & \ddots \\ & & \tilde{\kappa}_{N_f-N_c} & & & & & & \lambda_{N_f-N_c} \\ & & & \tilde{\kappa}_0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \tilde{\kappa}_0 & & & \end{pmatrix} \quad (62)$$

を得る。但し、 $\lambda_i = 0$ なる i に対して $\kappa_i = \kappa_0$ とした。条件式は、

$$\begin{aligned} \kappa_i \tilde{\kappa}_i &= \rho \\ \lambda_i^2 &= \kappa_i^2 - \kappa_0^2 - \left(\frac{1}{\kappa_i^2} - \frac{1}{\kappa_0^2} \right) |\rho|^2 \end{aligned} \quad (63)$$

となる。ゲージ不変な moduli パラメータは、 M, B, \tilde{B} である。(62) 式の下では一般に $B \neq 0$ であるから、この解の張る moduli 空間 \mathcal{M}_{cl}^B を Baryonic branch と呼ぶ。なお、 $N_f > 2N_c$ の解 (57)(59) 式でも一般には $B \neq 0$ であるから、Baryonic branch に入れることにする。

\mathcal{M}_{cl}^B の一般の点ではゲージ群は完全に破れている。このとき軽い自由度は、もともとあったハイパー多重項の数 $N_f N_c$ から、Higgs 機構によってゲージ場に喰われる Higgs スカラー場の自由度 $N_c^2 - 1$ を引いて、 $N_c N_f - N_c^2 + 1$ である。これを成分場の自由度で見れば、 $4(N_c N_f - N_c^2 + 1)$ となる。これは $N_f > 2N_c$ のとき、大域的対称性の破れ

$$SU(N_f)_V \times U(1)_B \times SU(2)_R \rightarrow U(N_f - 2N_c) \times U(1)^{N_c-1} \times SU(2)_R$$

に伴う Goldstone 粒子の自由度 $N_f^2 - (N_f^2 - 4N_c N_f + 4N_c^2 + N_c - 1)$ に、ゲージ不変な moduli パラメータ M, B, \tilde{B} の次元 $N_c + 3$ ³ を加えた自由度数 $4(N_c N_f - N_c^2 + 1)$ と一致している。また $N_f \leq 2N_c$ の場合も、大域的対称性は

$$SU(N_f)_V \times U(1)_B \times SU(2)_R \rightarrow SU(2N_c - N_c) \times U(1)^{N_f-N_c} \times SU(2)_R$$

と破れているから、Goldstone 粒子の自由度 $N_f^2 - (4N_c^2 - 4N_c N_f + N_f^2 + N_f - N_c - 1) = -4N_c^2 + 4N_c N_f - N_f + N_c + 1$ に moduli パラメータの自由度 $N_f - N_c + 3$ ⁴ を加えて、自由度数は $4(N_c N_f - N_c^2 + 1)$ と導かれる。

\mathcal{M}_{cl}^B 上でゲージ対称性が残っているところは特異点となっており、 κ_i や λ_j が 0 になる点にあたると思われる。実際 $\kappa_i = 0$ の点では、 $N_f > 2N_c$ のとき (57) (59) 式により

$$Q = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \kappa_{N_c-j} & & \end{pmatrix} \quad {}^t\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \kappa_{N_c-j} & & \end{pmatrix}$$

であり、 $j \geq 2$ なら確かに $SU(j)$ が破れずに残っている。 $N_f \leq 2N_c$ で $N_f > 2N_c$ と異なるのは $\kappa_0 = 0$

³ M, B, \tilde{B} を規定する $\kappa, \tilde{\kappa}, \lambda$ の自由度は、(57)(59) 式より $3N_c$ である。これに条件式 (58)(61) の数 $2N_c$ を引いて、パラメータ ρ, ν の実次元 3 を足すと得られる。

⁴ M, B, \tilde{B} を規定するパラメータ $\kappa, \tilde{\kappa}, \lambda$ の数は (62) 式より $3(N_f - N_c) + 2$ で、条件式 (63) 式の数 $2(N_f - N_c) + 1$ を引いて実パラメータの数 2 を足すと、 $N_f - N_c + 3$ を得る。

とした場合で、このとき

$$Q = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_{N_f - N_c} \end{pmatrix} \quad {}^t\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_{N_f - N_c} \end{pmatrix}$$

となる。ゲージ群は κ_0 が 2 個以上あれば、 $SU(2N_c - N_f)$ だけ破れずに残る。一方 $\lambda_i = 0$ の点では、 $N_f > 2N_c$ なら κ_0 が出てくるだけでゲージ群は完全に破れたままである。 $N_f < 2N_c$ でも同様となる。

2. non-Baryonic branch

$j \neq 0$ とする。 $\kappa_i = \lambda_i = 0$ なる i が存在するから、真空期待値の間の条件式 (58)(61) より $\rho = \nu = 0$ が導かれ、 $\lambda_i^2 = \kappa_i^2$ となる。よって真空期待値は、(57)(59) 式より

$$Q = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_r \end{pmatrix} \quad {}^t\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_r \end{pmatrix} \quad (64)$$

となる。但し、 $r = N_c - \text{Max}(i, j)$ であるから、 $r \leq [\frac{N_c}{2}]$ である。この解の下では $B = 0$ であり、(64) 式で指定される Higgs branch の部分空間 \mathcal{M}_{cl}^{nB} は、non-Baryonic branch と呼ばれる。

一つの r で指定される \mathcal{M}_{cl}^{nB} 上の一般の点では、ゲージ対称性のうち $SU(N_c - r)$ が破れずに残っている。 \mathcal{M}_{cl}^{nB} 上の軽い自由度は、ハイパー多重項のうち、破れずに残るゲージ群の物質場以外の自由度 $N_f N_c - (N_c - r)(N_f - 2r) = 2N_c r + N_f r - 2r^2$ から、Higgs 機構でゲージ場に喰われる Higgs スカラー場の自由度 $N_c^2 - 1 - [(N_c - r)^2 - 1] = 2N_c r - r^2$ を引いて、 $r(N_f - r)$ が得られる。よって成分場であれば、 $4r(N_f - r)$ である。non-Baryonic branch のゲージ不変な moduli パラメータは、 $B = \tilde{B} = 0$ より M だけである。

よって、大域的対称性の破れは

$$SU(N_f)_V \times U(1)_B \times SU(2)_R \rightarrow U(N_f - 2r) \times U(1)^r \times SU(2)_R$$

であり、Goldstone 粒子の自由度 $N_f^2 - [(N_f - 2r)^2 + r] = r(4N_f - 4r - 1)$ と moduli パラメータの自由度 r を足して求められる軽い自由度数は $4r(N_f - r)$ である。これは前述の結果と一致している。

moduli 空間の 2 点間を特異点を通らずにつなぐことができる場合、2 つの点は同じ branch に属するとし、必ず特異点を通る場合には別の branch に属するものと定義する。上記の議論により、異なる r によって分類される non-Baryonic branch は分離していることが分かる。Baryonic branch と non-Baryonic branch は、たとえ $r = N_c - 1$ でも、 $SU(2)$ が回復する点を通るので、分離している。

また、解を求める際の場合分けで $\Phi = 0, Q, \tilde{Q} \neq 0$ を Higgs branch、 $\Phi \neq 0, Q = \tilde{Q} = 0$ を Coulomb branch と置いたが、 $\Phi \neq 0$ かつ $Q, \tilde{Q} \neq 0$ の mixed branch の場合も解が求められて、一般に

$$\phi = \text{diag}(0, \dots, 0, \phi_{r+1}, \dots, \phi_{N_c}) \quad \phi_i \in C \text{ かつ } \sum_{i=r+1}^{N_c} \phi_i = 0$$

および (64) 式で与えられる。つまり Coulomb branch \mathcal{M}_{cl}^C 上で $SU(N_c - r)$ が破れずに残る部分多様体上から、先に議論した non-Baryonic branch が生じている形になっている。破れずに残っているゲージ群は、 $U(1)^r$ である。今後は、mixed branch も non-Baryonic branch に含めることにする。

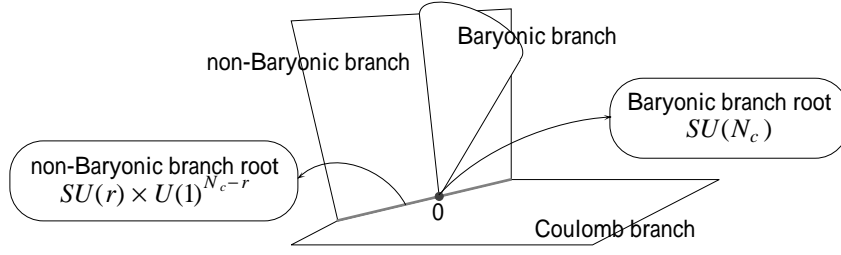


図 5: 古典的 moduli 空間

Higgs branch と Coulomb branch の接点は root と呼ばれ、Baryonic branch の root は原点のみであり、 r で分類される non-Baryonic branch の root は $SU(N_c - r)$ が破れずに残っている \mathcal{M}_{cl}^C 上の部分多様体になっている。全ての Higgs branch は、Coulomb branch の原点で接している。

以上の結果を、図 5 に大まかにまとめた。ここでは、non-Baryonic branch が 1 個だけ書いてある。

2.3.2 量子論的 Coulomb branch

この小節では、量子補正が入ったときに古典的 Coulomb branch \mathcal{M}_{cl}^C がどのように変化するかを、ゲージ群 $SU(2)$ の SYM の場合にしばって説明する [1]。

古典的には、Coulomb branch の一般の点での ϕ の真空期待値は

$$\phi = \begin{pmatrix} a & \\ & -a \end{pmatrix}$$

で与えられ、ゲージ群は $U(1)$ に破れる。量子論的にもゲージ群が破れるという状況は変わらないと思われるから、低エネルギーでの有効ラグランジアンは (17) 式より

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[\int d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} \Phi^\dagger + \int d^2\theta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha \right]$$

で与えられる。有効結合定数は

$$\tau(a) = \frac{\theta(a)}{2\pi} + i \frac{4\pi}{g(a)^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(a)}{\partial a^2} \quad (65)$$

より a の関数となる。古典的には、 $\tau = \tau_0$ とする。また、Kähler ポテンシャルは

$$K(\Phi, \Phi^\dagger) = \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} \Phi^\dagger \quad (66)$$

である。古典的には $K = \Phi \Phi^\dagger$ だから、古典的なプレポテンシャルは

$$\mathcal{F}_{cl}(\Phi) = \frac{1}{2} \tau_0 \Phi^2 \quad (67)$$

と求められる。 $u \rightarrow \infty$ では a が大きく、 $U(1)$ 理論とみなせるから弱結合である。このとき (67) 式への量子補正は摂動的な 1-loop 補正 [39] と非摂動的に instanton の寄与からくるもの [40] があり、

$$\mathcal{F}(\Phi) = \frac{1}{2} \tau_0 \Phi^2 + \frac{i}{\pi} \Phi^2 \log \frac{\Phi^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{2\pi i} \Phi^2 \sum_{l=1}^{\infty} c_l \left(\frac{\Lambda}{\Phi} \right)^{4l} \quad (68)$$

で与えられている。なお $N = 2$ SQCD では、摂動的な補正は 1-loop exact であることが知られている。

moduli 空間の計量は、Kähler ポテンシャルから

$$ds^2 = \partial\bar{\partial}K da d\bar{a}$$

と求められる。(65) 式より、

$$ds^2 = \text{Im}\tau(a) da d\bar{a}$$

と書ける。 $\text{Im}\tau(a) = \frac{4\pi}{g_{\text{eff}}}$ より、 $\text{Im}\tau(a) > 0$ でなくてはならない。 a がもし moduli 空間全域で良いパラメータだとすると、 τ は a の正則関数だから最小値をもたず、不等式は満たされない。従って、 a を moduli 空間の大域的座標とすることはできない。moduli 空間の座標は、ゲージ不変な 2 次の Casimir $u_{cl} = \text{Tr}\langle\phi^2\rangle = 2a^2$ で与えられる。

ここで、Legendre 変換 $\mathcal{F}_D = \mathcal{F} - aa_D$ より $a_D = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial a}$ を使って計量を書き換えると

$$ds^2 = \text{Im}da_D d\bar{a} = -\frac{i}{2}(da_D d\bar{a} - da d\bar{a}_D)$$

となる。これは、

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \quad M \in SL(2, R)$$

に対する対称性を持つ。この対称性は、 τ の $SL(2, Z)$ 対称性に相当する。実際、 $SL(2, R)$ の生成子

$$T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

の作用を考える。 T_b による変換では $a_D \rightarrow a_D + ba$ となるから、(65) 式より $\tau \rightarrow \tau + b$ を引き起こす。ここで、 $U(1)$ ゲージ理論は τ の整数分の変化について対称だから、 $b \in Z$ でなくてはならず $SL(2, R) \rightarrow SL(2, Z)$ であることが分かる。また、 S による変換では $a \leftrightarrow a_D$ の入れ替えが起こる。 $a = -\frac{\partial\mathcal{F}_D}{\partial a_D}$ の両辺を a_D で微分すると、

$$\frac{1}{\tau} = -\tau_D$$

であるから、 a から a_D の記述に移ると結合定数の強弱が入れ替わっている。従って、moduli 空間中の a の記述が成り立たないところでは、 a_D による記述が良くなると予想される。この $SL(2, Z)$ 対称性は $U(1)$ の電磁双対性であり、(18) 式より中心電荷は n_e, n_m を電荷、磁荷としたとき

$$Z = n_e a + n_m a_D \tag{69}$$

であるから、 a が電氣的なパラメータなら a_D は磁氣的なパラメータとなっていることが分かる。

古典的な記述が良い弱結合領域 $u \rightarrow \infty$ を考える。(68) 式で 1-loop の寄与を考えること及び $u \sim 2a^2$ より、

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \sqrt{2u} \log \frac{u}{\Lambda^2} \\ \sqrt{\frac{u}{2}} \end{pmatrix}$$

である。moduli 空間内で $u = \infty$ の回りを一周すると、 a は π だけ位相がつき

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、非自明な monodromy が導かれる。

特異点は強結合領域にあると考えられる。もし古典的な場合と同じく u 平面の原点にのみあったとすると、 M_∞ とは可換な monodromy しか出てこない。従って基本群が可換群になるので、 $u = 2a^2$ は全領域

まで拡張できることになり、 $\text{Im}\tau > 0$ に反する。よって量子論的には、 $u \neq 0$ の点に特異点が出ることになる。今、量子異常により破れた $U(1)_R \rightarrow Z_8$ の R 対称性が残っていて、 u の R 電荷は 4 だから、 u 平面上では $u \leftrightarrow -u$ の Z_2 対称性になる。従って、最低でも Z_2 対称な 2 つの特異点がなければならない。以下では 2 個の特異点が出るものとして話を進める。特異点の位置を $u = \pm\Lambda^2$ とおく。特異点上では有効理論が破綻し、新たな軽い粒子が現れる。例えば \mathcal{M}_{cl}^C の原点にあった特異点では非可換ゲージ対称性が回復し、ゲージ粒子が余分に軽くなっていた。しかし量子論的な特異点は $u \neq 0$ の点に出てくるので、非可換対称性が回復し得ず、新たな粒子はゲージ粒子ではありえない。そこで、この粒子は $N = 2$ のハイパー多重項に属すると仮定しよう。半古典的にはこのような状態は、モノポールやダイオンとして構成される。また、この粒子は他の領域で重くなっているから BPS 状態であり、BPS 不等式 (19) 及び $N = 2$ SQCD のセントラルチャージ (18) 式により質量の下限が決まっている。一方の特異点 $u = \Lambda^2$ ではモノポールが質量 0 になっているとする。(19) 式と (69) 式より、特異点直上では $a_D = 0$ であり、近傍では $a_D \sim c(u - \Lambda^2)$ と書けることが分かる。また、特異点上の理論は $N = 2$ の $U(1)$ ゲージ多重項とハイパー多重項を含む理論であるから、1-loop での β 関数は $\beta(g_D) = \frac{g_D^3}{8\pi^2}$ である。よって

$$\tau_D(a_D) \sim -\frac{i}{\pi} \log a_D$$

となり、 $\tau_D = -\frac{\partial a}{\partial a_D}$ により

$$a = a_0 + \frac{i}{\pi} a_D \log a_D$$

であることが分かる。従って特異点の回りの monodromy は、

$$M_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と求められる。もう一方の特異点 $u = -\Lambda^2$ の回りの monodromy M_- は、 $M_\infty = M_+ M_-$ より

$$M_- = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

である。 M_- の固有ベクトルは ${}^t(1, -2)$ であるから、ダイオンが質量 0 となる特異点であることが分かる。

以上で monodromy が求まったので、あとはこのような特異性から要請される関数 $a(u), a_D(u)$ を求めればよい。これは数学的には Riemann-Hilbert 問題として知られているもので、解が唯一与えられることが知られている。monodromy 行列 M_∞, M_\pm のうち 2 つを基底にすると、 $SL(2, Z)$ の部分群

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, Z), b = 0 \pmod{4} \right\}$$

が生成される。よって数学的には、量子論的 moduli 空間 \mathcal{M}_q^C は複素平面の上半分を $\Gamma_0(4)$ で割ったもの

$$\mathcal{M}_q^C \sim H^+ / \Gamma_0(4)$$

になる (図 6(a))。これは楕円曲線

$$\begin{aligned} y^2(x, u) &= (x^2 - u)^2 - \Lambda^4 \\ &= \prod_{i=1}^4 \{x - e_i(u, \Lambda)\} \end{aligned}$$

で表すことができる。 τ は

$$\tau(u) = \frac{\varpi_D(u)}{\varpi(u)}$$

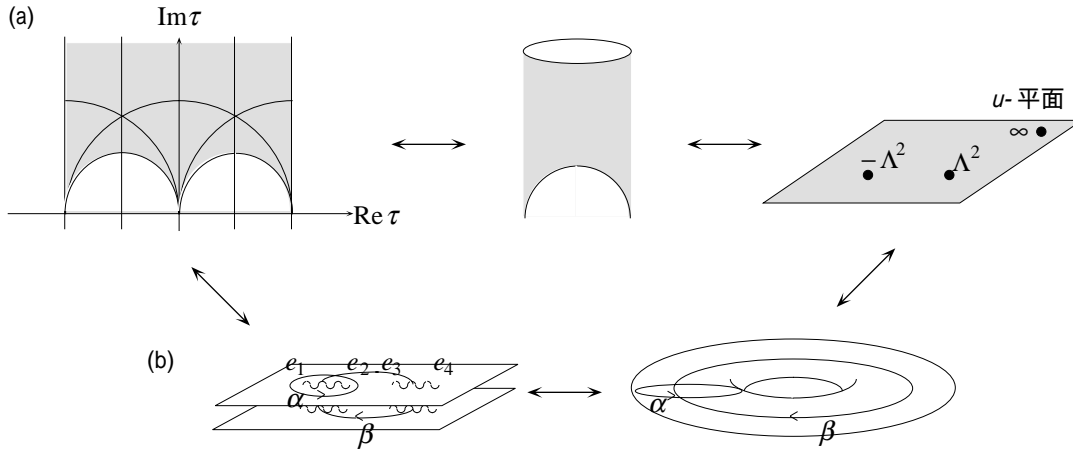


図 6: 量子論的 Coulomb branch \mathcal{M}_q^C と楕円曲線

$$\varpi_D(u) = \oint_{\beta} \omega, \quad \varpi(u) = \oint_{\alpha} \omega$$

で表される。但し、 $\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx}{y(x,u)}$ は正則微分である。一方 $\tau = \frac{\partial a_D}{\partial a}$ であるから、

$$\varpi_D(u) = \frac{\partial a_D(u)}{\partial u}, \quad \varpi(u) = \frac{\partial a(u)}{\partial u}$$

と推定される。ここから、未定であった関数 a, a_D が

$$a_D(u) = \oint_{\beta} \lambda, \quad a(u) = \oint_{\alpha} \lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x^2 dx}{y(x,u)}$$

と、meromorphic な 1-形式で与えられることが分かる。homology サイクル α, β の取り方は、moduli 空間の対称性 $\Gamma_0(4)$ を使って取り替えがきく。

楕円曲線で記述される複素平面について考える。 y 平面は、 x でみると二重に覆われていて、 $y^2(x,u) = 0$ となるのは

$$\begin{aligned} e_1 &= -\sqrt{u + \Lambda^2}, & e_2 &= -\sqrt{u - \Lambda^2} \\ e_3 &= \sqrt{u - \Lambda^2}, & e_4 &= \sqrt{u + \Lambda^2} \end{aligned}$$

の 4 点である。これが分岐点になっていて、これらをつなぐ形で分岐カットが走っている (図 6(b))。これは u で分類されるトーラスに対応していることが分かる。図中の α, β は homology サイクルに一致するように描いた。特異点はトーラスのうち、サイクルが潰れるものに対応する。つまり、4 つの分岐点のうちどれか 2 つが同一点になる、判別式

$$\Delta_{\Lambda} = \prod_{i < j}^4 (e_i - e_j)^2 = (2\Lambda)^8 (u^2 - \Lambda^4)$$

が 0 になるような u の指定するトーラスである。実際、このような u をみると

1. $u \rightarrow +\Lambda^2$
 $e_2 \leftrightarrow e_3$ で、サイクル β が潰れる。このときモノポールが質量 0 になる。
2. $u \rightarrow -\Lambda^2$
 $e_1 \leftrightarrow e_4$ で、サイクル $\beta - 2\alpha$ が潰れる。このとき $(n_m, n_e) = (1, -2)$ のダイオンが質量 0 になる。
3. $\frac{\Lambda^2}{u} \rightarrow 0$
 $e_1 \leftrightarrow e_2, e_3 \leftrightarrow e_4$ で、サイクル β が潰れる。このとき質量 0 になるのは電荷 $n_e = 1$ を持つ粒子で、W ボゾンと理解される。

となっていて、 u 平面上の特異点と対応している。

なお、このように求められた解を変形すると、プレポテンシャル中の係数に対する方程式 (Picard-Fuchs 方程式) が得られる。これを解いて求められる係数と、instanton 計算による係数が一致することが確認されており [41]、以上の議論が正しいことを示している。

以上、ゲージ群 $SU(2)$ の SYM における moduli 空間 \mathcal{M}_q^C は、楕円曲線 $y^2 = (x^2 - u)^2 - \Lambda^4$ で記述されることが分かった。数学的には、 $SU(N_c)$ に対応する単純特異点に現れる

$$\begin{aligned} C_{N_c}(x, u) &= \det_{N_c \times N_c}(x1 - \phi) = \prod_{i=1}^{N_c} \{x - e_{\lambda_i}(a)\} \\ &= x^{N_c} - \sum_{l=0}^{N_c-2} u_{l+2}(a)x^{N_c-2-l} \end{aligned}$$

を使って、 $y^2 = (C_2(x, u))^2 - \Lambda^4$ と書ける。よって、ゲージ群を $SU(N_c)$ に拡張すると、moduli 空間は $y^2 = (C_{N_c}(x, u))^2 - \Lambda^{2N_c}$ で与えられると想像される。実際この推測が正しいことが示されている [42]。この曲線は、 $y \rightarrow y - C_{N_c}(x, u)$, $(x, a) \rightarrow 2^{\frac{1}{N_c}}(x, a)$ とすると $y^2 - C_{N_c}(x, u)y + \Lambda^{2N_c} = 0$ と書ける。これを、物質場が入った場合に拡張すると

$$y^2 - C_{N_c}(x, u)y + \Lambda^{2N_c - N_f} \prod_{i=1}^{N_f} (x + m_i) = 0 \quad (70)$$

となることが分かっている [43]。このように、 $N = 2$ SQCD の量子論的 Coulomb branch は、Seiberg-Witten 曲線と呼ばれる楕円曲線によって完全に記述される。

2.3.3 量子論的 Higgs branch

この小節では、Higgs branch とその root が、量子補正によってどのように変化するかを調べる [44]。まず、Higgs branch が量子補正を受けないことを示す。Kähler ポテンシャル K は、一般に $N = 2$ ベクトル超場 (Φ, W_α) とハイパー超場 (Q, \tilde{Q}) の関数で与えられる。

$$K = K(\Phi, W_\alpha; Q, \tilde{Q})$$

もし、ベクトル超場とハイパー超場への依存性が分離されていないとすると、 $\frac{\partial^2 K}{\partial \Phi^{\alpha\dagger} \partial Q^{i\dagger}} \neq 0$ であり、ラグランジアンには

$$\left. \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi^{\alpha\dagger} \partial Q^{i\dagger}} \right|_{\theta = \bar{\theta} = 0} \partial_m Q^i \partial^m \phi^\alpha$$

が含まれる。 $N = 2$ の超対称性により $Q \rightarrow \tilde{Q}, \Phi \rightarrow W$ に移ると

$$\left. \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi^{\alpha\dagger} \partial Q^{i\dagger}} \right|_{\theta = \bar{\theta} = 0} \tilde{\psi}^i \gamma^m \partial_m \lambda^\alpha$$

も出てくるはずである。更に $N = 1$ の多重項としての超対称変換を考えると、

$$\left. \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi^{a\dagger} \partial Q^{i\dagger}} \right|_{\theta=\bar{\theta}=0} \times (\tilde{Q}^i, A_m^a \text{ と微分 2 回})$$

がなくてはならないが、これは Lorentz 不変に組めないので禁止される。従って、 $\frac{\partial^2 K}{\partial \Phi^{a\dagger} \partial Q^{i\dagger}} = 0$ であり、Kähler ポテンシャルは

$$K(\Phi, W_\alpha; Q, \tilde{Q}) = K_V(\Phi, W_\alpha) + K_H(Q, \tilde{Q})$$

と、ベクトル多重項に依存する部分とハイパー多重項に依存する部分に分離していることがわかる。一方、有効結合定数 τ は ϕ の真空期待値で決まっていたから、ベクトル超場の成分とみなされる。そして、 τ は量子補正のスケール Λ によって展開される。ハイパー多重項側はベクトル超場とは分離されるから、 τ によることはできず、従って Λ にも依れないので量子補正を受けないことになる。

しかし、Higgs branch 自身が変わらなくても、Coulomb branch は量子補正を受けるから、それに伴って root がどのように変化するかが問題として残る。 $N = 2$ の β 関数は $\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}(2N_c - N_f)$ であるから、 $N_f > 2N_c$ では赤外自由な理論になっており、量子補正はゲージ群を変えてしまうほど大きくはない。よって、 $N_f \leq 2N_c$ について考える。

まず、non-Baryonic branch の root を議論する。古典的には、 $r \leq [N_f/2]$ で分類される non-Baryonic branch の root では、ゲージ群のうち $SU(r) \times U(1)^{N_c-r}$ が破れずに残っている。よって root 上のゲージ理論は、ゲージ群 $SU(r)$ で基本表現のフレーバーが N_f である。なお、随伴表現に属する物質場の真空期待値は $\phi = \text{diag}(0, \dots, 0, \phi_{r+1}, \dots, \phi_{N_c})$ であるので確かに $SU(N_c) \rightarrow SU(r)$ に破れるが、条件 $\sum \phi_I = 0$ によって全く自由に破れている訳ではない。この分により、 N_f 個のフレーバーには $U(1)^{N_c-r}$ から 1 個の $U(1)$ 電荷がつく。量子論的には、 $r < [N_f/2]$ 及び $r = [N_f/2]$ でも N_f が奇数の場合は $N_f < r$ であるから root 上では一般に赤外自由な理論になっている。従って、量子補正を受けた後でも root に大きな変化はないと考えられる。一方、 $r = [N_f/2]$ で N_f が偶数の場合は 1-loop で β 関数が 0 のスケール不変な理論になるので、量子補正によって root の性質が著しく変化する可能性がある。しかし、 ϕ の古典的な真空期待値 $|\phi_{cl}| \sim M \gg 1$ とすると量子補正を含めた真空期待値は

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{cl} + \delta\phi \\ &= \text{diag}(0, \dots, 0, \phi_{r+1}, \dots, \phi_{N_c}) + \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_r, 0, \dots, 0) \\ & \quad |x| \ll 1, 1 \leq I \leq r \text{ で } |\phi_I| \ll M, \sum \phi_I = 0 \end{aligned}$$

とおけて、量子論的 Coulomb branch を表す楕円曲線 (70) 式は近似的に

$$y^2 - \prod_{I=1}^r (x - \phi_I) M^{(N_c-r)} y + \Lambda^{2N_c-N_f} x^{N_f} = 0$$

となる。これはちょうどゲージ群 $SU(r)$ でフレーバー数 N_f の曲線になっているから、 $r = N_f/2$ の root であっても、量子補正はゲージ群の破れ方を変えるほど大きくはないことが分かる。一方、 $\delta\phi = 0$ とすると曲線は

$$y^2 - x^r \left\{ \prod_{I=r+1}^{N_c} (x - \phi_I) y + \Lambda^{2N_c-N_f} x^{N_f-r} \right\} = 0 \quad (71)$$

となる。 $\sum \phi_I = 0$ よりパラメータの数は $N_c - r - 1$ で、一般には曲線に現れる $2(N_c - r - 1)$ 個の 0 点を調整して、うち 2 つずつをくっつけることができる。 x -平面上の経路の基底として、このようなくつつく 0 点を回る $N_c - r - 1$ 個のサイクルをとることにする。これらのサイクルは交わらない。従ってこれらのサイクルを vanishing サイクルとする特異点上で現れる余分な軽い自由度は、互いに局所的な電子であることが分かる。他に、 $SU(r)$ の要素を与えるサイクルがあるから、root 上に自由度として現れるハイパー多重項の種類と電荷は以下ようになる。

	$SU(r)$	$U(1)_0$	$U(1)_1$	\dots	$U(1)_{N_c-r-1}$	$U(1)_B$
$Q \times N_f$	r	1	0	\dots	0	0
e_1	1	0	1	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
e_{N_c-r-1}	1	0	0	\dots	1	0

$U(1)_B$ の電荷は局所 $U(1)^{N_c-r}$ と組み合わせることで消した。余分の自由度 e_i が出てくる点は (71) 式の 0 点であり、具体的な解は一般には求められないが、量子異常によって離散化された R 対称性 $Z_{2N_c-N_f}$ があることにより、 $2N_c - N_f$ 個のこのような点があることが予想される。 $r = N_f/2$ の場合、(71) 式はちょうどゲージ群 $SU(N_c - N_f/2)$ の Yang-Mills 理論になっており、実際にこのような質量 0 の電子の多重点が現れる点が計算されている [45]。また $r \leq N_f - N_c$ では一点で R 対称性を保つところが存在し、そこでは $N_c - r$ 個の電子が一度に質量 0 になる。これはちょうど Baryonic branch の root として期待される点であり、従って non-Baryonic branch と Baryonic branch は $r \leq N_f - N_c$ では接することが可能である。non-Baryonic branch の root の理論は、基本的には弱結合であると考えられるから、Coulomb branch から non-Baryonic branch が生えているという描象は量子論的にも正しいと思われる。確認のため、以上で考えた root でのパラメータが、もともと non-Baryonic branch にあるべきパラメータと一致するかどうかを見る。先に調べたように、non-Baryonic branch のパラメータは、 $N = 2$ の $U(1)$ ベクトル多重項で $N_c - r - 1$ 、ハイパー多重項で $r(N_f - r)$ であった。root での自由度は、まず電荷を担う物質場のない $U(1)$ 要素分で $N_c - r - 1$ 、次に物質場のあるゲージ群 $SU(r) \times U(1)$ については、その moduli 空間を古典的にみてやると、 $r \geq 2N_f$ より解 (64) 式が使える。更に条件式 (61) に現れるパラメータ ρ, ν は $U(1)$ ゲージを使って 0 とできるから、

$$Q = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_r \end{pmatrix} \quad {}^t\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \kappa_r \end{pmatrix}$$

となる。従って大域的対称性の破れは

$$SU(N_f) \times U(1)_B \times SU(2)_R \rightarrow U(N_f - 2r) \times U(1)^r \times SU(2)_R$$

となる。よって以前と同様に Goldstone 粒子の自由度を数えると $r(4N_f - 4r - 1)$ 個で、パラメータ κ_i の数 r を足せば、non-Baryonic branch での自由度と一致する。

次に、Baryonic branch の root について考える。Baryonic branch の root は、古典的には Coulomb branch の原点であり、ゲージ対称性は全て回復している。従って $N_f \leq 2N_c$ では漸近自由な理論になっており、量子補正の影響を強く受けると考えられる。一方、量子論的 Coulomb branch の厳密解から、古典的には原点にあった特異点は分離してしまうことが分かっている。そして Higgs branch は量子補正を受けず、量子論的にも root は一点であると想像される。よって、一点で R 対称性 $Z_{2N_c-N_f}$ を保つ点を探さなくてはならず、結局古典的に

$$\tilde{\phi} \propto (0, \dots, 0, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{2N_c-N_f})$$

なる真空期待値を持つ点ではないかと想像される。但し、 $\omega = e^{2\pi i/(2N_c-N_f)}$ である。 ω は量子補正によって出てくるものであり、 $\sum \omega^i = 0$ のような制限は受けない。この点で古典的に残るのは、ゲージ群が $SU(N_f - N_c) \times U(1)^{2N_c-N_f}$ で、フレーバーが N_f のゲージ理論である。これは赤外自由な理論であるから、量子論的にもこのゲージ群が残ると考えられる。実際、non-Baryonic branch の場合と同様に、この点上での真空期待値を

$$\phi = \tilde{\phi} + \delta\phi$$

$$\begin{aligned}
&= (0, \dots, 0, \varphi\omega, \varphi\omega^2, \dots, \varphi\omega^{2N_c-N_f}) + (\phi_1, \dots, \phi_{N_f-N_c}, 0, \dots, 0) \\
&\quad \sum \phi_I = 0, |x|, |\phi_I| \ll \varphi
\end{aligned} \tag{72}$$

ととって Coulomb branch の厳密解に代入すると、

$$y^2 - \prod_{I=1}^{N_f-N_c} (x - \phi_I) \varphi^{(2N_c-N_f)} y + \Lambda^{2N_c-N_f} x^{N_f} = 0$$

であり、ちょうどゲージ群 $SU(N_f - N_c)$ で N_f のフレーバーのゲージ理論の曲線になっている。しかし、これだけでは Baryonic branch と自由度数が合わない。不足分のパラメータの出所を考えよう。 $\delta\phi = 0$ とすると、曲線は

$$y^2 - x^{(N_f-N_c)} \{ (x^{2N_c-N_f} - \varphi^{2N_c-N_f}) y + \Lambda^{2N_c-N_f} x^{N_c} \} = 0$$

となる。 $y - \frac{1}{2}x^{N_f-N_c}(x^{2N_c-N_f} - \varphi^{2N_c-N_f})$ を y とおくと、

$$y^2 = \frac{1}{4}x^{2(N_f-N_c)} [(x^{2N_c-N_f} - \varphi^{2N_c-N_f})^2 + 4\Lambda^{2N_c-N_f} x^{N_c}]$$

となり、 $\varphi = \Lambda$ で完全平方になる。従って、このときには $(2N_c - N_f)$ 個の余分な質量 0 の電子が出てきて自由度が増える。この、最大の自由度が出てくる点が Baryonic branch の root と予想される。更に、 x 平面上でのサイクルの基底として、この点に近付くにつれて接触してくる 2 つの特異点を回るサイクル $\alpha_i (i = 1, \dots, 2N_c - N_f)$ 、また $SU(N_f - N_c)$ 要素から同様に、交わらないサイクル γ_I がとれ、対応する軽い自由度がある。 $\sum_i \alpha_i + \sum_I \gamma_I = 0$ であり、 $\sum_I \gamma_I = 0$ とはなっていないので、 γ_I は $SU(N_f - N_c)$ の Cartan の $U(1)$ 要素ではない。このような性質を持つのは $\tilde{\alpha}_I = \gamma_I + \frac{1}{N_f-N_c} \sum_i \alpha_i$ であり、従ってクォークの各カラー要素に相当するサイクルは $\tilde{\beta}_I$ となるから、クォークは各 $U(1)$ について $-\frac{1}{N_f-N_c}$ の電荷を持つ。以上、最もたくさんの軽い電子が出てくる点でのハイパー多重項の自由度は、次のようになる。

	$SU(N_f - N_c)$	$U(1)_1$	\dots	$U(1)_{2N_c-N_f}$	$U(1)_B$
$Q \times N_f$	$N_f - N_c$	$\frac{1}{N_f-N_c}$	\dots	$\frac{1}{N_f-N_c}$	$-\frac{N_c}{N_f-N_c}$
e_1	1	-1	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
$e_{2N_c-N_f}$	1	0	\dots	-1	0

実際にこの点が Baryonic branch の root であるためには、この点での自由度が Baryonic branch のそれと一致していなくてはならない。まずこれを確認する。質量 0 の電子は互いに局所的であるから、この点上のスーパーポテンシャルが以下のように書ける。

$$W = \sqrt{2} \left[\text{Tr}(\tilde{Q}\Phi Q) + \frac{1}{N_f - N_c} \text{Tr} Q \tilde{Q} \sum_i \Psi_i - \sum_i \Psi_i e_i \tilde{e}_i \right]$$

但し、 Ψ_i は $U(1)_i$ のベクトル多重項中の $N = 1$ カイラル超場である。従って真空の方程式のうち、 $D = 0$ より

$$\begin{aligned}
|e_i|^2 - |\tilde{e}_i|^2 &= \nu \\
Q_I^\dagger Q^J - \tilde{Q}_I \tilde{Q}^{\dagger J} &= \nu \delta_I^J \\
[\phi, \phi^\dagger] &= 0
\end{aligned}$$

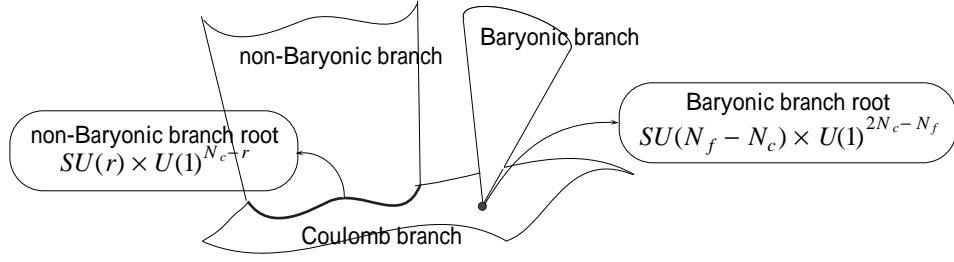


図 7: $N = 2$ の量子論的 moduli 空間

また $F = 0$ より

$$\begin{aligned}
 e_i \tilde{e}_i &= \rho \\
 Q^I \tilde{Q}_J &= \rho \delta_J^I \\
 \Psi_i e_i &= \Psi_i \tilde{e}_i = 0 \\
 \left[(N_f - N_c) \phi_J^I + \sum_i \Psi_i \delta_J^I \right] Q^J &= \tilde{Q}_I \left[(N_f - N_c) \phi_J^I + \sum_i \Psi_i \delta_J^I \right] = 0
 \end{aligned}$$

となる。但し $\nu \in R, \rho \in C$ である。これらはほぼ (56)(55) 式と同じであるから、解は先に求めた (57)(58) (59)(61) 式のようなになる。このときもともとあったゲージ群 $SU(N_f - N_c) \times U(1)^{2N_c - N_f}$ は完全に破られるから、自由度として残るハイパー多重項の数は、最初にあった $N_f(N_f - N_c) + 2N_c - N_f$ から Higgs 機構で喰われる分 $(N_f - N_c)^2 - 1 + 2N_c - N_f$ を引いた $N_f N_c - N_c^2 + 1$ である。これは Baryonic branch の自由度と等しい。また、このとき大域的対称性は $SU(N_f) \times U(1)_B \rightarrow U(N_f - 2(N_f - N_c)) \times U(1)^{N_f - N_c - 1} = SU(2N_c - N_f) \times U(1)^{N_f - N_c}$ であり、これも Baryonic branch に等しくなっている。自由度だけでなく、条件式についても、Baryonic branch と Coulomb branch の上記の点の間で等しくなることが示され、また $N_f = 2N_c$ のスケール不変な理論から、順にフレーバーを落していく操作によってもこの点が Baryonic branch の root であろうことが確かめられる [44]。

2.3.4 $N = 2$ SQCD の moduli 空間 まとめ

以上の結果をまとめると、図 7 のようになる。Coulomb branch については、古典的にみてゲージ対称性が回復する点にあった特異性が、何らかのソリトンが質量 0 になる点となり、特異点の位置と数も変わってくる。この特異点の性質を記述するのが (70) 式のような楕円曲線であった。Higgs branch については、その構造自体は古典的なものと変化がない。しかし、各 branch の接し方が変わってくる。特に Baryonic branch の root は、古典的に全てのゲージ群 $SU(N_c)$ が回復している Coulomb branch の原点に位置していたため大きな量子補正を受け、ゲージ群が $SU(N_f - N_c) \times U(1)^{2N_c - N_f}$ に破れた点が root になる。これに伴って、Baryonic branch と古典的には接していた non-Baryonic branch が、量子論的には $r > (N_f - N_c)$ のとき分離してしまうことが分かった。

このように、 $N = 2$ SQCD の moduli 空間は、超対称性による強い制限により、厳密に解くことができる。

2.4 $N = 2$ SQCD と $N = 1$ SQCD

厳密に解かれている $N = 2$ SQCD の moduli 空間の情報から、先に求めた $N = 1$ の moduli 空間の情報を得ることができる。この節では、 $N = 2$ SQCD で随伴表現の物質場に質量 μ を持たせて超対称性を $N = 1$

に破ったとき、 $\mu \rightarrow \infty$ の極限の取り方によって、 $N = 1$ SQCD 又は Seiberg duality でつながる磁気的な理論の自由度が、それぞれ導かれることをみる。

2.4.1 随伴表現の物質場の質量 μ による $N = 2$ の破れ ($\mu \rightarrow \infty$)

$N = 2$ SQCD のスーパーポテンシャルに、随伴表現の物質場の質量項を加えて

$$W = \sqrt{2}\text{Tr}Q\Phi\tilde{Q} + \frac{\mu}{2}\text{Tr}\Phi^2$$

とすると、超対称性は $N = 1$ に破れる。 $N = 2$ SQCD のスケールを Λ とし、破れてできた $N = 1$ 理論のスケールを $\tilde{\Lambda}$ とする。スケールマッチングは

$$\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} = \mu^{N_c} \Lambda^{2N_c - N_f}$$

である。 $\mu \gg \Lambda$ とすると、上記のスーパーポテンシャルによる記述が有効な高エネルギーかつ弱結合の領域でも、 Φ は重い自由度である。そこで運動方程式によって Φ を消すと、

$$W = -\frac{1}{2\mu} \left\{ \text{Tr}(Q\tilde{Q})^2 - \frac{1}{N_c} (\text{Tr}Q\tilde{Q})^2 \right\} \quad (73)$$

を得る。よって $\tilde{\Lambda}$ を固定して $\mu \rightarrow \infty$ の極限を取ると $W = 0$ であり、ラグランジアンは $N = 1$ の SQCD のそれと一致する。だから質量項による変形で、 $N = 2$ SQCD が $N = 1$ SQCD に移ると考えられる。

次に、 $\mu \ll \Lambda$ から出発して $\mu \rightarrow \infty$ の極限を取ることによって得られる理論がどのようなものかを調べる。まず $r \leq [N_f/2]$ で分類される non-Baryonic branch について考える。moduli 空間 \mathcal{M}^{nB} の「原点」に当たる root 上で、S-W 曲線が $N_s \leq (N_c - r - 1)$ 箇所で潰れた特別な点では、 N_s 個の $U(1)$ 電子が出る。 $\mu \ll \Lambda$ としているから、 $\mu \neq 0$ としたときの Φ は、 $N = 2$ SQCD での解からの摂動で

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \Lambda_0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Lambda_{N_c - r - 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\Phi} & & & & \\ & \Psi_0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Psi_{N_c - r - 1} \end{pmatrix}$$

と書ける。但し、行列中の Φ はゲージ群 $SU(r)$ での随伴表現の物質場であり、 $\Lambda_i \sim \Lambda$ 程度の真空期待値を持つとしている。よって質量項は、

$$\mu \text{Tr}\Phi^2 = \mu \left(2 \sum_{i=0}^{N_c - r - 1} \Lambda_i \Psi_i + \text{Tr}\Phi^2 \right) + \dots$$

となるから、有効ポテンシャルは

$$W = \sqrt{2}\text{Tr}(\tilde{Q}\Phi Q) + \sqrt{2}\Psi_0\text{Tr}Q\tilde{Q} + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{N_s} \Psi_i e_i \tilde{e}_i + \mu \left(2 \sum_{i=0}^{N_c - r - 1} \Lambda_i \Psi_i + \text{Tr}\Phi^2 \right)$$

である。 $F = 0$ の解は $N_s = (N_c - r - 1)$ のときのみ存在する。 $\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = 0$ より $e_i \tilde{e}_i \neq 0$ であるから、Higgs 機構によりゲージ群は $SU(r) \times U(1)^{N_c - r} \rightarrow SU(r) \times U(1)$ に破れる。また $\frac{\partial W}{\partial e_i} = 0$ より $\Psi_i = 0 (i \neq 0)$ であるから、スーパーポテンシャルは

$$W = \sqrt{2}\text{Tr}\tilde{Q}\Phi Q + \mu \text{Tr}\Phi^2 + \Psi_0 \left(\sqrt{2}\text{Tr}Q\tilde{Q} + 2\mu\Lambda_0 \right)$$

となる。更に $F_Q = F_\Phi = 0$ の、カラーとフレーバーの自由度分を除いた一般解は、

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= 2\frac{l-r}{lr}\Lambda_0, \quad l \in 0, 1, \dots, r \\ \Phi &= 2\frac{\Lambda_0}{lr}\text{diag}(\underbrace{r-l, \dots, r-l}_l, \underbrace{-l, \dots, -l}_{r-l}) \\ Q &= \begin{pmatrix} \kappa_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \kappa_l & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad {}^t\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_1 & & & \lambda_1 \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{\kappa}_l & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_l \end{pmatrix} \\ &\kappa_i, \lambda_i \in R^+ \\ &\kappa_I \tilde{\kappa}_I = -\frac{2\mu\Lambda_0}{l} \quad \lambda_I^2 = \kappa_I^2 - \tilde{\kappa}_I^2\end{aligned}$$

である。但し、 $l = 1, 2, \dots, r$ で区別されている。このような真空期待値で指定される moduli 空間の各点は、ゲージ群が $SU(r-l)$ で質量 0 のゲージ不変な場 $l(N_f - l)$ 個の理論になっており、ゲージ場と相互作用する物質場は $\sim \Lambda_0$ の質量を持つので効いてこない。量子論的には、 $N = 1$ SYM は低エネルギーで閉じ込め相にあることが分かっているから、ゲージ群は完全に破れている。従って低エネルギーでの自由度は質量 0 のカイラル多重項 $\tilde{Q}Q$ であり、対称性から $N = 1$ SQCD のメソン M と同定される。Seiberg duality での磁気的理論のメソン $q\tilde{q}$ としないのは、 $\text{rank}\tilde{Q}Q \leq [N_f/2]$ に対して $\text{rank}q\tilde{q} \leq N_f - N_c < [N_f/2]$ であることによる。

一方、同様の議論を Baryonic branch について行なう。root でのスーパーポテンシャルは、

$$W = \sqrt{2}\text{Tr}\tilde{Q}\Phi Q + \frac{\sqrt{2}}{N_f - N_c}\text{Tr}\tilde{Q}Q \sum_{i=1}^{2N_c - N_f} \Psi_i - \sqrt{2} \sum_{i=1}^{2N_c - N_f} \Psi_i e_i \tilde{e}_i + \mu \left(2 \sum_{i=1}^{2N_c - N_f} \Lambda_i \Psi_i + \frac{1}{2}\text{Tr}\Phi^2 \right)$$

となる。non-Baryonic branch の場合と同様、 $F = 0$ から $\tilde{e}e \neq 0$ となるから Higgs 機構により $U(1)$ ゲージ対称性は全て破れ、結局 $N = 1$ でゲージ群が $SU(N_f - N_c)$ の理論が残る。運動方程式によりスーパーポテンシャルは、

$$W = \sqrt{2}\text{Tr}\tilde{Q}\Phi Q + \frac{\mu}{2}\text{Tr}\Phi^2$$

となる。 $\mu \rightarrow \infty$ の極限では $W = 0$ であり、ゲージ群 $SU(N_f - N_c)$ の $N = 1$ SQCD になる。従って、この有効ポテンシャルに出てくる Q, \tilde{Q}, W といった超場は、全て Seiberg duality の磁気的理論のものと思われる。以上の結果をまとめると、図 8 となる。

このように、 $\mu \gg \Lambda$ から出発して $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとると $N = 1$ SQCD の電気的な理論になり、 $\mu \ll \Lambda$ から出発すると磁気的な理論の自由度を再現することが分かった。相転移がなければ、 $\mu \rightarrow \infty$ の取り方を変えても最終的に得られる理論は等しいと思われる。よって、以上の議論で $N = 2$ SQCD の立場から、 $N = 1$ SQCD の Seiberg duality についての証拠が得られたことになる。

ところで、一般には Casimir $\sum_{I=1}^{N_c-1} g_{I-1} \text{Tr}\Phi^I$ を加えて $N = 2$ SQCD を $N = 1$ に落すことができる。この小節で見てきたのは、 $g_I = 0 (I \neq 2)$ の場合で、 $N = 2$ moduli 空間中互いに局所的な軽いソリトンが出てくる特異点が $N = 1$ まで残ってきた。一方、 $g_I \neq 0 (I \neq 2)$ の場合には、互いに局所的でないソリトンが同時に軽くなるような特異点も $N = 1$ まで残ってくる。 $N_c = 3$ のときこれらは Argyres-Douglas の点と呼ばれ、詳しい解析が行なわれている [46]。こうして得られる $N = 1$ の理論は SQCD ではなく、長距離での振舞いが重要となるので $\beta = 0$ の固定点上の理論と考えられ、超対称な共形場理論になっていると思われる。

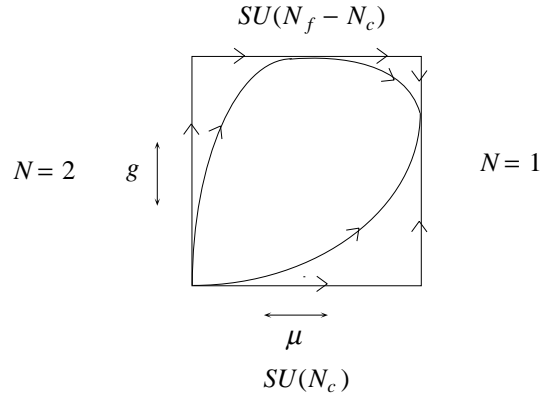


図 8: $N = 2 \rightarrow N = 1$ の自由度の流れ

また、 $N = 1$ SQCD では閉じ込めを仮定した。閉じ込め相での粒子の振舞いは、クォークを弦でつないでメソンやバリオンをつないだ模型 (格子ゲージ理論での強結合展開のようなもの) で考えると理解しやすい。このとき複合粒子の振舞いを決めるのは、弦の張力 T によって定まる。 $N = 2$ の結果を使うと、 $T \propto \sin \frac{\pi k}{N_c} (k \in Z)$ なる複数種類の弦があることが導かれる [45]。

2.4.2 随伴表現の物質場の質量 μ による $N = 2$ の破れ ($\mu < \infty$)

この小節では、小さな μ を入れた時の理論の振舞いを見ておく。ここでの結果は 4 章で使われる。

まず、 $N = 2$ を Φ の質量項で破ったとき、運動方程式を使って Φ を消すとスーパーポテンシャルは (73) 式となった。 $\mu < \infty$ の場合は、 $N = 2$ の名残りとして、このスーパーポテンシャルが残っていると考えられる。

まず、 $0 < N_f < N_c$ の場合は、 $N = 1$ SQCD の解析から ADS 型のスーパーポテンシャル (36) 式が生成されると結論された。従って、 $\mu < \infty$ では

$$W_{\text{eff}} = (N_c - N_f) \left(\frac{\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} + \frac{1}{2\mu} \left[\text{Tr} M^2 - \frac{1}{N_c} (\text{Tr} M)^2 \right] \quad (74)$$

のような有効ポテンシャルを持つと思われる。この他に、 μ による展開項 $\mu^{-\alpha} M^\beta \tilde{\Lambda}^{(3N_c - N_f)\gamma}$ がつく可能性がある。ここで、 $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとった時 $N = 1$ SQCD に落ちることが分かっているから、ADS 型のポテンシャルを出す項を除いて $\alpha > 0$ でなくてはならない。また、 $\Lambda \rightarrow 0$ とした場合は量子補正が見えなくなり高エネルギーでの場の理論が与えられるはずだから、 $\gamma \geq 0$ である。更にスーパーポテンシャルは $U(1)_R, U(1)_A$ 対称性を持つべきだから、 $M^\beta / \mu, M^\beta \tilde{\Lambda}^{\frac{3N_c - N_f}{N_c - N_f}}$ の形しか許されない。従って正則性により、(74) 式が厳密に正しいことがわかる。

このスーパーポテンシャルの下での moduli 空間を考える。 $\frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial M_i^j} = 0$ より

$$M_k^i M_j^k - \frac{1}{N_c} M_j^i \text{Tr} M = \mu \left(\frac{\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \delta_j^i \quad (75)$$

である。正則行列 g により $M' = g M g^{-1}$ と変換して Jordan 標準形に持っていくと、 M' も (75) 式を満たす。ここで対角成分を $M_i^i = m_i$ とおき、 $M_i^{i+j} = 0 (j > 0)$ とする。このとき m_i は、多くとも 2 種類の値

しかとれない。これを示す。もし、 m_i, m_j, m_k の3つが違う値を取ったとする。(75)式で ii 成分をみてやると、

$$m_i^2 - \frac{1}{N_c} m_i \sum_l m_l = \mu \left(\frac{\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}}{\prod_l m_l} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \quad (76)$$

であり、右辺は i によらず等しい。よって ii 成分から jj 成分をひくと

$$(m_i - m_j) \left(m_i + m_j - \frac{1}{N_c} \sum_l m_l \right) = 0$$

となる。 $m_i \neq m_j$ と仮定したから、 $m_i + m_j = \frac{1}{N_c} \sum_l m_l$ である。同様の式は m_j と m_k の間にも成り立つから、

$$m_i + m_j = \frac{1}{N_c} \sum_l m_l = m_j + m_k \quad (77)$$

となり、最初の仮定 $m_i \neq m_k$ に反する。よって m_i は、 m_1 または m_2 の2種類しかとれないことが分かる。さらに M' が対角化可能であることが、以下のように示される。もし不可能であったとすると、Jordan 細胞を

$$J_\alpha = a_\alpha I_\alpha + N_\alpha = \begin{pmatrix} a_\alpha & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_\alpha \end{pmatrix}$$

として、 $M' = \text{diag}(J_1, \dots, J_l)$ と書いたとき、少なくとも一つは非対角成分が0でないものがある。このような(75)式の $i, i+1$ 成分をみてやると、

$$2m_1 - \frac{1}{N_c} \sum_l m_l = 0$$

である。もし $m_1 \neq m_2$ なる m_2 があつたとすると、(77)式と上式は両立しない。よって $\forall m_i = m_1$ であり、上式の和を実行すると $2m_1 - \frac{1}{N_c} N_f m_1 = 0$ であることが分かる。一般には $m_1 \neq 0$ であるから、 $2 = \frac{N_f}{N_c}$ となり $N_f < N_c$ に反する。よって、 M' は非対角成分を持つことができず、対角化可能であることが分かる。

よって一般に、

$$M' = \text{diag}(\underbrace{m_1, \dots, m_1}_r, \underbrace{m_2, \dots, m_2}_{N_f - r}) \quad (78)$$

である。 $0 \leq r \leq [N_f/2]$ として一般性を失わない。従って(77)式より

$$\left(1 - \frac{r}{N_c}\right) m_1 + \left(1 - \frac{N_f - r}{N_c}\right) m_2 = 0 \quad (79)$$

である。また(76)式から

$$m_1^{N_c - N_f + r} m_2^{N_c - r} = (-1)^{N_c - N_f} (\mu \Lambda)^{2N_c - N_f} \quad (80)$$

を得る。これら2式より、

$$m_2 = \left[(-1)^r \left(\frac{N_c - r}{N_c - N_f + r} \right)^{N_c - N_f + r} \right] \mu \Lambda \quad (81)$$

と求められる。

以上により、 $N_f < N_c$ で $\mu < \infty$ の場合の解が分かった。ところで最後の解は、 $M \rightarrow M'$ の変換分 $GL(N_f, C)$ の自由度 $GL(N_f, C)/[GL(r, C) \times GL(N_f - r, C)]$ を持つ。これは複素で $N_f^2 - (N_f - r)^2 - r^2 =$

$2r(N_f - r)$ 次元であり、non-Baryonic branch の自由度と一致する。 $r \leq [N_f/2]$ で区別されていることもあり、この解は $N = 2$ の non-Baryonic branch から来たものと思われる。 Λ を止めて $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$m_2 \sim \mu\Lambda = (\mu^{N_c - N_f} \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f})^{\frac{1}{2N_c - N_f}} \rightarrow \infty$$

であるから、解は全て不安定で moduli を持たない。これは $N = 1$ の結果を再現している。

次に、 $N_f = N_c$ の場合について考える。 W_{eff} は、 $N = 1$ SQCD の解析より (41) 式で与えられる。従って、 $\mu < \infty$ では

$$W_{\text{eff}} = A(\det M - \tilde{B}B - \Lambda^{2N_c}) + \frac{1}{2\mu} \left[\text{Tr}M^2 - \frac{1}{N_c}(\text{Tr}M)^2 \right]$$

と思われる。 $N_f < N_c$ の場合と異なり、厳密に正しいという保証はない。

このスーパーポテンシャルから出発すると、moduli 空間は

$$A\tilde{B} = 0, \quad AB = 0 \quad (82)$$

$$\det M - B\tilde{B} = \tilde{\Lambda}^{2N_c} \quad (83)$$

$$M^2 - \frac{1}{N_c}M\text{Tr}M = -\mu A\det M \quad (84)$$

で指定される。 $N_f < N_c$ の場合と同様 M は対角化可能で、固有値は最大でも 2 種類しかとれないことが示せるので、 $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_1, m_2, \dots, m_2)$ とおく。以下では場合分けして解を求める。

1. $A = 0$

(82) 式は自動的に満たされるから、 $B\tilde{B} = 0, B\tilde{B} \neq 0$ の 2 通りの可能性がある。

(a) $B\tilde{B} = 0$

(83) 式より $m_1^r m_2^{N_f - r} = \Lambda^{2N_c}$ 、(84) 式より $m_1(N_c - r)(m_1 + m_2) = 0$ である。よって $r = 0$ で $m_2 = \tilde{\Lambda}^2$ とまとめられる。

(b) $B\tilde{B} \neq 0$

(83) 式より $m_1^r m_2^{N_f - r} - \tilde{B}B = \tilde{\Lambda}^{2N_c}$ 、(84) 式より $m_1(N_c - r)(m_1 + m_2) = 0$ である。よって解は、 $r = 0$ で

$$m_2^{N_c} - \tilde{B}B = \tilde{\Lambda}^{2N_c} \quad (85)$$

とまとめられる。

2. $A \neq 0$ (82) 式より、 $B = \tilde{B} = 0$ である。(84) 式より、(79) 式を得る。(83) 式より、 $m_1^r m_2^{N_f - r} = (\mu\Lambda)^{N_c}$ である。よって、

$$m_1 = \left[(-1)^{N_c - r} \left(\frac{r}{N_c - r} \right)^{N_c - r} \right]^{\frac{1}{N_c}} \mu\Lambda, \quad m_2 = \left[(-1)^r \left(\frac{N_c - r}{r} \right)^r \right]^{\frac{1}{N_c}} \mu\Lambda$$

$B = \tilde{B} = 0$ の解は $N = 2$ SQCD の non-Baryonic branch から来たものと思われ、 $N_f < N_c$ での解 (79)(80) に一致している。 $B\tilde{B} \neq 0$ の解は Baryonic branch からきたものと思われる。 $N_f = N_c$ であるから $\mu\Lambda = \tilde{\Lambda}$ で、 $\mu \rightarrow \infty$ でも解は残る。

最後に $N_f \geq N_c + 1$ の場合を考える。 μ が小さいところを考えているから、前小節の議論の $\mu \ll \Lambda$ に対応する極限のとり方を考えている。よって $N = 1$ ではゲージ群 $SU(N_f - N_c)$ の磁気的な記述が見えるはずである。従って、スーパーポテンシャルには $\frac{1}{\lambda} M q \tilde{q}$ が含まれる。但し、 M の次元合わせのパラメータは、 μ を随伴表現の場の質量として使っているので λ とした。また、 $N_f < N_c$ で現れた ADS 型のスーパーポテンシャルは、 B, \tilde{B} を除けば、 $N_f \geq N_c$ でも対称性から許される唯一の形であり、これを理論に入れておくと、運動方程式からインスタントン計算により求められた M_i^j の期待値を再現する。そこで、電気・磁

氣的記述の双方にこのポテンシャルを入れておくことにする。なお、 $N_f > N_c$ では必ず $\langle \det M \rangle = 0$ であるから、ADS 型のスーパーポテンシャルを加えても moduli 空間は変わらない。以上により、スーパーポテンシャルを

$$W_{\text{eff}} = \frac{1}{\lambda} M q \tilde{q} + (N_c - N_f) \left(\frac{\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} + \frac{1}{2\mu} \left[\text{Tr} M^2 - \frac{1}{N_c} (\text{Tr} M)^2 \right]$$

と取る。なお、 $\tilde{\Lambda}$ は電氣的な記述のスケールである。

解を求める。まず $q = \tilde{q} = 0$ なら、このスーパーポテンシャルは $N_f < N_c$ のときと同じである。従って同じ解 (79)(80) 式が求まる。この解は $N = 2$ の non-Baryonic branch から出てきたと思われる。 m_i は (81) 式で与えられるので、 $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとると $M = 0$ に落ちる。これは、 $N = 1$ SQCD で考えた時に、 $B = \tilde{B} = 0$ なら $\det M = 0$ であることと矛盾しない。

次に、 $q, \tilde{q} \neq 0$ の場合を考える。 $N_f = N_c + 1$ のとき、磁氣的な理論では $N_f - N_c = 1$ よりクォークの成分数は 1、よってバリオンの成分数はもともと 1 個しかなく、 $B = (Cb, 0, \dots, 0)$ 、 ${}^t \tilde{B} = ({}^t C\tilde{b}, 0, \dots, 0)$ と書ける。 C は (47) 式で与えられている。 $\frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial q} = \frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial \tilde{q}} = 0$ より $Mq = M\tilde{q} = 0$ であるから、 $M = \text{diag}(0, m, \dots, m)$ ととれる。また $\frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial M} = 0$ より

$$m^{N_c} - \tilde{B}B = -\frac{m}{\mu} \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} \quad (86)$$

である。 $N_f > N_c + 1$ では、同様に

$$q = \begin{pmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_{N_f - N_c} \end{pmatrix} \quad {}^t \tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{q}_{N_f - N_c} \end{pmatrix}$$

$$M = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{N_f - N_c}, \underbrace{m, \dots, m}_{N_c})$$

である。 $N_f > N_c + 1$ では $\det M = 0$ であるが、 $M_k^k = 0$ の成分も $M_k^k = \epsilon e^{-\frac{2\pi i k}{N_f - N_c}}$ として $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとるものとする、

$$\frac{1}{\lambda} q_k \tilde{q}^k - \left(\frac{\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}}{m^{N_c} \epsilon^{N_f - N_c}} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \frac{1}{\epsilon} e^{\frac{2\pi i k}{N_f - N_c}} + \frac{1}{\mu} \left(\epsilon e^{\frac{-2\pi i k}{N_f - N_c}} - \frac{1}{N_c} \text{Tr} M \right) = 0$$

であるから $\epsilon \rightarrow 0$ で

$$m^{N_c} - \tilde{B}B = \mu^{N_c - N_f} m^{N_f - N_c} \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} \quad (87)$$

と求まる。 $N_f = N_c + 1$ での解 (86) 式も、この表式に含まれる。但し、 $\det M = 0$ への近づけ方は一意ではなく、極限のとり方によって結果が変わってしまうので、厳密に正しいかどうかは不明である。この解は、 $N = 2$ の Baryonic branch からきたと考えられる。また、 $\mu \rightarrow \infty$ をとると、(86) 式は $\tilde{\Lambda}$ 依存性を持たなくなる。これは、 $N = 1$ SQCD で $N_f \geq N_c + 1$ の moduli 空間が量子補正を受けないことに対応している。

以上のように、 $B\tilde{B} = 0$ での解は (78)(79) (80) 式で、 $B\tilde{B} \neq 0$ での解は (86) 式で与えられることが分かった。但し、導出中 $N_f \geq N_c$ では $\mu \neq 0$ でのスーパーポテンシャルを仮定し、また $N_f > (N_c + 1)$ では $\det M = 0$ への極限の取り方によって答えが変わる。

3 超弦理論と双対性

前章では、4次元超対称ゲージ理論の非摂動的な解析について、最近の進展を紹介した。特に $N = 2$ SQCDの真空は Coulomb branch と Higgs branch に大別され、Coulomb branch については Seiberg-Witten 曲線で完全に記述されることをみた。この Seiberg-Witten 曲線で指定される多様体構造は、4次元より高い次元の理論におけるコンパクト化によって現れることが予想される [47]。このとき高次元の理論として考えられるものに、超弦理論がある。

超弦理論は、理論の基本構成要素を点粒子でなく弦にしたものである。超対称性をもたせることによって、10次元で type IIA, type IIB, type I, $SO(32)$ ヘテロ、 $E_8 \times E_8$ ヘテロという5つの安定な真空を持つことが知られている。低エネルギー有効理論として超重力理論及び SYM を持ち、しかも発散のない理論であることから、重力を含めた統一理論の候補として有力視されてきた。10次元での SYM のゲージ群は、 $SO(32)$ または $E_8 \times E_8$ に限られており、これを4次元にコンパクト化する過程で、他のゲージ群を持たせることができる。このような背景をもとに、コンパクト化された超弦理論についての研究が進められ、コンパクト化した理論の間に様々な双対性が知られるようになった。1994年頃から、これらの双対性が10次元の理論の双対性で説明できるようになり、更に10次元で見えていた5つの理論が、11次元の M 理論と呼ばれる1つの理論の moduli 空間上の理論として理解できることが分かった [11]。また、時期を同じくして、D-brane というソリトン解が (R,R) 電荷と呼ばれる特殊な電荷を運ぶことが示され [48]、超弦理論の双対性を理解する上で重要な役割を果たした。

この章では、このような超弦理論における研究結果を、簡単に紹介する。

3.1 弦理論

この節では、超対称性のない弦理論について、弦の励起状態のスペクトル及び非線型 σ 模型による有効作用の求め方を解説する。また、閉弦を S^1 にコンパクト化したときのスペクトルを調べ、T-duality という双対対称性を導く。この T-duality を開弦に作用させると、自由端が固定端に変わる。このとき開弦の端点が動ける領域として D-brane を導入し、brane 上での有効理論についても説明する。

3.1.1 弦の作用と古典解

d 次元時空中における質量 $m \neq 0$ を持つ点粒子の作用は、世界線の長さ

$$S = -m \int_{S_0}^{S_1} ds = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \sqrt{-g_{mn} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau}} \quad (88)$$

で与えられる。但し、2.1節と同様 $g_{mn} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ なる計量であり、 $m = 0, 1, \dots, d-1$ とする。 τ は世界線のパラメータである。これと古典的に等価な作用として、

$$S = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau e \left(\frac{1}{e^2} g_{mn} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} - m^2 \right) \quad (89)$$

がとれる。ここで e は τ の関数である。この作用は $m = 0$ でも意味を持つ。運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta e} &= -\frac{1}{e^2} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx_m}{d\tau} - m^2 = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta x_m} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{e} \frac{dx^m}{d\tau} \right) = 0 \end{aligned}$$

であり、これを使って e を消せば (89) 式が (88) 式の作用に一致する。(89) 式の作用は、微小変換

$$\delta_\xi x^m = \xi \frac{dx^m}{d\tau}, \quad \delta_\xi e = \frac{d\xi e}{d\tau}$$

に対する局所対称性を持つ。これを例えば $e(\tau) = \frac{1}{m}$ とゲージ固定すると、 e についての運動方程式に相当する拘束条件 $\frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx_m}{d\tau} + 1 = 0$ がつく。

同様の議論を、 d 次元時空を伝搬する弦に対して行なう。点粒子の質量に相当する弦の張力を $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ とおくと、弦の作用は世界面の面積

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int dA = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\det \left(g_{mn} \frac{\partial X^m}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^n}{\partial \sigma^\beta} \right)}$$

で与えられる。これを南部・後藤の作用という [49]。点粒子の場合と同様に、古典的に等価な作用として

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} g_{mn} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n$$

がとれる。 $\sigma_\alpha = (\tau, \sigma)$ ($\alpha = 0, 1$) は世界面のパラメータであり、変域は $-\infty < \tau < \infty, 0 \leq \sigma \leq \bar{\sigma}$ とする。通常、閉弦では $\bar{\sigma} = 2\pi$ 、開弦では $\bar{\sigma} = \pi$ ととる。 $h_{\alpha\beta}$ は σ_α の関数で世界面の計量にあたり、 $h = -\det h_{\alpha\beta}$ とする。この作用は Brinck らによって導入されたもので [50]、Polyakov が弦の経路積分による量子化を行ったときに使ったことから [51] Polyakov 作用と呼ばれることが多い。運動方程式は、

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= -2\pi\alpha' \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X_m - \frac{1}{4} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^m \partial_\delta X_m = 0 \\ -2\pi\alpha' \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta X^m} &= \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_\alpha \left(\sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^m \right) = 0 \end{aligned} \quad (90)$$

と導かれる。

Polyakov 作用の持つ局所対称性は、以下の通りである。

- 世界面の一般座標変換

$$\begin{aligned} \delta_\xi X^m &= \xi^\alpha \partial_\alpha X^m \\ \delta_\xi h_{\alpha\beta} &= \delta^\gamma \partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi^\gamma h_{\gamma\beta} + \partial_\beta \xi^\gamma h_{\alpha\gamma} \\ &= \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha \end{aligned}$$

- Weyl 変換

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda X^m &= 0 \\ \delta_\Lambda h_{\alpha\beta} &= 2\Lambda h_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

ξ_α や Λ は微小変換のパラメータで、 σ_α の任意の関数である。パラメータの数が 3 つで $h_{\alpha\beta}$ の独立成分も 3 つだから、

$$\begin{aligned} \delta h_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha + 2\Lambda h_{\alpha\beta} \\ &= (P\xi)_{\alpha\beta} + 2\tilde{\Lambda} h_{\alpha\beta} \\ &\begin{cases} (P\xi)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha - (\nabla_\gamma \xi^\gamma) h_{\alpha\beta} \\ 2\tilde{\Lambda} = 2\Lambda + \nabla_\gamma \xi^\gamma \end{cases} \end{aligned} \quad (91)$$

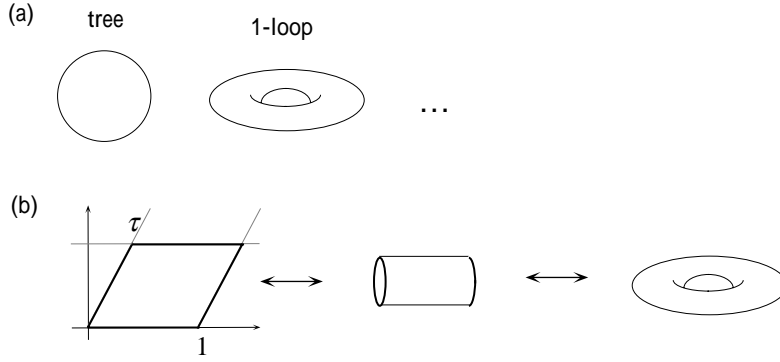


図 9: 閉弦の世界面とパラメータ

により局所的には $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \equiv \text{diag}(-1, 1)$ とゲージ固定できる。これを共形ゲージと呼ぶ。

図 9(a) のように、閉弦の n -loop での世界面は種数 n の Riemann 面になっており、一般には大域的に共形ゲージを取ることができない。 n 階のテンソル $V^{(n)} = V_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ のスカラー積を

$$(V^{(n)}|W^{(n)}) = \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha_1\beta_1} \dots h^{\alpha_n\beta_n} V_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^* W_{\beta_1 \dots \beta_n}$$

と定義し、 $t_{\alpha\beta}$ を対称な 2 階テンソルとして P の随伴演算子 P^\dagger を $(t|P\xi) = (P^\dagger t|\xi)$ で定めると、

$$(P^\dagger t)_\alpha = -2\nabla^\beta t_{\alpha\beta}$$

である。 P^\dagger のゼロ・モード t_0 ($P^\dagger t_0 = 0$) は $P\xi$ では表せない。 τ_0 分の $h_{\alpha\beta}$ の変形を Teichmüller 変形と呼び、これを考慮して (91) 式を

$$\delta h_{\alpha\beta} = (P\xi)_{\alpha\beta} + 2\tilde{\Lambda} h_{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{\text{rank} P^\dagger} t_{0\alpha\beta}^i \delta\tau_i \quad (92)$$

とすれば、任意の $\delta h_{\alpha\beta}$ が表せる。パラメータ τ_i を導入すれば、大域的に共形ゲージがとれることになる。 τ_i の個数 $\text{rank} P^\dagger$ は、 $n=0$ で 0、 $n=1$ で 1、 $n>1$ で $3(n-1)$ であることが知られている。例えば $n=1$ のとき世界面はトーラスで、パラメータ τ は図 9(b) のようにとれる。

また、 P のゼロ・モード $\xi_{0\alpha}$ が存在すれば、 $\xi \rightarrow \xi + \xi_0$ としても同じ作用を導き、ゲージ固定は完全でない。なお、 $(P\xi_0)_{\alpha\beta} = 0$ を Killing 方程式と呼び、その解 ξ_0 を Killing ベクトルという。Killing ベクトルの数は $n=0$ のとき 3、 $n=1$ のとき 1、 $n>1$ のとき 0 である。共形ゲージの下での Killing 方程式は

$$\partial_\alpha \xi_{0\beta} + \partial_\beta \xi_{0\alpha} = \partial_\gamma \xi_0^\gamma g_{\alpha\beta}$$

である。このような ξ_0 による変換を共形変換といい、共形不変性を持つ 2 次元の理論については詳しく調べられている [52]。 $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ という座標に移ると、世界面上の計量は $g_{+-} = g_{-+} = -\frac{1}{2}$ 、 $g^{+-} = g^{-+} = -2$ で他の成分は 0 である。また、 $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$ であるから、Killing 方程式は $\partial_+ \xi_0^- = \partial_- \xi_0^+ = 0$ と書き換えられる。よって、 ξ_0^\pm はそれぞれ σ^\pm のみを変数とする任意の関数であることが分かる。

共形ゲージのもとでの作用は、

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X_m = \frac{1}{\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_+ X^m \partial_- X_m$$

と書ける。 $X^m \rightarrow X^m + \delta X^m$ 、 $\delta X^m(\tau = \pm\infty) = 0$ とすると

$$\delta S = T \int d^2\sigma \delta X^m (\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2) X_m - T \int d\tau \partial_\sigma X_m \delta X^m \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{\sigma}}$$

である。閉弦の場合 $\delta X^m(\sigma + 2\pi) = \delta X^m(\sigma)$ より右辺第二項の表面項は消えて、運動方程式

$$(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2)X_m = 0$$

が導かれる。開弦ではこれに加え、表面項を消すための境界条件として

$$\text{Neumann 条件 (自由端)} \quad \partial_\sigma X_m|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (93)$$

$$\text{Dirichlet 条件 (固定端)} \quad \delta X_m|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (94)$$

のどちらかを課す。通常、開弦の端は自由であるのが自然なので Neumann 条件をとる。この他に、ゲージ固定する前の運動方程式 (90) から拘束条件

$$T_{01} = T_{10} = \frac{1}{2}(\partial_\tau X^m \partial_\sigma X_m) = 0$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{4}(\partial_\tau X^m \partial_\tau X_m + \partial_\sigma X^m \partial_\sigma X_m) = 0$$

がつく。 σ^\pm を使ってこれらを書き直すと、

$$\begin{aligned} \partial_+ \partial_- X^m &= 0 \\ T_{++} &= \frac{1}{2} \partial_+ X^m \partial_+ X_m = 0 \\ T_{--} &= \frac{1}{2} \partial_- X^m \partial_- X_m = 0 \\ T_{+-} &= T_{-+} = 0 \end{aligned}$$

である。なお、エネルギー運動量の保存則から

$$\partial_- T_{++} = 0, \quad \partial_+ T_{--} = 0$$

が導かれるから、 $T_{++} = T_{++}(\sigma^+)$, $T_{--} = T_{--}(\sigma^-)$ である。よって任意の関数 $f(\sigma^+)$ に対して $\partial_-(fT_{++}) = 0$ であり、無限個の保存電荷

$$\bar{L}_f = \frac{1}{\pi\alpha'} \int_0^{\sigma^+} d\sigma f(\sigma^+) T_{++}(\sigma^+)$$

が存在する。ここで、共役運動量は $\Pi^m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau X_m)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^m$ だから、Poisson の交換子 $\{ \}_{cl}$ は

$$\begin{aligned} \{X^m(\sigma, \tau), X^n(\sigma', \tau)\}_{cl} &= \{\Pi^m(\sigma, \tau), \Pi^n(\sigma', \tau)\}_{cl} = 0 \\ \{X^m(\sigma, \tau), \Pi^n(\sigma', \tau)\}_{cl} &= g^{mn} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (95)$$

である。これを使うと

$$\{\bar{L}_f, X^m(\sigma)\}_{cl} = -f(\sigma^+) \partial_+ X^m(\sigma)$$

が導かれるから、この保存電荷は $\sigma^+ \rightarrow \sigma^+ + f(\sigma^+)$ の変換に相当し、ゲージ固定されずに残った自由度に一致している。 T_{--} についても、同様に $\sigma^- \rightarrow \sigma^- + f(\sigma^-)$ を引き起こす保存電荷 L_f が導かれる。

運動方程式の一般解は、Fourier 展開で表される。閉弦の場合

$$\begin{aligned} X^m(\tau, \sigma) &= X_R^m(\tau - \sigma) + X_L^m(\tau + \sigma) \\ X_R^m(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2} x^m + \frac{\alpha'}{2} p^m(\tau - \sigma) + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \alpha_k^m e^{-in(\tau - \sigma)} \\ X_L^m(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2} x^m + \frac{\alpha'}{2} p^m(\tau + \sigma) + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \bar{\alpha}_k^m e^{-in(\tau + \sigma)} \end{aligned} \quad (96)$$

である。開弦では境界条件 (93) (94) 式により X_R と X_L が関係付けられ、

$$X^m(\sigma, \tau) = x^m + 2\alpha' p^m \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \alpha_k^m (e^{-in(\tau+\sigma)} + e^{-in(\tau-\sigma)}) \quad (97)$$

となる。 X^m は実であるから、 x^m, p^m は実で $\alpha_{-k}^m = (\alpha_k^m)^\dagger$, $\bar{\alpha}_{-k}^m = (\bar{\alpha}_k^m)^\dagger$ である。弦の重心の運動量は

$$\int_0^{\bar{\sigma}} d\sigma \Pi^m = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{\bar{\sigma}} d\sigma \partial_\tau X^m(\sigma) = p^m$$

と求められる。また、 $\tau = 0$ での重心の位置は

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \int_0^{\bar{\sigma}} X^m(\tau = 0) = x^m$$

である。Poisson の交換関係 (95) 式を Fourier 展開の係数で書き直すと、

$$\begin{aligned} \{x^m, p^n\}_{cl} &= g^{mn} \\ \{\alpha_k^m, \alpha_l^n\}_{cl} &= -ik\delta_{k+l}g^{mn} \\ \{\bar{\alpha}_k^m, \bar{\alpha}_l^n\}_{cl} &= -ik\delta_{k+l}g^{mn} \\ \{\alpha_k^m, \bar{\alpha}_l^n\}_{cl} &= 0 \end{aligned} \quad (98)$$

となる。最後の 2 式は閉弦の場合のものである。

閉弦の場合、 $\alpha_0^m = \bar{\alpha}_0^m = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^m$ としてハミルトニアンを $\alpha_k^m, \bar{\alpha}_k^m$ で表すと、

$$\mathcal{H} = \int_0^{2\pi} d\sigma \left[\partial_\tau X^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\tau X^m)} - \mathcal{L} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-k}^m \alpha_{km} + \bar{\alpha}_{-k}^m \bar{\alpha}_{km})$$

である。無限個の保存電荷 L, \bar{L} は、 $f_k(\sigma^\pm) = e^{-ik\sigma^\pm}$ として

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ik(\tau-\sigma)} T_{--}(\tau-\sigma) = \frac{1}{2} \sum_l \alpha_{k-l}^m \alpha_{lm} \\ \bar{L}_k &= \frac{1}{\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ik(\tau+\sigma)} T_{++}(\tau+\sigma) = \frac{1}{2} \sum_l \bar{\alpha}_{k-l}^m \bar{\alpha}_{lm} \end{aligned}$$

と求められる。 L_k を Virasoro 演算子という。 $L_k = L_{-k}^\dagger$, $\bar{L}_k = \bar{L}_{-k}^\dagger$ であり、 $\mathcal{H} = L_0 + \bar{L}_0$ となっている。 σ 方向への並進の生成子は、

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_\tau X^m \partial_\sigma X_m = \bar{L}_0 - L_0$$

であり、閉弦では端点 $\sigma = 0$ は自由にとれるので、条件 $L_0 - \bar{L}_0 = 0$ を満たす。 L_k の間の Poisson の交換子は、(98) 式より

$$\begin{aligned} \{L_k, L_l\}_{cl} &= -i(k-l)L_{k+l} \\ \{\bar{L}_k, \bar{L}_l\}_{cl} &= -i(k-l)\bar{L}_{k+l} \\ \{L_k, \bar{L}_l\}_{cl} &= 0 \end{aligned} \quad (99)$$

と求められる。これを Virasoro 代数という。開弦の場合も同様に、ハミルトニアン $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{-k}^m \alpha_{km}$ 、Virasoro 演算子 $L_k = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_{k-l}^m \alpha_{ml}$ と書ける。 $H = L_0$ であり、 L_k が Virasoro 代数を満たすことも示される。

3.1.2 正準量子化

この小節では全小節の結果を量子化し、弦のスペクトルを調べる。

Poisson の交換子 (98) 式を Dirac の交換子に上げると、

$$\begin{aligned} [x^m, p^n] &= ig^{mn} \\ [\alpha_k^m, \alpha_l^n] &= k\delta_{k+l}g^{mn} \\ [\bar{\alpha}_k^m, \bar{\alpha}_l^n] &= k\delta_{k+l}g^{mn} \\ [\alpha_k^m, \bar{\alpha}_l^n] &= 0 \end{aligned} \quad (100)$$

が導かれる。最後の 2 式は開弦にはない。 $\alpha_k, \bar{\alpha}_k$ のうち、負の振動モード ($k < 0$) の係数を生成演算子、正の振動モード ($k > 0$) の係数を消滅演算子として、正規積 $::$ を「生成演算子を左、消滅演算子を右」と定義する。 L, \bar{L} は振動子の複合演算子なので、正規積をつけて量子化するべきで、

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} : \alpha_{k-l}^m \alpha_{lm} :$$

となる。 $k = 0$ の場合は、正規積を取った時に交換関係から定数が出てくる。この不定定数を a として、もともとの L_0 を

$$L_0 + a = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{-l}^m \alpha_{lm} + a$$

と表すことにする。(100) 式より、 L_k 同士の交換関係は

$$[L_k, L_l] = (k-l)L_{k+l} + \frac{d}{12}k(k^2-1)\delta_{k+l,0} \quad (101)$$

と導かれる。古典的な Virasoro 代数 (99) 式と違い、中心荷 d が入っている。

運動量演算子 Π^m の固有状態 $|0, p\rangle$ を、

$$\begin{aligned} \Pi^m |0, p\rangle &= p^m |0, p\rangle \\ \alpha_k^m |0, p\rangle &= 0 \quad k > 0 \end{aligned}$$

と定義する。交換関係 (100) 式により、Wick 回転 $\tau \rightarrow -i\tau$ を行って、

$$|0, p\rangle = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} : e^{ip_m X^m} : |0, 0\rangle$$

と書けることが分かる。このように真空 $|0, 0\rangle$ に作用して状態を作る演算子を、Vertex 演算子と呼ぶ。 $|0, p\rangle$ に生成演算子を作用させれば、Hilbert 空間が作られる。但し、例えば $\alpha_{-k}^m |0\rangle$, $k > 0$ のノルムは、交換関係から $\langle 0 | \alpha_k^0 \alpha_{-k}^0 | 0 \rangle = -k \langle 0 | 0 \rangle < 0$ と、負になってしまう。このようなゴーストは、 $d = 26$ 次元かつ $a = 1$ で消えることが知られている (no-ghost 定理 [53])。古典系では拘束条件より $T = 0$ であった。しかし量子論的には、物理的な状態を $|\varphi\rangle$ としたとき交換関係 (101) により

$$\langle \varphi | [L_k, L_{-k}] | \varphi \rangle = \langle \varphi | 2kL_0 | \varphi \rangle + \frac{d}{12}k(k^2-1)\langle \varphi | \varphi \rangle$$

となるから、古典的な場合と異なり任意の k に対して $L_k = 0$ とはできない。そこで、物理的な状態は正の振動モードの係数 L_k によって消される、つまり

$$\begin{aligned} L_k | \varphi \rangle &= 0 \quad k > 0 \\ (L_0 - a) | \varphi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

と定義する。閉弦の場合、 \bar{L}_k についても同様であり、 σ 方向の並進の演算子に対して $(L_0 - \bar{L}_0)|\varphi\rangle = 0$ という条件を導く。

α_0^m を p^m で書き直すと、開弦の場合

$$L_0 = \alpha' p^m p_m + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^m \alpha_{km}$$

であるから、質量演算子 $m^2 = -p^m p_m$ は

$$m^2|\varphi\rangle = \frac{1}{\alpha'}(N - a)|\varphi\rangle \quad (102)$$

と書ける。但し、 N は粒子数演算子 $N = \sum_{k>0} \alpha_{-k}^m \alpha_{km}$ である。閉弦では

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\alpha'}{4} p^m p_m + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^m \alpha_{km} \\ \bar{L}_0 &= \frac{\alpha'}{4} p^m p_m + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-k}^m \bar{\alpha}_{km} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} m^2|\varphi\rangle &= (m_L^2 + m_R^2)|\varphi\rangle \\ \alpha' m_L^2 &= 2(\bar{N} - a) \\ \alpha' m_R^2 &= 2(N - a) \end{aligned} \quad (103)$$

と書ける。 N は開弦と同じで、 \bar{N} は同様に $\bar{N} = \sum_{k>0} \bar{\alpha}_{-k}^m \bar{\alpha}_{km}$ である。 $L_0 = \bar{L}_0$ より $m_L^2 = m_R^2$ でなくてはならない。

空間座標を $X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{d-1})$, X^i , $i = 1, \dots, d-2$ で表すと、共形ゲージでも残っている $\sigma^\pm \rightarrow f(\sigma^\pm)$ 分の局所対称性を使って $X^\pm \propto \tau$ とできる。これを光円錐ゲージと呼ぶ。このとき、ゲージが完全に固定されて物理的自由度のみが残るから、以下ではこのゲージでの質量演算子の固有値によって励起状態のスペクトルを調べる。

まず、開弦の場合を考える。 $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ とすると、 $\alpha_n^+ = \sqrt{2\alpha'} p^+ \delta_{n,0}$ である。また、拘束条件 $(\partial_\tau X^m \pm \partial_\sigma X^m)^2 = 0$ は

$$\partial_\pm X^- = \frac{1}{2\alpha' p^+} (\partial_\pm X^i)^2$$

と書き換えられ、これを生成消滅演算子で書き直すと

$$\alpha_k^- = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha'} p^+} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} : \alpha_{k-l}^i \alpha_l^i : - 2a \delta_{k,0} \right)$$

である。また質量演算子は、 $m^2 = 2p^+ p^- - p^i p^i$ より

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{k>0} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i - a \right)$$

である。基底状態では、 $\alpha' m^2 |0, p\rangle = -a |0, p\rangle$ である。第一励起状態 $\alpha_{-1}^i |0, p\rangle$ は、 $SO(d-2)$ のベクトル粒子である。この状態を表すバーテックス演算子は、 $V^m = \partial_\tau X^m e^{ip^m X_m}$ となる。質量は、

$$\alpha' m^2 \alpha_{-1}^i |0, p\rangle = (1 - a) \alpha_{-1}^i |0, p\rangle$$

より $\alpha' m^2 = (1 - a)$ と求められる。

ところで、 $SO(d-1, 1)$ の Lorentz 対称性があるとき、粒子スペクトルは $m^2 \neq 0$ なら $SO(d-1)$ の表現、 $m^2 = 0$ なら $SO(d-2)$ の表現になっていなくてはならない。今、第一励起状態は $SO(d-2)$ のベクトル表現で、他に同じ質量の励起はないから $SO(d-1)$ の表現には組めず、 $m = 0$ のはずである。従って $a = 1$ でなければならない。 a はもともと正規積を取る時に出てくる定数であったから、まともに評価すると

$$\sum_{k \neq 0} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i = \sum_{k \neq 0} : \alpha_{-k}^i \alpha_k^i : + (d-2) \sum_{k=1}^{\infty} k$$

である。本来発散する $\sum k$ の部分を、 $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ を $s = -1$ まで解析接続した値 $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ ととれば、 $a = \frac{d-2}{24}$ より $d = 26$ が求まる。これは no-ghost 定理が成り立つ臨界次元であった。なお、基底状態の質量は $\alpha' m^2 = -a$ だったから、 $a = 1$ とすると負の質量を持つタキオンが存在することになり、真空は安定でない。

第二励起状態は $\alpha_{-2}^i |0\rangle, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0\rangle$ であり、 $SO(24)$ で見てベクトル表現、対称テンソル表現、スカラー表現の状態からなっている。質量は $\alpha' m^2 = 1 \neq 0$ である。これらの励起状態は、 $SO(25)$ の対称テンソル表現の状態 $V^{\{m,n\}} |0,0\rangle$ から $V^{\{i,25\}} |0,0\rangle, V^{\{i,j\}} |0,0\rangle, V^{\{25,25\}} |0,0\rangle$ と構成され、正しく $SO(d-1)$ の表現となっている。同様に第 n 励起状態が $SO(d-1)$ の表現になることが分かるから、 $a = 1$ と置いたことと矛盾しない。

次に、閉弦を考える。 $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ とすると、 $\alpha_n^+ = \bar{\alpha}_n^+ = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^+ \delta_{n,0}$ である。拘束条件 $(\partial_\tau X^m \pm \partial_\sigma X^m)^2 = 0$ は

$$\partial_\pm X^- = \frac{1}{\alpha' p^+} (\partial_\pm X^i)^2$$

と書け、生成消滅演算子で表すと

$$\begin{aligned} \alpha_n^- &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - 2a \delta_{n,0} \right) \\ \bar{\alpha}_n^- &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} : \bar{\alpha}_{n-m}^i \bar{\alpha}_m^i - 2a \delta_{n,0} \right) \end{aligned}$$

である。質量演算子は

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'} \left[\sum_{n>0} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \bar{\alpha}_{-n}^i \bar{\alpha}_n^i) - 2a \right]$$

となる。

基底状態の質量は、 $\alpha' m^2 |0, p\rangle = -4a |0, p\rangle$ で与えられる。閉弦の第一励起状態は、 $L_0 - \bar{L}_0 = 0$ より $\alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j |0\rangle$ である。この状態の質量は $\alpha' m^2 = 4(1 - a)$ である。 $SO(d-2)$ の表現として見ると、

$$\alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j |0, p\rangle = \alpha_{-1}^{[i} \bar{\alpha}_{-1}^{j]} |0, p\rangle + \left\{ \alpha_{-1}^{(i} \bar{\alpha}_{-1}^{j)} - \frac{1}{24} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \bar{\alpha}_{-1}^k \right\} |0, p\rangle + \frac{1}{24} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \bar{\alpha}_{-1}^k |0, p\rangle$$

と分解される。なお、 $[i, j]$ は i, j を反対称に組んだもの、 (i, j) は対称に組んだものを表す。右辺の最初の部分を反対称テンソル場 B^{ij} 、第二項を重力子 G^{ij} 、第三項をディラトン ϕ と呼ぶ。この状態に対応するパーテックス演算子は、 $V^{mn}(q) = \partial_+ X^m \partial_- X^n e^{ip^m X_m}$ である。開弦のときと同じく、第一励起状態は Lorentz 変換性から質量 0 でなくてはならず、 $a = 1, d = 26$ が導かれる。

第二励起状態として、 $\alpha' m^2 = 4$ の $\alpha_{-2}^i \bar{\alpha}_{-2}^j |0\rangle, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \bar{\alpha}_{-1}^k |0\rangle, \alpha_{-2}^i \bar{\alpha}_{-1}^j \bar{\alpha}_{-1}^k |0\rangle, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \bar{\alpha}_{-2}^k |0\rangle$ がある。これらは $\alpha^m \alpha^n \bar{\alpha}^p \bar{\alpha}^q |0\rangle$ から導かれるもので、 $SO(d-1)$ の表現になっている。同じことが第 n 励起状態についても示せるから、閉弦の場合にも $a = 1$ と取って無矛盾である。

3.1.3 経路積分による量子化

前小節では正準量子化の方法で議論を進めたが、この小節では共変性が明白な経路積分による量子化を閉弦の場合に限って考える。臨界次元 $d = 26$ が共変不変性に量子異常がないという条件に一致すること、 n -loop 分配関数の modular 不変性について説明する。

分配関数は

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}h(\sigma, \tau) \mathcal{D}X^m(\sigma, \tau)}{\text{Vol}(\text{Diff}) \text{Vol}(\text{Weyl})} e^{iS_P[h, X]}$$

である。作用は $h_{\alpha\beta}$ の (91) 式の変換のもとで不変だから、任意のパラメータ ξ_α による変換分の体積 $\text{Vol}(\text{Diff})$ 、Weyl 変換分の体積 $\text{Vol}(\text{Weyl})$ で予め割っておいた。積分の計量は

$$\begin{aligned} \|\delta h\|^2 &= \int d^2\sigma \sqrt{\bar{h}} h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \delta h_{\alpha\gamma} \delta h_{\beta\delta} \\ \|\delta X\|^2 &= \int d^2\sigma \sqrt{\bar{h}} \delta X^m \delta X_m \end{aligned}$$

で定義する。一般の $\delta h_{\alpha\beta}$ は (92) 式で与えられるから、

$$\mathcal{D}h = \mathcal{D}(P\xi) \mathcal{D}\tilde{\Lambda} \prod_{i=1}^{\text{rank} P^\dagger} d\tau_i = \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\Lambda \left| \frac{\partial(P\xi, \tilde{\Lambda})}{\partial(\xi, \Lambda)} \right| \prod_{i=1}^{\text{rank} P^\dagger} d\tau_i$$

と書ける。Jacobian は形式的には評価できて、

$$\left| \frac{\partial(P\xi, \tilde{\Lambda})}{\partial(\xi, \Lambda)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} P & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right| = (\det P P^\dagger)^{\frac{1}{2}}$$

となる。この Jacobian は、作用の局所対称性に量子異常がないとすると ξ, Λ にはよらず、 $\mathcal{D}\xi \mathcal{D}\Lambda$ は分母と打ち消し合う。但し、 ξ_α のうち Killing ベクトル分は上記の $\int \mathcal{D}\xi$ に含まれないから、この分の体積を $\text{Vol}(\text{KV})$ とおく。よって、

$$Z = \int \frac{\prod_{i=1}^{\text{rank} P^\dagger} d\tau_i}{\text{Vol}(\text{KV})} \mathcal{D}X^m (\det P P^\dagger)^{\frac{1}{2}} e^{iS_P[e^{2\varphi} \hat{h}_{\alpha\beta}, X^m]}$$

となる。反交換する ghost 場 $c_\alpha, b_{\alpha\beta}$ を導入すると、

$$(\det P P^\dagger)^{\frac{1}{2}} = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}b e^{-\frac{i}{\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\bar{h}} h^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} \nabla_\alpha c^\gamma}$$

と書ける。ここで、 $h_{\alpha\beta} = e^{2\varphi} \hat{h}_{\alpha\beta}$ は、ゲージを止めた計量であり、 $\hat{h}_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ とすれば共形ゲージになる。 c は微小な座標付け替えに相当し、 b はゲージに垂直な変化分を表す。以上をまとめると、

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{\prod_{i=1}^{\text{rank} P^\dagger} d\tau_i}{\text{Vol}(\text{KV})} \mathcal{D}X^m \mathcal{D}c \mathcal{D}b e^{iS[X, \hat{h}, b, c]} \\ S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} \hat{h}^{\alpha\beta} [\partial_\alpha X^m \partial_\beta X_m + 4i b_{\beta\gamma} \hat{\nabla}_\alpha c^\gamma] \end{aligned}$$

である。

ゴースト側についても Fourier 展開して

$$\begin{aligned} c_L(\sigma, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_k e^{-ik(\tau+\sigma)} & c_R(\sigma, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik(\tau-\sigma)} \\ b_L(\sigma, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{b}_k e^{-ik(\tau+\sigma)} & b_R(\sigma, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{-ik(\tau-\sigma)} \end{aligned}$$

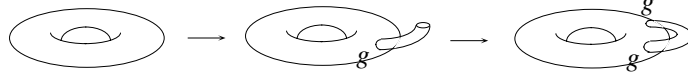


図 10: 閉弦の相互作用

とすると、反交換関係は

$$\{b_k, c_l\} = \delta_{k+l,0} \quad \{b_k, b_l\} = \{c_k, c_l\} = 0$$

で与えられる。\$T\$ はゴースト側でも \$X^m\$ からくる \$T^X\$ と独立に

$$T_{\alpha\beta}^{b,c} = i(b_{\alpha\gamma}\nabla_\beta c^\gamma + b_{\beta\gamma}\nabla_\alpha c^\gamma - c^\gamma\nabla_\gamma b_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}\nabla^\gamma c^\delta)$$

と導かれて、モードで表すと

$$L_k^{b,c} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (k-l) : b_{k+l} c_{-l} :$$

$$\bar{L}_k^{b,c} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (k-l) : \bar{b}_{k+l} \bar{c}_{-l} :$$

となる。\$b\$ と \$c\$ はエルミートだから、\$c_k = c_{-k}^\dagger\$、\$b_k = b_{-k}^\dagger\$ である。これと上式より、\$L_k = L_{-k}^\dagger\$ である。

ところで、正規化に於ける不定分の定数を \$a\$ として、量子化後の Virasoro 演算子は \$L_k = L_k^X + L_k^{b,c} - a\delta_{k,0}\$ である。交換関係は

$$[L_k, L_l] = (k-l)L_{k+l} + A(k)\delta_{k+l,0}$$

$$A(k) = \frac{d}{12}k(k^2-1) + \frac{1}{6}(k-13k^3) + 2ak$$

と導かれる。なお、\$A(k)\$ の第一項は \$X^m\$ から、第二項は \$b, c\$ から導かれるものである。この Virasoro 代数の量子異常項が消えるのは \$d = 26, a = 1\$ のときのみであり、これはちょうど臨界次元に一致している。Virasoro 代数は共形不変性からきたものだから、臨界次元は共形変換に量子異常がないという条件から決まるものと考えられる。

さて、分配関数 \$Z\$ は、\$n\$-loop の分配関数を \$Z_n\$ として

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_{st}^{2n} Z_n$$

と摂動展開される。\$g_{st}\$ は弦の結合定数で、\$n\$ 項目に次数 \$2n\$ で入っているのは、閉弦ではループを 1 つ増すごとに 2 回相互作用が起こることによる (図 10)。\$n = 1\$ の場合に注目する。世界面はトーラスで、\$P^\dagger\$ のゼロ・モードに対応するパラメータは図 9(b) 中の \$\tau_1\$ つであった。トーラスは変換 \$S : \tau \to -\frac{1}{\tau}\$、\$T : \tau \to \tau + 1\$ のもとで不変である。よって \$T, S\$ で生成される \$\tau\$ の \$SL(2, Z)\$ 変換 \$\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\$ で、分配関数への 1-loop の寄与 \$Z_1\$ は不変であるべきである。このように、世界面の対称性から \$\tau_i\$ の変換に対する \$Z_n\$ の不変性が要請され、これを modular 不変性と呼ぶ。

\$Z_1 = \int \frac{d^2\tau}{\text{Vol}(KV)} \xi(\tau, \bar{\tau})\$ における被積分関数 \$\xi\$ を考える。光円錐ゲージでのハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_L$$

$$\mathcal{H}_R = L_0 - 1 = \frac{1}{2}p_i^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - 1 = \frac{1}{2}p_i^2 + N_R - 1$$

$$\mathcal{H}_L = \bar{L}_0 - 1 = \frac{1}{2}p_i^2 + \sum_{n>0} \bar{\alpha}_{-n}^i \bar{\alpha}_n^i - 1 = \frac{1}{2}p_i^2 + N_L - 1$$

となる。 σ 方向の並進の生成子は $L_0 - \bar{L}_0 = \mathcal{H}_R - \mathcal{H}_L$ であり、 τ 方向では \mathcal{H} であるから、 $\text{Re}\tau \sim \sigma$, $\text{Im}\tau \sim \tau$ とみなしたとき、 ξ は

$$\xi(\bar{\tau}, \tau) \sim \text{Tr} e^{2\pi i \text{Re}\tau (\mathcal{H}_R - \mathcal{H}_L)} e^{-2\pi \text{Im}\tau (\mathcal{H}_R + \mathcal{H}_L)} = \text{Tr} q^{\mathcal{H}_R} \bar{q}^{\mathcal{H}_L}$$

のように書ける。ここでは $q = e^{2\pi i\tau}$ である。 $\mathcal{H}_R, \mathcal{H}_L$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \xi(\bar{\tau}, \tau) &\sim \int \frac{d^{24}p}{(2\pi)^{24}} e^{2\pi p^2 \text{Im}\tau} e^{4\pi \text{Im}\tau} \text{Tr} q^{N_R} \bar{q}^{N_L} \\ &\sim \frac{1}{(\text{Im}\tau)^{12}} e^{4\pi \text{Im}\tau} \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^l)^{-24} (1 - \bar{q}^l)^{-24} \\ &= \frac{1}{(\text{Im}\tau)^{12}} |\eta(\tau)|^{-48} \end{aligned}$$

である。但し、 $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^l)$ であり、 $\eta(\tau + 1) = e^{\frac{i\pi}{12}} \eta(\tau)$, $\eta(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau)$ であるから ξ は modular 不変である。一方、 $n = 1$ では $\text{Vol}(\text{KV}) = (\text{Im}\tau)^2$ であることが示せるから、 $\frac{d^2\tau}{\text{Im}\tau}$ も不変になっており、全体として Z_1 は modular 不変性を満たしている。 ξ を q, \bar{q} で展開すると、

$$\begin{aligned} \xi(\bar{\tau}, \tau) &\sim |\eta(\tau)|^{-48} = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n>0} (1 - q^n) \\ &= \frac{1}{|q|^2} + 24q^{-1} + 24\bar{q}^{-1} + 576 + \dots \end{aligned}$$

を得る。 $\xi = \sum d_{mn} \bar{q}^m q^n$ (d_{mn} は $m_L^2 = m, m_R^2 = n$ の状態数) であるから、最右辺の第一項は基底状態のタキオンに、定数項は $m = 0$ の粒子数に対応している。第二、三項は、 $L_0 = \bar{L}_0$ の条件を課すと消える。

3.1.4 有効ラグランジアン

第 3.1.2 節で議論したように、弦のスペクトルに含まれる質量 0 の粒子は、開弦のゲージ場 A_m 、閉弦の重力子 G_{mn} 、反対称テンソル場 B_{mn} 、ディラトン ϕ であった。弦そのものの相互作用は扱えなくても、これら軽い粒子の振る舞いを記述する低エネルギー有効作用を書くことはできる。この小節では、このような有効作用の導き方を説明する。

低エネルギー有効作用を得る一つの方法として、軽い粒子のパーテックス演算子から n 点関数を計算し、これを再現するような 26 次元の作用を作るということが考えられる [54]。この方法での計算は、例えば [55] に詳しい説明がある。一方、前節でみたように、弦理論は世界面上での共形対称性が量子異常を持たないように作られていた。共形不変性は、世界面上では β 関数が 0 であることを意味する。また、共形対称性があるとき、パーテックス演算子 V の $n \leq 2$ 点関数は $\text{Vol}(\text{KV}) \rightarrow \infty$ のために 0 になることが示され、 $\langle V \rangle = 0$ であることが分かる。これは、一般に場 φ を背景場 φ_0 の回りで展開して

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$$

としたときに、 φ_0 が安定な真空まわりでの値になっていれば $\langle \delta\varphi \rangle = 0$ となることに相当しており、古典的には φ_0 が運動方程式の解であることを意味する。よって、軽い粒子を背景場として弦の作用に入れ、その $\beta = 0$ の条件式を運動方程式として持つような 26 次元の有効作用をとるという方法も考えられる [56]。

具体的に、 β 関数を使う方法で有効作用を求めてみる。閉弦の場合、背景場として G_{mn}, B_{mn}, ϕ を入れて弦の作用は

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left[\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} G_{mn}(X) \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n + \epsilon^{\alpha\beta} B_{mn}(X) \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n + \alpha' \sqrt{-h} R^{(2)} \phi(X) \right]$$

となる。 $\epsilon_{\alpha\beta}$ は 2 次元の反対称テンソルとする。 G_{mn} と B_{mn} は 2 階のテンソル場であるから、弦に接続させるのが自然である。 ϕ はスカラー場なので、何らかの共形不変なスカラー量に接続させる必要があり、上記のような形が適当であることが知られている。ここで、 $R^{(2)}$ は 2 次元世界面のスカラー曲率であり、共形ゲージ $h_{\alpha\beta} = e^\varphi g_{\alpha\beta}$ では $\partial^2\varphi$ である。ところで、 n -loop の世界面に対して $\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} R^{(2)} = 2(1-n)$ である。よって、ディラトン場 ϕ を定数分だけずらして $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$ とすると、前小節で扱った分配関数は

$$S \rightarrow S + 2(1-n)\phi_0$$

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi_i e^{-S} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{st}^{2n} Z_n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} g_{st}^{2n} e^{2(n-1)\phi_0} Z_n$$

となる。これは、ちょうど弦の結合定数 $g_{st} \rightarrow g_{st} e^{\phi_0}$ とすることに対応している。従ってディラトンを再規格化すれば、その真空期待値が弦の結合定数を与えていると理解できることが分かる。

β 関数は、まず X を古典解 X_0 の回りで展開して $X = X_0 + x$ とすると

$$S = S_0 - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left[g^{\alpha\beta} g_{mn} \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n + g^{\alpha\beta} \left(R_{mnkl} + \frac{1}{4} H_{jml} H_{kn}^j \right) \partial_\alpha X_0^m \partial_\beta X_0^k x^n x^l \right. \\ \left. - \epsilon^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \partial_k H_{mnl} \right) \partial_\alpha X_0^m \partial_\beta X_0^l x^n x^k + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ - \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \partial^\alpha \varphi [x^m \partial_m \partial_n \phi \partial_\alpha X_0^n + \partial_m \phi \partial_\alpha x^m + \mathcal{O}(x^2)]$$

である。但し、 $H_{mnl} = \partial_{[m} B_{nl]}$ である。また、 R, H, ϕ の引数は X_0 であり、 X_0 の回りで展開が

$$G_{mn}(X) = g_{mn} + \left(R_{mnkl} + \frac{1}{4} H_{jml} H_{kn}^j \right) x^n x^l + \mathcal{O}(x^3)$$

となるような座標 (Riemann normal coordinates でゲージ場による曲率が入ったもの) を取った。運動方程式より x^m の一次の項を消したが、 ϕ については運動方程式が課されないで残した。 $\tau \rightarrow -i\tau$ と Wick 回転して $z = e^{\tau - i\sigma}$ とおくと、伝搬関数は

$$\langle x^m(z_1, \bar{z}_1) x^n(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\frac{1}{2} \alpha' g^{mn} \log |z_1 - z_2|^2$$

であるから、 $z_1 \rightarrow z_2$ では $-\alpha' g_{mn} \log \Lambda$ のように振舞う。但し、 Λ はカットオフスケールである。ここから β 関数は、

$$\beta_{mn}^G = R_{mn} + \frac{1}{4} H_m^{kl} H_{kln} - \partial_m \partial_n \phi \\ \beta_{mn}^B = -\frac{1}{2} \partial_l H_{mn}^l + \frac{1}{2} \partial^l \phi H_{lmn} \\ \beta^\phi = R + \frac{1}{12} H^{mnl} H_{mnl} - 2\partial_m \partial^m \phi + 2(\partial_m \phi)^2$$

となる。よって、作用を

$$S = \int d^{26}x \sqrt{G} e^{-2\phi} \left[R - \frac{1}{12} H^2 + 2\partial_m \partial^m \phi + 2(\partial_m \phi)^2 \right] \quad (104)$$

とすれば

$$\frac{\delta}{\delta\phi} S = -\sqrt{G} e^{-2\phi} \beta^\phi = 0 \\ \frac{\delta}{\delta B_{mn}} S = \sqrt{G} e^{-2\phi} \beta_{mn}^B = 0 \\ \left(\frac{\delta}{\delta G^{mn}} + \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\delta}{\delta\phi} \right) S = \sqrt{G} e^{-2\phi} \beta_{mn}^G = 0$$

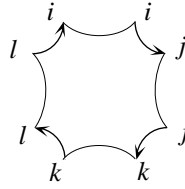


図 11: 開弦の相互作用

が運動方程式として導かれ、共形不変性の条件式を満たす。

開弦の場合には、まず外場としてゲージ場 A_m を入れた 2 次元の作用が

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial^a X_m \partial_a X^m - i \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau A_m \partial_\tau X^m$$

と書ける。閉弦の場合と同様に古典解 X_0 の回りで展開すると

$$S = S_0 - \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[\int d^2\sigma \partial^a x_m \partial_a x^m + i \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau (\partial_m F_{nl} x^m x^l \partial_\tau X_0^n + F_{mn} x^n \partial_\tau x^m) + \mathcal{O}(x^3) \right]$$

である。但し、 \mathcal{M} は弦の張る世界面を表し、 $\partial\mathcal{M}$ はその境界を指す。運動方程式 $\partial^2 X_0 = 0$ と境界条件 $(\partial_\sigma X_0^m + iF_n^m \partial_\tau X_0^n)|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ より、 x の一次の項は落とした。伝搬関数は通常の開弦では

$$\langle x^m(z_1, \bar{z}_1) x^n(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\frac{1}{2} g^{mn} \alpha' (\log|z_1 - z_2|^2 + \log|\bar{z}_1 - \bar{z}_2|^2)$$

であるが、境界条件から $(\partial_\sigma \langle x^m(z_1, \bar{z}_1) x^n(z_2, \bar{z}_2) \rangle + iF_l^m \partial_\tau \langle x^l(z_1, \bar{z}_1) x^n(z_2, \bar{z}_2) \rangle)|_{\sigma=0} = 0$ を課すと、

$$-\alpha' \left[g^{mn} \log|z_1 - z_2| + \frac{1}{2} \left(\frac{1-F}{1+F} \right)^{mn} \log(z_1 - \bar{z}_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1+F}{1-F} \right)^{mn} \log(\bar{z}_1 - z_2) \right]$$

となり、 $z_1 \rightarrow z_2$ の極限での振舞いは、 $-2\alpha' \log \Lambda (1-F^2)^{-1mn}$ となる。これらから、 $\beta_m^A = \partial^m F_n^l (1-F^2)_{lm}^{-1}$ であり、 $\beta = 0$ を運動方程式として導くような有効作用は

$$S = \int d^{26}x e^{-\phi} \sqrt{\det(1+F)} \sim - \int d^{26}x e^{-\phi} \frac{1}{4} \text{Tr} F_{mn} F^{mn} \quad (105)$$

と導かれる。

ゲージ結合定数 g_{st} は $e^{\langle\phi\rangle}$ であった。閉弦の有効作用 (104) 式には $e^{-2\phi}$ で、開弦の有効作用 (105) 式には $e^{-\phi}$ でかかっており、開弦が閉弦より g_{st} で 1 次高くなっている。これは、閉弦の tree グラフである球面にパーテックスをつけると、開弦の tree グラフである disk になることからみて妥当である。

3.1.5 開弦のゲージ群

第 3.1.2 節で見たように、開弦の第一励起状態には質量 0 のゲージ粒子が含まれている。この節では、このゲージ粒子の担う対称性の、ゲージ群を調べる。

開弦では弦の両端に自由度をつけることができる。これを $i = 1, \dots, N$ と番号付けし、開弦の励起状態を $|a; p\rangle = \sum_{i,j=1}^N \lambda_{ij}^a |ij; p\rangle$ と表す。 λ_{ij}^a を、Chan-Paton 因子と呼ぶ。つなぐことのできる開弦は向きが揃っていて、端点の Chan-Paton 因子の足が同じであるとする。このとき図 11 のような開弦の 4 点関数は非自明に計算されるはずで、Chan-Paton 因子の寄与で $\text{Tr} \lambda^1 \lambda^2 \lambda^3 \lambda^4$ が出てくる。これは、 $\lambda^a \rightarrow U \lambda^a U^{-1}$ ($U \in GL(N)$) のもとで不変であり、また状態のノルムが変わらないためには $U \in U(N)$ でなくてはならな

い。よって、 λ_{ij}^a の足はそれぞれ $U(N)$ の基本表現、反基本表現の足と理解できる。ゲージ粒子を表すパーテックス演算子は、 $V^{am} = \lambda_{ij}^a \partial_\tau X^m e^{ikm} X^m$ で与えられ、 $U(N)$ のゲージ粒子であることになる。

ここで、開弦に何らかの制限を課し、 $U(N)$ より小さい群のゲージ粒子を得ることを考える。制限として、世界面上でのパリティ変換 Ω に対する局所不変性を要請する。開弦では $0 \leq \sigma \leq \pi$ であるから、 $\Omega : \sigma \rightarrow \pi - \sigma$ と作用する。これを X^m (97) 式に代入すると

$$\Omega : \alpha_k^m \rightarrow (-1)^k \alpha_k^m \quad (106)$$

のように、生成消滅演算子に対する作用に焼き直される。 Ω に対する不変性から、当然真空も不変で $\Omega|0, p = 0\rangle = |0, p = 0\rangle$ を満たさなくてはならない。よってベクトル場は、(106) 式より $\Omega \alpha_{-1}^m |0, p\rangle = -\alpha_{-1}^m |0, p\rangle$ となるから不変でなく、状態として残らない。

Chan-Paton 因子がある場合には、 Ω の作用を

$$\Omega : \lambda_{ij} |ij, p\rangle \rightarrow \lambda'_{ij} |ij, p\rangle, \quad \lambda' = M {}^t \lambda M^{-1}$$

とする。ここで λ の転置をとっているのは、 Ω によって両端点が入れ替るからである。 Ω を 2 回作用させると $\lambda \rightarrow M {}^t M^{-1} \lambda {}^t M M^{-1}$ である。これでもとに戻るはずだから、 $M {}^t M^{-1} = \pm I \equiv \pm \text{diag}(1, \dots, 1)$ である。 $M {}^t M^{-1} = I$ のとき、 $U(N)$ の自由度を除いて解は $M = {}^t M = I$ で与えられる。基底状態は Ω に対して不変であるから、このとき $\Omega : \lambda_{ij}^a |a, p\rangle \rightarrow \lambda_{ji}^a |a, p\rangle$ である。よってゲージ粒子が生き残る為には、 $\lambda_{ji} = -\lambda_{ji}$ になっている必要がある。よって Chan-Paton 因子によって運ばれるゲージ対称性は、 $SO(N)$ となる。一方、 $M {}^t M^{-1} = -I$ の場合は

$$M = -{}^t M = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。ベクトル粒子を残すための条件は

$$\begin{aligned} -\lambda \equiv - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= M {}^t \lambda M^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t D & -{}^t B \\ -{}^t C & {}^t A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから ${}^t D = -A$, ${}^t B = B$, ${}^t C = C$ であり、残るゲージ群は $USp(N)$ となる。

このように Ω に対する局所対称性を持たせた弦理論を、「向き付け不能な弦 (unoriented string)」と呼ぶ。

ところで、相互作用のある開弦の理論には必ず閉弦も入ってくる。これは、1 つの開弦の両端点をつなげば閉弦になること、また開弦の 1-loop は cylinder になっており、閉弦と同様 $\tau \leftrightarrow \sigma$ に対して不変であるとする閉弦の伝搬にも見えることによる。よって、ここで向き付け不能な閉弦の理論を考えておく。

閉弦では、 $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ であったから、 $\Omega : \sigma^1 \rightarrow 2\pi - \sigma^1$ と作用する。これを X^m (96) 式に代入すると、生成消滅演算子に対する作用

$$\Omega : \alpha_k^m \leftrightarrow \bar{\alpha}_k^m$$

に焼き直せる。このとき、質量 0 の状態は

$$\Omega \alpha_{-1}^m \bar{\alpha}_{-1}^n |0, p\rangle = \bar{\alpha}_{-1}^m \alpha_{-1}^n |0, p\rangle$$

で不変でなくてはならないから、反対称テンソルが消えることが分かる。

なお、向き付けされない弦の摂動計算をするときは、開弦では通常の 1-loop で現れる世界面である cylinder と等価な世界面として、Möbius strip が出てくる。また、閉弦の場合は tree での球面の他に crosscap が出てくる。このように、向き付けされない弦では、考慮する必要がある世界面が多く出てくる。

3.1.6 T-duality と D-brane

26 次元時空 (座標 $(X^0, X^1, \dots, X^{25})$) の一次元分を、半径 R の S^1 にコンパクト化することを考える。 X^{25} をコンパクト化すると、 $X^{25} \sim X^{25} + 2\pi RL$, $L \in Z$ なので、閉弦ならば

$$X^{25}(\tau, \sigma + 2\pi) = X^{25}(\tau, \sigma) + 2\pi RL$$

である。従って、 X^{25} の Fourier 展開は

$$X^{25}(\tau, \sigma) = x^{25} + \alpha' p^{25} \tau + LR\sigma + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \left[\alpha_k^{25} e^{-ik(\tau-\sigma)} + \bar{\alpha}_k^{25} e^{-ik(\tau+\sigma)} \right]$$

となる。 x^{25} と p^{25} は、通常の交換関係 $[x^{25}, p^{25}] = i$ を満たすから、 p^{25} は x^{25} 方向の並進の生成子になっている。波動関数 $e^{ip^{25}x^{25}}$ の $x^{25} \rightarrow x^{25} + 2\pi R$ の下での一意性により、

$$p^{25} = \frac{M}{R}, \quad M \in Z$$

が導かれる。これを考慮すると、 $X^{25}(\tau, \sigma) = X_R^{25}(\tau - \sigma) + X_L^{25}(\tau + \sigma)$ として

$$\begin{aligned} X_L^{25} &= \frac{1}{2}x^{25} + \alpha' \left(\frac{M}{R} + \frac{1}{\alpha'} LR \right) (\tau + \sigma) + i \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \bar{\alpha}_k^{25} e^{-ik(\tau+\sigma)} \\ X_R^{25} &= \frac{1}{2}x^{25} + \alpha' \left(\frac{M}{R} - \frac{1}{\alpha'} LR \right) (\tau - \sigma) + i \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \alpha_k^{25} e^{-ik(\tau-\sigma)} \end{aligned}$$

と書ける。コンパクト化後は 25 次元だから、質量演算子は $m^2 = -\sum_{m=0}^{24} p_m p^m$ であり、(103) 式に $p^{25} p^{25}$ を足した

$$\begin{aligned} \alpha' m^2 &= m_L^2 + m_R^2 \\ \alpha' m_R^2 &= \alpha' \left(\frac{M}{R} - \frac{1}{\alpha'} LR \right)^2 + 2N - 2 \\ \alpha' m_L^2 &= \alpha' \left(\frac{M}{R} + \frac{1}{\alpha'} LR \right)^2 + 2\bar{N} - 2 \end{aligned}$$

となる。 M のかかっている項は、コンパクト化された方向の運動量からくるもので Kaluza-Klein モードと呼ばれ、また L のかかっている項はコンパクト化された方向に巻き付いた弦からくるもので、winding モードと呼ばれている。なお、物理的には $m_R^2 = m_L^2$ の条件がつくので、 $N - \bar{N} = \frac{2}{\alpha'} ML$ である。このスペクトルは、 $R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}$ のもとで winding モードと K-K モードが入れ替わって不変に保たれる。これは単なる正準量子化レベルの双対性ではなく、弦のループ展開の全ての次数で成り立つことが知られている。従って、これは弦理論における基本的な対称性と考えられ、T-duality と呼ばれている。

T-duality の作用を振動子でみると、

$$\alpha_0^{25} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\frac{M}{R} + \frac{1}{\alpha'} LR \right), \quad \bar{\alpha}_0^{25} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\frac{M}{R} - \frac{1}{\alpha'} LR \right)$$

であるから、 $\alpha_0^{25} \rightarrow \alpha_0^{25}$, $\bar{\alpha}_0^{25} \rightarrow -\bar{\alpha}_0^{25}$ となっている。この変換のもとで $T_{\alpha\beta}$ などを変えないためには、 $\forall k$ に対して $\alpha_k^{25} \rightarrow \alpha_k^{25}$, $\bar{\alpha}_k^{25} \rightarrow -\bar{\alpha}_k^{25}$ でなくてはならないから、

$$X^{25}(\tau, \sigma) = X_R^{25}(\tau - \sigma) + X_L^{25}(\tau + \sigma) \rightarrow X'^{25}(\tau, \sigma) = X_R^{25}(\tau - \sigma) - X_L^{25}(\tau + \sigma)$$

となる。よって T-duality は、コンパクト化された方向の X_L だけに作用する時空のパリティ変換に相当している。

T-duality の開弦への作用をみる。開弦の振動子展開は、

$$\begin{aligned} X^{25}(\tau, \sigma) &= X_R^{25} + X_L^{25} \\ X_R^{25}(\tau - \sigma) &= \frac{x^{25}}{2} + C + \alpha' p^{25}(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \alpha_k^{25} e^{-ik(\tau - \sigma)} \\ X_L^{25}(\tau + \sigma) &= \frac{x^{25}}{2} - C + \alpha' p^{25}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \alpha_k^{25} e^{-ik(\tau + \sigma)} \end{aligned}$$

であり、 S^1 コンパクト化のもとでは $p^{25} = \frac{M}{R}$ であるから

$$X'^{25}(\tau, \sigma) = X_R^{25}(\tau - \sigma) - X_L^{25}(\tau + \sigma) = 2C + 2\alpha' \frac{M}{R} \sigma + (\text{oscillators})$$

となる。つまり、端点は $X'^{25}(\sigma = 0) = 2C$, $X'^{25}(\sigma = \pi) = 2C + 2\pi M R'$ と定数になっており、開弦の T-duality 変換では Neumann 境界条件が Dirichlet 境界条件に変化することが分かった。

このように、開弦の T-duality を取ることによって、Neumann 境界条件が Dirichlet 境界条件に変わり、この端点の動き得る領域として $8 + 1$ 次元の物体が定義できる。一般に n 個の方向について T-dual を取れば、 $p + 1 = 10 - n$ 次元の広がりを持った物体が定義でき、これを Dp-brane と呼ぶ。ある方向に X^n について T-dual を取ると、Dp-brane のうち X^n 方向に広がっているものは D(p - 1)-brane になり、広がっていないものは D(p + 1)-brane になる。

Chan-Paton 因子がある場合の D-brane を考えることもできる。まず、ゲージ対称性が $U(N)$ の場合を考える。コンパクト化の半径 R が充分小さいとすると、ゲージ場の 25 方向成分 A^{25} はほとんど定数として扱われるから、ゲージ変換分を除いて一般的に $A^{25} = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)/2\pi R$ と書ける。このため一般にはゲージ群が $U(N) \rightarrow U(1)^N$ に破れる。この A^{25} は、

$$A_{25} = -i\Lambda^{-1} \partial_{25} \Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(e^{iX^{25}\theta_1/2\pi R}, \dots, e^{iX^{25}\theta_N/2\pi R})$$

で書けるから、局所的には pure gauge である。しかし、コンパクト化により $X^{25} \rightarrow X^{25} + 2\pi R$ のもとで $\text{diag}(e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_N})$ の位相を拾うから、単純にゲージ変換で $A_{25} \rightarrow 0$ とはできない。この位相の影響を T-dual を取った後の理論でみると、 $|ij\rangle$ の状態に対して

$$p^{25} = \frac{M}{R} + \frac{\theta_j - \theta_i}{2\pi R}$$

とすることに相当する。よって

$$X'(\sigma, \tau) = 2C + 2\alpha' \left(\frac{M}{R} + \frac{\theta_j - \theta_i}{2\pi R} \right) \tau + (\text{振動項})$$

となり、 $2C = \theta_i R'$ とすると開弦の端点 $\sigma = 0, \pi$ はそれぞれ $X' = \theta_i R', 2\pi M + \theta_j R'$ となる。従って D-brane は、図 12 のように $X'^{25} = \theta_i R'$ に位置し、 $2\pi R'$ の周期で一周期に N 枚ずつならんでいる。同様に方向付けされない弦では、ゲージ群が $SO(N)$ なら $A^{25} \sim \text{diag}(\theta_1, -\theta_1, \dots, \theta_{\frac{N}{2}}, -\theta_{\frac{N}{2}})$ であり、D-brane が $X'^{25} = 0$ を中心として左右対称に現れる。 N が奇数であれば、中心に D-brane が出る。また、 $USp(N)$ の場合なら N は偶数で、 $A^{25} \sim \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_{\frac{N}{2}}, -\theta_1, \dots, -\theta_{\frac{N}{2}})$ であり、 $X'^{25} = 0$ を中心として左右対称に現れる。 $X'^{25} = 0$ の面を orientifold plane と呼ぶ。

なお、スペクトルは $m^2 = (p^{25})^2 + \frac{1}{\alpha'}(L_0 - 1)$ より

$$m^2 = \left[\frac{(2\pi M + \theta_i - \theta_j)R'}{2\pi\alpha'} \right]^2 + \frac{1}{\alpha'}(L_0 - 1) \quad (107)$$

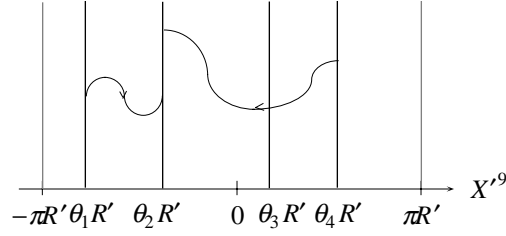


図 12: S^1 コンパクト化したときの D-brane

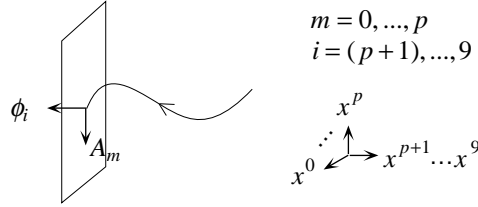


図 13: D-brane 上の開弦の励起

で与えられる。[] 内の分子はちょうど 2 枚の D-brane をつなぐ弦の最短の長さになっており、質量 0 の粒子は winding がなく同じ D-brane の間をつないでいる弦から出てくる。これは D24-brane 上のゲージ場 $\alpha_{-1}^m |ii, p\rangle$ で、 $U(1)$ 対称性に当たる。もし n 枚の D-brane が重なっていれば $U(n)$ 対称性が回復しており、上記のスペクトルからも $n \times n$ 個の質量 0 のゲージ場 A_m が出てくることが分かる。ここで、 Dp -brane が x^0, \dots, x^9 の 10 次元中 x^0, \dots, x^p 方向に広がっているとすると、 $m = 0, \dots, p$ をとる。また、このとき brane に垂直な方向の開弦の励起により、スカラー場 $\phi_i (i = (p+1), \dots, 9)$ が出てくる。 ϕ_i はゲージ場と対になっており、ゲージ群 $U(n)$ の随伴表現に属すると思われる。低エネルギーでの Dp -brane 上の有効作用は、

$$S = -T_p \int d^{p+1} x e^{-\phi} \text{Tr} \left[\det^{\frac{1}{2}} (G + B + 2\pi\alpha' F) \right]$$

と求められており、Born-Infeld 作用と呼ばれる [57]。

3.2 超弦理論

この節では、前節で弦理論に対して行った方法をそのまま超弦理論に適用して、理論に含まれるスペクトルを求める。ボゾン側の低エネルギー有効作用は、前節と同様に評価されるはずで、ここから超対称性により、フェルミオンを含めた作用が決定される。このボゾン側の作用を用いて、超弦理論の双対性が低エネルギーで成り立っていることを説明する。また、理論全体として双対性が成り立つために、type II の超弦理論には前節で求めた D-brane が含まれることを示す。

3.2.1 超弦理論のスペクトル

超対称化した Polyakov の作用は、

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left[h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X_m + 2i\bar{\psi}^m \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_m - i\bar{\chi}_\alpha \rho^\beta \rho^\alpha \psi^m \left(\partial_\beta X_m - \frac{i}{4} \bar{\chi}_\beta \psi_m \right) \right]$$

である。 (X^m, ψ^m) が $N = 1$ のカイラル多重項を組んでおり、 $(e_a^\alpha, \chi_\alpha)$ は重力多重項をなしている。但し、 e_a^α は $e_a^\alpha e_b^\beta h_{\alpha\beta} = g_{ab}$, $e_a^\alpha e_b^\beta g^{ab} = h^{\alpha\beta}$ を満たすものとし、 ρ は 2 次元の Dirac 行列である。この作用は、以下のような局所的対称性を持つ。

1. Weyl 対称性

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda X^m &= 0 & \delta_\Lambda \psi^m &= -\frac{1}{2}\Lambda\psi \\ \delta_\Lambda e_\alpha^a &= \Lambda e_\alpha^a & \delta_\Lambda \chi_\alpha &= \frac{1}{2}\Lambda\chi_{\alpha\text{Ipha}}\end{aligned}$$

2. 2 次元世界面の一般座標変換

$$\begin{aligned}\delta_\xi X^m &= \xi^\beta \partial_\beta X^m & \delta_\xi \psi^m &= \xi^\beta \partial_\beta \psi^m \\ \delta_\xi e_\alpha^a &= \xi^\beta \partial_\beta e_\alpha^a & \delta_\xi \chi_\alpha &= \xi^\beta \partial_\beta \chi_\alpha + \chi_\beta \partial_\alpha \xi^\beta\end{aligned}$$

3. 2 次元の Lorentz 変換

$$\begin{aligned}\delta_l X^m &= 0 & \delta_l \psi^m &= \frac{1}{2}l\bar{\rho}\psi^m \\ \delta_l e_\alpha^a &= l\epsilon_b^a e_\alpha^b & \delta_l \chi_\alpha &= \frac{1}{2}l\bar{\rho}\chi_\alpha\end{aligned}$$

4. 超対称変換

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon X^m &= i\bar{\epsilon}\psi^m & \delta_\epsilon \psi^m &= \frac{1}{2}\rho^\alpha \left(\partial_\alpha X^m - \frac{i}{2}\bar{\chi}_\alpha \psi^m \right) \epsilon \\ \delta_\epsilon e_\alpha^a &= \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\rho^a \chi_\alpha & \delta_\epsilon \chi_\alpha &= 2\partial_\alpha \epsilon + \frac{i}{2}\bar{\omega}_\alpha \bar{\rho}\rho^\beta \chi_\beta \\ \omega_\alpha &= -\frac{i}{e}e_{\alpha a} \epsilon^{\beta\gamma} \partial_\beta e_\gamma^a + \frac{i}{4}\bar{\chi}_\alpha \bar{\rho}\rho^\beta \chi_\beta\end{aligned}$$

5. 超対称 Weyl 変換

$$\begin{aligned}\delta_\eta X^m &= 0 & \delta_\eta \psi^m &= 0 \\ \delta_\eta e_\alpha^a &= 0 & \delta_\eta \chi_\alpha &= \rho^\alpha \eta\end{aligned}$$

但し、 $\Lambda, \xi_\alpha, l, \epsilon, \eta$ は σ_α の関数である。パラメータの数は 6 個だから、 $e_\alpha^a = \delta_\alpha^a, \chi_\alpha = 0$ の超対称共形ゲージが取れる。このとき作用は

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\partial_\alpha X^m \partial^\alpha X_m + 2i\bar{\psi}^m \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_m \right)$$

となる。但し、超対称共形変換分の自由度はゲージ固定されずに残っていて、また $(P\xi)_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}$ と同様

$$(\Pi\epsilon)_\alpha = \frac{1}{2}\rho^\beta \rho_\alpha D_\beta \epsilon = \tau_\alpha$$

が導入される。これらの 0 モードがあると、ゲージ固定は完全でなくなる。 $P\xi_0 = 0$ を満たす ξ_0 をものを Killing ベクトルと呼んだように、 $\Pi\epsilon_0 = 0$ を満たす ϵ_0 を Killing スピノルと呼ぶ。弦理論では Killing ベクトル分の変換の生成子が、2 次元の運動量演算子 $T_{\alpha\beta}$ から導かれた。超弦では同様に、

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_\alpha X^m \partial_\beta X_m - \frac{1}{4}\partial_\gamma X^m \partial^\gamma X_m g_{\alpha\beta} + \frac{i}{4}\bar{\psi}^m \rho_\alpha \partial_\beta \psi_m + \frac{i}{4}\bar{\psi}^m \rho_\beta \partial_\alpha \psi_m = 0$$

$$T_{F\alpha} = \frac{2\pi}{e} \frac{\delta\mathcal{S}}{i\delta\bar{\chi}^\alpha} = \frac{1}{4} \rho^\beta \rho_\alpha \psi^m \partial_\beta X_m = 0$$

から導かれる。

場を $X \rightarrow X + \delta X$, $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$ とずらした時、弦理論の場合と同様、作用の不変性から運動方程式

$$\partial_+ \partial_- X^m = 0, \quad \partial_- \psi_+^m = \partial_+ \psi_-^m = 0$$

を得る。また、閉弦であれば表面項から

$$(\psi_+ \delta\psi_+ - \psi_- \delta\psi_-)(\sigma) = (\psi_+ \delta\psi_+ - \psi_- \delta\psi_-)(\sigma + 2\pi)$$

なる境界条件が導かれる。この境界条件は

$$\begin{aligned} \psi_+(\sigma) &= \pm \psi_+(\sigma + 2\pi) \\ \psi_-(\sigma) &= \pm \psi_-(\sigma + 2\pi) \end{aligned}$$

かつ、 $\delta\psi$ 側にも同じ条件をつければ満たされる。このように、世界面上を一周回って戻ってきた時の値は 2 通りが許されていて、周期的境界条件を満たしていれば Ramond(R) フェルミオン、反周期的境界条件を満たしていれば Neveu-Schwartz(NS) フェルミオンと呼ばれる。これらは $\psi(\sigma + 2\pi) = e^{2\pi i\phi} \psi(\sigma)$ とまとめて書いて、R では $\phi = 0$ 、NS では $\phi = \frac{1}{2}$ となる。これを使って、振動子展開は

$$\psi_+^m(\sigma, \tau) = \sum_{r \in Z + \phi} \bar{b}_r^m e^{-ir(\tau + \sigma)} \quad \psi_-^m(\sigma, \tau) = \sum_{r \in Z + \phi} b_r^m e^{-ir(\tau - \sigma)}$$

と書ける。 $G_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{-ir\sigma} T_{F-}$ とすると、

$$\begin{aligned} L_l &= \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} \alpha_{-k}^m \alpha_{(l+k)m} + \frac{1}{2} \sum_r \left(r + \frac{m}{2}\right) b_{-r}^m b_{(l+r)m} \\ G_r &= \sum_k \alpha_{-k}^m \cdot b_{(r+k)m} \end{aligned}$$

書ける。量子化された代数関係は、正規積の取り方による定数分の自由度を a とおいて、

$$\begin{aligned} [L_k, L_l] &= (k-l)L_{k+l} + \frac{d}{8} k(k^2 - 2a) \delta_{k+l} \\ [L_k, G_r] &= \left(\frac{k}{2} - r\right) G_{k+r} \\ \{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{d}{2} \left(r^2 - \frac{a}{2}\right) \delta_{r+s,0} \end{aligned}$$

となり、超対称 Virasoro 代数をなす。

弦理論の場合、共形変換分の自由度を使って光円錐ゲージに持っていくことができた。超弦の場合も、残った超対称共形変換分の自由度を使って $X^+ \propto \tau, \psi^+ = 0$ に持っていくことができる。閉弦の場合は $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ ととる。このとき X^-, ψ^- 分の自由度は、拘束条件より

$$\begin{aligned} \partial_\pm X^- &= \frac{1}{2p^+} \left[(\partial_\pm X^i)^2 + i\psi_\pm^i \partial_\pm \psi_\pm^i \right] \\ \psi_\pm^- &= \frac{1}{p^+} \psi_\pm^i \partial_\pm X^i \end{aligned}$$

と、 $X^i, \psi^i, i = 1, \dots, d-2$ で表すことができる。これは振動子でみると、

$$\alpha_k^- = \frac{1}{2p^+} \left[\sum_l : \alpha_l^i \alpha_{k-l}^i : + \sum_r \left(\frac{k}{2} - r \right) : b_r^i b_{k-r}^i : - 2a \delta_{k,0} \right]$$

$$b_r^- = \frac{1}{p^+} \sum_q \alpha_{r-q}^i b_q^i$$

となる。ここから、質量演算子は、

$$m^2 = m_R^2 + m_L^2, \quad \alpha' m_R^2 = 2 \left(\sum_{k>0} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i + \sum_{r>0} r b_{-r}^i b_r^i - a \right)$$

と求められる。閉弦の物理的な状態に対しては、 $L_0 = \bar{L}_0$ により $m_R^2 = m_L^2$ である。開弦についても同様に、

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{k>0} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i + \sum_{r>0} r b_{-r}^i b_r^i - a \right)$$

が得られる。

超弦のスペクトルを調べる。まず、開弦について考える。NS フェルミオンを取ると、基底状態を $|0\rangle$ として、その質量演算子の固有値は $\alpha' m^2 |0\rangle = -a |0\rangle$ である。第一励起状態は $b_{-\frac{1}{2}}^i |0\rangle$ で、同様に質量は $\alpha' m^2 = \frac{1}{2} - a$ となる。弦理論の場合と同じく、これは $SO(d-2)$ のベクトル表現で $SO(d-1)$ の表現ではありえないから、質量が 0 で $a = \frac{1}{2}$ でなくてはならない。形式的に η 関数を使って a を求めると、 $a = \frac{d-2}{16}$ であるから、 $d = 10$ と臨界次元が求められる。更に第二、三励起状態と求められて、これらは全て $SO(9)$ の表現からにまとまる事が分かる。一方、R フェルミオンを選ぶと、ゼロ・モードについて $b_0^m |0\rangle \neq 0$ であり、 $[b_0^m, m^2] = 0$ であるから、真空に作用させても基底状態であることには変わりない。一方、交換関係 $\{b_0^m, b_0^n\} = g^{mn}$ より、これらの 0 モードは d 次元時空での Dirac の γ 行列と $b_0^m \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^m)_\beta^\alpha$ の関係で同一視できる。よって R フェルミオンを取ったときの基底状態は、スピノルの足を持っていると考えられ、 d 次元時空内でのフェルミオンになっていることが分かる。スピノルの足を持つものと、反スピノルの足を持つものがあり得るから、これらを区別して $|a\rangle, |\bar{a}\rangle$ と書くことにする。これらは $SO(d-2)$ の表現であるから、質量は 0 でなくてはならず $a = \frac{1}{2}$ が再び導かれ、 $d = 10$ であることが分かる。

以上をまとめると、開弦のスペクトルで $m^2 \leq 0$ の部分は以下の通りである。

フェルミオンの境界条件	$SO(8)$ 表現での状態	$\alpha' m^2$	$(-1)^{N_F}$
NS	$ 0\rangle$	$-\frac{1}{2}$	-1
	$b_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle$	0	+1
R	$ a\rangle$	0	+1
	$ \bar{a}\rangle$	0	-1

ただし、 N_F は世界面上でのフェルミオン数演算子で、 $N_F \sim \sum_{r>0} b_{-r}^i b_r^i$ である。 b_{-r}^i は反交換する演算子だから、フェルミオンに作用させればボゾンになるし、ボゾンに作用させればフェルミオンになると思われる。しかし、実際には b_{-r}^i をいくら作用させても $SO(d-2)$ または $SO(d-1)$ の n 階のテンソル表現にしかならないから、時空上のボゾンしかできない。そこで、 N_F が偶数の状態だけを残すことにする。これを GSO projection といい、projection 演算子は $\frac{1+(-1)^{N_F}}{2}$ である。もし NS での真空を $(-1)^{N_F} |0\rangle = -|0\rangle$ と取ると、タキオンは消され $m = 0$ のゲージ場のみが残る。R 側では $(-1)^{N_F} \sim b_0^1 \dots b_0^8 e^{\sum_{r>0} b_{-r}^i b_r^i}$ である。よって $(-1)^{N_F} |a\rangle = \pm |a\rangle$ とすると $(-1)^{N_F} |\bar{a}\rangle = \mp |\bar{a}\rangle$ あり、GSO projection 後は $|a\rangle$ または $|\bar{a}\rangle$ のどちらか一方が残る。このとき時空のボゾンである NS 側の自由度とフェルミオンである R 側の自由度が一致し、

R 側の粒子をゲージノと見ると時空での $N = 1$ 超対称性があることになる。なお、1-loop での modular 不変性の要請からも GSO projection が理解されることが知られている。

また、閉弦の場合も同様にスペクトルを求めると、以下ようになる。

フェルミオンの境界条件 (L,R)	$SO(8)$ 表現での状態	$\alpha' m^2$	$((-1)^{\tilde{N}_F}, (-1)^{N_F})$
(NS,NS)	$ 0\rangle_L \times 0\rangle_R$	-2	(-1, -1)
	$\bar{b}_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_L \times b_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_R$	0	(+1, +1)
(R,R)	$ a\rangle_L \times b\rangle_R$	0	(+1, +1)
	$ \bar{a}\rangle_L \times \bar{b}\rangle_R$	0	(-1, -1)
	$ \bar{a}\rangle_L \times b\rangle_R$	0	(-1, +1)
	$ a\rangle_L \times \bar{b}\rangle_R$	0	(+1, -1)
(R,NS)	$ a\rangle_L \times b_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_R$	0	(+1, +1)
	$ \bar{a}\rangle_L \times b_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_R$	0	(-1, +1)
(NS,R)	$\bar{b}_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_L \times a\rangle_R$	0	(+1, +1)
	$\bar{b}_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_L \times \bar{a}\rangle_R$	0	(+1, -1)

閉弦の場合にも GSO projection をかける。まず、境界条件 (NS,NS) では $((-1)^{\tilde{N}_F}, (-1)^{N_F}) = (+1, +1)$ を残せばタキオンが消える。(R,*) で (-1,*), (*,R) で (*,+1) というように、左右でフェルミオンのカイラリティを違えたものを残すと、(R,R) から $SO(8)$ の 1-形式と 3-形式が出て、フェルミオンは表中の (R,NS) の下側、(NS,R) の上側が残る。従って、時空での $N = 2$ の超対称性があるように見える。2つの超対称電荷のカイラリティは異なる。これは type IIA 理論と呼ばれる。または、(R,*) で (+1,*), (*,R) で (*,+1) というように、左右のカイラリティを揃えてやると、(R,R) から 0,2,4 形式が出る。フェルミオンは表中の (R,NS)(NS,R) とともに上側が残る。これは type IIB 理論と呼ばれている。

また、開弦を含む理論は type I 理論と呼ばれ、方向付け不可能な閉弦を含む。左右が同じでなくてはならないから、これは type IIB の一部と考えられる。超対称性のない弦理論のときに考えたように、(NS,NS) 中の反対称場は消える。(R,NS)(NS,R) は、その線形結合である半分の自由度が残る。また (R,R) では、 $|a\rangle \times |b\rangle$ でスピノルの足だけを見ると、対称な積から出るのは 0-形式と 4-形式である。これに加えて、左右のバーテックス演算子は反対称であるから、入れ換えに対して符合を出す。よって、結局 2-形式が残る。

なお、上述の 3 つの他に heterotic (混成) 理論がある。これは、閉弦の右手側を超対称性のない弦で、左手側を超弦で構成したものである。量子異常が消えるのは、右手側では $d = 26$ 次元であるから、左手側より 16 次元分多い。これをトラス上にコンパクト化することによってゲージ対称性を出す。modular 不変性及び理論の局所性から、ゲージ群は $SO(32)$ または $E_8 \times E_8$ であることが指定される。

以上のように、超弦にはタキオンのない安定な真空があること、その真空には type I, IIA, IIB; $SO(32)$ heterotic, $E_8 \times E_8$ heterotic の 5 通りがあることが分かる。

なお、閉弦の理論において、時空のボゾンは (NS,NS)(R,R) から出てくる。このとき、(NS,NS) に含まれる反対称テンソル場 B_{mn} はポテンシャルそのものがバーテックス演算しで書けるのに対して、(R,R) の n -形式場でバーテックス演算子として表せるのは、場の強さだけである。

3.2.2 有効作用からみた超弦理論の双対性

超弦理論は重力子が自然に含まれる紫外発散のない理論で、実際低エネルギーでの有効作用は超重力理論の作用になっている。単なる弦理論の場合のように、タキオンが出ることもない。一方、超弦理論としては $d = 10$ 次元に 5 つの整合的な模型がある。しかし、10 次元で見ていたこれら複数の超弦理論が、実は種々の双対変換によって移り変わることで一つの理論であるらしいことが最近分かってきた。この節

では、この事情を有効作用から簡単に説明する。

前小節で説明したように、超弦には 10 次元で安定な解が typeI,IIA,IIB,Hetero $SO(32)$, $E_8 \times E_8$ の 5 つあった。まず、typeI について考える。ボゾン側についてのみ調べると、質量 0 のスペクトルは開弦からくる $SO(32)$ のゲージ場と閉弦の (NS,NS) からくる重力子及び (R,R) からくる 2-形式 $A^{(2)}$ であった。これらを使って、低エネルギーの有効作用は

$$S_I = \int d^{10}x \sqrt{G} \left[e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{1}{4} e^{-\phi} F^{a2} - \frac{1}{12} |dA^{(2)}|^2 \right] \quad (108)$$

と書ける。但し、[] 内第一項は閉弦から来ているので $e^{-2\phi}$ がかかっており、第二項は開弦から来るので $e^{-\phi}$ となっている。第三項は閉弦の (R,R) から出ているが、 $e^{-2\phi}$ がかかっていない。これは次のように説明される。まずディラトン ϕ が外場として入っていないければ、 $G_F = \partial X^m \psi_m$ であるから $G_0 \sim p_m b_0^m \sim \gamma^m \partial_m$ より超対称性が破れない条件は、

$$0 = G_0 V_{RR} \sim S_a \bar{S}_b \left(\gamma^l \gamma^{[m_1} \dots \gamma^{m_n]} C \right)^{ab} \partial_l F_{m_1 \dots m_n}^{(n)}$$

となる。但し、 V_{RR} は (R,R) の質量 0 の粒子の生成演算子で、 $S_a |0\rangle = |a\rangle_L$, $\bar{S}_b |0\rangle = |b\rangle_R$ とする。 C は 10 次元の荷電共役行列とする。これと $\bar{G}_0 V_{RR} = 0$ により、Bianchi identity $dF^{(n)} = 0$, $d * F^{(n)} = 0$ が導かれる。一方、外場としてディラトンが入っていると、 $G_F \sim \partial X^m \psi_m - \partial_m \phi \psi^m$ であるから $G_0 \sim \gamma^m \partial_m - \partial_m \phi \gamma^m$ である。これを使って、 V_{RR} が超対称性を破らない条件を作ると

$$0 = dF^{(n)} - d\phi \wedge F^{(n)} = e^\phi d[e^{-\phi} F^{(n)}]$$

が出て、 $e^{-\phi} F^{(n)}$ の方が Bianchi identity を満たすことになる。従って、これを改めて $F^{(n)} = dA^{(n-1)}$ と取るのが自然であり、このため (R,R) から来る場は閉弦であっても $e^{-2\phi}$ がかからない。

(108) 式において $G \rightarrow e^\varphi G$ として書き直すと、

$$S_I \rightarrow \int d^{10}x \sqrt{G} e^{5\varphi} \left[e^{-2\phi} e^{-\varphi} (R + 4(\nabla\phi)^2) - e^{-3\varphi} |dA^{(2)}|^2 - e^{-\phi} e^{2\varphi} F^{a2} \right]$$

となる。ここで、 $\varphi = \phi \equiv -\phi_h$ とすると、

$$S_I \rightarrow \int d^{10}x \sqrt{G} e^{-\phi_h} \left[R + 4(\nabla\phi)^2 - |dA^{(2)}|^2 - F^{a2} \right]$$

となっていて、 $A^{(2)}$ を (NS,NS) からくる反対称テンソル B とし、 F も閉弦のコンパクト化によって出てきたものとする、ちょうど Hetero の $SO(32)$ の有効作用に一致する。従って、typeI と hetero $SO(32)$ は同じものなのではないかと考えられる。但し、途中で $\phi \rightarrow -\phi_h$ としたから、強結合と弱結合が入れ替わっている。

また、type IIA と type IIB を S^1 コンパクト化することを考える。2 つの理論で、(NS,NS) からくる質量 0 の粒子のスペクトルは同じである。(R,R) から来るのは、type IIA では $A^{(1)}$, $A^{(3)}$ であり type IIB では $A^{(0)}$, $A^{(2)}$, $A^{(4)}$ である。但し、type IIB の $A^{(4)}$ は、10 次元では自己双対であるから独立成分は足の数から数えた 70 の半分で 35 個である。また、自己双対場では運動項 $F \wedge F = 0$ であるから伝搬する場にならず、共変な Lagrangian が書けない。しかし、形式的に書けたとすると、 X^9 の S^1 コンパクト化によりスペクトルは

次元	type IIA		type IIB		
10	$A^{(1)}$	$A^{(3)}$	$A^{(0)}$	$A^{(2)}$	$A^{(4)}$
9	$\tilde{A}^{(0)}, \tilde{A}^{(1)}$	$\tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}$	$A^{(0)}$	$\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}$	$\tilde{A}^{(3)}$

に移る。なお、 $A^{(4)}$ から導かれる $\tilde{A}^{(4)}$ は、 $\tilde{A}^{(3)}$ で書けるので落した。このスペクトルの対応から、9次元以下では type IIA と type IIB は対応があるとみなせる。この対応は、前述の T-duality に相当する。

また、heterotic についても同様に S^1 コンパクト化を行なうことを考える。トラスコンパクト化では、1次元コンパクト化の仕方は1次元格子で表される。2次元コンパクト化の場合、modular パラメータ τ によって決まる2次元格子で表される。heterotic 理論も、超対称でない弦である X_R^m を16次元分トラスコンパクト化して得られるものだから、16次元格子で理論が決まる。ここでは説明しないが、理論の局所性と modular 不変性によりこの格子は自己双対でなくてはならず、これがちょうど $SO(32)$ または $E_8 \times E_8$ のゲージ対称性を導いていた。こうして定まった10次元の理論を更に1次元 S^1 に落すと、やはり自己双対であるべしという要請から、ゲージ群が定まる。これが、10次元で $SO(32)$ か $E_8 \times E_8$ かに関わらず出てくるので、heterotic の2つの理論は9次元以下では T-duality でつながっている。

また type IIB で、(NS,NS) からくるボゾンを g_{mn}, B_{mn}, ϕ として (R,R) からくるボゾンを $A^{(0)}, A^{(2)}, A^{(4)}$ とすると、自己双対場 $A^{(4)}$ を除いた作用は

$$S_{IIB} = \int d^{10} X \sqrt{G} \left\{ e^{-2\phi} \left[R + 4(\nabla^m \phi)^2 - \frac{1}{12} H_{mnl} H^{mnl} \right] - \frac{1}{2} \partial_m A^{(0)} \partial^m A^{(0)} - \frac{1}{12} F^{(3)2} \right\}$$

となる。ここで、 $G_{mn} \rightarrow e^{-\frac{\phi}{2}} G_{mn}$ とすると、

$$S_{IIB} = \int d^{10} x \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{4} \text{Tr}(\partial M \partial M^{-1}) - \frac{1}{12} H^\dagger M H \right]$$

とまとめられる。但し、

$$M = e^\phi \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & A^{(0)} \\ A^{(0)} & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = A^{(0)} + i e^{-\phi} \quad H = \begin{pmatrix} dB \\ dA^{(2)} \end{pmatrix}$$

である。この形で書くと分かるように、作用は $SL(2, R)$ 対称性

$$\lambda \rightarrow \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \quad \begin{pmatrix} B \\ A^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} dB - cA^{(2)} \\ -dB + aA^{(2)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, Z)$$

を持つ。これはちょうど (NS,NS) と (R,R) を入れ換えるような対称性になっており、S-duality と呼ばれる。

以上のような関係は、低エネルギー有効作用の対応にとどまらず、理論全体の間で成り立っていると考えられている。以上で5つの超弦理論のうち、type IIA と IIB、type I と Hetero がそれぞれ等価と思われることが分かった。この2つの理論の間の等価性を見るためには、一度11次元に上がって考える必要がある。

11次元の理論に $N = 1$ の超対称性を課すと、超対称電荷は32個である。これを単純に dimensional reduction して4次元の理論にすると、 $N = 32/4 = 8$ となる。よって、4次元でみたときに超対称性を入れられる最大の次元は、11次元である。この $N = 1$ 超重力の性質は、よく調べられている。この理論のボゾンの部分の作用は、

$$S_{11SUGRA} = \frac{1}{2} \int d^{11} x \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{R} + |dC^{(3)}|^2) + \int C^{(3)} \wedge dC^{(3)} \wedge dC^{(3)}$$

のようになっている。但し、 $C^{(3)}$ は3形式の場で、 \tilde{g} は11次元の重力子である。これを、 S^1 コンパクト化して10次元に落す。つまり計量を、

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n + e^{2\phi} (dx^{10} - A_m dx^m)^2$$

$$\tilde{g}_{mn} = \begin{pmatrix} g_{mn} & -A_m \\ -A_n & e^{2\phi} \end{pmatrix}$$

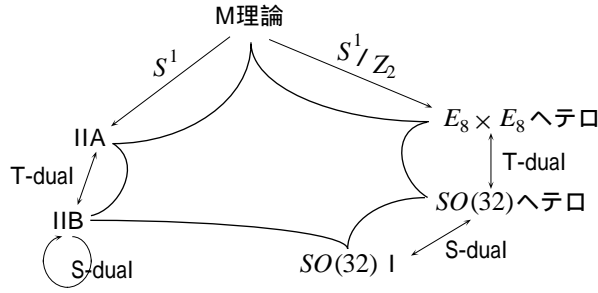


図 14: 超弦理論と M 理論

とする。また、 $C_{mnl}^{(3)} = A_{mnl}^{(3)}$, $C_{mn11}^{(3)} = B_{mn}$ とする。すると、

$$S = \frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^\gamma (R + (\nabla\gamma)^2 + |dA^{(3)}|^2) + e^{3\gamma} |dA^{(3)}|^2 + e^{-\gamma} |dB|^2 + \dots \right]$$

となる。 \dots は、もともとの作用の Chern-Simons 項から来る部分。更に、 $g_{mn} \rightarrow e^{-\gamma} g_{mn}$ とし、 $3\gamma = 2\phi$ とすると、

$$S = \frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} \left(R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12} H^2 \right) + (|dA^{(1)}|^2 + |dA^{(3)}|^2) \right]$$

にまとめられる。これはちょうど type IIA の作用になっている。ここで、 $3\gamma = 2\phi$ より $R_{11} = g^{\frac{2}{3}}$ であることが分かる。type IIA には、もっと重い自由度が含まれているから、低エネルギー有効理論として 11 次元超重力理論を持つ何らかの理論が、type IIA の強結合での良い記述となると思われる。これを M 理論と呼ぶ。

M 理論を S^1/Z_2 にコンパクト化すると、 $E_8 \times E_8$ のゲージ対称性を持つ hetero の作用を再現するので、M 理論を通して全ての 10 次元の超弦理論がつながることになる。つまり、11 次元に低エネルギー有効理論として SUGRA を持つ『M 理論』という 1 つの理論があって、そこから 10 次元の理論が全て導かれる。従って、10 次元の超弦理論に複数の真空があるように見えたのは見かけだけで、実は 1 つの理論であったと想像される。

以上をまとめると、図 14 のようになる。5 つの理論の等価性は、厳密に示されている訳ではないし、また M 理論が何かという問題については、ここ一年で matrix model という形での理解が進んでいるものの、未だ解決の見通しがたっていない。しかし、後でみるように M 理論が存在すると思って議論を進めると、非常にうまくいく。今のところ何の矛盾も生じていない。そこで、11 次元に M 理論と呼ばれる何らかの理論があるということについては、多くの人に信じてられている。

3.2.3 双対性と D-brane

前小節でみた双対性のうち、Type IIB の S-duality は、(NS,NS) の状態と (R,R) の状態を入れ替えるような対称性であった。しかし、第 3.2.1 節で見たように、(NS,NS) の反対称テンソル場 B_{mn} がポテンシャルの形でパーテックス演算子を与えられたのに対し、(R,R) の 2 形式場 $A^{(2)}$ は場の強さ $F^{(3)}$ の形でしか書くことができず、(R,R) 電荷を運ぶ場に入れられない。この立場では、(NS,NS) と (R,R) の 2-形式は対称でありえないように見える。これは、 B_{mn} が基本弦 (Fundamental string, F1-brane ともいう) に接続して $\int_{F1} B$ なる項があり、(NS,NS) 電荷を運んでいるのに対して、 $A^{(2)}$ が接続するような 2 次元の広がりを持った物体がないことによる。

この小節では、開弦の T-duality をとったときに導入された D-brane が (R,R) 電荷を持つことを示し、

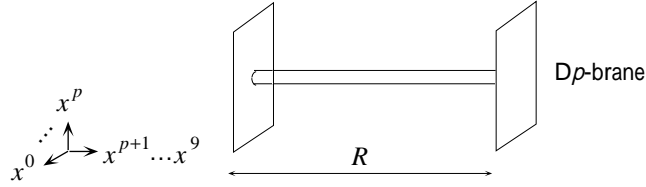


図 15: D-brane を含むダイアグラム

Type IIB にも D-brane が入っているとすれば $\int_{D1} A^{(2)}$ のような項が入れられ、S-duality と矛盾しないことを説明する。

図 3.2.3 のように、2 枚の平行な Dp -brane の間の閉弦の伝搬を考える。brane 間の距離が長い極限で振幅を計算すると、閉弦の質量 0 の励起状態の伝搬だけを考えればよい。低エネルギー有効作用は、 Dp -brane が張力 T_p の他に (R,R) 電荷 μ_p を持つとすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \int d^{10} e^{-2\phi} \left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12} H^2 \right] - T_p \int d^{p+1} x e^{-\phi} \text{Tr} \left[\det^{\frac{1}{2}} (G + B + 2\pi\alpha' F) \right] \\ & + \frac{1}{2} \int F^{(p+2)} * F^{(p+2)} + i\mu_p \int_{Dp\text{-brane}} A^{(p+1)} \end{aligned}$$

である。但し、フェルミオンの項は省略した。右辺第一項は、10 次元中の閉弦の (NS,NS) セクターの有効作用である。第二項は、 Dp -brane 上の有効作用である。第三項は、10 次元中の (R,R) セクターの有効作用で、ここでは $p+1$ 形式 A^{p+1} の運動項である。そして第四項は、 Dp -brane が A^{p+1} の電荷 μ_p を運んでいることを仮定して入れたものである。これを使って、図 3.2.3 の振幅を求めることができ、

$$A = (2T_p^2 - \mu_p^2) G_{9-p}(R)$$

となる。ここで、 G_{9-p} は $9-p$ 次元のグリーン関数である。 R は 2 枚の brane 間の距離である。一方、図 3.2.3 は開弦の 1-loop グラフとみることもできる。このとき、振幅は

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \text{trDet}[\text{伝搬関数}] \\ &= -\frac{1}{2} \text{trDet}(k^2 + m^2) = -\frac{1}{2} \text{trlog}(k^2 + m^2) \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \int_1^{k^2+m^2} dx \int_0^\infty e^{-tx} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \text{tr} e^{-2\pi\alpha' t(k^2+m^2)} \end{aligned}$$

但し、最後の行に移るとき、 x の積分で出てくる定数は、真空のエネルギー分として消去した。また、 $t \rightarrow 2\pi\alpha' t$ と変数変換した。 m^2 は (107) 式と同様、

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - a) + \frac{R^2}{4\pi^2\alpha'^2}$$

で与えられる。 N は粒子数演算子であり、 a は正規積を定義する際の不定定数で、R セクターでは 0、NS セクターでは 1 である。これを A に代入し、 k の積分を実行すると、

$$A = 2 \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha't}} \right)^{p+1} \left[\text{Tr} \frac{1}{2} (1 + P_{GSO}) e^{2\pi t(N-a)} \right] e^{-\frac{R^2}{2\pi\alpha'} t}$$

となる。 $P_{GSO} = (-1)^F$ であり、GSO projection を行っている。 [] 内について計算すると、

$$\begin{aligned} \text{R セクター} & \quad \frac{1}{2} \text{Tr} \left[e^{-2\pi t N_R} \pm (-1)^F e^{-2\pi t N_R} \right] = -\frac{1}{2} f_1(q)^{-8} f_2(q)^8 + 0 \\ \text{NS セクター} & \quad \frac{1}{2} \text{Tr} \left[e^{-2\pi t (N_{NS} - 1/2)} (-1)^{F-1} e^{-2\pi t (N_{NS} - 1/2)} \right] = \frac{1}{2} f_1(q)^{-8} (f_3(q)^8 - f_4(q)^8) \end{aligned}$$

となる。但し、

$$\begin{aligned} f_1(q) &= q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) & f_2(q) &= \sqrt{2} q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}) \\ f_3(q) &= q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}) & f_4(q) &= q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}) \end{aligned}$$

とする。これを A に戻すと、

$$A = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{R^2}{2\pi\alpha'} t} \frac{1}{2f_1(q)^8} [-f_2(q)^8 + f_3(q)^8 - f_4(q)^8]$$

となる。 [] は 0 になることが分かる。閉弦でみると、 $(1 + P_{GSO})$ の 1 が (R,R) セクターに対応していて、 P_{GSO} が (NS,NS) セクターに対応している。従って、(NS,NS) の粒子の寄与 A_{NS} と (R,R) の粒子の寄与が A_R がちょうど打ち消しあって $A = 0$ となっていることが分かる。 $t \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$A_{NS} = -A_R = -(4\pi^2 \alpha')^{-p+3} 2\pi G_{9-p}(R)$$

が導かれる。以上により、

$$\mu_p^2 = 2T_p^2 = 2\pi(4\pi^2 \alpha')^{3-p} \quad (109)$$

が導かれる。 $T_p \neq 0$ より $\mu_p \neq 0$ であり、D-brane が (R,R) 電荷を持つことがここから分かる。また、(109) 式より Dirac の量子化条件 $\mu_{6-p}\mu_p = 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$ も満たされることが分かる。

以上により、D-brane が (R,R) 電荷を持つことが分かった。従って、もし type IIB 超弦理論が (R,R) セクターの場の源として D-brane を含めば、S-duality によって F1 と D1 が入れ変わり、高い励起状態も正しく双対になっていることが分かる。このように、type IIB に D(-1,1,3,5,7)-brane を、その T-dual である type IIA に D(0,2,4,6,8)-brane がそれぞれ含まれることにより、超弦理論に於ける双対性が正しく理解できる。これにともない、閉弦の理論である type II にも、Dp-brane (広がりの方向 x^0, \dots, x^p) 上の開弦の励起状態からベクトル場が含まれ、brane 上の低エネルギー有効理論として SYM を持つことが分かる。

ところで、type II の有効作用から、実際に D-brane 的な解がソリトンとして得られている。ソリトンは BPS 状態であることが多いから、D-brane も BPS 状態であると思われる。一方、例えば X^9 を S^1 コンパクト化して T-duality をとると、 $X_L^9 \rightarrow -X_L^9$ と作用し左手側だけの時空のパリティ変換とみなせた。従って超対称な場合には対となるフェルミオンも $\psi_+^9 \rightarrow -\psi_+^9$ とするのが適当である。0 モードに注目すると、これは丁度 $\gamma^9 \rightarrow -\gamma^9, \gamma^m \rightarrow \gamma^m (m = 0, 1, \dots, 8)$ を引き起こしているから、フェルミオンに作用する T-duality の演算子は、 $\rho^9 \sim \gamma^9 \gamma^{11} (\gamma^{11} = \gamma^0 \dots \gamma^9)$ と表すことができる。もともと開弦では左と右が独立でなく、保たれる超対称電荷は線形結合 $Q_R + Q_L$ であった。D-brane は開弦の理論で T-dual を取ったときに出てくるものだから、保たれる電荷は $Q_R + \rho Q_L$ であることが分かる。従って、type II 理論中に D-brane が含まれているとすれば、それは超対称性を半分だけ保っており、これによっても D-brane が type II の理論中の BPS 状態であることが分かる。

なお、D-brane とは異なる 5-brane がソリトン解として得られており、これを NS5-brane と呼ぶ。NS5-brane は、(NS,NS) の反対称テンソル場の電磁双対場が結合しているものと理解されている。また、type IIA に D-brane が含まれることに伴い、強結合極限である M 理論には 3 次元及び 6 次元の広がりを持つ物体が含まれることが分かる。これをそれぞれ M2-brane、M5-brane とよぶ。M 理論を S^1 コンパクト化して type IIA に近づけたとき、M2-brane から D2-brane 及び基本弦が、M5-brane から NS5-brane 及び D4-brane が現れる。

4 brane による 4 次元超対称ゲージ理論の解析

前章により、type II の超弦理論にはソリトン解として Dp -brane が含まれ、brane 上の低エネルギー有効理論として $(p+1)$ 次元の SYM が得られることが分かった。このことから、D-brane を用いて 4 次元の $N=1, 2$ SQCD を超弦理論の枠内に構成することが考えられる。

この章では、実際に type IIA の D4-brane 上の有効理論として 4 次元 $N=1, 2$ SQCD を構成し、2 章で紹介した場の理論による解析結果が brane の側からも導けることをみる。

4.1 D-brane 上での超対称ゲージ理論の構成

この節では、type IIA 超弦理論において、低エネルギー有効理論として 4 次元の $N=1, 2$ SQCD を実現する brane 配位を導入する。次に質量項や物質場の真空期待値を与えるような理論の変形が、brane 配位の変化としてはどのように見えるかを調べる。これによって、SQCD の moduli パラメータが brane 配位内のどこに現れるかが明らかになる。最後に、 $N=1$ SQCD の Seiberg duality をこの brane 配位を使って説明する。

4.1.1 SQCD のスペクトルを再現する brane 配位

SQCD のスペクトルには、 $SU(N_c)$ のゲージ粒子 A_m^a と (反) 基本表現に属する物質場 Q (\tilde{Q})、及びその超対称パートナーである。一方前節で、閉弦の理論である type IIA と type IIB の超弦理論には自然に D-brane が含まれ、それに伴う開弦の励起から、 $U(N_c)$ のゲージ粒子が出せることを見た。これを使って、D-brane 上に SQCD のスペクトルを再現することを考える。なお、閉弦からくる重力子の影響は、弦の結合定数 $g \sim e^{\langle \phi \rangle}$ が非常に小さいとして無視する。

Dp -brane を N_c 枚重ねると、brane 上には $(p+1)$ 次元の $U(N_c)$ ゲージ場が現れる。このとき、brane により超対称性が半分に落ちるから、10 次元の type II で保たれる $2^{\lfloor \frac{10}{2} \rfloor} = 32$ 個の超対称電荷のうち、保存電荷として残るのは 16 個である。4 次元の理論を作るために type IIB の D3-brane を選ぶとすると、 $N=16/2^{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} = 4$ の超対称性が残る。ここでは $N=1, 2$ の理論を構成したいから、 Dp -brane の両端に他の brane をつけて、その境界条件から更に超対称性を破ることを考える。境界をつけることで、 Dp -brane の広がり $R^p \times L$ になるから、巨視的にみて 4 次元の理論を作るためには、type IIA に含まれる D4-brane をとればよい。 Dp -brane と NS5-brane のどちらで境界をつけたら良いかを考えるために、まず D4-brane 上の粒子が境界条件によってどのような影響を受けるかを調べる。ここで、超弦理論の 10 次元の座標を x^0, \dots, x^9 とし、D4-brane の広がりを x^0, \dots, x^3, x^6 と取る。このうち x^6 方向については、D4-brane に境界を持たせて有限の広がりを持つものとする。

1. スカラー場 ϕ

(a) NS5-brane で境界をつけた場合

Neumann 境界条件が課されるから、境界上で $\partial_6 \phi = 0$ である。今、D4 の x^6 方向の広がりが充分小さくて、D4 上の理論が 4 次元とみなせる場合を考えたいから、単純な dimensional reduction を行なって、場は x^6 に依存しないものとする。従ってこの場合はスカラー場にはなんの拘束条件もつかない。

(b) Dp -brane で境界をつけた場合

Dirichlet 条件が課され、境界上では $\partial_i \phi = 0 (i=0, \dots, 3)$ であり、定数となる。よって x^6 依存性を持たないことから、 ϕ は全ての領域で定数であるから、場としては残らないことが分かる。

2. ベクトル場 A_m^a

(a) NS5-brane で境界をつけた場合

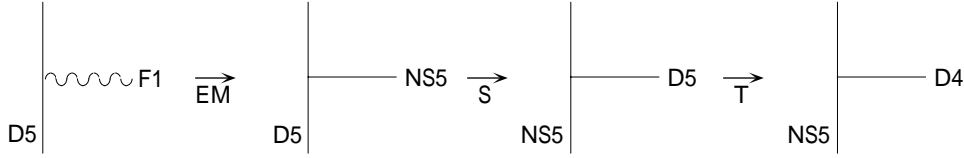


図 16: 境界を持つ D4-brane

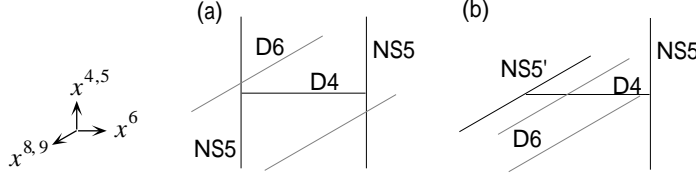


図 17: 4次元 (a) $N = 2$, (b) $N = 1$ の brane 配位

$A_i (i = 0, \dots, 3)$ と $A_6 = b$ に分離する。まずゲージ自由度を使って $b = 0$ に持って行く。このゲージ固定は完全でなく、 $x^{0, \dots, 3}$ の 4次元内でのゲージ変換分は固定されずに残っている。このとき、場の強さは境界上で

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i \\ F_{i6} &= -\partial_6 A_i = 0 \end{aligned}$$

となる。従って、4次元でのゲージ場 A_i が自由度として残る。

(b) Dp -brane で境界をつけた場合

境界条件及び上記と同じゲージ固定により、 $F_{ij} = 0, F_{i6} = -\partial_6 A_i \neq 0$ となる。よってゲージを取り直せば $A_i = 0, b \neq 0$ とでき、 x^6 成分である b のみが自由度として残る。

従って D4-brane 上のゲージ場を残すためには、NS5-brane で境界をつける必要がある。また、もし Dp -brane で境界をつけたとすると、D4-brane と Dp -brane をつなぐ開弦の励起から余分な粒子が出てきてしまうから、この点からも NS5-brane の方がよい。

では、D4-brane が NS5-brane 上に境界を持つという配位は許されるだろうか。まず、D5-brane に基本弦 (F1-brane) がつくことはできる。ここから電磁双対、type IIB の S-dual、T-dual を順にとると、NS5-brane から D4-brane が生えているような配位が取れ (図 16)、可能であることがわかる。また、D4-brane よりも NS5-brane の方が広がっている次元が大きいから、D4-brane 内の $A^{(5)}$ のような場は、NS5-brane に流れ込むことができ、運動方程式に矛盾を生じない。D4-brane の端点は、NS5-brane 側から見てモノポールのようなソースになっていることが分かる。これは変形の途中でも言えることである。

以上をまとめると、4次元の $N = 1, 2$ SQCD のスペクトルを再現する D-brane 配位は、図 17 のようなものと思われる。なお、 $N = 1$ を再現するために、D4-brane 上の超対称性を $1/4$ にしなくてはならないから、2つの境界での NS5-brane の向きを変えた。D6-brane は、後でみるように超対称性を破らず、物質場を入れるために必要である。今後はこの配位中の brane を、NS5, NS5', D4, D6 のように省略して表す。

保たれる超対称電荷を少し詳しく見ておく。もともと type IIA であるから、カイラルでない 10次元の $N = 2$ 超対称性を持つ。電荷を Q 、パラメータを ϵ とすると、 $\epsilon_L Q_L + \epsilon_R Q_R$ による変換に対して不変。但し 10次元のガンマ行列を $\Gamma^m, m = 0, 1, \dots, 9$ として $\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9$ とすると、 $\Gamma^{11} Q_L = Q_L, \Gamma^{11} Q_R = -Q_R$ である。従って $\epsilon_L \Gamma^{11} = \epsilon_L, \epsilon_R \Gamma^{11} = -\epsilon_R$ 。電荷の数は、 $2^{\lfloor \frac{10}{2} \rfloor} = 32$ である。 (x_0, x_1, \dots, x_p) 方向に広がった Dp -brane の保つ超対称性は、前節で求めたように $Q_L + \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^p Q_R$ であるから、 $\epsilon(Q_L + \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^p Q_R)$ による変換に対して不変、つまりパラメータに対して $\epsilon_R = \epsilon_L \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^p$ の条件がつく。 $(0, 1, \dots, 5)$ 方向に

広がった NS5 については、Schwarz の作用から $\epsilon_{L,R} = \epsilon_{L,R} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^5$ なる条件がつく。図 17 に描かれている D-branes について、広がり方向と保存される超対称電荷に対する条件式をまとめると、以下のようになる。

	$x^{0,\dots,3}$	$x^{4,5}$	x^6	x^7	$x^{8,9}$	超対称電荷の条件
NS5	○	○	-	-	-	$\epsilon_{L,R} = \epsilon_{L,R} \Gamma^0 \dots \Gamma^5$
NS5'	○	-	-	-	○	$\epsilon_{L,R} = \epsilon_{L,R} \Gamma^0 \dots \Gamma^3 \Gamma^8 \Gamma^9$
D4	○	-	△	-	-	$\epsilon_R = \epsilon_L \Gamma^0 \dots \Gamma^3 \Gamma^6$
D6	○	-	-	○	○	$\epsilon_R = \epsilon_L \Gamma^0 \dots \Gamma^3 \Gamma^7 \Gamma^8 \Gamma^9$

但し、○はその方向に無限に広がっていることを、△は有限に広がっていることを、-は広がっていないことを示す。従って、図 17(a) のような brane 配位を考えると、条件が 2 つでそれぞれ保存電荷の数を半分に落すから、 $\frac{32}{2} = 8$ 個の超対称電荷が保存される。よって D4 上の 4 次元では $N = 2$ の超対称性が残る。ここで、図のような D6 を入れても超対称電荷に対する新しい条件はつかない。同様に、図 17(b) のような brane 配位を考えると、条件がもう一つ加わって 4 次元の $N = 1$ に落ちている。

この brane 配位において、D4 上に現れる軽い粒子の自由度にどのようなものがあるかを見る。D4 が N_c 枚重なっているとすると、D4 同士をつなぐ開弦から $U(N_c)$ のゲージ粒子 $A_m^a, m = 0, \dots, 3$ が現れる。 A_6^a は境界条件で落ちた。また、D6 から出て D4 で終わっている弦から、 $U(N_c)$ の基本表現、反基本表現の粒子が現れる。(107) 式より、この粒子の質量は D4 と D6 の距離に比例する。図 17(a) の $N = 2$ の場合については、この他に D4 の $x^{4,5}$ 方向の位置を動かす分の自由度があり、ここから随伴表現の物質場が現れる。

以上の情報により、図 17(a) の D4-brane 上には 4 次元の $N = 2$ SQCD が、(b) では $N = 1$ SQCD のスペクトラムが存在していることが分かる。

なお、D6 は D4 と異なり無限に広がっているからゆらぎづらいと考えられる。D6 が N_f 枚重なっていると時の、D6 同士をつなぐ弦からくる $U(N_f)$ 対称性は力学的な寄与はなく、大域的対称性となる。これが、 $N = 2$ SQCD の持つ $SU(N_f)_V \times U(1)_B$ 対称性の出所となっている。 $N = 1$ ではカイラルなフレーバー対称性が出てくるはずだが、D4 上で他種類の brane が見えない程度に局所的には、 $32/2=16$ 個の保存される超対称電荷が存在し、より大きな超対称性を持つ理論とみなされる。従って $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 対称性は、D4 の x^6 方向の広がりが見えないような、完全に 4 次元に落ちる極限を取った時に、初めて見える対称性であると考えられる。

4.1.2 SQCD の変形に対応する brane 配位

図 17 上に実現された SQCD に、物質場の質量や場の真空期待値を与えて変形することを考える。

まず、物質場の質量は D6 と D4 の距離である。つまり $v = x^4 + ix^5$ として、

$$\text{物質場の質量 } m^2 \propto |v(\text{D6}) - v(\text{D4})|$$

であるから、質量を変化させることは brane 配位側で考えると、D6 の $x^{4,5}$ 方向の位置を動かすことに相当する。

また、ゲージ結合定数は NS5 間の距離で決まる、つまり

$$\frac{1}{g^2} = \frac{|x_6(\text{NS5}) - x_6(\text{NS5}')|}{g_s l_s} \quad (110)$$

である。 g_s は弦の結合定数で、D-brane が開弦から来ていることによりもともと入っている。 $l_s \sim \sqrt{\alpha'}$ は弦の長さであり、次元を合わせるために入れた。分子は、作用を単純に dimensional reduction したとき x^6 方向の積分から $x_6(\text{NS5}) - x_6(\text{NS5}')$ が出てきたものである。よって、結合定数を変化させることは、brane 配位で見ると NS5 を x^6 方向に動かすことに相当している。

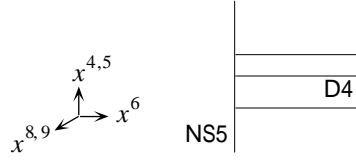


図 18: $N = 2$ 古典的 Coulomb moduli

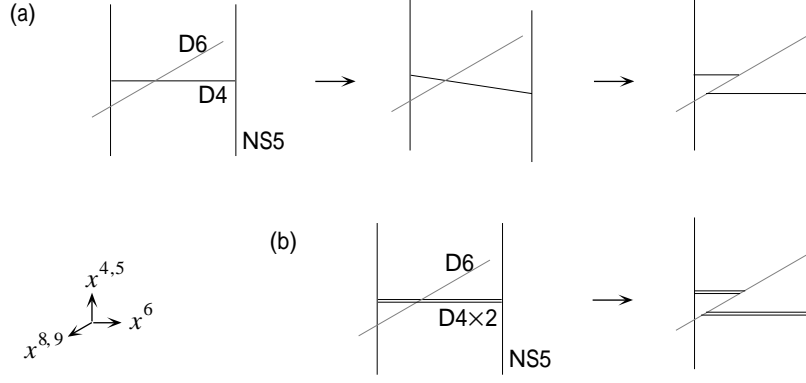


図 19: FI D -term

更に、 $N = 2$ SQCD に含まれる随伴表現の物質場の真空期待値は、 N_c 枚の D4 の $x^{4,5}$ 方向の位置で与えられる。よって、 $N = 2$ の古典的 Coulomb branch の moduli は、図 18 で与えられる。図 17 より明らかに、 $N = 1$ ではこの変形は不可能である。

ゲージ群が $U(1)$ でフレーバーも 1 の場合、つまり D4 も D6 も一枚の場合を考える。この理論は、場の理論的には Fayet-Iliopoulos の D -term を入れる変形が可能である。これに対応する brane 配位の変形は、 $N = 2$ の場合は 2 枚の NS5 間の $x^{7,8,9}$ 方向の、 $N = 1$ の場合は x^7 方向の距離に相当すると思われる。単に NS5 を動かしただけでは D4 が斜めになってしまう、超対称性が破れてしまう。そこで、D4 を D6 で切って超対称性を破らなようにする (図 19(a))。これは FI D -term を入れた場合に超対称な真空をとろうとすると、物質場にある決まった真空期待値を持たせなくてはならないことに相当しており、FI D -term による変形を片方の NS5 の移動と同定してよさそうである。ここから、D6 で D4 を切るという操作は、場の理論の Higgs 機構に相当しており、D6 に沿って移動した D4 の位置が物質場の真空期待値を与えようと考えられる。

brane 配位からは、ゲージ群が $U(2)$ の場合にも同様に FI D -term による変形が行なえる (図 19(b))。しかし、場の理論では、場にどんな真空期待値を持たせても、超対称性を保つような真空はとれない。よって、直行する方向に広がった一対の NS5 と D6 を、2 枚以上の D4 でつないだ図 (b) のような brane 配位は、超対称性を破っているとするのが適当である。これは s 則と呼ばれ、以下でみていくように、これを使って初めて brane 配位と場の理論がうまく対応付けられる。また、 s 則によって定まる IIA での brane 配位は、M 理論から自然に導かれることも分かる。

s 則を使って、Higgs branch の古典的 moduli を図示する。まず、 $N = 2$ の場合について。一枚の D4 の D6 による切り方は、図 20(a) のようになる。ここで、NS5 と D6 に挟まれている D4 の断片上では、前小節でみたように、境界条件により場の自由度は残らない。一方、D6 に挟まれている断片上では、 $x^{7,8,9}$ 方向の移動分の自由度に加えて A_6 も残る。従って断片一個につき複素 2 次元分の自由度が出る。non-Baryonic branch では、ゲージ群 $U(N_c - r)$ 分の Coulomb branch があるから、 $(N_c - r)$ 枚の D4 は切らない。残る r 枚について、最大限の自由度が残るように切つてやると、 s 則により図 20(b) のようになる。両端が D6 上

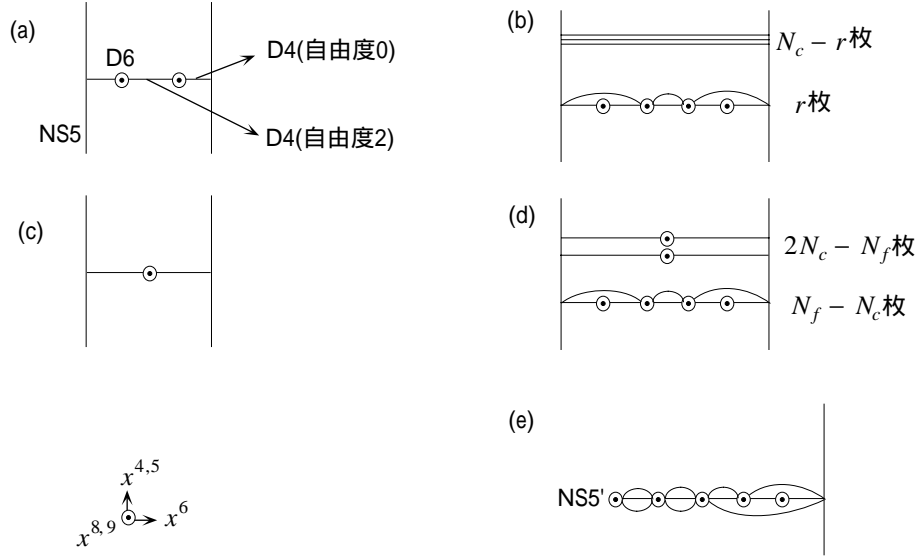


図 20: 古典的 Higgs moduli

にある D4 の断片の数は、

$$(N_f - 1) + (N_f - 3) + \cdots + \{N_f - (2r - 1)\} = r(N_f - r)$$

となる。よって自由度は $2r(N_f - r)$ である。これは、前々節で求めた non-Baryonic branch のパラメータの数に一致する。Baryonic branch の場合も、non-Baryonic branch と同様に考えることができる。多少違いがあるのは $N_f < 2N_c$ の漸近自由の場合で、この場合は D6-brane が少ないので D4-brane 全部を切るためには、自由度数は落ちるが図 20 (c) のような切り方を入れる必要がある。 n 枚の D4 を non-Baryonic branch と同じ方法で切ることになると、使われる D6 は $2n$ 枚である。残りは図 (c) の方法で切るの、D6 は更に $N_c - n$ 枚要る。よって、最大のパラメータ数を残すような切り方では $2n + (N_c - n) = N_f$ であるから、図 (d) のようになる。自由度の数は $2N_c(N_f - N_c)$ であるから、先に場の理論から求めた自由度には 2 だけ足りない。同様に $N = 1$ では、図 20(e) のようになる。NS5' と D6 は平行であるから s 則は適用されず、これに挟まれた D4 には、 $x^{8,9}$ 方向の移動分の複素 1 次元の自由度がある。しかし、最大限自由度を残しても、複素次元で

$$2 \times [1 + 2 + \cdots + N_c - 1 + N_c \{N_f - 1 - (N_c - 1)\}] + N_c = N_c(2N_f - N_c)$$

分しかなく、 $N = 1$ SQCD のパラメータ数 $2N_c N_f - (N_c^2 - 1)$ には 1 個足りない。パラメータの不足は、場の理論で考えた模型でゲージ群が $SU(N_c)$ だったのに対し、brane 配位から考えると $U(N_c)$ であるという違いからきているようにも思われるが、この後の小節で説明するように、brane の動力学から考えると $U(1)$ 分は固定されて、brane 配位から考えてもゲージ群は $SU(N_c)$ であるとするのが適当であることが分かる。この問題は、次節で M-brane まで上げた時に解決される。

なお、Higgs 機構では、 $N_c \rightarrow N_c - 1, N_f \rightarrow N_f - 1$ となる。ゲージ対称性については、前小節で議論した境界条件と残る自由度の関係から理解できるが、上記の変形でフレーバーが落ちることの理由は分かっていない。『NS5-brane と、D4-brane でつながれている D6-brane からはフレーバーが出ない』と考えるとつじつまが合う。

次に、D6 を x^6 方向に動かす変形を考える。最終的に x^6 方向については dimensional reduction するので、brane 配位中の x^6 分の自由度は場の理論の自由度としては残らないべきである。しかし、FI D -term

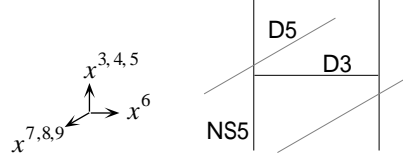


図 21: T-dual をとった brane 配位

による変形を思い出してみよう。超対称性を破らないような変形は、2枚の NS5 の間に D6 があったからこそ可能だったもので、もし少しでもこの外に出たら超対称性は破れてしまう。従って D6 の x^6 座標は、一見 D4 上の場の理論に効いてくると考えざるを得ない。これは D6 が NS5 を横切るとき、D6 と NS5 が交わって特異であることによる。実際、D6 が NS5 を横切ると D4 ができたり消えたりすることが、以下のようにして分かる。

今考えている $N = 2$ の brane 配位の T-dual を取って、type IIB 理論の図 21 のような brane 配位を考える。NS5-brane や D5-brane を、D3-brane でつないだ形になっている。まず、D5-brane と NS5-brane が一枚ずつ、離れて存在している場合を考える。type IIB の 10 次元空間を $R^3 \times M_7$ とし、D5-brane の広がりを $X_D = R^3 \times Y_D$ 、NS5-brane の広がりを $X_{NS} R^3 \times Y_{NS}$ とおく。ここで、 M_7 は 7 次元の、 Y_D, Y_{NS} は 3 次元の多様体であり、仮にコンパクトであるとする。NS5-brane は NS-NS 2-form B_2 の、D5-brane は R-R 2-form A_2 のソースになっている。よって $H_{NS} = dB_2, H_D = dA_2$ とすると、適当な規格化の下で

$$\int_S \frac{H_D}{2\pi} = 1, \quad \int_{S'} \frac{H_{NS}}{2\pi} = 1$$

となる。但し、 $S(S')$ は $X_D(X_{NS})$ を囲む充分小さな 3 次元球面である。このとき Linking number は、

$$L(Y_{NS}, Y_D) = \int_{Y_D} \frac{H_{NS}}{2\pi} = - \int_{Y_D} \frac{H_D}{2\pi}$$

のように定義できる。但し、 R^3 についてはある一つの点 p を決めて積分したものとする。今の場合、NS5-brane と D5-brane は離れているから、linking number は 0 のはずである。実際、 B_{NS} は、D5-brane 上の $U(1)$ ゲージ場 A_D の場の強さ F_D と混ざって、ゲージ不変な場としては $\Lambda_D = B_{NS} - F_D$ のようになり、ソースがないから $dF_D = 0$ であるので、

$$H_{NS}|_{Y_D} = d\Lambda_D$$

である。これを $L(Y_{NS}, Y_D)$ に代入すれば 0 であることが分かる。次に、広がりが $R^3 \times C$ の D3-brane を入れて考える。 C は 1 次元多様体で、位置 p で Y_D 上に境界を持つとする。つまり D5-brane 上に D3-brane がつながっている場合を考える。このとき、D3-brane は D5-brane 上から見て $*A_D$ のソースになっているから、 $dF_D = \pm\delta(p)$ となる。 \pm は、D3-brane の向きによって決まる。よって、

$$H_{NS}|_{Y_D} = d\Lambda_D - (\pm)\delta(p)$$

となる。従って「linking number」は、ある D5-brane の Y_D と全ての NS5-branes の Y_{NS} の linking number に、D5-brane で終わっている D3-brane の数を足して始まっている D3-brane の数を引いたものになっている。ここで、多様体コンパクトでない場合、 $M_7 = R^7; Y_{NS} = Y_D = R^3$ に拡張する。この場合には、積分領域が無限に広がっているために、接していない一対の D5-brane と NS5-brane でも、linking number が 0 でない可能性がある。実際に積分を実行しなくても、linking number が x_6 軸の反転によって符号を変えること、D5-brane を NS-brane を越えて移動すると 1 だけ変わることから、 $\pm\frac{1}{2}$ となることが分かる。従って、ある NS5-brane 上でみた linking number は、

$$L_{NS} = \frac{1}{2}(r - l) + (L - R)$$

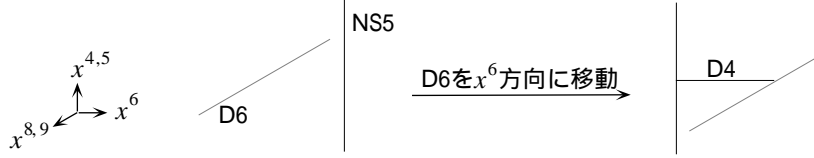


図 22: Hanany-Witten 効果

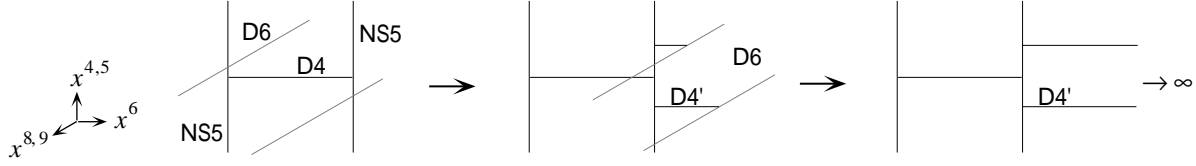


図 23: D6 の移動で作られる brane 配位

但し、 $r(l)$ は NS5-brane の右 (左) 側にある D5-brane の数であり、 $R(L)$ は NS5-brane の右 (左) 側で切れている D3-brane の数である。同様に、D5-brane 上では

$$L_D = \frac{1}{2}(r - l) + (L - R)$$

但し、ここでの $r(l)$ は NS5-brane の右 (左) 側にある NS5-brane の数である。よって、linking number を保存するためには、D5-brane を、直交する NS5-brane を越えて移動させると、D3-brane がひきずられて出てくることが分かる (図 22)。これは Hanany-Witten 効果と呼ばれ、他の方法でも確認されている。この結果を T-dual でもとに戻すと、D6 を NS5 を越えて移動させると、一本の D4 が生成されることが分かる。

従って、例えば 2 つの NS5 の外に位置する D6 は、中に入ると HW 効果によって作られた D4-brane (D4' とおく) で NS5 とつながれ、Higgs branch の moduli を導いたときに言及したように、物質場を出さないと考えられる。よってこの brane 配位による SQCD は $N_f = 0$ であり、FI D -term で超対称性が破れることと矛盾しない。

また、物質場として入っている N_f 枚の D6 を全て NS5 の外側に移動してしまえば、HW 効果によって図 23 のようになる。これも今まで考えてきた図 17 と同様、NS5 の間の D4 上に 4 次元 SQCD が実現するはずである。実際、D4 と D4' をつなぐ開弦から物質場が出る他は、先と変わらない。フレーバー対称性 $U(N_f)$ の出所も、先と同じく D6 同士をつなぐ開弦からくるゲージ場による。D4' 同士をつなぐ開弦からくるゲージ場は、D6 の x^6 方向の位置が小さくて無視できる程度なら、境界条件によって落ちてしまうので使えないのである。D6 の x^6 方向の位置が大きくて見える場合、極端には $x^6 \rightarrow \infty$ に飛ばして D4, D4', NS5 のみの系にした場合は、D4' は半無限に広がっていて D6 に端点を持つと考えなくてよい。よって D4' 同士をつなぐ開弦からくるゲージ場によってフレーバー対称性が出てくることになる。

4.1.3 brane 配位とゲージ群

単純には、今まで考えていた brane 配位でのゲージ群は $U(N_c)$ であった。この節では、NS5 で境界をつけたことにより $U(1)$ 因子が落ちて、 $SU(N_c)$ になっていることを見る。

図 23 の brane 配位を使って、ゲージ群が $SU(N_c)$ であることを見る [15]。NS5 は $x^{4,5} \rightarrow \pm\infty$ では x^6 方向のゆらぎを引き起こすソースがないから、

$$\nabla^2 x^6 = 0$$

を満たす。但し、 ∇ は NS5 内で定義されている。D4 がくっついている時、その端点はゆらぎのソースになる。他にソースがなければ、 x^6 は境界に直交する $x^{4,5}$ のみの関数であり、上記の Laplace 方程式は実質 2 次元のものであるから、解は

$$x^6 = \pm k \log|x^4 + ix^5 - a| + \text{const.} \quad (111)$$

となる。 \pm は、NS5 の左右どちらの面に D4 が境界を持っているかによって変わる。 a は D4 の $v = x^4 + ix^5$ 座標である。 k は何らかの定数で、くっついている D4 のソースとしての強さを表している。D4 が短ければゆらぎやすく k は大きくなるだろうし、D4 が長ければ k は小さくなるだろうが、D4 が半無限の場合など極端な場合を除いて、大体定数としてよいと思われる。これを使って、NS5 の運動エネルギーを考える。運動エネルギーには $\int d^4x d^2v \sum_{m=0}^3 \partial_m x^6 \partial^m x^6$ のような項が含まれるから、(111) 式を代入すると

$$k^2 \int d^4x d^2v \left| \text{Re} \left(\sum_i \frac{1}{v - a_i} \partial_m a_i - \sum_j \frac{1}{v - b_j} \partial_m b_j \right) \right|^2$$

となる。なお、NS5 の左側で終わっている i 番目の D4 の v 座標を a_i 、 j 番目の D4 の v 座標を b_j と置いた。よってこの積分が収束するには、

$$\partial_m \left(\sum_i a_i - \sum_j b_j \right) = 0 \rightarrow \sum_i a_i - \sum_j b_j = \text{const.}$$

となる。従って全ての D4 の位置が勝手に動ける訳ではなく、条件が一つつく。これは場の理論でいうと $N = 2$ の随伴表現の物質場の真空期待値について、 $\sum \phi_I = 0$ なる条件がついていたことに相当する。よってゲージ群は $SU(N_c)$ と考えられる。 $N = 1$ の場合にはこのような導出はできないが、直観的には $N = 2$ の brane 配位から片方の NS5 を $x^{4,5} - x^{8,9}$ 内で回転させることによって $N = 1$ の brane 配位が得られるように見えるから、 $N = 1$ でも $N = 2$ の条件をひきずって $SU(N_c)$ になっていると思われる。

なお、半無限に伸びた D4' をつかって物質場を入れた場合にもこのような条件がつき、一見フレーバー対称性が $SU(N_f)$ に落ちて $U(1)_B$ がなくなりそうに見える。しかし、前述のように半無限に伸びた D4' については $k \rightarrow 0$ と考えられるから、D4' 側には条件はつかず $U(N_f)$ が残る。

ゲージ群についての解析は、図 23 のような brane 配位を使ったからこそできたもので、もと使っていた図 17 の配位から導くのは困難である。逆に、図 17 の配位で見やすかった Higgs branch を、図 23 側で考えるのは繁雑である。このように、brane 配位を使って解析する場合は、実現される場の理論が変わらないように変形することで、より目的に合った配位に移るとよい。

前節で、ゲージ群として $SO(N_c)$ や $USp(N_c)$ をとると、Orientifold plane (Op -brane) が現れることを説明した。これを使って、今考えている SQCD のゲージ群を拡張することが可能である。但し、D4 に対して O-brane を平行に入れるだけでなく、直交する形で導入する場合もある。

4.1.4 D-brane による Seiberg duality の解析

今までに導いた変形を使って、 $N = 1$ ゲージ理論の Seiberg duality を brane 配位側から示すことができる。

まず、図 17(a) から NS5 を x^6 方向に動かして、D6 N_f 枚を全て反対側に持っていく。すると Hanany-Witten 効果により、 N_f 本の D4-brane が生成される。これを D4' と置く (図 (b))。ここで、NS5 を x_7 方向にずらして FI D -term を入れる (図 (c))。 x^6 方向の移動と異なり、この変形は理論を変えているので、最終的にはもとに戻すものである。すると、 $N_f > N_c$ であれば、三角不等式により、より低いエネルギーを持つ図 24(d) に変形すると考えられる。ここで更に NS5 を、NS5' を越えるまで x^6 方向に動かす (図 (e))。FI D -term を入れたおかげで、 $x_6(\text{NS5}) = x_6(\text{NS5}')$ の特異点を回避できるので、この変形を行っても何も起

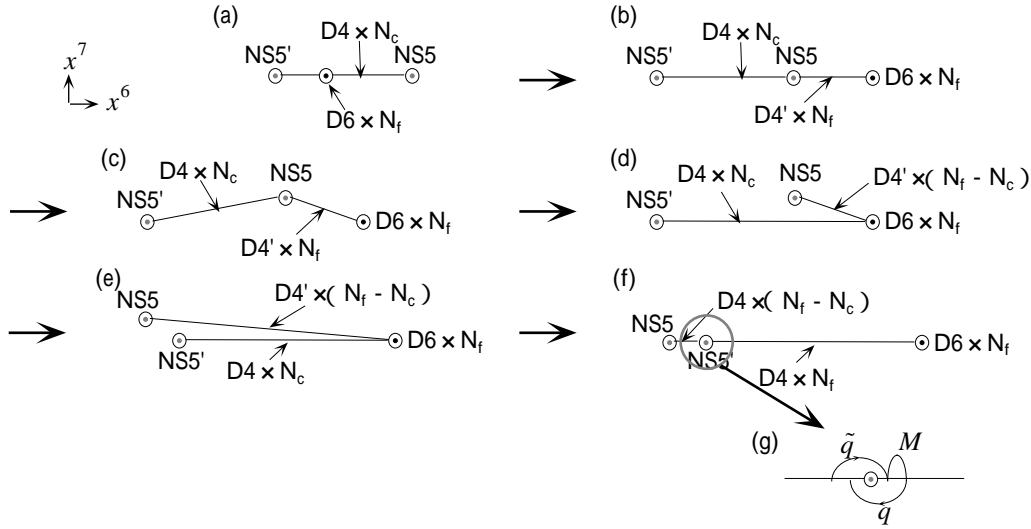


図 24: brane 配位からみた Seiberg duality

こらない。そこで、FI D -term を消してもと同じ理論を表すべき brane 配位に戻す。すると、図 (f) のようになる。NS5 と NS5' の間の D4-brane の枚数は $N_f - N_c$ で、正しく磁気的理論のゲージ群 $SU(N_f - N_c)$ を与えている。また、D4 と D4' の間の開弦から、 N_f 個の基本表現の物質場が出てくる。さらに、D6 と NS5' をつなぐ D4' は $x_{8,9}$ 方向にゆらぐことができるからならず、D4' 同士をつなぐ開弦から $SU(N_f)$ の随伴表現の物質場が出てくる。これはゲージ変換を受けない場で、磁気的理論に出てくるメソン M に相当している。このときメソン場は NS5' の近傍に局在しており、D4 と D4、D4 と D4'、D4' と D4' をつなぐ弦のつなぎかえにより、

$$W = Mq\tilde{q}$$

のような相互作用項が出てくるのが予想される (図 24(g))。

また、物質場の質量項を入れた場合、もとの brane 配位ではゲージ群 $SU(N_c)$ 、フレーバー数 $N_f - 1$ の理論になる。このとき図 24(a) の D6 は $N_f - 1$ 枚となるから、変形の結果図 (f) で D4 は $N_f - N_c - 1$ 枚、D4' は $N_f - 1$ 枚となり Seiberg duality はこの場合にも成り立っていることが分かる。また真空期待値を持たせて moduli 空間の原点から離れた部分について調べることができ、やはり Seiberg duality が成り立つことが分かる。

4.2 M5-brane による $N = 2$ SQCD の解析

前節では、D-brane の配位から D4 上に $N = 1, 2$ SQCD のスペクトルを再現し、古典的な moduli 空間を構成した。これを使って Seiberg duality を見ることができた。しかし、古典的にパラメータの数が合わないという問題があったし、 $N = 2$ Coulomb branch の量子論的 moduli 空間を記述する S-W 曲線がどのように出てくるか、全く不明である。

ところで、場の理論の結合定数 g は、brane 配位では (110) 式で表されていた。量子補正は g が大きくなると見えやすくなると考えられるから、これが大きくなる極限を考える。分母の g_s は小さくなくてはならなかったから、 $g_s l_s$ が大きくなるほど l_s が大きい極限をとればよい。一方、 $g_s l_s$ は 11 次元の M 理論を type IIA に落とすときの、 S^1 コンパクト化の半径であった。したがって量子補正の効果をみるには、IIA での記述から M 理論の記述に移ったほうがよい。

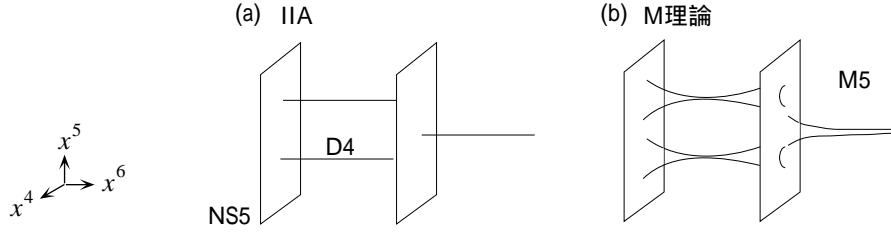


図 25: IIA 理論と M 理論からみた brane 配位

この節では、実際に M 理論側の brane 配位に移って、 $N = 2$ SQCD の解析を行なう。

4.2.1 M 理論からみた $N = 2$ SQCD の Coulomb branch

$N = 2$ SQCD を実現する D-brane 配位として、図 25(a) をとる。D6 は使わない。type IIA の NS5-brane は、M 理論の 5-brane (M5-brane) がそのまま 10 次元に落ちてきたものであり、D4-brane は M5-brane の広がり、 S^1 コンパクト化により 5 次元に落ちたものである。よって、図 (a) の brane 配位を M 理論から見ると、図 (b) のような一枚の M5-brane で表されると考えられる。この M5 は弱結合領域で IIA 理論の brane 配位を再現しなくてはならないから、図から分かるように $x^{7,8,9}$ 座標は固定され、 $x^{0,\dots,3}$ 方向については無限に広がっている

$$Q = \left\{ v = x^4 + ix^5, t = e^{-\frac{x^6 + ix^{10}}{R}} \right\}$$

については複素 1 次元分だけ広がっている。この複素 1 次元多様体 $\Sigma \in Q$ は、 $F(v, t) = 0$ で指定されるものとする。なお、 R は S^1 コンパクト化の半径であり、 x^{10} はその周期性から指数に上げた。

type IIA の brane 配位に対応させるために、 Σ には条件がつく。簡単のために、 $N_f = 0$ の場合を考える。まず、NS5 が 2 枚あるから、ある v に対して $F = 0$ を満たす t は 2 個あるはずである。従って、 F は t の 2 次式であることが分かるから

$$F(v, t) = A(v)t^2 + B(v)t + C(v)$$

である。但し A, B, C は v の関数とする。また、D4 は N_c 枚あるから、ある t でみたとき $F = 0$ を満たす v は N_c 個ある。よって、 A, B, C は v の N_c 次式である。ここで、 $x^6 \rightarrow \infty (t \rightarrow 0)$ で解がないことから C は定数、 $x^6 \rightarrow -\infty (t \rightarrow \infty)$ でも解がないことから A は定数でなくてはならない。よって $F = 0$ は

$$t^2 - C_{N_c}(v)t + 1 = 0, \quad C_{N_c}(v) = v^{N_c} + u_2 v^{N_c-2} + u_3 v^{N_c-3} + \dots + u_{N_c}$$

となる。但し、 v を定数分だけずらして v^{N_c-1} 次の項を消した。

このようにして、場の理論の解析から現れた S-W 曲線 (eqn:SWSQCD) 式を、M 理論側から導くことができた。場の理論では正体の分からなかった複素パラメータ v, t は、M 理論からみれば、単に M5-brane 上の座標である。物質場の入った場合の曲線についても、極限で type IIA の brane 配位をに戻ることと多少の変形を行えば、同様に導かれる [15]。

4.2.2 M 理論中の D6-brane

D-brane 配位で考えた時のように、Higgs branch を考えるには物質場を D6-brane で入れた方が分かりやすい。では、M 理論の中では D6-brane はどのように表されるだろうか [58]。

M 理論を S^1 コンパクト化すると、 $R^{10} \times S^1$ 中 R^{10} に type IIA があり、 S^1 に沿っての並進対称性から $U(1)$ ゲージ場が出てくる。これは IIA 内の D0-brane による Wess-Zumino 項を出すものと考えられる。D6-brane は D0-brane と双対だから、同じ $U(1)$ ゲージについて磁荷を持つ Kaluza-Klein モノポールである。この解は (multi-)Taub-NUT 空間として知られていて、計量は

$$\begin{aligned} ds_{TN}^2 &= U d\vec{x}^2 + R^2 \frac{1}{U} \left(\frac{1}{R} dx^{10} + \vec{\omega} \cdot \vec{x} \right)^2 \\ U &= 1 + \sum_{i=1}^{N_f} \frac{R}{2|\vec{x} - \vec{x}_i|} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\omega} &= \frac{2}{R} \vec{\nabla} U \end{aligned} \quad (112)$$

で与えられる [59]。但し $\vec{x} = (x^4, x^5, x^6)$ で、 \vec{x}_i は i 番目の KK モノポールの位置である。定義から、確に $|\vec{x}| \gg 1$ で ω は磁荷 N_f を持っているように見える。

Taub-NUT 空間は hyper-Kähler 空間であり扱いにくい。そこで、複素構造のみ取り出してやることを考える。パラメータとして、 $v = x^4 + ix^5$ の他に

$$y \propto t \prod_{i=1}^{N_f} \sqrt{|\vec{x} - \vec{x}_i| - (x^6 - x_i^6)}$$

をとると、(112) 式は

$$\begin{aligned} ds_{TN}^2 &= U |dv|^2 + R^2 \frac{1}{U} \left| \frac{dy}{y} - \delta dv \right|^2 \\ \delta &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{v + m_i} \left(1 + \frac{x^6 - x_i^6}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \right) \end{aligned}$$

となる。但し、 m_i は i 番目の D6-brane の v 座標である。ここで、更に

$$x \propto \frac{1}{t} \prod_{i=1}^{N_f} \sqrt{|\vec{x} - \vec{x}_i| + (x^6 - x_i^6)} \frac{v + m_i}{|v + m_i|}$$

を導入すると

$$xy \propto \prod_{i=1}^{N_f} (v + m_i) \quad (113)$$

を得る。今後 Taub-NUT 空間を調べる際は、主にこちらを使うことにする。

(113) 式の比例定数を 1 とする。これから考えるのは Higgs branch だから、 $m_i = 0$ とおく。従って $xy = v^{N_f}$ であり、 $x = y = v = 0$ に重複度 N_f の特異点を持っている。一方、brane 配位に立ち戻ると、D6-brane の v 座標が一致していても x^6 座標が違えば特異ではない。つまりこの特異点は、(112) 式の計量から情報を落して (113) 式にしたために現れた、形式的なものと考えられる。そこで、blow up (簡単な説明は図 26) して特異点を解消する。特異点では複素平面が N_f 重に交差しているから、以下のような N_f 個の座標を用意する。

$$U_i \in (y_i, x_i) \quad \begin{cases} y = y_i^i x_i^{i-1} \\ x = y_i^{N_f-i} x_i^{N_f+1-i} \\ v = y_i x_i \end{cases}$$

但し、 $i = 1, \dots, N_f$ とする。定義より $y_1 = y, x_{N_f} = x$ であり、 $yx = v^{N_f}$ を満たすことも明らかである。領域 U_i と U_{i+1} は隣り合っているものとし、その張り合わせ方は、 v が一致することから $y_i x_i = y_{i+1} x_{i+1}$ 、

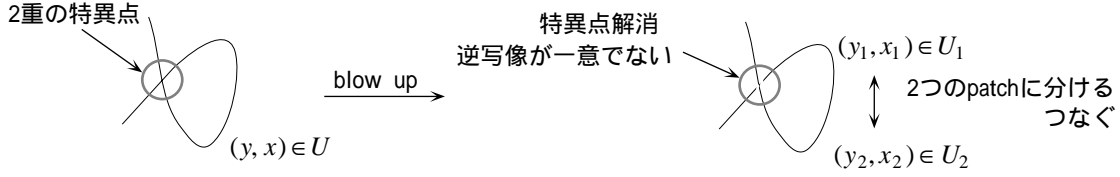


図 26: blow up

更に y が一致することを使うと $x_i y_{i+1} = 1$ である。特異点上での逆写像、つまり $x = y = v = 0$ が (y_i, x_i) ではどう表されるかを考える。 U_i 内で $x = y = 0$ であるためには、 $y_i = 0$ または $x_i = 0$ でなくてはならない。 $y_i = 0$ をとると、 $x_i \neq 0$ であるから U_{i+1} との『交点』 $x_i y_{i+1} = 1$ が残せる。この式で指定される多様体は CP^1 である。 $y_{i+1} \neq 0$ としてしまったから U_{i+1} では $x_{i+1} = 0$ でなくてはならない。同様のことは、 U_i 内で $x_i = 0$ をとった場合にも言える。以上により逆写像は $N_f - 1$ 個の CP^1

$$C_i = \{x_i y_{i+1} = 1, y_i = 0, x_{i+1} = 0\} \quad i = 1, \dots, N_f - 1$$

からなる。 C_i と C_{i+1} は、 $y_i, x_i \rightarrow 0$ の極限で接している。

4.2.3 M 理論からみた $N = 2$ の Higgs branch

前小節の議論を用いて、D6-brane の入った D-brane 配位を、M 理論に上げることができる。

D6-brane が入った場合にも、前小節で M5-brane の広がり方 $\Sigma \in Q$ を調べたのと同様に、Taub-NUT 空間 \tilde{Q} 中の M5-brane の広がり方 $\tilde{\Sigma}$ を調べてやれば良い。まず最初に、この配位での Coulomb branch を考える。特異点から充分離れていれば、 $\tilde{Q} \sim Q, y \sim t$ であり、Coulomb branch であれば D6 と M5 は交わらないからこの近似が有効であると思われる。よって、近似的に $F(t, v) = 0 \sim F(y, v) = 0$ としてよいと考えられる。実際、D4 ではなく D6 を入れて物質場を出す時、D4 場合とほぼ同じ手順でこの曲線

$$\tilde{\Sigma} = \{F(y, v) = y^2 - C_{N_c}(v)y + v^{N_f} = 0\}$$

が導かれる [15]。ここで (113) 式を考慮すると、 $F = 0$ は

$$y + x = C_{N_f}(v) \quad (114)$$

と書き表せる。

次に、non-Baryonic branch について考える。D-brane 配位図 20(b) からみて D6 は D4 を切るから、 $\tilde{\Sigma}$ は Taub-NUT 空間の特異点 $x = y = v = 0$ の点を通る。よって (114) 式から $C_{N_c}(v = 0) = 0$ 、つまり

$$C_{N_c}(v) = v^r (v^{N_c-r} + u_2 v^{N_c-r-2} + \dots + u_{N_c-r}) \quad r > 0 \quad (115)$$

と書けることが分かる。特異点から離れた部分では $v \neq 0$ であるから、 $yx = v^{N_f}$, $y + x = C_{N_c}(v)$ を v の冪乗で規格化しなおせて、

1. $2r \leq N_f$ のとき

$(\frac{y}{v^r}, \frac{x}{v^r}) \rightarrow (t, x)$ とすると

$$C : \begin{cases} yx = v^{N_f-2r} \\ y + x = C_{N_c-r}(v) \end{cases}$$

となり、ゲージ群 $SU(N_c - r)$ でフレーバー $N_f - 2r$ の Coulomb branch になる。

2. $2r > N_f$ のとき

$$\left(\frac{y}{v^{[N_f/2]}}, \frac{x}{v^{[N_f/2]}}\right) \rightarrow (t, x) \text{ とすると}$$

$$C : \begin{cases} yx = v^{N_f-2[N_f/2]} \\ y + x = C_{N_c-[N_f/2]}(v) \end{cases}$$

となり、ゲージ群 $SU(N_c - [N_f/2])$ でフレーバー $N_f - 2[N_f/2]$ の Coulomb branch になる。

となる。これらは non-Baryonic branch の root 上の SW 曲線を与えていると考えられる。

特異点の近く $|v| \ll 1$ では、先に考えた blow up を使って特異性を回避する。 $y + x = C_{N_c}(v) \sim v^r$ に $yx = v^{N_f}$ を満たすように作った (y_i, x_i) を代入すると、

$$y_i^i x_i^{i-1} + y_i^{N_f-i} x_i^{N_f+1-i} = y_i^r x_i^r$$

となる。 $2r \leq N_f$ の場合は、

$$\begin{cases} y_i^i x_i^{i-1} (1 + y_i^{N_f-2i} x_i^{N_f-2i+2} - y_i^{r-i} x_i^{r+1-i}) = 0 & i = 1, \dots, r \\ y_i^r x_i^r (y_i^{i-r} x_i^{i-r-1} + y_i^{N_f-r-i} x_i^{N_f+1-r-i} - 1) = 0 & i = r+1, \dots, N_f-r \\ y_i^{N_f-i} x_i^{N_f+1-i} (y_i^{2i-N_f} x_i^{2i-N_f-2} + 1 - y_i^{i-N_f+r} x_i^{i-N_f+r+1}) = 0 & i = N_f-r+1, \dots, N_f \end{cases}$$

とまとめられる。() 内が 0 である場合は、 $y_i \neq 0, x_i \neq 0$ であるから、特異点から離れている。よって、これの解からは先に考察した Coulomb branch 分の曲線 C が出る。() 内が 0 でない場合は、 $y_i = 0$ または $x_i = 0$ であるから、特異点上の解である。よって、 $y_i = 0$ に合わせて C_i が出てくる。 C_i の重複度 l_i は $i = 1, \dots, r$ で $l_i = i$ 、 $i = r+1, \dots, N_f-r$ で $l_i = r$ 、 $i = N_f-r+1, \dots, N_f$ で $l_i = N_f - i$ となっていることが分かるから、結局図 27(a) のようになる。なお、 C_r を出す $y_r = x_{r+1} = 0$ 、 C_{N_f-r} を出す $y_{N_f-r} = x_{N_f-r+1} = 0$ は $()=0$ の解にもなっているから、 C_r, C_{N_f-r} と C は交わる。

$2r > N_f$ の場合は、同様にして $r = [N_f/2]$ と同じ curve が出てくる。これは、non-Baryonic branch で $r = [N_f/2]$ の特別な場合に対応しているものと考えられる。

C_i 一つにつき、 $x^{7,8,9}$ 方向の自由度と CP^1 の伸び縮み分で複素次元 2 の自由度がある。また、図 (a) の brane 配位における CP^1 の並び方や総数 $\sum_{i=1}^{N_f-1} l_i = r(N_f - r)$ は、D-brane 配位図 20(b) 中の D6 で挟まれた D4-brane とちょうど対応している。従って C_i は $i, i+1$ 番目の D6 の間の D4 と理解でき、パラメータも場の理論から求めたものと一致している。このように、s 則を使って求めた brane 配位が、M 理論で考えると自然に導かれた。

最後に Baryonic branch について考える。Baryonic branch の root では、

$$\Phi \propto \text{diag}(0, \dots, 0, \omega, \dots, \omega^{2N_c-N_f}), \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{2N_c-N_f}}$$

であったから、 $C_{N_c}(v) = \prod_{I=1}^{N_c} (v - \phi_I) = v^{N_c} + v^{N_f-N_c}$ と決まる。従って曲線を与える式は $y + x = v^{N_c} + v^{N_f-N_c}$ 、 $yx = v^{N_f}$ より

$$\frac{1}{y}(y - v^{N_c})(y - v^{N_f-N_c}) = 0$$

となる。よって特異点を通らない曲線 C は、2 つの要素

$$\begin{aligned} C_L & : y = v^{N_c} \\ C_R & : y = v^{N_f-N_c} \end{aligned}$$

に分離される。 C_L, C_R の交点は、 $v^{N_c} = v^{N_f-N_c}$ の解だから $2N_c - N_f$ 個あり、 $v \neq 0$ であるから特異点から離れたところにある。 C が C_L, C_R のように定まっている以外は、 $r = r_* = N_f - N_c$ の non-Baryonic

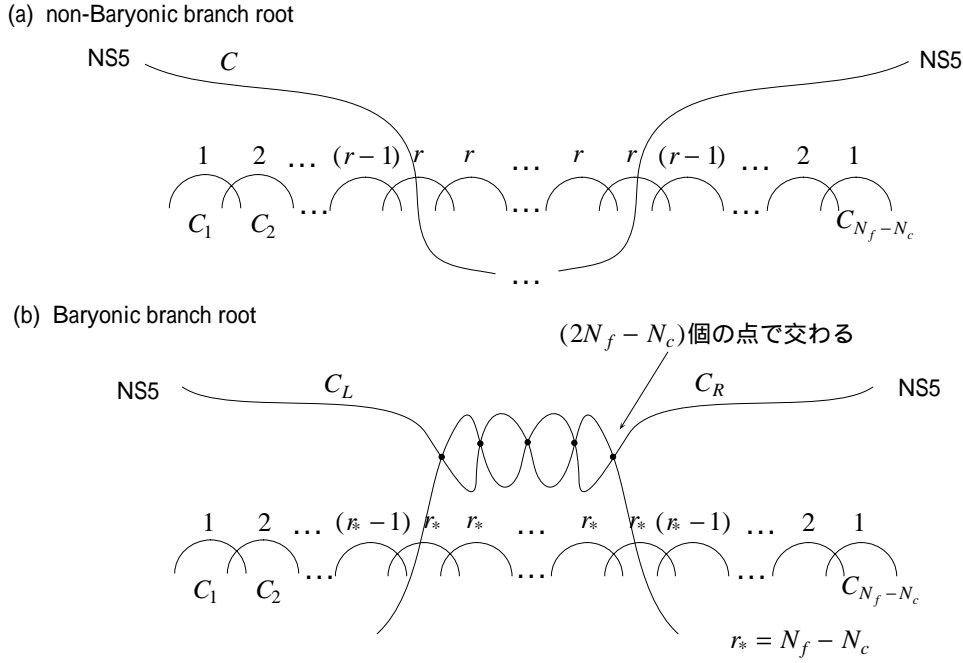


図 27: M 理論からみた $N = 2$ の Higgs branch

branch と同じなので、最終的には図 27(b) のような配位を得る。D-brane 配位は図 20(d) であったから、 C_i と D6 に挟まれた D4 を同定すると、よく対応している。

パラメータの数は、non-Baryonic branch の場合と全く同様して $2r_*(N_f - r_*) = N_f N_c - N_c^2$ と求まる。他に、Baryonic branch と $r = r_*$ の non-Baryonic branch の違いは curve C にある。non-Baryonic branch では一般の $C_{N_c - r_*}(v)$ で与えられるため genus $N_c - r_* - 1 = 2N_c - N_f - 1$ のトーラスとなっているので、パラメータは $2(2N_c - N_f - 1)$ である。一方 Baryonic branch では、2 つの curve が $2N_c - N_f$ 箇所で接した形になっており、これはちょうどトーラスの α サイクルを全てつぶしたものに对应している。このとき、サイクルの張る面が 0 になることによって、この面に張られる brane の励起から、質量 0 の粒子が出てくる。従って、場の理論と同じくここから質量 0 の電子が $2N_c - N_f$ 個出てくるので、パラメータの数は $2(2N_c - N_f)$ となり、non-Baryonic branch より複素次元で 2 だけ大きい。このパラメータを考慮すると、D-brane 配位から考えると場の理論と合わなかった自由度が合うようになる。

4.3 $N = 2$ SQCD の配位の $N = 1$ の配位への変形

4.3.1 随伴表現の物質場に質量を持たせる変形 ($\mu < \infty$)

$N = 1$ の D-brane 配位をそのまま M 理論に上げるのは困難である。そこで、前小節で求めた $N = 2$ の配位を変形して、 $N = 1$ の配位を作ること考える。

$N = 2$ と $N = 1$ の D-brane 配位を比較すると (図 17)、 $N = 2$ で左側にある NS5 を $v, w = x^8 + ix^9$ 平面内で回転させれば、回転角 $\hat{\theta} = \frac{\pi}{2}$ で NS5' になり、 $N = 1$ の配位に移ると考えられる。真に $N = 1$ SQCD の moduli に移るのは、場の理論で言うと随伴表現の物質場に質量 $\mu \neq 0$ を持たせて $N = 2$ を破った場合である。 $\hat{\theta}$ は $N = 2$ の破れの程度を調節するパラメータとなっているから、 μ に対応するパラメータは brane 配位で見ると $\hat{\theta}$ と予想される。実際、以下で対称性からこの予想が正しいことをみる。

$N = 2$ の brane 配位には、座標軸の回転対称性から $SO(2)_{45} \times SO(3)_{789} \sim U(1)_{45} \times SU(2)_{789}$ なる大域的対

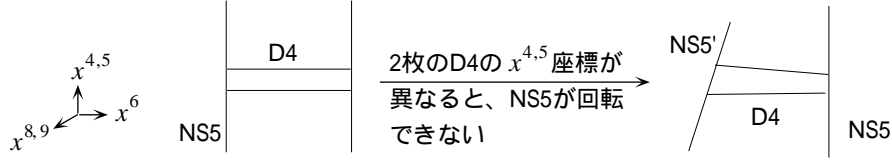


図 28: NS5_L の回転

称性がある。この対称性は、NS5を回して $N = 1$ の配位に移った時には $SO(2)_{45} \times SO(2)_{89} \sim U(1)_{45} \times U(1)_{89}$ に破れる。各パラメータは適当な素電荷をとると、以下のような $U(1)$ 電荷を持つ。

	v	w	$y \sim t$	x	$\Lambda^{2N_c - N_f}$	$\tilde{\theta}$	
$U(1)_{45}$	2	0	$2N_c$	$2N_c$	$2(2N_c - N_f)$	-2	$\Leftrightarrow U(1)_R$
$U(1)_{89}$	0	2	0	0	0	2	$\Leftrightarrow U(1)_J$

ここで、 x, y の電荷は $x + y = C_{N_c}(v)$ から、 $\tilde{\theta}$ は $w = v \sin \tilde{\theta} \sim v \tilde{\theta}$ から決まる。また、 Λ は $N = 2$ SQCD のスケールで、場の理論との対応から $xy = v^{N_f} \Lambda^{2N_c - N_f}$ で入れた。よって、これらの $U(1)$ 対称性は表のように $U(1)_{R,J}$ と同定される。ここから $\tilde{\theta}$ が μ と同じ対称性を持つことが分かった。今後は両者を同じものとし、 $\tilde{\theta}$ を μ と書くことにする。

では、 μ が充分小さい時、回転された曲線 $C \rightarrow \tilde{C}$ はどのように表されるだろうか。特異点から充分遠い $v \rightarrow \infty$ では、曲線 C は

$$t^2 - C_{N_c}(v) + v^{N_f} \sim t^2 - v^{N_c} t + v^{N_f} = 0$$

より $t \sim v^{N_c}, v^{N_f - N_c}$ である。 t が小さい方が x^6 が大きく、右側にあるから、左側の NS5-brane(NS5_L) を回転させるとすると

$$\begin{aligned} \text{NS5}_L & w \rightarrow \mu v, t \sim v^{N_c} \\ \text{NS5}_R & w \rightarrow 0, t \sim v^{N_f - N_c} \end{aligned} \quad (116)$$

と表される。 $v < \infty$ での \tilde{C} を求めるために、まずこの曲線が w で大域的に座標付け可能であることを示す。 \tilde{C} を (v, t) 平面に射影したものを C' とおく。 C' は一般に v, t, μ の関数であるが、 $U(1)_{89}$ 対称性を持たなくてはならないので、パラメータのうち唯一 $U(1)_{89}$ 電荷を持つ μ によることはできない。従って、 C' は $\mu = 0$ での曲線 C に一致する。よって、

$$\tilde{C} = \{w = w(v, t) | (v, t) \in C\}$$

と書ける。ここで、 C をコンパクト化して \bar{C} とおく。 C は両端とも $v \rightarrow \infty (\frac{1}{v} \rightarrow 0)$ であるからうまくつないで Riemann 面にできる。 $t \rightarrow v^{N_c}$ での振舞い (116) 式より、 $\tilde{C} = \{w = w(\bar{C})\}$ は無限遠で一次の極を持つ。また、 $w \rightarrow \infty$ にのびる brane はこれだけで、曲線は交差しないから、他に特異点はないと考えられる。よって w は、一点のみで一次の極を持つ meromorphic な関数である。このような関数が存在するのは、 $\bar{C} \sim CP^1$ の上のみであることが知られているから、 C は cylinder であり、 \tilde{C} は w で座標付けされた cylinder であることが分かる。 \tilde{C} の両端は、 $w = 0, \infty$ に対応している。

C が cylinder であるというのは、ちょうど β サイクルが全て潰れることに相当する。D-brane 配位で考えた場合、 $N = 1$ の超対称性を残して回転させることができるのは、全ての D4 がくっついている場合であり、直観的にもこの結論は正しい (図 28)。また、以上を踏まえて、 \tilde{C} を表す式を求める。まず、 w で大域的に座標付けされているから、

$$v = P(w) = w^a p(w), \quad t = Q(w) = w^b q(w)$$

と書ける。但し、 $p(w=0), q(w=0) \neq 0$ となるように w の冪を括り出した。次に、(116) 式より NS5_L 側の振舞いは $v \sim \frac{w}{\mu}, t \sim v^{N_c} \sim \left(\frac{w}{\mu}\right)^{N_c}$ であるから

$$v = \frac{w^a}{\mu}(w^{1-a} + \dots), \quad t = \frac{w^b}{\mu^{N_c}}(w^{N_c-b} + \dots)$$

となる。NS5_R 側では、 $w, \frac{1}{v}$ 共により座標になっているから線形変換で移り変わるはずで、更に同じ点で 0 であるから $w \propto \frac{1}{v}$ と書ける。よって v は、

$$\begin{aligned} v &= \frac{w^a}{\mu} \{w^{1-a} + \dots + w^{-a-1} \times (\text{定数})\} \\ &= \frac{(w - w_+)(w - w_-)}{\mu w} \end{aligned} \quad (117)$$

となる。また $t \sim v^{N_f - N_c} \sim w^{N_c - N_f}$ より

$$t = \frac{w^{N_c - N_f}}{\mu^{N_c}}(w^{N_f} + \dots)$$

であり、 $xt = v^{N_f}$ より $t = 0$ で必ず $v = 0$ であるから (117) 式より

$$t = \frac{w^{N_c - N_f}}{\mu^{N_c}}(w - w_+)^r(w - w_-)^{N_f - r} \quad (118)$$

となる。 $r \geq [N_f/2]$ として一般性を失わない。 $r > 0$ のとき、 $v \rightarrow 0$ なら $t \rightarrow 0$ であり、 $w \sim w_{\pm}$ となるから、D4 と D6 がぶつかる特異点に近づく。また、この領域では $t \sim v^r, v^{N_f - r}$ であり、これは non-Baryonic branch root の SW 曲線の $v \rightarrow 0$ での振る舞い $t^2 - v^r t + v^{N_f} = 0$ に一致する。従って、この曲線は $N = 2$ の non-Baryonic の「原点」である root から来たものと考えられる。一方 $r = 0$ では $v \rightarrow 0$ でも $t \neq 0$ であり、D4 と D6 がぶつかる特異点を通らない。よって、これは $N = 2$ の Coulomb branch から得られたものと思われる。

ここで、 w_{\pm} を curve から評価する。 \tilde{C} は、 (v, t) 平面に射影するともとの曲線

$$C = \left\{ t + \frac{v^{N_f}}{t} = v^r C_{N_c - r}(v) \right\} \quad (119)$$

になるから、(117)(118) 式で求めた v, t はこの式を満たすはずである。よって、これらを代入して両辺に $(\mu w)^{N_c}(w - w_+)^r(w - w_-)^r$ を掛けると

$$\begin{aligned} w^{2N_c - N_f}(w - w_-)^{N_f - 2r} + \mu^{2N_c - N_f}(w - w_+)^{N_f - 2r} \\ = (w - w_+)^{N_c - r}(w - w_-)^{N_c - r} + u_2(\mu w)^2(w - w_+)^{N_c - 2 - r}(w - w_-)^{N_c - 2 - r} + \dots + u_{N_c - r}(\mu w)^{N_c - r} \end{aligned}$$

となる。この式の $w^{2N_c - 2r - 1}$ の係数より、

$$\begin{aligned} -(N_f - 2r)w_- &= -w_+(N_c - r) - w_-(N_c - r) \\ \rightarrow \left(1 - \frac{N_f - r}{N_c}\right)w_- + \left(1 - \frac{1}{N_c}\right)w_+ &= 0 \end{aligned}$$

また w^0 の係数より

$$\begin{aligned} \mu^{2N_c - N_f} w_+^{N_f - 2r} (-1)^{N_f - 2r} &= w_+^{N_c - r} (-1)^{2(n_c - r)} w_-^{N_c - r} \\ \rightarrow (-1)^{N_f} \mu^{2N_c - N_f} &= w_+^{N_c - N_f + r} w_-^{N_c - r} \end{aligned}$$

となる。Λ を戻すと、 $U(1)$ 対称性から最後の式の右辺に $\Lambda^{2N_c - N_f}$ が掛かることが分かる。これらの式は、場の理論で求めた μ 有限での $B = \tilde{B} = 0$ のときの w を規定する式 (79)(80) に酷似している。実際、

$$w_+ = (-1)^{\frac{N_c}{2N_c - N_f}} m_{(1)}, \quad w_- = (-1)^{\frac{N_c}{2N_c - N_f}} m_{(2)}$$

とすれば一致する。よって、 $x^{8,9}$ 方向の座標がメソン M の固有値ということになる。

今考えている曲線は M5-brane を表すものだから、直観的には物質場との関係が見にくい。そこで、D6-brane を全て直交する NS5-brane の反対側に持って行く。D6 が充分遠ければ、物質場は Hanany-Witten 効果によって現れた、NS5 に片側を止められた半無限の D4-brane(D4') から出ると考えられる。これを M 理論でみると、ゲージ場を出す D4 を含めて、一枚の M5-brane からできている格好になる。このとき D4' は curve の中で、 $x^{4,5}$ 方向や $x^{8,9}$ 方向の位置を持っている。D-brane 配位でみると $x^{8,9}$ 方向には動けないように見えるが、M 理論に上げると NS5 と同じ値をとらなくてもよい。実際 w_{\pm} は、ちょうどこの $x^{8,9}$ 座標を与えており、 w_+ に r 枚 w_- に $N_f - r$ 枚の brane がある。従って、フレーバー対称性は $U(N_f) \rightarrow U(r) \times U(N_f - r)$ に落ちる。このようにフレーバー対称性を破るパラメータとして、 $x^{4,5}$ 方向の位置もあるが、これは質量に対応しているので、メソンの真空期待値を与えるものとしては w 座標をとるのが適当と思われる。

ところで、場の理論側の解析では、極限のとり方によって上記の条件式が変わると考えられた。brane 側ではこの条件式が厳密に成り立ち、場の理論側での極限のとり方が適当だったことになる。

$r = N_f - N_c$ のとき、 $w_+ = 0$ である。これを求めた曲線に代入すると、

$$C : \begin{cases} v = \frac{w - w_-}{\mu} \\ t = \frac{(w - w_-)^{N_c}}{\mu^{N_c}} \end{cases}$$

を得る。従って、NS5_R の振舞いをするべき曲線が消えてしまっている。よって $r \neq N_f - N_c$ とする。

一方、Baryonic branch では、最初から NS5_R, NS5_L を表す曲線が分離されている。回転によって変更を受けるのは NS5_L のみで、

$$C_L : \begin{cases} t = v^{N_c} \\ w = 0 \rightarrow \mu v \end{cases} \quad C_R : \begin{cases} t = v^{N_f - N_c} \\ w = 0 \end{cases} \quad (120)$$

となる。

以上により、 $\mu < \infty$ での $N = 1$ 理論を表す M 理論の配位は、non-Baryonic branch の root から来るものが (117) (118) (119) 式で、Baryonic branch の root から来るものが (120) 式で表されることが分かった。また、メソン M の期待値が、場の理論の解析と一致していることも確認できた。一方、ここまでの議論では root のみ考えていて、 C_i は $N = 2$ の場合と変わらないように見える。しかし、次小節で見るように、正しく $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとると、図 20(e) に対応するような C_i が生成されることが分かる。

4.3.2 随伴表現の物質場に質量を持たせる変形 ($\mu \rightarrow \infty$)

$\mu \rightarrow \infty$ の極限のとり方を考える。Baryonic branch で、NS5_L を回転させる。 $w \rightarrow \infty$ に対して、 $\mu \rightarrow \infty$ だから $v \rightarrow \mu^{-1}w = 0, t \rightarrow \mu^{-N_c}w^{N_c} = 0$ となるように見える。けれど、NS5_L には N_f 本の D4 がついていて、 $\mu \rightarrow \infty$ でも $t \rightarrow w^{N_c}$ は変わらないはずである。そこで、 $\tilde{t} = \mu^{N_c}t$ と再規格化した座標を使って曲線を見ることにする。 $t = e^{-(x^6 + ix^{10})/R}$ であるから、 t の再規格化は座標をずらすことにあたり、特に問題を生じないと考えられる。更に、D6-brane は物質場に質量がある場合、曲線と交わらないから回転しても変化しないと思われる。これを再規格化した座標でみると、

$$yx = \Lambda^{2N_c - N_f} \prod_{i=1}^{N_f} (v + m_i) \rightarrow \tilde{y}x = \mu^{N_c} \Lambda^{2N_c - N_f} \prod_i (v + m_i)$$

であるから、曲線が変化しないためには

$$\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} = \mu^{N_c} \Lambda^{2N_c - N_f}$$

を固定して $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとる必要がある。これはちょうど場の理論の $\bar{D}R$ 法によるスケール合わせの式と考えられ、上式のようにとった $\tilde{\Lambda}$ は、 $N = 1$ 理論のスケールと同定される。なお、 Λ ではなく v, x を再規格化する方法をとらなかったのは、 v は不可能だし x は、 $NS5_R$ 側で $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとった時に再規格化しなければ $x \sim v^{N_c}$ という正しい形を導いていることによる。ここで、再規格化後のパラメータの $U(1)$ 電荷を確認しておく、

	$y \sim t$	μ	$\tilde{y} \sim \tilde{t}$	$\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}$
$U(1)_{45}$	$2N_c$	-2	0	$2N_c - 2N_f$
$U(1)_{89}$	0	2	$2N_c$	$2N_c$

である。

以上をふまえて、non-Baryonic branch について $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとる。前節より、回転後の曲線 (118) (117) (119) 式を \tilde{t} で表すと、

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= w^{N_c - N_f} (w - w_+)^r (w - w_-)^{N_f - r} \\ v &= w^{-1} \mu^{-1} (w - w_+) (w - w_-) \\ \mu^{-N_c} \tilde{t}^2 - v^r C_{N_c - r} \tilde{t} + \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} v^{N_f} & \end{aligned}$$

である。よって、 $\mu \rightarrow \infty$ で

$$\tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} v^{N_f - N_c} \quad w_{\pm} \sim c_{\pm} \mu \Lambda$$

であるから、 $N_f < N_c$ のとき $w_{\pm} \rightarrow \infty$ 、 $N_f > N_c$ のとき $w_{\pm} \rightarrow 0$ 、 $N_f = N_c$ のとき $w_{\pm} \rightarrow$ 有限となる。それぞれの場合について、以下で詳しくみる。

1. $N_f < N_c$

w が 0 から少しずれると、 $\tilde{t} \rightarrow \infty$ であるから、 x^6 方向に無限に伸びた配位になっている。従って 4 次元とみなせない。

2. $N_f > N_c$

$$\tilde{t} v^{N_c} = \Lambda^{3N_c - N_f} v^{N_f}, \quad \tilde{t} = w^{N_c}, \quad vw = 0$$

最後の式より、 $v = 0$ または $w = 0$ である。 $w = 0$ を選ぶと、2 番目の式により $\tilde{t} = 0$ となるから、一番目の式より $v = 0$ となる。よって $v = 0$ の場合を考える。単純には、 $v = 0$ 、 $\tilde{t} = w^{N_c}$ だけが残りそうである。しかし、2 番目の式で $\mu \rightarrow \infty$ と同時に $w \rightarrow 0$ をとると、 $w = 0$ でも $\tilde{t} \neq 0$ の曲線が出てくる可能性がある。実際ここから、 $NS5_R$ が残ることをみる。 $NS5_R$ を表すのは

$$C_R : \begin{cases} \tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} v^{N_f - N_c} \\ w = 0 \end{cases}$$

である。 C_R をまず $\mu < \infty$ で回すと、 M_i^j は入るが物質場の質量 m は変わらないはずだから、もともとの $N = 2$ の配位であった $U(1)$ 対称性のうち、 $U(1)_{89}$ は破れてもよいが $U(1)_{45}$ は破れない。 μ を除いた各パラメータを組み合わせて $U(1)_{45}$ 電荷が 0 の変数を作ると、 \tilde{t} 、 $\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} v^{N_f - N_c}$ の 2 つだけであるから、上記の C_R は変化しないと思われる。また、何らかの変化が起こって $\tilde{t} \rightarrow v^{N_f - N_c} + \dots$ となったとすると、 $v \neq 0$ で $\tilde{t} = 0$ となる。Taub-NUT 空間は $\tilde{t}x = \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} v^{N_f}$ であり、 $\tilde{t} = 0$ なら $v = 0$ で

なくてはならないから、このような変化は起こせないことが分かる。以上により、 C_R は $\mu \rightarrow \infty$ では変更を受けられない。

以上をまとめると、

$$C_L : \begin{cases} \tilde{t} = w^{N_c} \\ v = 0 \end{cases} \quad C_R : \begin{cases} \tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} v^{N_f - N_c} \\ w = 0 \end{cases}$$

となる。 $\mu \rightarrow \infty$ では r によらなくなっている。

3. $N_f = N_c$

極限での方程式は

$$\tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{2N_c}, \quad \tilde{t} = (w - c_+ \tilde{\Lambda}^2)^r (w - c_- \tilde{\Lambda}^2)^{N_c - r}, \quad vw = 0$$

である。ここから前項と同様にして

$$C_L : \begin{cases} \tilde{t} = (w - c_+ \tilde{\Lambda}^2)^r (w - c_- \tilde{\Lambda}^2)^{N_c - r} \\ v = 0 \end{cases} \quad C_R : \begin{cases} \tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{2N_c} \\ w = 0 \end{cases}$$

となる。この前項と異なり、これは r に依存している。

このように、 $\mu \rightarrow \infty$ での non-Baryonic branch の root の曲線 C が求められた。また、D-brane 配位では $N_f < N_c$ でも $N = 1$ SQCD の moduli 空間が存在するように見えた。ところが M 理論で $N = 2$ SQCD からの変形で考えると、4次元の理論にならず、正しく場の理論と対応が付いていることが分かった。

次に、Baryonic branch についてはを考える。最初から $NS5_R$ と $NS5_L$ を導く曲線が分離しているから、(120) 式の C_L を $\mu \rightarrow \infty$ での曲線に置き換えればよい。よって、

$$\tilde{C}_L \begin{cases} \tilde{t} = w^{N_c} \\ v = 0 \end{cases} \quad C_R \begin{cases} \tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} v^{N_f - N_c} \\ w = 0 \end{cases}$$

である。この曲線は、non-Baryonic branch で $N_f > N_c$ の場合に一致しており、ちょうど場の理論の解析から、 $N_f > N_c$ では Baryonic branch と non-Baryonic branch の root がくつつくことと対応している。

以上により、Higgs branch の root から $N = 1$ の $NS5$, $NS5'$ が出ることを確認できた。以下では曲線の特異点での振舞いを調べ、D6 で挟まれた D4 に対応する C_i がどのような変更を受けるか見ていく。

$\mu \rightarrow \infty$ の極限で起こることを簡単に予想する。再規格化したために、曲線の $\mu \rightarrow \infty$ での形は

$$x + \mu^{-N_c} \tilde{y} = v^{N_c} + \dots \rightarrow x = v^{N_c}$$

となる。これを Taub-NUT 空間の特異点を解消した座標

$$U_i \in (y_i, x_i) \quad \begin{cases} \tilde{y} = y_i^i x_i^{i-1} \\ x = y_i^{N_f - i} x_i^{M_f + i - i} \\ v = y_i x_i \end{cases}$$

で書くと、 $y_i^{N_f - i} x_i^{N_f + 1 - i} = y_i^{N_c} x_i^{N_c}$ となる。前小節と同じように i で場合分けして

$$\begin{cases} y_i^{N_c} x_i^{N_c} (1 - y_i^{N_f - N_c - i} x_i^{N_f - N_c + 1 - i}) = 0 & i \leq N_f - N_c \\ y_i^{N_f - i} x_i^{N_f + 1 - i} (1 - y_i^{N_c - N_f + i} x_i^{N_c - N_f - 1 + i}) = 0 & N_f - N_c < i \end{cases}$$

となる。 $()=0$ から前段落までで議論した C_L, C_R が出て、 $y_i = x_{i+1} = 0$ から $i, i+1$ 番目の D6 で切られた D4 に当たる CP^1 が出る。 CP^1 の重複度は、 $C_1, \dots, C_{N_f - N_c}$ が N_c で $C_{N_f - N_c + 1}, \dots, C_{N_f - 1}$ が $N_f - i$ である。従って M-brane 配位は図 29 のようになる。これは $N = 1$ の D-brane 配位に対応した形になって

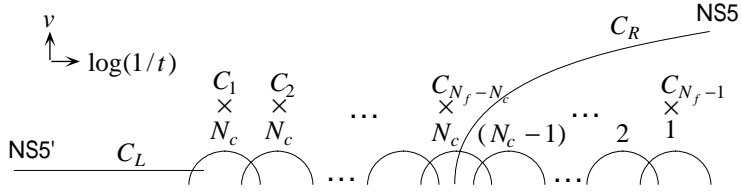


図 29: $\mu \rightarrow \infty$ で予想される M-brane 配位

いる。

では、この配位は $\mu < \infty$ の中からどのように現れるのだろうか。まず、Baryonic branch root を見てみる。もともと Baryonic branch の曲線は C_L と C_R に分離していて、 $\mu \neq 0$ を入れて回転した時に変化するの C_L 側のみであった。従って、 C_L の変化の仕方を詳細に調べれば、新たな C_i が出てくるはずである。そこで $\mu < \infty$ で、 (y_i, x_i) で C_L を書き直すと、

$$C_L : \begin{cases} \tilde{t} = w^{N_c} = y_i^i x_i^{i-1} \\ v = \mu^{-1} w = y_i x_i \end{cases}$$

となり、従って $y_i = \mu^{i-1} w^{N_c-i+1}$, $x_i = \mu^{-i} w^{i-N_c}$ である。ここで $\mu \rightarrow \infty$ の極限をとると、

- $i > N_c$
 $y_i w^{i-N_c-1} = \mu^{i-1}$ であるから左辺は発散し、 y_i, w とも有限では満たされない。従って、このような $(y_i, x_i) \in U_i$ は出てこない。
- $i \leq N_c$
この場合は、 $w \rightarrow 0$ であれば $\mu \rightarrow \infty$ でも y_i, x_i が有限で残れる。 x_i が有限であるとして、 $x_i \sim 1$ とおく。つまり $\mu^i w^{N_c-i} \sim 1$ であるから、

$$y_i^{N_c-i} \sim (\mu^{-1} w)^{N_c-i} \sim \mu^{-N_c}$$

であり、有限の x_i に対して $N_c - i$ 個の $y_i = 0$ が出てくる。よって、 C_i の重複度は $N_c - i$ である。同様の操作を y_i と x_i を入れ換えて行くと、 C_{i-1} の重複度が $N_c - i + 1$ であることが導かれる。

後はもともとの $x_1 = 0$, $y_1 = w^{N_c}$ が出て、 $NS5_L$ に対応する曲線となる。以上をまとめると、図 30 のようになる。これらはちょうど、s 則を使って導かれる $N = 1$ SQCD の D-brane 配位から期待される形になっている。

次に、non-Baryonic branch root を考える。

- $N_f = N_c$
 $\mu < \infty$ の曲線 (117) (118) (119) 式を (y_i, x_i) で書き直すと、

$$y_i = \mu^{i-1} w^{i-1} (w - w_+)^{r-i+1} (w - w_-)^{N_f-r} \quad (121)$$

$$x_i = \mu^{-i} w^{-i} (w - w_+)^{i-r} (w - w_-)^{i-(N_f-r)} \quad (122)$$

となる。 $\mu \rightarrow \infty$ の極限でも w_{\pm} は有限で残るから、 y_i, x_i が発散しないような $\mu \rightarrow \infty$ の極限のとり方は、以下ようになる。

1. $w \rightarrow 0$

$\mu w < \infty$ で、 $\forall i$ に対して可能で、 C_R を出す。

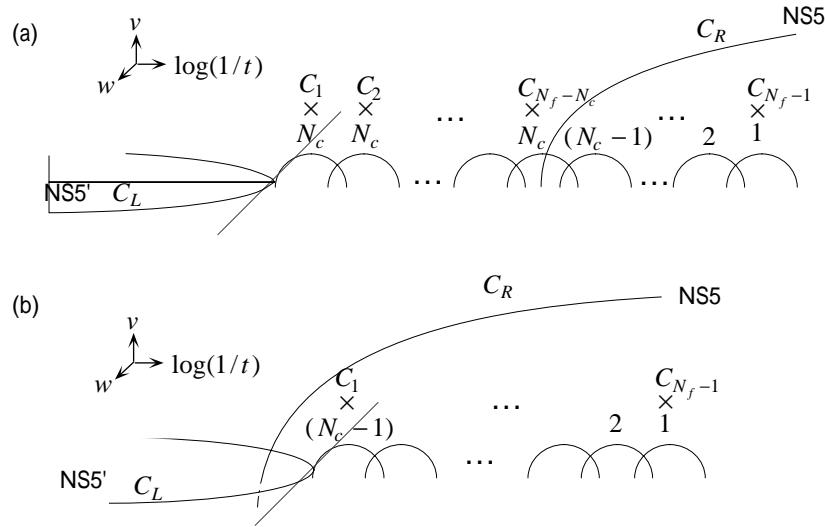


図 30: Brayonic branch から導かれる $N = 1$ 配位

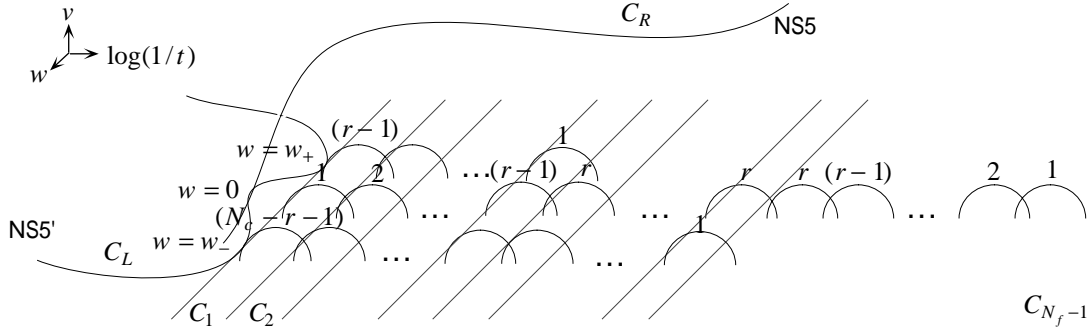


図 31: non-Baryonic branch からくる $N = 1$ M-brane 配位

2. $w \rightarrow w_+$

$\mu^{i-\epsilon}(w-w_+)^{r-i+\epsilon} < \infty$ と書ける。但し (121) 式に対して $\epsilon = 1$ で、 $y_i^{r-i} \sim \mu^{-r}$ 、(122) 式に対して $\epsilon = 0$ で、 $x_i^{r-i+1} \sim \mu^{-r}$ である。有限な (y_i, x_i) は $i \leq r$ で可能であり、ここから C_1, \dots, C_{r-1} が重複度 $(r-1), \dots, 1$ で出てくる。

3. $w \rightarrow w_-$

$\mu^{i-\epsilon}(w-w_-)^{N_f-r-i+\epsilon} < \infty$ と書ける。但し ϵ の取り方は前項と同じである。 $i \leq N_f - r$ について可能で、ここから C_1, \dots, C_{N_f-r-1} が重複度 $(N_f - r - 1), \dots, 1$ で出てくる。

また、 (y_1, x_1) より C_L が出る。まとめると、図 31 のようになる。

• $N_f > N_c$

$\mu \rightarrow \infty$ の下で、 $w_{\pm} \sim \mu^{-\beta} \rightarrow 0$ となる。但し、 $\beta = \frac{N_f - N_c}{2N_c - N_f}$ である。従って、(121)(122) 式で y_i, x_i が発散しないような極限は、以下のようなものである。

1. $w \sim \mu^{-\alpha} (\alpha < \beta)$

C_1, \dots, C_{N_c-1} が、重複度 $(N_c - 1), \dots, 1$ が出る。

2. $w \sim \mu^{-\alpha} (\alpha > \beta)$

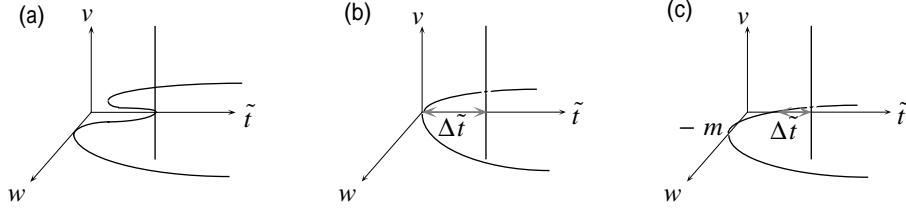


図 32: $N_c = 2, N_f = 2$ の Higgs branch から得られる $N = 1$ の M-brane 配位

C_R が出る。

3. $w \sim w_+ \mu^{-\delta} (\delta > \beta)$

$r < N_f - N_c$ のとき、 $C_{r+1}, \dots, C_{N_f - N_c - 1}$ が重複度 $1, \dots, (N_f - N_c - r - 1)$ が出る。 $r > N_f - N_c$ のとき、 $C_{N_f - N_c + 1}, \dots, C_{r-1}$ が重複度 $(r - N_f + N_c + 1), \dots, 1$ が出る。

4. $w \sim w_- \mu^{-\delta} (\delta > \beta)$

$C_{N_f - N_c + 1}, \dots, C_{N_f - r - 1}$ が重複度 $(N_f - r - i)$ が出る。

まとめると、図 30(a) のようになる。

以上により、non-Baryonic branch の場合も s 則から導いた D-brane 配位を再現しており、s 則の傍証になっている。

また、一般に k 次の Casimir による $N = 2 \rightarrow N = 1$ の変形は、brane 側でも行なわれていて、場の理論の結果を再現したり、仮定の入った解析の真偽について議論されている [60]。

最後に、バリオンの真空期待値が M-brane 配位中のどこに当たるかを解析する。まず、 $N_f = N_c$ の場合を考える。non-Baryonic branch で $\mu \rightarrow \infty$ として得られる曲線は、 $r = \frac{N_f}{2}$ で

$$C_L \begin{cases} \tilde{t} = (w^2 + \tilde{\Lambda}^4)^{\frac{N_c}{2}} \\ v = 0 \end{cases} \quad C_R \begin{cases} \tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{2N_c} \\ w = 0 \end{cases}$$

である。特に $N_c = 2$ の場合については図 32(a) のようになる。一方、バリオンの真空期待値が 0 でない場合、つまり Baryonic branch から $\mu \rightarrow \infty$ で得られる配位は、

$$C_L \begin{cases} \tilde{t} = w^{N_c} \\ v = 0 \end{cases} \quad C_R \begin{cases} \tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{2N_c} \\ w = 0 \end{cases}$$

なる曲線である。特に $N_c = 2$ のとき、図 32(b) のようになる。

brane の v 座標は物質場の質量に対応するパラメータであり、 w 座標はメソン M の真空期待値に対応すると考えられた。よって残った \tilde{t} 分の座標に注目して図 (a) と図 (b) を比較すると、違いは C_L と C_R が接しているか否かである。non-Baryonic branch では $B\tilde{B} = 0$ であり、 C_L と C_R は接しているからその距離は 0 となっている。そこで、バリオンの真空期待値は C_L と C_R の \tilde{t} 方向の距離 $\Delta\tilde{t}$ ではないかと思われる。

これを確認するために、まず $U(1)$ 電荷を見る。 $w, \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}, \tilde{t}$ の $U(1)$ 電荷は以下の通りである。

	$U(1)_{45}$	$U(1)_{89}$
w	0	2
$\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}$	$2(N_c - N_f)$	$2N_c$
\tilde{t}	0	$2N_c$

一方、場の理論から考えると、 $M \sim w, \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}$ の持つべき $U(1)$ 電荷は

	$U(1)_{45}$	$U(1)_{89}$
M	$2\frac{N_f - N_c}{N_f}$	2
$\tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}$	0	$2N_f$

であるから、

$$U(1)_R = \frac{N_c}{N_f}U(1)_{45} + \frac{N_f - N_c}{N_f}U(1)_{89}$$

$$U(1)_A = -U(1)_{45} + U(1)_{89}$$

である。従って、 \tilde{t} は $(U(1)_R, U(1)_A) = (2N_c \frac{N_f - N_c}{N_f}, 2N_c)$ の電荷を持ち、 $\tilde{B}B$ の持つ電荷に等しいことが分かる。

また、 $M \neq 0$ の真空期待値を与えることを考える。このとき brane 側で見ると w がずれ、 $w + m$ となる (図 32(c))。よって $C_L \rightarrow \tilde{C}_L = \tilde{t} = (w + m)^{N_c}$ より C_R との距離は、

$$m^{N_c} - \Delta\tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{2N_c}$$

である。これは、場の理論による解析の結果 (85) 式に等しい。ここからバリオンの真空期待値は $\tilde{B}B \sim \Delta\tilde{t}$ で brane 配位と対応付いていると思われる。

また、 $N_f = N_c + 1$ の場合も $\mu \rightarrow \infty$ での曲線で、メソン M に真空期待値を持たせて $w \rightarrow w + m$ とすると

$$C_L \begin{cases} \tilde{t} = (w + m)^{N_c} \\ v = \mu^{-1}(w + m) \end{cases} \quad C_R \begin{cases} \tilde{t} = \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} v \\ w = 0 \end{cases}$$

となる。よって、 C_L, C_R の \tilde{t} 方向の距離は、

$$\Delta\tilde{t} = m^{N_c} - \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f} \frac{m}{\mu}$$

である。また $N_f > N_c + 1$ の場合にも、同様にして

$$\Delta\tilde{t} = m^{N_c} - \mu^{N_c - N_f} m^{N_f - N_c} \tilde{\Lambda}^{3N_c - N_f}$$

が求められる。これらは、場の理論の解析結果 (86) 式と同じ形をしている。しかし、 $\tilde{B}B$ は行列だが、このままではその一部しか見えない。

5 まとめと今後の課題

この修士論文では、1994年から1997年にかけての4次元 $N = 1, 2$ SQCD 及び超弦理論についての研究の進展についてレビューを行った。特に、brane 配位を使うことで type IIA 超弦理論の低エネルギー有効理論として、4次元 $N = 1, 2$ SQCD が得られることをみた。type IIA から M 理論の記述に移ることで、場の理論の解析で得られていた SQCD の量子効果をみることができた。

第2節では、まず4次元 $N = 1$ の SQCD について、 $N_f < N_c$ では対称性と正則性に基づく考察から、スーパーポテンシャルが ADS 型に定まることを見た。ADS 型ポテンシャルは極小をもたないので、 $N_f < N_c$ では量子効果のために超対称で安定な真空がなくなることが分かった。 $N_f = N_c, N_c + 1$ では、閉じ込めの仮定の下で無矛盾な真空が得られた。この仮定は、'tHooft の量子異常釣り合い条件が非自明に成り立っていることから正しいと結論される。 $\frac{3}{2}N_c \leq N_f \leq 3N_c$ では非自明な赤外固定点があることが、SCFT の表現論をもとに仮定された。この領域では、ゲージ群 $SU(N_c)$ の SQCD と、ゲージ群 $SU(N_f - N_c)$ で物質場の異なる理論が同じ赤外固定点を持つとされ、2つの理論の関係を Seiberg duality とよんだ。この関係は、Seiberg duality で結ばれる2つの理論の moduli 空間が原点で一致し、'tHooft の量子異常釣り合い条件が成り立つこと、更に物質場の質量による理論の変形や、スクォークに真空期待値を持たせて moduli 空間の原点からずらした場合にも Seiberg duality が成り立つことによって正当化された。Seiberg duality では、強結合領域と弱結合領域が入れ替る。これによって、 $N_f > 3N_c$ での理論が電氣的な記述で見え自由になると同様、 $N_f < \frac{3}{2}N_c$ では磁氣的な記述で見え自由になっていることが分かった。

更に $N = 2$ SQCD の真空が、Higgs branch と Coulomb branch からなることを見た。Higgs branch は、対称性の議論により量子補正を受けないことが分かる。また、Coulomb branch への量子補正が Seiberg-Witten 曲線で完全に記述されることを、ゲージ群 $SU(2)$ の SYM の場合に示した。ここで理論を解く鍵になったのは、一般の真空ではゲージ群が $U(1)$ に破れ、このとき Lagrangian がブレポテンシャルと呼ばれる $N = 2$ の超空間のカイラル超場を変数とする正則関数で書かれていたことと電磁双対性だった。最後に、 $N = 2$ SQCD のゲージ多重項に含まれるスカラー場に質量 μ を持たせ、超対称性を $N = 1$ に破ることを考えた。更に、 $\mu \rightarrow \infty$ の極限の取り方によって $N = 1$ SQCD の Seiberg duality の電氣的な理論と磁氣的な理論をそれぞれ導くことができることを示した。

第3節では、超弦理論における双対性の概要を述べた。まず、 S^1 コンパクト化した閉弦の理論の持つ T-duality について説明した。この T-duality を開弦に作用させると自由端が固定端に変わり、開弦の端点の動ける領域として D-brane が現れることを見た。また、超弦理論における type IIB 理論には (R,R) セクターの励起状態である $A^{(0)}, A^{(2)}$ と (NS,NS) セクターの励起状態である $\phi, B^{(2)}$ を入れ替える双対性がある。ここで、 $B^{(2)}$ の電荷が弦によって運ばれるのに対して、 $A^{(2)}$ の電荷は D1-brane によって運ばれる。よって閉弦の理論である type II の理論にも、D-brane とそれに伴う開弦の励起状態が含まれることを説明した。

D-brane 上には開弦の励起状態としてゲージ場が含まれるので、 Dp -brane 上の低エネルギー有効理論として $(p+1)$ 次元の超対称性ゲージ理論が現れる。これを使って、第2節で扱った4次元の $N = 1, 2$ の SQCD を超弦理論の低エネルギー有効理論として構成したのが第4節である。まず、古典的な真空が type IIA の brane 配位と対応付くことを確認した。配位中の brane を動かしたとき、有効理論としての SQCD にはどのような変化が起きるかについても議論した。次に、 $N = 2$ SQCD の低エネルギーでの振舞いを記述する Seiberg-Witten 曲線が、超弦理論では type IIA から M 理論に移ったとき、M5-brane の2次元分の広がりとして理解されることが分かった。 $N = 2$ SQCD の Higgs branch に対応する type IIA の brane 配位は、D6-brane を含む。D6-brane は M 理論で見ると Kaluza-Klein モノポールであり、Taub-NUT 空間に対応する。この Taub-NUT 空間を使って、Higgs branch に対応する brane 配位を M 理論の配位で書き直した。更に、brane の回転によって超対称性を $N = 2$ から $N = 1$ に破る。このとき得られる M 理論の配位は、 $N = 1$ の SQCD の低エネルギーでの振舞いを記述すると考えられる。実際、メソン M の真空期待値を、場の理論の解析から得られた有効ポテンシャルを使って求めると、brane の座標に一致することが示された。従って、 $N = 1$ SQCD の低エネルギーでのスーパーポテンシャルの情報が、M 理論での brane 配位に含ま

れることが分かった。

以上の議論で SQCD と brane 配位の対応が明らかになったが、対応付けが不十分な点もいくつか残されている。例えば、物質場のカイラル対称性 $SU(N_f)_A$ が brane 配位でどのように導かれるかが不明である。また、type IIA から M 理論に移ることが、SQCD の側でどのような極限を取ることに相当しているのかが不明確である。ゲージ群を変えた場合の brane 配位の取り方や、基本表現以外の物質場の入れ方についても、不明な点が残されている。これらは今後の課題である。

その他の課題としては、場の理論では扱えなかった 4 次元以外の SQCD の解析を、超弦理論の側から行うことが考えられる。具体的には、6 次元の SQCD は自己双対なゲージ場を含むので Lagrangian が書けず場の理論的な解析が出来ない。しかし、brane 配位を使えば解析が可能になる。また、超弦理論の側で M 理論について分かっていることは、低エネルギー有効理論として 11 次元の超重力理論を持つこと、2-brane と 5-brane を含むこと、 S^1 コンパクト化して type IIA の理論になることであり、非常に少ない。具体的に M 理論がどのような理論なのか、ほとんど理解されていない。そこで、場の理論側での量子効果との対応付けから、M5-brane についての情報が得られれば、M 理論についての理解の手がかりになることが期待できる。

6 謝辞

本論文の執筆にあたり、辛抱強く指導して下さった梁成吉教授、伊藤克司博士に深く感謝します。また、議論につき合っ下さった野口雅之博士、寺嶋靖治氏にも心から感謝します。

参考文献

- [1] N.Seiberg and E.Witten, hep-th/9407087, *Nucl. Phys.* **B426**(1994)19.
- [2] N.Seiberg and E.Witten, hep-th/9408099, *Nucl. Phys.* **B431**(1994)484.
- [3] N.Seiberg, hep-th/9411149, *Nucl. Phys.* **B435**(1995) 129.
- [4] K.Intriligator and N.Seiberg, hep-th/9503179, *Nucl. Phys.* **B444**(1995) 125.
- [5] K.Intriligator and P.Pouliot, hep-th/9505006, *Phys. Lett.* **B353**(1995) 471.
- [6] D.Kutasov, hep-th/9503086, *Phys. Lett.* **B351**(1995) 230.
- [7] P.Pouliot, hep-th/9507018, *Phys. Lett.* **B359**(1995) 108.
- [8] P.Cho, hep-th/9702059, *Phys. Rev.* **D56**(1997) 5260;
M.Berkooz, P.Cho, P.Kraus and M.J.Strassler, hep-th/9705003, *Phys. Rev.* **D56**(1997) 7166.
- [9] レビューとして、J.Polchinski, S.Chaudhuri and V. Johnson, hep-th/9602052.
- [10] レビューとして、P.K.Townsend, hep-th/9612121.
- [11] E.Witten, hep-th/9503124, *Nucl. Phys.* **B443**(1995)85.
- [12] A.Hanany and E.Witten, hep-th/9611230, *Nucl. Phys.* **B492**(1997)152.
- [13] K.Intriligator and N. Seiberg, hep-th/9607207, *Phys. Lett.* **B387**(1996)513.
- [14] S.Elitzur, A.Giveon and D.Kutasov, hep-th/9702014, *Phys. Lett.* **B400**(1997)269.
- [15] E.Witten, hep-th/9703166, *Nucl. Phys.* **B500**(1997)3.
- [16] K.Hori, H.Ooguri and Y.Oz, hep-th/9706082.
- [17] S.Coleman and J.Mandula, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.
- [18] R.Haag, J.Lopuszanski and M.Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88**(1975) 257.
- [19] J.Wess and J.Bagger, Supersymmetry and supergravity (PRINCETON) (Jun 1990).
- [20] J.L.Cardy, *Nucl. Phys.* **B205**[FS5](1982) 17.
- [21] N.Seiberg, hep-ph/9309335, *Phys. Lett.* **318B**(1993) 469.
- [22] S.Ferrara and B.Zumino, *Nucl. Phys.* **B79**(1974) 413;
A.Salam and J.Strathdee, *Phys. Lett.* **51B**(1974) 353;
R.Grimm, M.Sohnius and J.Wess, *Nucl. Phys.* **B133**(1978) 275.
- [23] N.Seiberg, *Phys. Lett.* **B206**(1988) 75.
- [24] E.Witten and D.Olive, *Phys. Lett.* **78B**(1978) 97.
- [25] M.K.Prasad and C.M.Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35**(1975) 760;
E.B.Bogomolny, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**(1976) 449.

- [26] C.Montonen and D.Olive, *Phys. Lett.* **72B**(1977) 117.
- [27] V.Novikov, M.Shifman, A.Vainshtein and V.Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229**(1983) 381.
- [28] I.Affleck, M.Dine and N.Seiberg, *Nucl. Phys.* **B241**(1984) 493.
- [29] M.A.Shifman and A.I.Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B277**(1986)456, *Nucl. Phys.* **B359**(1991)571.
- [30] W.Siegel, *Phys. Lett.* **84B**(1979) 193.
- [31] D.Finnell and P.Pouliot, hep-th/9503115, *Nucl. Phys.* **B453**(1995) 225.
- [32] E.Witten, *Nucl. Phys.* **B202**(1982) 253.
- [33] N.Seiberg, hep-th/9402044, *Phys. Rev.* **D49**(1994) 6857.
- [34] K.Intriligator, hep-th/9407106, *Phys. Lett.* **336B**(1994) 409.
- [35] T.Banks and E.Rabinovici, *Nucl. Phys.* **B160**(1979) 349;
E.Fradkin and S.Shenker, *Phys. Rev.* **D19**(1979) 3682.
- [36] G.Mack, *Commun. Math. Phys.* **55**(1977)1.
- [37] M.Flato and C.Fronsdal, *Lett. Math. Phys.* **8**(1984)159;
V.K.Dobrev and V.B.Petkova, *Phys. Lett.* **B162**(1985)127.
- [38] K.Intriligator and N.Seiberg, hep-th/9509066, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **45BC**(1996)1; *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **55B**(1996)200.
- [39] V.Novikov, M.Shifman, A.Vainshtein, M.Voloshin and V.Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229**(1983)394;
V.Novikov, M.Shifman, A.Vainshtein and V.Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229**(1983)381,407.
- [40] N.Seiberg, *Phys. Lett.* **B206**(1988)75
- [41] A.Klemm, W.Lerche and S.Theisen, hep-th/9505150, *J. Mod. Phys.* **A11**(1996)1929.
- [42] A.Klemm, W.Lerche, S.Theisen and S.Yankielowicz, hep-th/9411048, *Phys. Lett.* **344B**(1995)169
- [43] A.Hanany and Y.Oz, hep-th/9505075, *Nucl. Phys.* **B452**(1995)283.
- [44] P.C.Argyres, M.R.Plesser and N.Seiberg, hep-th/9603042, *Nucl. Phys.* **B471**(1996)159.
- [45] M.R.Douglas and S.H.Shenker, hep-th/9503163, *Nucl. Phys.* **B447**(1995)271.
- [46] P.C.Argyres and M.R.Douglas, hep-th/9505062, *Nucl. Phys.* **B448**(1996)93.
- [47] レビューとして、W.Lerche, hep-th/9611190.
- [48] J.Polchinski, hep-th/9510017, *Phys. Rev. Lett.* **75**(1995)4724.
- [49] Y.Nambu, Lectures at the Copenhagen symposium,1970;
T.Goto, *Prog. Theor. Phys.* **46**(1971)1560.
- [50] L.Brink, P.Di Vecchia and P.Howe, *Phys. Lett.* **65B**(1976)471
- [51] A.M.Polyakov, *Phys. Lett.* **103B**(1981)207.

- [52] A.A.Belavin, A.M.Polyakov and A.B.Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**(1984)333.
- [53] R.C.Brower, *Phys. Rev.* **D6**(1972)1655;
P.Goddard and C.B.Thorn, *Phys. Lett.* **40B**(1972)235.
- [54] J.Scherk, *Nucl. Phys.* **D31**(1971)222
- [55] D.Lüst and S.Theisen, Lecture Notes in Physics 346, Chapter 15.
- [56] E.S.Fradkin and A.A.Tseytlin, *Phys. Lett.* **158B**(1985)316;
C.G.Callan, D.Friedan, E.Martinec and M.Perry, *Nucl. Phys.* **B262**(1985)593.
- [57] R.G.Leigh, *Mod. Phys. Lett.* **A4**(1989)2767.
- [58] P.Townsend, *Phys. Lett.* **B350**(1995)184.
- [59] S.Hawking, *Phys. Lett.* **60A**(1977)81.
- [60] J.de Boer and Y.Oz, hep-th/9708044.