ADHM/Nahm 構成法とその双対性

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻
素粒子論研究室　浜中 真志[1, 2]

(2002 年 5 月 27 日受理)

概 要

Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin (ADHM) 構成法とは, 任意のインスタントン解を与える強力な構成法の一つである. この構成法は Nahm によってモノポール解の構成に応用された. これを ADHMN 構成法あるいは Nahm 構成法と呼ぶ. (両者をまとめて, この記事では ADHM/Nahm 構成法と書く.) ADHM/Nahm 構成法は, インスタントン/モノポールのモジュライ空間と ADHM/Nahm データのモジュライ空間との 1 対 1 対応 (双対性) を利用したもので, 様々な応用がある.

この記事ではまず可換空間上の ADHM/Nahm 構成法の詳細について一通り述べ, 背後に潜む双対性を明らかにする. そしてその双対性の起源を, 4 次元トーラス上のゲージ理論を用いた議論 (Nahm 変換), およびある配置に置かれた D-brane 複合系のゲージ理論を用いた議論から考察する. この D-brane 解釈により, 数学的な概念だと思われていた ADHM/Nahm 構成法に物理的意味が与えられ, 逆に ADHM/Nahm 構成法の中に Myers 効果, Solution Generating Technique といった D-brane 力学解明へのヒントが隠されていることが明らかとなった.

さらに非可換空間上のゲージ理論と ADHM/Nahm 構成法についても簡単に紹介する. 非可換空間上のゲージ理論は背景 B 場 (磁場) 中の D-brane 上のゲージ理論と等価であることが知られているが, ADHM/Nahm 構成法を用いると, それが顕著に見て取れる.

この記事は ADHM/Nahm 構成法の, 物理の人向けの包括的解説である.

目 次

0 Introduction **2**

1 ADHM/Nahm Construction and Nahm Transformation **3**

1.1 ADHM Construction of Instantons on $\mathbf{R}^4$ 4

1.2 Nahm Construction of Monopoles on $\mathbf{R}^3$ 22

1.3 Dualities and Dimensional Reductions 27

1.4 Nahm Transformation 31

1.5 D-brane's Descriptions of ADHM/Nahm Construction and Nahm Transformation . . . 35

1.6 Notes 39

2 ADHM/Nahm Construction on Non-Commutative Spaces **39**

2.1 Gauge Theories on Non-Commutative (=NC) Spaces 39

2.2 ADHM Construction of NC Instantons 43

2.3 Nahm Construction of NC Monopoles 48

2.4 Notes 51

3 Conclusion **52**

[1] E-mail address: hamanaka@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp
[2] Home-Page address: http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka/

0 Introduction

ADHM/Nahm 構成法とは, 任意のインスタントン解/モノポール解を与える強力な構成法の一つである. インスタントン, モノポールは 4 次元空間上の自己双対なゲージ場 (と Higgs 場) の配位のことで, 場の理論の非摂動論的側面の解明に重要な役割を果たす. [3] ADHM/Nahm 構成法は, インスタントン/モノポールのモジュライ空間と ADHM/Nahm データのモジュライ空間との 1 対 1 対応 (双対性) を利用したもので, インスタントン・バックグラウンドでの経路積分の計算など様々な応用がある.[4]

ADHM 構成法は当時流行っていたツイスター理論 [141][5] の派生である. 1977 年頃 Ward は, ツイスター理論を応用し, S^4 上のゲージ場の自己双対性を 3 次元複素射影空間上のベクトル束の正則性に置き換えた [169]. ベクトル束の正則性の問題は, 代数幾何学的なアイデアを取り入れることで, 代数的問題に帰着される. その取り扱いの方法として, 代数曲線による記述とモナード (Monad) による記述がある.

Atiyah と Ward は前者を採用し, ある仮定 (Atiyah-Ward ansatz) から具体的インスタントン解が構成されることを示した [10]. このアイデアはソリトン方程式の逆散乱法 (Bäcklund 変換) と密接な関係にあり [16, 34, 177], 可積分系とも関わりながら大きな発展を遂げた [172, 113].

一方 Atiyah, Drinfeld, Hitchin, Manin は後者を採用し, S^4 上の全てのインスタントン解を与える構成法を見出した [8]. これが ADHM 構成法である.[6] ADHM 構成法は, その後 Nahm によってモノポール解の構成にも応用された [121]-[124]. これを ADHMN 構成法, あるいは Nahm 構成法と呼ぶ. さらに Nahm 構成法に現れる Fourier 変換的な双対性は Schenk [153], Braam と van Baal [21] によって, 4 次元トーラス上のインスタントンに関わる美しい双対変換として抽出された. これは Nahm 変換と呼ばれており, 代数幾何学における Fourier-Mukai 変換 [116][7] , 弦理論における T 双対変換[8] と密接な関わりがある.

ADHM/Nahm 構成法はこの記事で示すように, 解の構成に関して非常に強力であり, 他にもさまざまな応用がある. D-brane 力学との対応も見事であり非常に興味深い. ところが ADHM/Nahm 構成法はあまり世に知られておらず, 時にマニアックな印象を与える. これは何故であろうか ?

一つには ADHM 構成法を物理の人が勉強する際, 適切な文献がほとんど見当たらないことが挙げられる. まず ADHM 構成法の原論文 [8] は難解である. この論文はどちらかというと数学者向けに書かれている上に, 結果のみのレポートとなっている. そしてその詳しい解説として引用されるのは, せいぜい Atiyah の講義録 [6] ぐらいであるが, その記述はツイスター理論がらみであり, 記号も物理学者には馴染みが薄いものである.

しかし ADHM/Nahm 構成法には, ツイスター理論なしの, より物理学者向けの記述が存在する. それは主に物理学者によって発展させられ,[9] 1 対 1 対応 (全単射) の証明も [37] に至って (ほぼ) なされた. この記事の 1.1 節はこの論文の詳しい紹介である. 証明もほぼ完全に付した.

ADHM/Nahm 構成法の面白味は何と言っても, その D-brane 解釈にある. これは D-brane の研究が爆発的に進展した 1995 年, 1996 年頃に始まった. 特に非可換空間上のゲージ理論と背景 B 場 (磁場) 中

[3] 興味ある方は, 例えば [3, 27, 28, 120, 149, 152, 155, 156, 157, 165, 167] などを参照されたい.
[4] ADHM 構成法の応用に興味ある方には, インスタントンの論文選集 [155] や [44, 97] が役に立つであろう.
[5] 解説として [111, 113, 142, 172] 等がある
[6] この記事で扱うインスタントンは 4 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^4$ 上のインスタントンであるが, 共形不変性と Uhlenbeck の定理 [166] から S^4 上のインスタントンと等価であることが数学的に証明される.
[7] 解説として [117] がある
[8] 解説として [57] がある.
[9] 当時の総合報告として例えば [30, 35, 147] がある.

の D-brane 上のゲージ理論の等価性が指摘されてきた頃 [29, 47, 151] から再び威力を発揮し, 非可換空間上のインスタントン/モノポールの厳密解も次々と構成された. その中には $U(1)$ インスタントン, フラクソンといった非可換空間特有の新しい物理的対象も含まれていた. また空間を非可換にした効果と背景に B 場 (磁場) を掛けた効果との等価性が, ADHM/Nahm 構成法の D-brane 解釈から容易に読み取ることができることも分かった. さらに ADHM/Nahm 構成法の中に Myers 効果, Solution Generating Technique といった D-brane 力学解明のヒントが隠されていることも明らかになった.

この記事は以上の発展の概説である. 紙数の制約のため省略した話題もあるが, 主要な部分は大体書き尽くしたものと考えている. ADHM/Nahm 構成法の面白さ, 素晴らしさが伝われば幸いである.

この記事だけに用いる, 特別な用語に関する注意

- スラッシュ "/" は「または」ぐらいの意味であり, スラッシュが連続するときは以後, スラッシュ "/" の意味で「複号同順」であるとする.
- 「モノポール」は基本的に「BPS モノポール」を指す.
- Self-Dual か Anti-Self-Dual の自己双対性を区別するときは "SD" か "ASD" を明記する. 例えば「インスタントン」,「自己双対方程式」と言ったときは, 自己双対性を区別しないが,「ASD インスタントン」,「ASD 自己双対方程式」と言ったときは, Anti-Self-Dual のもののみを指す. ただし "(A)SD" と書かれている場合は自己双対性は区別されていない.
- $m \times n$ 行列 M のサイズを明記するときは $M_{[m]\times[n]}$ のように右下の部分に [..] を付けて書き添える. 特に M が $m \times m$ 正方行列の場合は, $M_{[m]}$ と書くこともある.
- Lie 群 G の Lie 環は, そのカリグラフ文字 $\mathcal{G}$ で表すことにする. また Lie 群の元 g と Lie 環の元 X との関係は $g = e^X$ である.
- "$\approx$" は「空間の無限遠方 $r := |x| \to \infty$ で漸近的に等しい」の意味に用いる.
- 特に断りがなければ, Tr はそのときに考えているゲージ群のカラーの足に関するトレースを, tr はスピノルの足に関するトレースを表す.
- 添字についてまとめておく：

$$\begin{aligned}
\text{4-dim. Space indices } [4] &: 1 \le \mu, \nu, \rho, \cdots \le 4 \\
\text{3-dim. Space indices } [3] &: 1 \le i, j, k, \cdots \le 3 \\
\text{Color indices } [N] &: 1 \le u, v, w, \cdots \le N \\
\text{Instanton Number indices } [k] &: 1 \le p, q, r, \cdots \le k \\
\text{Spinor indices } [2] &: 1 \le \alpha, \beta, \gamma, \cdots, \le 2
\end{aligned}$$

1 ADHM/Nahm Construction and Nahm Transformation

この第 1 章では可換空間上の普通の ADHM/Nahm 構成法をレヴューする. 1.1/1.2 節では Corrigan-Goddard の論文 [37] に基づき, インスタントン/モノポールのモジュライ空間と ADHM/Nahm データの

モジュライ空間との 1 対 1 対応を証明し, 代表的な解の具体的構成を行う. 1.3 節で ADHM/Nahm 構成法に現れる美しい双対性を列挙し, 4 次元自己双対方程式の次元還元から考察を行う. 1.4 節では Nahm 変換を紹介し, その双対性の起源を Nahm 変換の特別な極限として解釈する. 1.5 節では ADHM/Nahm 構成法および Nahm 変換の D-brane 解釈を与える.

ADHM/Nahm 構成法で最も基本的なものは Dirac 作用素である. 自己双対方程式など他の主要な方程式は Dirac 作用素から理解される. ADHM/Nahm 構成法に現れる登場人物や方程式は一見雑多で複雑な印象を受けるが, 基本的には Dirac 作用素とその零モードのみであり, 方程式も Dirac 方程式と自己双対方程式のみと考えてよい.

この章は細かい議論も含んでいるが, 詳細は気にせず読んで頂きたい. 特に D-brane 解釈の部分が面白いと思われる. また具体的な解の構成のみに興味のある方は, (Instanton/Monopole), (ADHM/Nahm), (ADHM/Nahm) → (Instanton/Monopole), Examples の部分だけを読まれることを薦める.

これから示す 1 対 1 対応の証明の概略は次の通り :

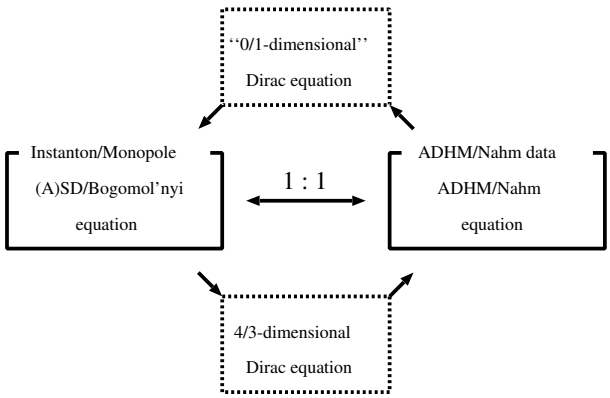


図 1: ADHM/Nahm 構成

1 対 1 対応の具体的な対応関係は (零質量) Dirac 方程式を経由して与えられる. 図に現れる (A)SD / Bogomol'nyi / Nahm / ADHM 方程式は, 基本的に 4 / 3 / 1 / 0 次元自己双対方程式と考えてよい.

1.1 ADHM Construction of Instantons on $\mathbf{R}^4$

この 1.1 節では ADHM 構成法の礎となる, インスタントンのモジュライ空間と ADHM データのモジュライ空間との 1 対 1 対応 (双対性) の証明を行う. これにより全てのインスタントンが ADHM 構成法によって (行列の方程式を解くことで) 得られることが示される. 最後に具体的な解を構成する.

(Instanton)

まずインスタントンを定義する. 簡単のためゲージ群 G を $SU(N)$, $N \geq 2$ とする[10] . またインスタントンの自己双対性は ASD に固定するが, SD にしても全く同様である. インスタントンについて基本事項を既にご存じの方はこの部分を飛ばしてしまって差し支えないが, 自己双対方程式の Dirac 作用素を用いた表現だけはチェックされたい.

[10] ゲージ群 G を $SU(N)$ にとっても $U(N)$ にとっても以下の議論は全く変わらない.

4 次元 Euclid 空間上のインスタントンとは, 4 次元自己双対方程式を満たし, Yang-Mills 作用を有限にするゲージ場の配位である. ADHM 構成法では Dirac 作用素が基本要素であるから, まずそれを定義しよう :

- Dirac 作用素[11]

$$\mathcal{D}_x := e^\mu \otimes D_\mu = e^\mu \otimes (\partial_\mu + A_\mu), \quad \bar{\mathcal{D}}_x := \bar{e}_\mu \otimes D_\mu = -\mathcal{D}^\dagger. \tag{1.1}$$

ここで D_μ は普通の共変微分であり, e_μ は四元数 $(i, j, k, 1)$ の 2 次元表現行列 (Euclidean 4 次元 Pauli 行列) である :

$$e_\mu := (-i\sigma_i, 1), \quad \bar{e}_\mu := \bar{e}_\mu = (i\sigma_i, 1). \tag{1.2}$$

これは次の関係式を満たす :

$$\bar{e}_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\eta^{(+)}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + i\eta^{i(+)}_{\mu\nu}\sigma_i, \quad e_\mu \bar{e}_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\eta^{(-)}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + i\eta^{i(-)}_{\mu\nu}\sigma_i. \tag{1.3}$$

ここで $\eta^{i(\pm)}_{\mu\nu}$ は't Hooft のイェータ・シンボル [162, 164] と呼ばれるもので, 具体的には

$$\eta^{i(\pm)}_{\mu\nu} = \epsilon_{i\mu\nu 4} \pm \delta_{i\mu}\delta_{\nu 4} \mp \delta_{i\nu}\delta_{\mu 4}. \tag{1.4}$$

である. これは μ, ν の足に関して反対称かつ自己双対である :

$$\eta^{i(\pm)}_{\mu\nu} = \pm * \eta^{i(\pm)}_{\mu\nu}, \tag{1.5}$$

ここで $*$ は Hodge 作用素であり, $*X_{\mu\nu} := (1/2)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}X^{\rho\sigma}$ で定義される. (例えば $*X_{12} = X_{34}$, $*X_{13} = X_{42}$, ...)

$e_\mu, \eta^{i(\pm)}_{\mu\nu}$ の満たす関係式をいくつか挙げておく :

$$e_\mu \bar{e}_\nu + e_\nu \bar{e}_\mu = \bar{e}_\mu e_\nu + \bar{e}_\nu e_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{1.6}$$

$$e_\mu \bar{e}_\nu e_\mu = -2e_\nu, \quad e_\mu e_\nu e_\mu = -2\bar{e}_\nu \tag{1.7}$$

$$e_2 e_\mu e_2 = -\bar{e}^{\mathrm{t}}_\mu \tag{1.8}$$

$$\mathrm{tr}\,(e_\mu \bar{e}_\nu) = \mathrm{tr}\,(\bar{e}_\mu e_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}, \tag{1.9}$$

$$\eta^{i(+)}_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\mathrm{tr}\,(\sigma^i \bar{e}_\mu e_\nu), \quad \eta^{i(-)}_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\mathrm{tr}\,(\sigma^i e_\mu \bar{e}_\nu) \tag{1.10}$$

$$\eta^{i(+)}_{\mu\nu}\eta^{j(+)}_{\mu\nu} = \eta^{i(-)}_{\mu\nu}\eta^{j(-)}_{\mu\nu} = 4\delta^{ij}. \tag{1.11}$$

さて自己双対方程式を Dirac 作用素を用いて定義しよう. ゲージ場の自己双対性は次のように定義することができる. すなわち

- ゲージ場が自己双対 $\Leftrightarrow$ Dirac 作用素の「 2 乗 」$\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ が Pauli 行列と可換

実際 Dirac 作用素の「 2 乗 」を計算すると

$$\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} = \bar{e}^\mu \otimes D_\mu e^\nu \otimes D_\nu = 1_{[2]} \otimes D^2 + \frac{i}{2}\eta^{(+)i\mu\nu}\sigma_i \otimes [D_\mu, D_\nu] = 1_{[2]} \otimes D^2 + \frac{i}{2}\eta^{(+)i\mu\nu}\sigma_i \otimes F_{\mu\nu} \tag{1.12}$$

[11] 正確には Dirac 作用素を「カイラル分解」した「Weyl 作用素」と呼ぶべきであるが, ここではそうしない. またテンソル積の記号 $\otimes$ は省略することがある.

となり, これが Pauli 行列と可換であるためには, Dirac 作用素の「 2 乗 」の中の Pauli 行列 σ_i の部分 (右辺第 2 項) がゼロ, すなわち曲率 $F_{\mu\nu}$ が ASD であればよい.[12]　この条件が ASD 自己双対方程式であるが, 具体的に書き下すと次のようになる：

- ASD 自己双対方程式 ($\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ が Pauli 行列と可換)

$$F_{12}+F_{34}=0, \quad F_{13}-F_{24}=0, \quad F_{14}+F_{23}=0. \quad (\text{実表示}) \tag{1.13}$$

$$\Leftrightarrow F_{z_1\bar{z}_1}+F_{z_2\bar{z}_2}=0, \quad F_{z_1z_2}=0. \quad (\text{複素表示}) \tag{1.14}$$

$$\Leftrightarrow F_{\mu\nu}+*F_{\mu\nu}=0. \tag{1.15}$$

自己双対方程式は Yang-Mills 作用の極小値を与える. 実際

$$\begin{aligned} S_{\rm YM} &= -\frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+*F_{\mu\nu}\ *F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\,\left((F_{\mu\nu}\pm *F^{\mu\nu})^2\mp 2F_{\mu\nu}\ *F^{\mu\nu}\right) \\ &= -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}\mp *F^{\mu\nu})^2 \pm \frac{8\pi^2}{g_{\rm YM}^2}\underbrace{\left[\frac{-1}{16\pi^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}\ *F^{\mu\nu})\right]}_{=:\nu[A_\mu]}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

であり, 平方完成した部分がゼロになるという条件がちょうど自己双対方程式と一致する. また右辺第 2 項で [...] とまとめた部分 $\nu[A_\mu]$ は整数値を取る. これが有限の値を取るためには, ゲージ場は無限遠でピュア・ゲージ (すなわち $A_\mu \approx g^{-1}\partial_\mu g,\ {}^{\exists}g\in SU(N)$. またこのとき $F_{\mu\nu}\approx 0$ である.) である必要がある. このとき, この整数値はインスタントン数と呼ばれる. ここではインスタントン数が $-k$ であるようなインスタントン (k ASD インスタントン) を考えるものとしよう：

- インスタントン数 (ゲージ場は無限遠でピュア・ゲージ：$A_\mu \approx g^{-1}\partial_\mu g,\ {}^{\exists}g\in SU(N)$)

$$\begin{aligned} \nu[A_\mu] &:= -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}\ *F^{\mu\nu}) \ = \ -\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{Tr}\,(F\wedge F) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\int d\mathrm{Tr}\,(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A) \overset{\text{Stokes}}{=} -\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{Tr}\,(\underbrace{A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A}_{=A\wedge F-\frac{1}{3}A\wedge A\wedge A}) \\ &= \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{Tr}\,((g^{-1}dg)\wedge(g^{-1}dg)\wedge(g^{-1}dg))\in\mathbf{Z} \\ &= -k. \end{aligned} \tag{1.17}$$

さらに D^2 が可逆である必要がある：

- D^2 が可逆 (すなわちあるグリーン関数 $G(x,y)$ が存在する.)[13] ：

$$D_x^2\ {}^{\exists}G(x,y)=-\delta(x-y), \quad G(x,y)\simeq\mathcal{O}(r^{-2}). \tag{1.18}$$

ゲージ変換はおなじみのものである：

[12] つまり ASD ではなく SD インスタントンを議論したい場合は, e_μ と $\bar{e}_\mu$ を交換すればよい.

[13] ただし D^2 の可逆性については, $D^2\phi=0$ の ϕ が $\phi\approx\mathcal{O}(r^{-\epsilon}),\ \epsilon>0$ の場合のみ成り立つものとする. $\phi\approx\mathcal{O}(1)$ の場合はこの限りではなく, $D^2\phi=0$ を満たす ϕ が独立にちょうど N 個存在する [43].

- ゲージ変換

$$A_\mu \to g^{-1}A_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g, \quad g(x) \in SU(N). \tag{1.19}$$

インスタントン数 $-k$ の $\mathbf{R}^4$ 上のインスタントン解は, ゲージ変換で移り合う自由度を除いてある個数のパラメーターで記述される. このパラメーターの空間を $\mathcal{M}^{\rm inst}_{N,k}$ で表し, $G = SU(N),\ k$ インスタントン・モジュライ空間という.

インスタントンについてまとめると次のようになる：

インスタントン[14]

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\rm inst}_{N,k} &= \frac{\left\{ A_\mu^{(N,k)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{自己双対方程式} \\ A_\mu \ :\ N\times N \text{ 反 Hermite 行列} \\ \nu[A_\mu] = -k \\ \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} \text{ は可逆} \end{array} \right\}}{(A_\mu \sim g^{-1}A_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g, \quad g(x)\in SU(N))} \\
\dim \mathcal{M}^{\rm inst}_{N,k} &= \begin{cases} 4Nk - N^2 + 1 & N \le 2k \\ 4k^2 + 1 & N > 2k \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

ここでインスタントン・モジュライ空間の次元 $\dim \mathcal{M}^{\rm inst}_{N,k}$ については指数定理の結果 [9, 14]

$$\dim \mathcal{M}^{\rm inst}_{k} = 4hk - \frac{\chi+\sigma}{2}\dim G \tag{1.21}$$

を引用した[15] . ただし, h はゲージ群 G の双対 Coxeter 数, χ は底空間 (場が定義されている空間) の Euler 数, σ は底空間の符号数である (表 1,2 参照).

表 1：単連結コンパクト単純 Lie 群

群 G	ランク	次元	dual Coxeter 数 h
$SU(N)\ (N\ge 2)$	$N-1$	N^2-1	N
$SO(N)\ (N\ge 2)$	$\left[\frac{N}{2}\right]$	$\frac{1}{2}N(N-1)$	$N-2\ (N\ge 4)$
$Sp(N)_{[2N]\times[2N]}$	N	$N(2N+1)$	$N+1$
G_2	2	14	4
F_4	4	52	9
E_6	6	78	12
E_7	7	133	18
E_8	8	248	30

表 2：4 次元多様体の Euler 数 χ, 符号数 σ

4 次元多様体	Euler 数 χ	符号数 σ
T^4	0	0
S^4	2	0
$\mathbf{C}P_2$	3	-1
$S^2\times S^2$	4	0
$K3$	24	-16

[14] A_μ が $G = SU(N)$ の場合の k インスタントン解であることを強調する場合, $A_\mu^{(N,k)}$ のように N, k を明示することがある.

[15] ここでは $\mathbf{R}^4$ 上ではなく S^4 上のインスタントンとして指数定理を適用した. なお ASD ではなく SD の場合, 式 (1.21) の $(\chi+\sigma)$ の部分が $(\chi-\sigma)$ になる. 物理学者向けの物理数学の解説として例えば [50, 51, 125, 130, 131] がある.

(ADHM)

次に ADHM データを定義する. ADHM データはインスタントンの双対であり, インスタントンを定義したときと同様の登場人物が現れるだけである. ただしインスタントン側は 4 次元空間上で定義された対して, ADHM 側はいわば 0 次元空間上で定義される. すなわち微分が現れない. 詳しくは 1.3 節で議論する.

まず「(双対) 0 次元 Dirac 作用素」∇ を次のように定義する：

$$\nabla(x) := Cx - D. \tag{1.22}$$

ただし

$$x := x^\mu \otimes e_\mu = \begin{pmatrix} x^4 - ix^3 & -(x^2 + ix^1) \\ x^2 - ix^1 & x^4 + ix^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & -z_1 \\ \bar{z}_1 & z_2 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

であり, x^μ あるいは $z_{1,2}$ は $\mathbf{R}^4$ あるいは $\mathbf{C}^2$ の座標を表す. また C は $(N+2k)\times 2k$ 定数行列

$$C = \begin{pmatrix} 0_{[N]\times[2k]} \\ 1_{[2k]\times[2k]} \end{pmatrix}_{[N+2k]\times[2k],} \tag{1.24}$$

であり, D に全ての情報が含まれている. D のことを ADHM データと呼び, [16] 必要に応じて, 次のような様々な表し方をする：

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} -S_{[N]\times[2k]} \\ T_{[2k]\times[2k]} \end{pmatrix}_{[N+2k]\times[2k]} = \begin{pmatrix} -S_{[N]\times[2k]} \\ e_{\mu[2]\times[2]} \otimes T^\mu_{[k]\times[k]} \end{pmatrix}_{[N+2k]\times[2k]} \\ &= \begin{pmatrix} -I^\dagger & -J \\ T^4 - iT^3 & -(T^2 + iT^1) \\ T^2 - iT^1 & T^4 + iT^3 \end{pmatrix}_{[N+2k]\times[2k]} = \begin{pmatrix} -I^\dagger & -J \\ B_2^\dagger & -B_1 \\ B_1^\dagger & B_2 \end{pmatrix}_{[N+2k]\times[2k].} \end{aligned} \tag{1.25}$$

ここで $I, J, B_{1,2}$ はそれぞれ $k\times N, N\times k, k\times k$ 複素行列であり, $B_{1,2}$ は座標と同様に T_μ ($k\times k$ エルミート行列) を複素に組んだものである. 改めて「0 次元 Dirac 作用素」を書き下しておこう：

$$\begin{aligned} \nabla(x) &= \begin{pmatrix} S \\ e_\mu \otimes (x^\mu - T^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^\dagger & J \\ \bar{z}_2 - B_2^\dagger & -(z_1 - B_1) \\ \bar{z}_1 - B_1^\dagger & z_2 - B_2 \end{pmatrix}, \\ \nabla(x)^\dagger &= \begin{pmatrix} S^\dagger & \bar{e}_\mu \otimes (x^\mu - T^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & z_2 - B_2 & z_1 - B_1 \\ J^\dagger & -(\bar{z}_1 - B_1^\dagger) & \bar{z}_2 - B_2^\dagger \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

さて次に「(双対) 0 次元自己双対方程式」を定義しよう. インスタントンの時と同様,「$\nabla^\dagger\nabla$ が Pauli 行列と可換」であるという条件を自己双対の定義をする. これを具体的に式で表すと次のようになる：

- ADHM 方程式 (「0 次元自己双対方程式」)：

$$\begin{cases} [T_1, T_2] + [T_3, T_4] - \dfrac{i}{2}(I^\dagger I - JJ^\dagger) = 0, \\ [T_1, T_3] - [T_2, T_4] - \dfrac{1}{2}(IJ + J^\dagger J) = 0, \qquad \text{(実表示)} \\ [T_1, T_4] + [T_2, T_3] - \dfrac{i}{2}(IJ - J^\dagger J) = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

[16] この D はインスタントンのときの共変微分 D_μ とは異なるが混同する恐れはないものと信じる. なお C と x の積は, $C(x\otimes 1_{[k]})$ あるいは $C_{u+\alpha p}{}^{\gamma q} x_{\gamma\dot{\beta}}$ と理解する. ((1.26), (1.39) 等も同様.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mu_{\mathbf{R}} :=) & [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = 0, \\ (\mu_{\mathbf{C}} :=) & [B_1, B_2] + IJ = 0. \qquad\qquad (\text{複素表示}) \end{cases} \tag{1.28}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tr}\,(\sigma^i(S^\dagger S + T^\dagger T)) = 0. \qquad ({}^\forall i = 1,2,3) \tag{1.29}$$

複素表示での左辺はハイパーケーラー商 [88] の文脈でしばしば $\mu_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{C}}$ と書かれる. また, ADHM データ $T^\mu, B_{1,2}$ は常に座標 $x^\mu, z_{1,2}$ と対になって現れるので, ADHM 方程式の中の ADHM データ同士の交換子が含まれる部分には常に座標関数の交換子が現れる. (例えば $\mu_{\mathbf{R}} = -[z_1, \bar{z}_1] - [z_2, \bar{z}_2]$ のように.) 可換空間上ではもちろんそれらはゼロであるが, 非可換空間上ではこれがノンゼロとなり重要な結果を生み出す.

このとき,

$$\begin{aligned} (\nabla(x)^\dagger \nabla(x)) &= \begin{pmatrix} \square & 0_{[k]} \\ 0_{[k]} & \square \end{pmatrix}_{[2k]\times[2k]} \\ \square(x)_{[k]} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(D^\dagger D) + 2T_\mu x^\mu + |x|^2 \end{aligned} \tag{1.30}$$

となる.

またインスタントンのときと同様, 次の条件が必要である.

- $\square$ が可逆 (逆行列 f の存在)

$$\square^{\exists} f = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)_{[k]} = \square^{-1} \simeq \mathcal{O}(r^2). \tag{1.31}$$

ADHM 方程式と定数行列 C を不変に保つ変換も存在し, ADHM データの「ゲージ変換」と呼ばれる:

- ADHM データの「ゲージ変換」[17]

$$I \to R^\dagger I Q^\dagger, \quad J \to QJR, \quad T_\mu \to R^\dagger T_\mu R, \qquad Q \in SU(N),\ R \in U(k) \tag{1.32}$$

この変換 (1.32) で移り合うものどうしを同一視し, 同値類全体の集合を $\mathcal{M}_{k,N}^{\mathrm{ADHM}}$ と表す. これを ADHM データのモジュライ空間という. $\dim \mathcal{M}_{k,N}^{\mathrm{ADHM}}$ はこれまでの制約から計算できる.

- $N \le 2k$ の場合

$$\dim \mathcal{M}_{k,N}^{\mathrm{ADHM}} = \underbrace{2\cdot 2k(N+2k)}_{D} - \underbrace{3k^2}_{(1.27)} - \underbrace{4k^2}_{T_\mu^\dagger = T_\mu} - \underbrace{(N^2-1)}_{Q} - \underbrace{k^2}_{R} = 4Nk - N^2 + 1 \tag{1.33}$$

- $N > 2k$ の場合
  $N \le 2k$ の場合と同じ計算をすると, $U(N-2k)$ の自由度を引きすぎることになるので (式 (1.67) の周辺の議論とその脚注参照),

$$\dim \mathcal{M}_{k,N}^{\mathrm{ADHM}} = 4Nk - N^2 + 1 + (N-2k)^2 = 4k^2 + 1 \tag{1.34}$$

[17] $Q \in U(N)$ でもよいが, $Q = e^{i\phi}\cdot 1_{[N]}, R = e^{-i\phi}\cdot 1_{[k]}$ の場合に Q と R が独立な変換として扱えなくなるので, この $U(1)$ 変換の自由度を R の方に押しつけた. これで, $N \le 2k$ の場合に Q と R が独立な変換として扱える.

したがって $\dim \mathcal{M}_{k,N}^{\mathrm{ADHM}} = \dim \mathcal{M}_{N,k}^{\mathrm{inst}}$ が成り立っていることが分かる.

ADHM データについてまとめると次のようになる：

ADHM データ[18]

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{k,N}^{\mathrm{ADHM}} &= \frac{\left\{ D^{(k,N)} = \begin{pmatrix} -S^{(k,N)} \\ e_\mu \otimes T^{\mu(k)} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ADHM 方程式} \\ T^\mu \ : \ k \times k \text{ Hermite 行列} \\ S \ : \ N \times 2k \text{ 複素行列} \\ \nabla^\dagger \nabla \text{ は可逆} \end{array} \right\}}{(I \sim R^\dagger I Q^\dagger,\ J \sim QJR,\ T_\mu \sim R^\dagger T_\mu R, \quad Q \in SU(N),\ R \in U(k))} \\
\dim \mathcal{M}_{k,N}^{\mathrm{ADHM}} &= \begin{cases} 4Nk - N^2 + 1 & N \leq 2k \\ 4k^2 + 1 & N > 2k \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.35}$$

これから示すことは,

$$\mathcal{M}_{N,k}^{\mathrm{inst}} \overset{1:1}{=} \mathcal{M}_{k,N}^{\mathrm{ADHM}} \tag{1.36}$$

である.[19] 簡単のため以後, $N \leq 2k$ の場合を考える.

(ADHM)⟶(Instanton)

ここでは, 与えられた ADHM データ $S^{(k,N)}, T_\mu^{(k)}$ から, インスタントン $A_\mu = A_\mu(S,T)$ を構成する. 示すべきことは, ゲージ群が $SU(N)$ になること, インスタントン数が $-k$ になること, A_μ が無限遠でピュア・ゲージになること, A_μ から作られる曲率 $F_{\mu\nu}$ が ASD になること, A_μ から作られる Dirac 作用素の「2 乗」D^2 が可逆であること, である.

まず次の方程式

$$\nabla^\dagger V = 0. \tag{1.37}$$

を考える. この方程式 (1.37) は 0 次元の零質量 Dirac 方程式と呼ぶべきものであり, V のことを Dirac 零モードと呼ぶ. V は規格化されていなければならない. ∇ の各列は独立かつ $2k$ 個あるので, 規格化された Dirac 零モードは独立に $(N + 2k - 2k =)\ N$ 個存在する. これを $V_{[N+2k]\times[N]}$ と表している. 規格化条件は

$$V^\dagger V \quad = \quad 1_{[N]} \tag{1.38}$$

である. 0 次元 Dirac 方程式と規格化条件と $\nabla^\dagger \nabla$ の可逆性とを合わせると, 次の関係式が導かれる：

$$V V^\dagger = 1_{[N+2k]} - \nabla f \nabla^\dagger \tag{1.39}$$

この関係式を証明するため, 次の行列を導入すると便利である：

$$W := \begin{pmatrix} \nabla & V \end{pmatrix}_{[N+2k]\times[N+2k]}. \tag{1.40}$$

[18] ADHM データ S, T_μ がそれぞれ $N \times 2k, k \times k$ 行列であることを強調する場合, $S^{(k,N)}, T_\mu^{(k)}$ のように k, N を明示することがある.

[19] 2 つの集合 M と N の 1 対 1 対応を証明するには, M から N への写像 f と N から M への写像 g を定義し, $f \circ g = 1_N$ と $g \circ f = 1_M$ を示せばよい. またさらに f と g が共に連続であれば M と N の (位相空間としての) 次元は等しい.

式 (1.31), (1.37), (1.38) より行列 W の各列は独立であり逆行列が存在する. したがって,

$$W(W^\dagger W)^{-1}W^\dagger \equiv 1 \quad (\text{恒等式}) \quad \Leftrightarrow \quad V(\underbrace{V^\dagger V}_{=1})^{-1}V^\dagger + \nabla(\nabla^\dagger\nabla)^{-1}\nabla^\dagger = 1. \tag{1.41}$$

これはまさに式 (1.39) である.

条件 (1.39) は, W の各列が $(N+2k)$ 次元ベクトル空間の完全系をなすことを表しており, 完全性条件 (completeness condition) と呼ばれる. これは規格化条件とともに非可換空間上の議論で注意しなければならないものである.

W を用いると関係式がシンプルにまとめられる :

$$W^\dagger W \equiv \begin{pmatrix} \nabla^\dagger\nabla & \nabla^\dagger V \\ V^\dagger\nabla & V^\dagger V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{[2]} \otimes \square_{[k]} & O \\ O & 1_{[N]} \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

なお, 後の説明のため

$$P := VV^\dagger, \tag{1.43}$$

$$V = \begin{pmatrix} u_{[N]\times[N]} \\ v_{[2k]\times[N]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{[N]\times[N]} \\ v_{1\,[k]\times[N]} \\ v_{2\,[k]\times[N]} \end{pmatrix}, \tag{1.44}$$

$$v = C^\dagger V, \tag{1.45}$$

というものを導入しておく. P は $(N+2k)$ 次元の空間から N 次元部分空間への射影である.

この V からゲージ場 A_μ を

$$A_\mu = V^\dagger\partial_\mu V \approx \mathcal{O}(r^{-1}) \tag{1.46}$$

として作る. 規格化条件 (1.38) より, $A_\mu^\dagger = -A_\mu$ (反エルミート) であることが分かり, $G = U(N)$ が言える.

なぜゲージ場がこのような形で与えられるのか, 幾何学的意味を説明する. V_u $(u = 1, \ldots, N)$ で貼られる N 次元部分空間における共変微分 D_μ は, $(N+2k)$ 次元空間で定義された自然な微分 ∂_μ から, N 次元部分空間への射影 P を用いることで次のように与えられる : $D_\mu := P\partial_\mu$. これを, この部分空間に制限された関数 $s(x)$ (基底で展開して $V^u s_u(x)$) に作用させると

$$D_\mu(V^u s_u) = P\partial_\mu(V^v s_v) = V^u V_u^\dagger(V^v(\partial_\mu s_v) + (\partial_\mu V^v)s_v) = V^u(\delta_{uv}\partial_\mu + (V_u^\dagger\partial_\mu V^v))s_v. \tag{1.47}$$

となる. ここで右辺第 2 項 $V_u^\dagger\partial_\mu V^v$ は, N 次元部分空間からはみ出さないよう N 次元部分空間に射影する役割を果たすが, これがまさに接続, すなわちゲージ場 $A_{\mu u}{}^v$ なのである. この N 次元部分空間の基底として Dirac 零モードを持って来たところが ADHM 構成法の重要な点なのである.

ここで ($A_\mu = V^\dagger\partial_\mu V,\ \nabla^\dagger V = 0,\ V^\dagger V = 1$ のとき) 成り立つ式を列挙しておく[20] :

$$\partial_\mu f = -f(\partial_\mu f^{-1})f \tag{1.48}$$

$$e_\mu\nabla^\dagger C e_\mu = -2C^\dagger\nabla \tag{1.49}$$

$$D_\mu V^\dagger = V^\dagger\partial_\mu(VV^\dagger) = -V^\dagger C f e_\mu\nabla^\dagger \tag{1.50}$$

[20] 式 (1.48) ~ (1.51) は C が標準形でなくても成り立つ. 式 (1.52) は C が標準形の場合に明らか. なお最後の式 (1.53) の証明は [39, 139] にある.

$$D^2V^\dagger = -4V^\dagger C f C^\dagger \tag{1.51}$$

$$D^2u^\dagger = 0 \tag{1.52}$$

$$\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\partial^2\partial^2 \log\det f \tag{1.53}$$

以上の関係式を用いて, このゲージ場が $G = SU(N)$ の k インスタントン解であることを順次見て行こう.

まず, この $A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V$ から曲率 $F_{\mu\nu}$ を計算し, ASD 性をチェックする. 微分形式の言葉で計算する方が見通しがよい:

$$\begin{aligned}
F &= dA + A\wedge A \\
&= dV^\dagger \wedge dV + V^\dagger dV \wedge V^\dagger dV = dV^\dagger \wedge dV - dV^\dagger V \wedge V^\dagger dV \\
&= dV^\dagger (1 - VV^\dagger)\wedge dV \overset{(1.39)}{=} dV^\dagger \nabla f \nabla^\dagger \wedge dV \\
&\overset{(1.37)}{=} V^\dagger (d\nabla) f \wedge (d\nabla^\dagger) V = V^\dagger C e_\mu dx^\mu f \wedge dx^\nu \bar{e}_\nu C^\dagger V \\
&\overset{(1.30)^{-1}}{=} V^\dagger C dx^\mu f \wedge dx^\nu e_\mu \bar{e}_\nu C^\dagger V \overset{(1.3)}{=} iV^\dagger C f \underbrace{\eta^{(-)}_{\mu\nu}}_{\text{ASD}} C^\dagger V dx^\mu \wedge dx^\nu,
\end{aligned} \tag{1.54}$$

$$F_{\mu\nu} = 2iV^\dagger C f \eta^{(-)}_{\mu\nu} C^\dagger V = 2iv^\dagger f \eta^{(-)}_{\mu\nu} v. \tag{1.55}$$

ゲージ場 A_μ が無限遠でピュア・ゲージになることを示すため, 無限遠での振る舞いを調べる. $|x|\to\infty$ で「 0 次元 Dirac 方程式 」(1.37) は $x^\dagger C^\dagger V \approx 0$ となるので, まず $v = 0$ が言える. このとき規格化条件 (1.38) より $u \approx^{\exists} g(x) \in SU(N)$ となり,

$$A_\mu \approx g^{-1}\partial_\mu g \tag{1.56}$$

が分かる. なお, (1.37) の両辺に x を掛けると,

$$V^\dagger C = \frac{V^\dagger D x^\dagger}{|x|^2} \tag{1.57}$$

が成り立つので, V の無限遠での振る舞いは

$$V_x = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(r^{-1}) \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

とまとめられる.

インスタントン数については, 式 (1.53) を用いることで,

$$\begin{aligned}
\nu[A_\mu] &= -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}\ *F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\ \partial^2\partial^2 \log\det f \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\int dS^\mu_x \partial_\mu \partial^2 \mathrm{Tr}_k \log \underbrace{f}_{\approx |x|^{-2}} = -\frac{8}{16\pi^2}\int d\Omega_x\ \mathrm{Tr}_k 1_{[k]} \ = \ -k
\end{aligned} \tag{1.59}$$

と正しく導かれる. ただし $d\Omega_x$ は x 空間における半径 1 の 3 次元球面の面要素であり, $\int d\Omega_x = 2\pi^2$ である.[21]

[21] 半径 r の $n-1$ 次元球面 S^{n-1} の表面積は $\mathrm{Vol}\,(S^{n-1}_r) = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$ である. (ただし $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$)

D^2 の可逆性は, D^2 の Green 関数が具体的に

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{V_x^\dagger V_y}{|x-y|^2} \tag{1.60}$$

と求まることから示される [33]. この式を示すには $D^2G(x,y) = -\delta(x-y)$ となることを示せばよい. まず,

$$D^2G(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\left\{\underbrace{\partial_x^2\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right)}_{-4\pi^2\delta(x-y)}V_x^\dagger V_y + 2\partial_{x\mu}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right)D_x^\mu V_x^\dagger V_y + \frac{1}{|x-y|^2}D_x^2 V_x^\dagger V_y\right\} \tag{1.61}$$

となるが, ここで $x=y$ の場合と $x\neq y$ の場合とに分けて考える.

- $x=y$ の場合, 式 (1.50) より,

$$D_x^\mu V_x^\dagger V_y = -V^\dagger C f e^\mu \underbrace{\nabla_{x=y}^\dagger V_y}_{=0} \tag{1.62}$$

となり, 式 (1.61) の第 2, 3 項は消える. よって,

$$D^2G(x,y) = -\delta(x-y)\underbrace{V_{x=y}^\dagger V_y}_{=1} = -\delta(x-y). \tag{1.63}$$

- $x\neq y$ の場合, 式 (1.51) も用いると,

$$\begin{aligned}
D^2G(x,y) &= -\underbrace{\delta(x-y)}_{=0}V_x^\dagger V_y + \frac{1}{4\pi^2}\left\{2\partial_{x\mu}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right)D_x^\mu V_x^\dagger V_y + \frac{1}{|x-y|^2}D_x^2 V_x^\dagger V_y\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{(x-y)^\mu}{|x-y|^4}(V_x^\dagger C f e_\mu \nabla_x^\dagger)V_y + \frac{1}{|x-y|^2}(-4V_x^\dagger C f C^\dagger)V_y\right\} \\
&= \frac{1}{\pi^2|x-y|^2}V_x^\dagger C f\left\{\frac{(x-y)^\mu}{|x-y|^2}e_\mu(\nabla_y^\dagger + (x-y)^\dagger C^\dagger) - C^\dagger\right\}V_y \\
&= \frac{1}{\pi^2|x-y|^2}V_x^\dagger C f\left\{\underbrace{\frac{(x-y)^\mu}{|x-y|^2}(x-y)^\nu(\delta_{\mu\nu}+i\eta_{\mu\nu}^{(-)})}_{=1+0} - 1\right\}C^\dagger V_y \;=\; 0.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

これで Green 関数の式 (1.60) が示された.

また, V に対する変換

$$V \to Vg, \quad g(x)\in SU(N) \tag{1.65}$$

は (1.37)-(1.39), を不変に保ち, A_μ に対するゲージ変換となっている：

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu \;=\; (Vg)^\dagger\partial_\mu(Vg) = g^{-1}\underbrace{(V^\dagger\partial_\mu V)}_{A_\mu}g + g^{-1}\partial_\mu g. \tag{1.66}$$

なお, (1.24) では行列 C を定数にとったが一般の複素行列にとっても, この (ADHM) $\longrightarrow$ (Instanton) の議論は成り立つ. ただ, 次のようにして (1.24) の形に持っていくことができる.

いま行列 C を一般の複素行列とし, 次の変換

$$D \to D' = \mathcal{U} D \mathcal{R}, \quad C \to C' = \mathcal{U} C \mathcal{R}, \quad V \to V' = \mathcal{U} V$$
$$\mathcal{U} \in U(N+2k), \quad \mathcal{R} \in GL(k;\mathbf{C}) \otimes 1_{[2]} \tag{1.67}$$

を考える. この変換は, (1.27), (1.37)-(1.39) を不変に保つ. この自由度を用いて, 行列 C を標準形 (1.24) に固定することができるのである[22] .

(Instanton)⟶(ADHM)

ここでは, ゲージ群が $SU(N)$ の場合の k インスタントン $A_\mu^{(N,k)}$ が与えられたとして, それから ADHM データ $S = S(A),\ T_\mu = T_\mu(A)$ を構成する. 示すべきことは, S, T_μ がそれぞれ $N \times 2k, k \times k$ 行列になっていること, T_μ がエルミート行列であること, S, T_μ が ADHM 方程式を満たすことである.

まずインスタントン・バックグラウンド A_μ の下で 4 次元の零質量 Dirac 方程式[23] :

$$\bar{\mathcal{D}}\psi \quad = \quad 0. \tag{1.68}$$

を考える. ψ は Dirac 零モードと呼ばれ, Atiyah-Singer 指数定理により独立に k 個存在することが示される. したがって ADHM のときと同様, ψ は $2N \times k$ 行列と表すことができ, 規格化条件は[24]

$$\int d^4x\ \psi^\dagger \psi = 1_{[k]}. \tag{1.69}$$

である. また完全性条件を満たす :

$$\psi(x)\psi^\dagger(y) = \delta(x-y) + \mathcal{D} G(x,y) \overleftarrow{\bar{\mathcal{D}}}\,. \tag{1.70}$$

ここで $G(x,y)$ は D^2 の Green 関数である. これは ADHM のときと同様, ψ の規格化可能性と D^2 の可逆性から保証される.

ψ にはスピノルの足が含まれているが, ここで次の記号を導入する :

$$\widetilde{\psi} := \psi^t \cdot e_2 \tag{1.71}$$

ただし, ψ^t は ψ をスピノルの足について転置したもので, $N \times 2k$ 行列と理解できる.

さて Dirac 零モード ψ から, ADHM データ S, T を

$$\widetilde{\psi} \quad \approx \quad -\frac{g^\dagger S x^\dagger}{\pi |x|^4} + \mathcal{O}(r^{-4}), \tag{1.72}$$
$$T_\mu \quad = \quad \int d^4x\ \psi^\dagger x_\mu \psi \tag{1.73}$$

[22] まず, ユニタリ行列 $\mathcal{U}$ を左から作用させることで任意の $(N+2k) \times (N+2k)$ 行列 X を対角成分が全て 1 であるような下三角行列に変形することができる. この行列 X の第 $(N+1)$ 列から $(N+2k)$ 列までを行列 C だと思えば, これで C の第 1 行から第 N 行までは全て 0 になっている. あとは $\mathcal{U}$ の右下の部分の $2k \times 2k$ 行列と $\mathcal{R}$ との作用で C の下の部分の $2k \times 2k$ 行列を 1 に変形することができる. $N > 2k$ の場合は, 行列 X の第 $(N-2k+1)$ 列から N 列までを行列 D だと思えば, これで行列 D の第 1 行から第 $(N-2k)$ 行までは全て 0 になっている. したがってこの場合は行列 S のランクが $(N-2k)$ だけ落ち, 行列 Q ((1.32) 参照) の左上の部分の $(N-2k) \times (N-2k)$ ユニタリ行列の作用を考慮する必要がなくなる.

[23] 正確には零質量 Dirac 方程式をカイラル分解した Weyl 方程式であるが, 以下「 Dirac 方程式 」と呼ぶことにする.

[24] $\psi^\dagger\psi$ の縮約はスピノルの足についても行っている. 以後, 特に断らない限り $* \times 2k$ 行列と $2k \times **$ 行列の積はスピノルの足についても縮約をとるものとする.

として取り出そう. g はもともとのインスタントン A_μ の無限遠での振る舞い $A_\mu \approx g^{-1}\partial_\mu g$ に現れるものである. S, T_μ は確かにそれぞれ $N \times 2k, k \times k$ 行列になっている. T_μ のエルミート性もこの式より明らかである.

次に ADHM 方程式 (1.29) ($\nabla^\dagger\nabla$ の Pauli 行列との可換性) をチェックする. そのためにまず

$$T^\mu T^\nu = \int d^4x\ x^\mu \psi^\dagger(x)\psi(x) \int d^4y\ y^\nu \psi^\dagger(y)\psi(y) \tag{1.74}$$

を計算する. 完全性条件 (1.70) を式 (1.74) に代入すると,

$$T^\mu T^\nu = \int d^4x\ x^\mu x^\nu \psi^\dagger(x)\psi(x) + \int d^4x d^4y\ x^\mu y^\nu \psi^\dagger(x) e^\rho \bar{e}^\sigma D_\rho G(x,y) \overleftarrow{D}_\sigma\ \psi(y) \tag{1.75}$$

が分かる.

積分の評価は, まず積分領域を $|x| \le R_x,\ |y| \le R_y$ に制限し, それから $R_x \to \infty,\ R_y \to \infty$ の極限をとることで行う. この積分には発散する部分が含まれているが, あとでこの両辺を 't Hooft のイェータ・シンボルで縮約する際除かれるので問題はない. (1.75) の第 2 項は部分積分を 2 回行うことで次の形になる：

$$\begin{aligned}
(1.75)\text{の第 2 項} &= \int x^\mu d^4x\ y^\nu d^4y\ \mathrm{tr}\left(\bar{e}^\rho \widetilde{\psi}^\dagger(x) D_\rho G(x,y) \overleftarrow{D}_\sigma\ \widetilde{\psi}(y) e^\sigma\right) \\
&= -\int x^\mu dS_x^\rho\ y^\nu dS_y^\sigma\ \mathrm{tr}\left(\bar{e}^\rho \widetilde{\psi}^\dagger(x) G(x,y) \widetilde{\psi}(y) e^\sigma\right) \\
&\quad + \int d^4x\ y^\nu dS_y^\sigma\ \mathrm{tr}\left(\bar{e}^\mu \widetilde{\psi}^\dagger(x) G(x,y) \widetilde{\psi}(y) e^\sigma\right) \\
&\quad + \int x^\mu dS_x^\rho\ d^4y\ \mathrm{tr}\left(\bar{e}^\rho \widetilde{\psi}^\dagger(x) G(x,y) \widetilde{\psi}(y) e^\nu\right) \\
&\quad - \int d^4x\ d^4y\ \mathrm{tr}\left(\bar{e}^\mu \widetilde{\psi}^\dagger(x) G(x,y) \widetilde{\psi}(y) e^\nu\right)
\end{aligned} \tag{1.76}$$

ここで体積積分は $|x| \le R_x,\ |y| \le R_y$ の領域で, 表面積分は $|x| = R_x,\ |y| = R_y$ の領域で行っている. 表面積分になっている項については無限遠での振る舞いだけで評価が可能である.

まず, $R_y \to \infty$ とする. このとき (1.76) の第 1,2 項については

$$\int \underbrace{y^\nu dS_y^\sigma}_{\mathcal{O}(R_y^4)}\ \underbrace{G(x,y)}_{\mathcal{O}(R_y^{-2})}\ \underbrace{\widetilde{\psi}(y)}_{\mathcal{O}(R_y^{-3})} \approx \mathcal{O}(R_y^{-1}) \overset{R_y\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.77}$$

より消える. (1.76) の第 3 項の部分については表面積分になっていないので,

$$\int \underbrace{d^4y}_{\mathcal{O}(R_y^4)}\ \underbrace{G(x,y)}_{\mathcal{O}(R_y^{-2})}\ \underbrace{\widetilde{\psi}(y)}_{\mathcal{O}(R_y^{-3})} \approx \mathcal{O}(R_y^{-1}) \tag{1.78}$$

から分かることは, この積分が収束することだけである. この積分をより具体的に表すため,

$$D^2\widetilde{\chi}(x) = -4\pi\widetilde{\psi}(x), \quad \widetilde{\chi}(x) \approx 0 \tag{1.79}$$

の解 $\widetilde{\chi}(x)$ を考える. 式 (1.72) より,

$$\widetilde{\chi}(x) \approx -\frac{g^\dagger S x^\dagger}{|x|^2} \tag{1.80}$$

が分かる. この $\widetilde{\chi}(x)$ を用いると,

$$\int d^4y\ G(x,y)\widetilde{\psi}(y) = \frac{1}{4\pi}\widetilde{\chi}(x) \tag{1.81}$$

となり, (1.76) の第 3 項の部分は,

$$\begin{aligned}
&\int x^\mu dS_x^\rho\ d^4y\ \mathrm{tr}\ \left(\bar{e}^\rho \widetilde{\psi}^\dagger(x) G(x,y)\widetilde{\psi}(y) e^\nu\right) \\
&\overset{R_y\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4\pi}\int x^\mu dS_x^\rho\ \mathrm{tr}\ \left(\bar{e}_\rho \widetilde{\psi}^\dagger(x)\widetilde{\chi}(x) e^\nu\right) = \frac{1}{4\pi^2}\int x^\mu \frac{x^\rho}{|x|}|x|^3 d\Omega_x\ \mathrm{tr}\ \left(\frac{\bar{e}_\rho x S^\dagger S x^\dagger e^\nu}{|x|^6}\right) \\
&\overset{R_x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4\pi^2}\int \frac{x^\mu}{|x|^2} d\Omega_x\ \mathrm{tr}\ \left(\bar{e}_\rho S^\dagger S x^\dagger e^\nu\right) = \frac{1}{8}\mathrm{tr}\ \left(S^\dagger S \bar{e}^\mu e^\nu\right)
\end{aligned} \tag{1.82}$$

となる.

さてここで, 式 (1.75) の両辺を $\eta^{(+)}_{\mu\nu}$ で縮約する. 式 (1.75) の第 1 項および式 (1.76) の第 4 項は発散しているが, $\eta^{(+)}_{\mu\nu}$ は SD かつ $\mu \leftrightarrow \nu$ の入れ替えについて反対称であるから, この縮約で落ちる[25] . この結果,

$$\eta^{(+)}_{\mu\nu}\left(T^\mu T^\nu - \frac{1}{8}\mathrm{tr}\ \left(S^\dagger S \bar{e}^\mu e^\nu\right)\right) = 0 \tag{1.83}$$

となる. 't Hooft のイェータ・シンボルの関係式 (1.10), (1.11) を用いると,

$$\mathrm{tr}\ \left(\sigma^i (S^\dagger S + T^\dagger T)\right) = 0 \tag{1.84}$$

を得る. こうして ADHM 方程式が満たされることが確かめられた.

$\nabla^\dagger\nabla$ の可逆性についてもチェックすることができる. その逆行列 f の存在を言えばよいが, 基本的には式 (1.88) のように $f \sim (\partial^2)^{-1}\psi^\dagger\psi$ として示される.

また, g, ψ に対する変換

$$g \to Q^\dagger g, \quad \psi \to \psi R, \qquad Q \in SU(N), \quad R \in U(k) \tag{1.85}$$

は, (1.68)-(1.70) および $A_\mu \approx g^{-1}\partial_\mu g$ を不変に保ち, S, T_μ に対する「ゲージ変換」となっている.

Completeness: (ADHM)⟶(Instanton)⟶(ADHM)

ここでは, 与えられた ADHM データ $S^{(k,N)},\ T_\mu^{(k)}$ から構成したインスタントン $A_\mu = A_\mu(S,T)$ を用いて, 再び ADHM データ $S'^{(k',N')} = S'^{(k',N')}(A(S,T)),\ T'^{(k')} = T'^{(k')}(A(S,T))$ を構成する. 再構成された ADHM データが元の ADHM データ $S^{(k,N)},\ T_\mu^{(k)}$ に一致すること (すなわち, $k'=k, N'=N, S'=S, T'_\mu = T_\mu$) を示す. 具体的には, 与えられた ADHM データ $S^{(k,N)},\ T_\mu^{(k)}$ と (1.37)-(1.39) を満たす「0 次元 Dirac 零モード」V を用いて ψ を構成し, これが Dirac 方程式 (1.68) の規格化可能解になっていることと, この ψ から取り出した ADHM データが元の ADHM データ S,T であることを示す.

Dirac 方程式 (1.68) の解 ψ は元の ADHM データ $D, (C), V, f$ を用いて,

$$\widetilde{\psi} = \frac{1}{\pi}V^\dagger C f = \frac{1}{\pi}v^\dagger f \tag{1.86}$$

[25] 式 (1.76) の第 4 項は ASD である. 実際, 式 (1.3) を適用するためには式 (1.76) の第 4 項の中にある $\bar{e}^\mu$ と e^ν を移動しなければならず, その結果 $\bar{e}$ は e の右にきて $\eta^{(+)}$ が現れる.

と表すことができる. 実際, $\bar{\mathcal{D}}\psi = 0 \Leftrightarrow D_\mu \widetilde{\psi} e^\mu = 0$ と

$$\begin{aligned}
\pi D_\mu \widetilde{\psi} e^\mu &= D_\mu (V^\dagger C e^\mu f) = \left\{ \partial_\mu V^\dagger + (V^\dagger \partial_\mu V) V^\dagger \right\} C e^\mu f + V^\dagger C e^\mu \partial_\mu f \\
&= \partial_\mu V^\dagger (1 - V V^\dagger) C e^\mu f - V^\dagger C e^\mu f \partial_\mu (\nabla^\dagger \nabla) f \\
&= (\partial_\mu V^\dagger) \nabla f \nabla^\dagger C e^\mu f - V^\dagger C e^\mu f (\bar{e}_\mu C^\dagger \nabla + \nabla^\dagger C e_\mu) f \\
&\overset{(1.49)}{=} -V^\dagger (C \underbrace{e_\mu f \nabla^\dagger C e^\mu}_{-2 f C^\dagger \nabla} + 4 C f C^\dagger \nabla - 2 C f C^\dagger \nabla) f = 0
\end{aligned} \tag{1.87}$$

より解になっていることが分かる. また ψ は f と関係式

$$\psi^\dagger \psi = -\frac{1}{4\pi^2} \partial^2 f \tag{1.88}$$

で結ばれている. 証明は同様の計算で行うことができる. 式 (1.30) より,

$$\begin{aligned}
f &= \Box^{-1} = \frac{1}{|x|^2} \left(1_{[k]} - \frac{2 T_\mu x^\mu}{|x|^2} + \frac{\mathrm{tr}\,(D^\dagger D)}{2|x|^2} \right)^{-1} \qquad (1.89) \\
&= \frac{1_{[k]}}{|x|^2} + \frac{2 T_\mu x^\mu}{|x|^4} - \frac{\mathrm{tr}\,(D^\dagger D)}{2|x|^4} + \frac{4 (T_\mu x^\mu)^2}{|x|^6} + \frac{2 T_\mu x^\mu \mathrm{tr}\,(D^\dagger D)}{|x|^6} + \frac{(\mathrm{tr}\,(D^\dagger D))^2}{4|x|^6} + \cdots \\
\psi^\dagger \psi &= \delta^4(x) \cdot 1_{[k]} + \frac{\mathrm{tr}\,(S^\dagger S)}{\pi^2 |x|^6} - \frac{9 \mathrm{tr}\,(D^\dagger D) T_\mu x^\mu}{4\pi^2 |x|^8} - \frac{3 (\mathrm{tr}\,(D^\dagger D))^2}{2\pi^2 |x|^8} + \cdots \qquad (1.90)
\end{aligned}$$

が求まる. これより ψ が規格化された解であることが言える：

$$\int d^4x \ \psi^\dagger \psi = 1_{[k]} \tag{1.91}$$

また, (1.73) にしたがって ADHM データを取り出すと,

$$\begin{aligned}
(T'^\mu =) \int d^4x \ \psi^\dagger x^\mu \psi &\overset{(1.88)}{=} -\frac{1}{4\pi^2} \int dS^\nu \underbrace{(x^\mu \partial_\nu - \delta_\nu{}^\mu) f}_{\mathcal{O}(r^{-4}) \text{ の部分は消える}} \\
&\overset{(1.89)}{=} -\frac{1}{4\pi^2} \int dS^\nu \left\{ x^\mu \partial_\nu \left(\frac{-2 T_\rho x^\rho}{|x|^4} \right) + \frac{2 T_\rho x^\rho}{|x|^4} \delta_\nu{}^\mu \right\} \\
&= -\frac{T_\rho}{2\pi^2} \int \Big\{ \underbrace{\left(\frac{x^\rho}{|x|} dS^\mu - \frac{x^\mu}{|x|} dS^\rho \right)}_{=0} \frac{1}{|x|^3} - \underbrace{4 x^\mu x^\rho}_{=\delta^{\mu\rho}|x|^2} \frac{x_\nu}{|x|^6} dS^\nu \Big\} \\
&= T^\mu
\end{aligned} \tag{1.92}$$

となり元の T_μ が出て来る. S は (1.72) より, $\widetilde{\psi}$ の無限遠 ($|x| \to \infty$) での漸近展開の初項に含まれているので, $\widetilde{\psi} = (1/\pi) V^\dagger C f$ の漸近形を調べる. まず式 (1.57) を代入し, V_x の漸近形 "$V_x \approx g$" および f の漸近形 (1.89) を用いると,

$$\widetilde{\psi} = \frac{V^\dagger D x^\dagger f}{\pi |x|^2} \approx -\frac{g^\dagger S x^\dagger}{\pi |x|^4} \tag{1.93}$$

となり, やはり元の S が出て来る. なお, この結果は, $\psi^\dagger \psi$ の漸近展開 (1.90) とも矛盾しない.

こうして元の ADHM データが再現されることが示された.

Uniqueness: (Instanton)⟶(ADHM)⟶(Instanton)

ここでは, 与えられたインスタントン $A_\mu^{(N,k)}$ から構成した ADHM データ $S = S(A),\ T = T(A)$ を用いて, 再びインスタントン $A_\mu^{\prime(N',k')} = A'_\mu(S(A), T(A))$ を構成する. 再構成されたインスタントンが元の

インスタントン $A_\mu^{(N,k)}$ に一致すること (すなわち, $N'=N, k'=k, A'_\mu=A_\mu$) を示す. 具体的には, 与えられたインスタントン $A_\mu^{(N,k)}$ と (1.68), (1.69) を満たす Dirac 零モード ψ を用いて V を構成し, これが「 0 次元 Dirac 方程式 」(1.37) の規格化可能解になっていることと, この V から取り出したインスタントンが元のインスタントン A_μ であることを示す. これができれば, Completeness の議論と合わせて, ADHM データとインスタントンとの 1 対 1 対応が示される.

Dirac 方程式 (1.37) の解 V を構成するため, まず 2 つの方程式を考える：

$$D^2\widetilde{\xi}=0, \quad D^2\widetilde{\chi}=-4\pi\widetilde{\psi} \tag{1.94}$$

ただし, $\widetilde{\chi},\widetilde{\xi}$ は次の境界条件を満たすとする：

$$\widetilde{\xi}\approx g^\dagger(x), \quad \widetilde{\chi}\approx -\frac{g^\dagger S x^\dagger}{|x|^2}. \tag{1.95}$$

$\widetilde{\xi}$ についての式は (Instanton)$\longrightarrow$(ADHM) の時に考えた (1.79), (1.80) である. 式 (1.94) の解 $\widetilde{\xi}$ は漸近的に covariantly constant な N 個の独立な解[26] を列に並べたものである.

この解 $\widetilde{\chi},\widetilde{\xi}$ から V は,

$$V=\begin{pmatrix} \widetilde{\xi}^\dagger_{[N]\times[N]} \\ \widetilde{\chi}^\dagger_{[2k]\times[N]} \end{pmatrix}_{[N+2k]\times[N]} \tag{1.96}$$

として得られる. この V が (1.37), (1.38) を満たしていることをチェックする.

式 (1.87)：$D_\mu(\widetilde{\psi}e^\mu)=0$ と式 (1.94) の左式より,

$$D_\mu\widetilde{\xi}=\widetilde{\psi}e_\mu L \tag{1.97}$$

が言える (ただし L は $2k\times N$ 定数行列). L を求めるため, この両辺に左から $\bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger$ を掛けて, $\int d^4x$ で積分すると,

$$4L=\int d^4x\ \bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger D_\mu\widetilde{\xi}=\int dS_x^\mu\ \bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger\widetilde{\xi}\approx\int\frac{x^\mu d\Omega_x}{|x|^4}\ \bar{e}_\mu\frac{-xS^\dagger g}{\pi|x|^4}g^\dagger=-4\pi S^\dagger \tag{1.98}$$

となる. したがって,

$$D_\mu\widetilde{\xi} \ = \ -\pi\widetilde{\psi}e_\mu S^\dagger \tag{1.99}$$

が得られる.

式 (1.94) の右式についても同様で,

$$D_\mu\widetilde{\chi}+\pi\widetilde{\psi}e_\mu x^\dagger=\widetilde{\psi}e_\mu M \tag{1.100}$$

が言える (ただし M は $2k\times 2k$ 定数行列). M を求めるため, この両辺に左から $\bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger$ を掛けて, $\int d^4x$ で積分すると,

$$\begin{aligned} 4M &= \int d^4x\ \bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger(D_\mu\widetilde{\chi}+\pi\widetilde{\psi}e_\mu x^\dagger)=\int d^4x\ \bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger D_\mu\widetilde{\chi}+\pi\int d^4x\ \bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger\widetilde{\psi}e_\mu x^\dagger \\ &= \int \underbrace{dS_x^\mu}_{\mathcal{O}(r^3)}\underbrace{\bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger\widetilde{\chi}}_{\mathcal{O}(r^{-4})}+4\pi T^\dagger=4\pi T^\dagger \end{aligned} \tag{1.101}$$

[26] $D_\mu\widetilde{\xi}\approx\mathcal{O}(r^{-3})$ を満たす解のことである. このような解は実際に独立に N 個あることが示される (cf.(1.52)).

となる. したがって,

$$D_\mu \widetilde{\chi} \;=\; \pi\widetilde{\psi}e_\mu T^\dagger - \pi\widetilde{\psi}e_\mu x^\dagger \tag{1.102}$$

が得られる.

なお式 (1.99) と式 (1.102) はまとめて,

$$D_\mu V^\dagger \;=\; -\pi\widetilde{\psi}e_\mu\nabla^\dagger \tag{1.103}$$

と書けるが, これは式 (1.50) と式 (1.86) を合わせたものである. この式は極めて面白い関係式である.

次に, この結果 (1.99), (1.102) を用いて, 式 (1.37) : $\Theta := V^\dagger\nabla = 0$ と式 (1.38) : $\Xi := V^\dagger V = 1$ を証明する.

Θ については

$$\begin{aligned} D_\mu\Theta &= (D_\mu V^\dagger)\nabla + V^\dagger(\partial_\mu\nabla) = -\pi\widetilde{\psi}e_\mu\nabla^\dagger\nabla + V^\dagger C e_\mu \\ D^2\Theta &= -\pi\widetilde{\psi}e^\mu\partial_\mu(\nabla^\dagger\nabla) - \pi\widetilde{\psi}e^\mu\nabla^\dagger C e_\mu = -4\pi\widetilde{\psi}C^\dagger\nabla - 2\pi\widetilde{\psi}\underbrace{e^\mu\nabla^\dagger C e_\mu}_{\overset{(1.49)}{=}-2C^\dagger\nabla} = 0 \end{aligned} \tag{1.104}$$

$$\Theta \;=\; \widetilde{\xi}S + \widetilde{\chi}(x-T) \approx g^\dagger S - \frac{g^\dagger S x^\dagger}{|x|^2}(x-T) = \frac{g^\dagger S x^\dagger}{|x|^2}T \approx \mathcal{O}(r^{-1}) \tag{1.105}$$

が成り立つ. $\Theta \approx \mathcal{O}(r^{-1})$ であるから, D^2 が逆を持ち, $\Theta = 0$ が言える.

Ξ についても Θ の時と同様に,

$$D_\mu\Xi \;=\; (D_\mu V^\dagger)V + V^\dagger(V\overset{\leftarrow\dagger}{D_\mu}) \overset{(1.103)}{=} -\pi\widetilde{\psi}e_\mu\Theta^\dagger - \pi\Theta\bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger \overset{\Theta=0}{=} 0 \tag{1.106}$$

$$\Xi \;\approx\; g^\dagger g + \underbrace{\frac{g^\dagger S x^\dagger x S^\dagger g}{|x|^4}}_{\mathcal{O}(r^{-2})} \approx 1 \tag{1.107}$$

が成り立つ. $\Xi \approx \mathcal{O}(1)$ であるから, $\Xi = \text{const.} = 1$ が言える.

また, (1.46) にしたがってインスタントンを取り出すと,

$$(A'_\mu =)\;\; V^\dagger\partial_\mu V = V^\dagger(\partial_\mu V - VA_\mu) + V^\dagger V A_\mu = \underbrace{V^\dagger(V\overset{\leftarrow\dagger}{D_\mu})}_{=-\pi\Theta\bar{e}_\mu\widetilde{\psi}^\dagger=0} + \Xi A_\mu = A_\mu \tag{1.108}$$

となり, 元の A_μ が出て来る.

こうして元のインスタントンが再現され, ADHM データとインスタントンとが 1 対 1 に対応することが示された. これにより 1 階非線形微分方程式の解であるインスタントンが, 行列の方程式 (ADHM 方程式, 0 次元 Dirac 方程式) の解を求めることで得られることが分かった. モジュライ空間の次元も指数定理を用いることなく, 行列の自由度の勘定のみから求めることができるのである.

Examples

ADHM 構成法から実際に BPST 解 [15] ($G = SU(2)$ 1 インスタントン解) や, 't Hooft 解, Jackiw-Nohl-Rebbi 解 [95] ($G = SU(2)$ k インスタントン解) を求めることができる. 解の構成法はこれまでに紹介した通り,

- 手順 (i) ADHM 方程式 (1.28) を解く.
- 手順 (ii)「 0 次元 Dirac 方程式 」(1.37) を解く.
- 手順 (iii)「 0 次元 Dirac 方程式 」の規格化可能解 (零モード) V を用いて, ゲージ場を $A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V$ として構成する.

である.

- BPST 解 (1 インスタントン, $\dim \mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{BPST}} = 5$)

  この解は最も基本的かつ重要なインスタントン解であるが, ADHM 構成法によって極めて簡単に構成される.

  - 手順 (i)

    ADHM 方程式は $k \times k$ 行列の方程式であるから, 今の場合 $(k = 1)$ トリビアルに解ける. 交換子の部分は落ちるので, 行列 B_1, B_2 は任意の複素数とすればよく, I, J についても簡単に求まる. 結果は次の通り :

    $$B_1 = \alpha_1, \quad B_2 = \alpha_2, \quad I = (\rho, 0), \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{1,2} \in \mathbf{C}, \quad \rho \in \mathbf{R}. \tag{1.109}$$

    α の実部, 嘘部を $\alpha_1 = b_2 + ib_1,\ \alpha_2 = b_4 + ib_3$ のように b_μ で表す.

  - 手順 (ii)

    '0 次元 Dirac 作用素' は

    $$\nabla = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \\ & \\ e_\mu(x_\mu - b_\mu) & \end{pmatrix}, \qquad \nabla^\dagger = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \bar{e}_\mu(x_\mu - b_\mu) \\ 0 & \rho & \end{pmatrix} \tag{1.110}$$

    となり,「 0 次元 Dirac 方程式 」$\nabla^\dagger V = 0$ の解は

    $$V = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} & \\ \bar{e}_\mu(x_\mu - b_\mu) & \\ & \\ -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}, \quad \phi = |x - b|^2 + \rho^2 \tag{1.111}$$

    とトリビアルに求まる. 規格化因子 ϕ は規格化条件 $V^\dagger V = 1$ から決まった.

  - 手順 (iii)

    $$A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V \quad = \quad \frac{i(x-b)^\nu \eta_{\mu\nu}^{(-)}}{(x-b)^2 + \rho^2}. \tag{1.112}$$

    曲率 $F_{\mu\nu}$ はこのゲージ場から計算され次のようになる.

    $$F_{\mu\nu} = \frac{2i\rho^2}{(|x-b|^2 + \rho^2)^2} \eta_{\mu\nu}^{(-)}. \tag{1.113}$$

モジュライ空間の次元 5 は, 1 インスタントンの位置 b^μ (4 つ) とサイズ[27] ρ (1 つ) の自由度に対応する.

ここでサイズ・ゼロ極限を取ってみよう. このとき $F_{\mu\nu}$ はちょうどデルタ関数型の特異な配位に近付くことが分かる. インスタントンは定義により滑らかな関数でなければならないので, サイズ・ゼロのインスタントンは存在しない. これはちょうどインスタントン・モジュライ空間の特異点 (スモール・インスタントン特異点) に対応する. 非可換空間ではこの特異点が解消し, 新しいクラスのインスタントンが現れる.

- 't Hooft 解 (k インスタントン, $\dim \mathcal{M}_{2,k}^{\text{'t Hooft}} = 5k$)

  この解も基本的でシンプルなインスタントン解であるが, ADHM 構成法によって簡単に構成される. ここでは複素表示ではなく, 実表示で解く.

  - 手順 (i)

    ADHM 方程式は $k \times k$ 行列の方程式であるが, 行列 T_μ を対角行列として解く. S は簡単に求まり結果は次の通り :

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & \rho_k & 0 \\ 0 & \rho_1 & & 0 & \rho_k \end{pmatrix}, \\ T^\mu &= \operatorname{diag}{}_{p=1}^{k}(b_p^\mu), \qquad \rho_p,\ b_p^\mu \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{1.114}$$

  - 手順 (ii)

    「0 次元 Dirac 方程式」$\nabla^\dagger V = 0$ の解は

$$V = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} 1 \\ ((x^\mu - T^\mu) \otimes \bar{e}_\mu)^{-1} S^\dagger \end{pmatrix}, \tag{1.115}$$

$$\text{ただし} \qquad \phi = 1 + \sum_{p=1}^{k} \frac{\rho_p^2}{|x - b_p|^2},$$

$$((x^\mu - T^\mu) \otimes \bar{e}_\mu)^{-1} = \operatorname{diag}{}_{p=1}^{k} \left(\frac{(x^\mu - b_p^\mu)}{|x - b_p|^2} \otimes e^\mu \right),$$

    と求まる. 規格化因子 ϕ は規格化条件 $V^\dagger V = 1$ から決まった.

  - 手順 (iii)

$$A_\mu^{(-)} = V^\dagger \partial_\mu V = -\frac{i}{\phi} \sum_{p=1}^{k} \frac{\rho_p^2 \eta_{\mu\nu}^{(+)} (x_\nu - b_\nu^{(p)})}{|x - b^{(p)}|^4} = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial^\nu \log \phi. \tag{1.116}$$

    最後の式を log の形にまとめることができたが, これは't Hooft ansatz あるいは CFtHW ansatz と呼ばれており [163, 32, 174], もともとはこの ansatz を直接 4 次元の自己双対方程式に代入することで上記の解が求められた (cf. (1.118)). この解はインスタントンの中心において特異であるが, これはゲージの取り方が悪いからであり, 実際 $k = 1$ の場合, 特異ゲージ変換を行うと BPST インスタントン解にちょうど一致する. (例えば [51] 381-383 ページ参照.) な

[27] ここでインスタントンのサイズとは, $F_{\mu\nu}$ の半値幅のことである.

お, ゲージ場に $\eta^{(+)}_{\mu\nu}$ が現れているが, 曲率を計算すると $\eta^{(-)}_{\mu\nu}$ が現れ, ASD であることが分かる. モジュライ空間の次元 $5k$ は, k インスタントンの位置 b^μ_p ($4k$ 個) とサイズ ρ_p (k 個) の自由度に対応する. ADHM データ T_μ の対角成分 b^μ_p がインスタントンの位置を表す理由は, 式 (1.73) において, x^μ の定数シフトが T^μ の定数シフトを生み出すことからも分かる.

- Jackiw-Nohl-Rebbi 解 (k インスタントン, $\dim \mathcal{M}^{\rm JNR}_{2,k} = 5k+4$)

  't Hooft 解を一般化した Jackiw-Nohl-Rebbi 解というものも存在する. これも ADHM 構成で得られるが, 結果だけ ('t Hooft 解とまとめて) 紹介する :

$$A^{(\pm)}_\mu = \frac{i}{2}\eta^{(\mp)}_{\mu\nu}\partial^\nu \log\phi(x) \quad : \text{'t Hooft Ansatz} \tag{1.117}$$

$$\phi^{-1}\partial^2\phi = 0 \quad : \text{(A)SD 方程式より} \tag{1.118}$$

$$\begin{cases} \phi = 1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{\rho_p^2}{(x-b_p)^2} & : \text{'t Hooft 解} \\ \phi = \displaystyle\sum_{p'=1}^{k+1} \frac{\rho_{p'}^2}{(x-b_{p'})^2} & : \text{Jackiw-Nohl-Rebbi 解} \end{cases} \tag{1.119}$$

  ただし, $A^{(+)}_\mu$ が SD インスタントン解, $A^{(-)}_\mu$ が ASD インスタントン解を表す (複号同順). 解として式 (1.117) の形の仮定をおくことで, 非線形な自己双対方程式が線形な Laplace 方程式 (1.118) に帰着され, 厳密解が求まったのである. Jackiw-Nohl-Rebbi 解の形からは, $(k+1)$ インスタントン解であるかのように見えるが, 実際にインスタントン数を式 (1.17) から計算すると k であることが分かる. 't Hooft 解は Jackiw-Nohl-Rebbi 解から $\rho_{k+1} \to \infty,\ b_{k+1} \to \infty,\ \rho^2_{k+1} = |b_{k+1}|^2$ の極限をとることで得られる. なお $k \geq 3$ のとき, モジュライ空間の次元 $(5k+4)$ のうち, $5k$ は k インスタントンそれぞれの位置 (4 つ) とサイズ (1 つ) の自由度の分に相当するが, 残りの 4 は物理的意味が不明である (ゲージ変換の自由度ではない). $k = 1, 2$ のとき, モジュライ空間の次元について $5k+4 > 8k-3$ となってしまうが, この場合, 余分な自由度 $(7-3k)$ はゲージ変換の自由度であり問題はない.

Notes

- 他のゲージ群 $G = Sp(N), O(N)$ についても ADHM 構成法の議論がなされている (例えば [25]).

1.2 Nahm Construction of Monopoles on $\mathbf{R}^3$

この 1.2 節では Nahm によって与えられた ADHM 構成法のモノポール解への応用 (Nahm 構成法) について紹介する [121]-[124]. モノポールのモジュライ空間と Nahm データのモジュライ空間との 1 対 1 対応の証明の流れは ADHM 構成法と全く同様であるので完全な議論は省略するが, 相違点・類似点を強調し, 具体解の構成を行う.

(Monopole)

(BPS) モノポールは 1 方向に平行移動不変なインスタントンと定義され 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ (座標は x^1, x^2, x^3) に住むと理解される. 簡単のため, ゲージ群 G を $SU(2)$ とし, 自己双対性は ASD とする.

インスタントンのときと同様, まずは (3 次元) Dirac 作用素を定義しなければならない :

- 3 次元 Dirac 作用素

$$\mathcal{D}_{\mathbf{x}}(\xi) := 1_{[2]} \otimes i(\xi - \Phi) + e^i \otimes D_i, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}(\xi) := 1_{[2]} \otimes -i(\xi - \Phi) + e^i \otimes D_i = -\mathcal{D}. \tag{1.120}$$

インスタントンのときの ∂_4, A_4 が $i\xi, -i\Phi$ に置き換わったものと理解される.

以下同様の定義を行うので, 条件を列挙しよう.

- Bogomol'nyi 方程式 (「 3 次元 」自己双対方程式)

$$B_i = -[D_i, \Phi]. \tag{1.121}$$

ここで $B_i := (i/2)\epsilon_{ijk}F^{jk}$ は磁場である. この式も「 $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ が Pauli 行列と可換 」という条件から得られる.

Bogomol'nyi 方程式は $(3+1)$ 次元 Yang-Mills-Higgs 理論のエネルギーを極小にする :

$$E = \frac{1}{4}\int d^3x \mathrm{Tr}\left[F_{ij}F^{ij} + 2D_i\Phi D^i\Phi\right] = \frac{1}{2}\int d^3x \mathrm{Tr}(B_i \mp D_i\Phi)^2 \pm 2\pi a \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi a}\int d^3x \mathrm{Tr}\partial_i(B_i\Phi)\right]}_{=:\nu[\Phi,A_i]} \tag{1.122}$$

右辺第 2 項でまとめた部分 [...] はちょうどモノポールの磁荷を与える. 磁荷の値がちょうど $-k$ となるには, Higgs 場の無限遠での振る舞いが (ゲージ変換の自由度を除いて) 次のようになればよい :

$$\Phi \approx \left(\frac{a}{2} - \frac{k}{2r}\right)\sigma_3 + \mathcal{O}(r^{-2}). \tag{1.123}$$

Higgs 場の真空期待値は $a/2$ である. このとき

- モノポール数

$$\nu[\Phi, A_i] \quad = \quad \frac{1}{2\pi a}\int_{S^2} dS_i \ \mathrm{Tr}\,(B_i\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2} dS_i \ B_i^{a=3} = -k \tag{1.124}$$

となる. また

- $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ は可逆

$$\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}^{\exists}G(\xi; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{1.125}$$

モノポール解[28] はゲージ変換で移り合う自由度を除いて, ある個数のパラメーターで記述される. このパラメーターの空間を $\mathcal{M}^{\mathrm{mono}}_{2,k}$ で表し, $G = SU(2),\ k$ モノポール・モジュライ空間という. モノポールについてまとめると次のようになる :

モノポール[29]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mathrm{mono}}_{2,k} \quad &= \quad \frac{\left\{ (\Phi^{(2,k)}, A_i^{(2,k)}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Bogomol'nyi 方程式} \\ A_\mu := (-i\Phi, A_i) \ : \ N \times N \text{ 反エルミート行列} \\ \text{Higgs 場の境界条件 (1.123)} \\ \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} \text{ は可逆} \end{array} \right\}}{(A_\mu \sim g^{-1}A_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g, \quad g(\mathbf{x}) \in SU(2))} \\ \dim \mathcal{M}^{\mathrm{mono}}_{2,k} \quad &= \quad 4k - 1 \end{aligned} \tag{1.126}$$

[28] 以後モノポールと言ったときは全て BPS モノポールを指すものとする.

[29] A_μ が $G = SU(2)$ の場合の k モノポール解であることを強調する場合, $A_\mu^{(2,k)}$ のように $2, k$ を明示することがある.

$\dim \mathcal{M}^{\rm mono}_{2,k}$ は指数定理の結果 [173, 36, 159] を引用した．ただしモノポールの重心座標の自由度も含む．

(Nahm)

次に Nahm データを定義する．

まず $k \times k$ エルミート行列 $T_i(\xi)$ を用意し，「 1 次元零質量 Dirac 作用素 」を定義する：

- 「 1 次元零質量 Dirac 作用素 」

$$\nabla_\xi(\mathbf{x}) = i\frac{d}{d\xi} + e_i(x^i - T^i), \quad \nabla_\xi(\mathbf{x})^\dagger = i\frac{d}{d\xi} + \bar{e}_i(x^i - T^i) \tag{1.127}$$

ここで x^i は $\mathbf{R}^3$ の座標を表し，ξ は $G = SU(2)$ の場合は区間 $(-(a/2), a/2)$ の元である．[30]

- Nahm 方程式 (「 1 次元自己双対方程式 」$\Leftrightarrow$ $\nabla^\dagger\nabla$ が Pauli 行列と可換)：

$$\frac{dT_i}{d\xi} \quad = \quad i\epsilon_{ijl}T_jT_l \tag{1.128}$$

- $T_i(\xi)$ の境界条件

$$T_i(\xi) \quad \overset{\xi\to\pm a/2}{\longrightarrow} \quad \frac{\tau_i}{\xi \mp \dfrac{a}{2}} + (\xi\text{について正則な項}) \tag{1.129}$$

$$\text{ただし} \qquad \tau_i \ : \ \mathcal{SU}(2)\text{ の } k \text{ 次元既約表現} \quad [\tau_i, \tau_j] = i\epsilon_{ijl}\tau_l$$

となる．

Nahm データ全体の集合を $\mathcal{M}^{\rm Nahm}_{k,2}$ と表し，Nahm データのモジュライ空間ということにする．Nahm データについてまとめると次のようになる：

Nahm データ[31]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\rm Nahm}_{k,2} \quad &= \quad \frac{\left\{ T_i^{(k,2)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Nahm 方程式} \\ T_i \ : \ k \times k \text{ エルミート行列} \\ \text{Nahm データの境界条件 (1.129)} \\ \nabla^\dagger\nabla \text{ は可逆} \end{array} \right\}}{(T_i \sim R^{-1}T_iR, \quad R(\xi) \in U(k))} \\ \dim \mathcal{M}^{\rm Nahm}_{k,2} \quad &= \quad 4k - 1 \end{aligned} \tag{1.130}$$

次元は [19] で求められている．

これらのモジュライ空間には 1 対 1 対応が存在する：

$$\mathcal{M}^{\rm mono}_{2,k} \overset{1:1}{=} \mathcal{M}^{\rm Nahm}_{k,2} \tag{1.131}$$

その証明は ADHM 構成法の場合と全く同様であるので詳細は省略する．[32] (Nahm)$\longrightarrow$(Monopole) をメインに解説する．

(Nahm)$\longrightarrow$(Monopole)

ここでは与えられた Nahm データ $T_i^{(k)}$ からモノポール解 $\Phi = \Phi(T), A_i = A_i(T)$ を構成する．

[30] ξ の取り得る領域はゲージ群に依存する．例えば $G = U(2)$ の場合は有限区間 (a_-, a_+), $G = U(1)$ の場合は半直線となる．

[31] Nahm データ T_i が境界条件 (1.129) を満たす $k \times k$ 行列であることを強調する場合，$T_i^{(k,2)}$ のように $k, 2$ を明示することがある．

[32] 詳細は [37, 86, 123, 126] などを御覧ください．

まず ADHM の場合と同様,「 1 次元零質量 Dirac 方程式 」を解く：

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\xi)^{\dagger}v = i\begin{pmatrix} \partial_\xi + x^3 - T^3 & x^1 - ix^2 - T^1 + iT^2 \\ x^1 + ix^2 - T^1 - iT^2 & \partial_\xi - x^3 + T^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{1.132}$$

v は規格化可能な解を 2 個列に並べたものであり, $2k \times 2$ 行列である：

$$\int d\xi\ v^{\dagger}v \quad = \quad 1_{[2]}. \tag{1.133}$$

また完全性条件が成り立つ：

$$v(\xi)v(\xi')^{\dagger} \quad = \quad \delta(\xi - \xi') - \nabla(\xi)f(\xi,\xi')\overleftarrow{\nabla}\,(\xi')^{\dagger} \tag{1.134}$$

この v から Higgs 場 Φ, ゲージ場 A_i を

$$\Phi = \int d\xi\ v^{\dagger}\xi v, \quad A_i = \int d\xi\ v^{\dagger}\partial_i v \tag{1.135}$$

として作る. A_i は 2×2 行列であり, $A_i^{\dagger} = -A_i$ が分かるので, $G = U(2)$ が言える.

この Higgs 場, ゲージ場がモノポール数 $-k$ のモノポールであることは ADHM のときと全く同様の手続きで示すことができる. また, v に対する変換 $v \to vg,\ g(\mathbf{x}) \in SU(2)$ は (1.132), (1.133) を不変に保つが, この変換は A_μ に対するゲージ変換となる (ADHM のときと同様).

(Monopole)⟶(Nahm)

ここでは, ゲージ群が $SU(2)$ の場合の k モノポール解 $\Phi, A_i^{(2,k)}$ が与えられたとして, それから Nahm データ T_μ を構成する. 手順は全く同様であり, まずモノポール・バックグラウンド A_μ の下で (3 次元) 零質量 Dirac 方程式：

$$\bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}(\xi)\psi(\xi,\mathbf{x}) = 0, \tag{1.136}$$

$$\int d^3x\ \psi_\xi^{\dagger}\psi_\xi = 1_{[k]} \tag{1.137}$$

を解き, この Dirac 零モード ψ_ξ ($2N \times k$ 行列 [23]) から, T_i を

$$T_i = \int d^3x\ \psi_\xi^{\dagger}x_i\psi_\xi \tag{1.138}$$

として取り出す. T_i はたしかに $k \times k$ エルミート行列になっている. これは実際 Nahm 方程式を満たし, 正しい Nahm データとなっていることが分かる. また ADHM のときと同様, T_i の対角成分はモノポールの位置を表す.

Completeness および Uniqueness の証明も同様であり, 境界条件同士の対応も証明される. ADHM の場合と非常に類似した形で Nahm データとモノポール解との 1 対 1 対応が示されるのである.

Note

こうして, ADHM の場合と非常に類似した形で Nahm データとモノポール解との 1 対 1 対応が示された. これによりモノポール解が, Bogomol'nyi 方程式 (偏微分方程式) を解く代わりに, 比較的やさしい Nahm 方程式や 1 次元 Dirac 方程式 (どちらも常微分方程式) を解くことで得られる. Nahm 構成法を用いて実際に $G = SU(N)$ 球対称 k モノポール解などが導出されている [20].

Examples

いくつかの具体例を構成しよう. 解の構成法はこれまでに紹介した通り,

- 手順 (i) Nahm 方程式 (1.128) を解く.
- 手順 (ii)「 1 次元 Dirac 方程式 」 (1.132) を解く
- 手順 (iii)「 1 次元 Dirac 方程式 」の規格化可能解 (零モード) v を用いて, Higgs 場を $\Phi = \int d\xi\ v^\dagger \xi v$, ゲージ場を $A_i = \int d\xi\ v^\dagger \partial_i v$ として構成する. 積分区間は考えているモノポールに依存する.

である.

- $G = U(2)$ BPS 't Hooft-Polyakov モノポール $(k = 1)$

  $k = 1$ のとき, 境界条件は簡単化され, Nahm 方程式はトリビアルに解ける :

$$T_i = 0. \tag{1.139}$$

  これはモノポールを原点に置いたことに相当する.

  次に「 1 次元 Dirac 方程式 」(1.132) を解くため v を次の形に取る[33] :

$$v = \begin{pmatrix} -(x_1 - ix_2) \\ \partial_\xi + x^3 \end{pmatrix} \beta. \tag{1.140}$$

  このとき β についての微分方程式は $\partial_\xi^2 \beta = r^2 \beta$ となり,

$$\beta = e^{\pm r\xi} \tag{1.141}$$

  と求まる. [34] よって規格化条件より Dirac 零モードは

$$v = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_1 - ix_2}{\sqrt{(r + x_3)(e^{2ra_+} - e^{2ra_-})}} e^{r\xi} & \dfrac{x_1 - ix_2}{\sqrt{(r - x_3)(e^{-2ra_-} - e^{-2ra_+})}} e^{-r\xi} \\ \sqrt{\dfrac{r + x_3}{e^{2ra_+} - e^{2ra_-}}} e^{r\xi} & \sqrt{\dfrac{r - x_3}{e^{2ra_+} - e^{2ra_-}}} e^{-r\xi} \end{pmatrix}. \tag{1.142}$$

  となる. ただし積分区間は (a_-, a_+) である. これより Higgs 場, ゲージ場が求まる. Higgs 場は次のようになる (ゲージ場は複雑) :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{a_+ e^{2ra_+} - a_- e^{2ra_-}}{e^{2ra_+} - e^{2ra_-}} - \dfrac{1}{2r} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_- e^{-2ra_-} - a_+ e^{-2ra_+}}{e^{-2ra_-} - e^{-2ra_+}} + \dfrac{1}{2r} \end{pmatrix}. \tag{1.143}$$

  ここで積分区間を $(-(a/2), a/2)$ ととると $G = SU(2)$ となり, これは (ゲージ変換の自由度を除いて) Prasad-Sommerfield モノポール [148] に一致する : [35]

$$\Phi = \frac{x^i \sigma_i}{2|\vec{x}|^2} \left(\frac{a|\vec{x}|}{\tanh a|\vec{x}|} - 1 \right), \quad A_i = \frac{\epsilon_{ijk} \sigma^j x^k}{2|\vec{x}|^2} \left(\frac{a|\vec{x}|}{\sinh a|\vec{x}|} - 1 \right), \tag{1.144}$$

  また積分区間を $(-\infty, 0)$ ととると $G = U(1)$ となり[36] , (ゲージ変換の自由度を除いて) Dirac モノポール [41] に一致する :

$$\Phi = -\frac{1}{2r},\ A_r = A_\vartheta = 0,\ A_\varphi = -\frac{i}{2r} \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{1.145}$$

[33] Higgs 場 Φ が σ_3 に比例するようなゲージに相当する.
[34] このことは独立解が 2 個あることを示しており, ゲージ場は $U(2)$ となる.
[35] v として最も自然な形 : $v \propto \exp(-x^i \sigma_i \xi)$ を採用すると, この PS 解が直接導かれる.
[36] 積分区間をこのようにとると, 解 (1.141) のうち $e^{-r\xi}$ の方は規格化できなくなるためである.

ただし (r, ϑ, φ) は普通の極座標である.

ゲージ場は $\vartheta = 0$ で発散しており, それから計算される磁場も $\vartheta = 0$, すなわち x^3 軸の正の部分にデルタ関数型の特異性を持つことが分かる. この x^3 軸の正の部分に沿ったストリング状の特異点の集まりを Dirac ストリングと呼ぶ. Dirac ストリングは無限小の幅を持ったソレノイドと解釈でき, ゲージ変換でその方向が変わる非物理的対象である[37] . x^3 軸の正の部分以外では磁場は

$$B_i = -\partial_i \Phi = -\frac{x^i}{2r^3} \tag{1.146}$$

と計算され, 放射状の分布をしている (図 10 の左図参照).

Notes

- 境界条件どうしの対応の証明はやや複雑であり, まずスペクトラル曲線を経由してなされた [85, 86]. 直接の対応関係の証明は [126] にある.
- 他のゲージ群についても Nahm 構成法の議論がなされている [90]. この場合一般に $SU(2)$ の場合の Nahm 方程式に, ADHM 方程式の S あるいは I, J に相当する項が加わり, ADHM 方程式に類似した形となる. (1.5 節参照)
- モノポールの記述には様々な方法があり, 状況に応じて適当なものが用いられる.[38]

1.3 Dualities and Dimensional Reductions

これまでの議論を振り返ると, ADHM 構成法と Nahm 構成法は極めて類似したものであることが分かる. この節では, 4 次元からの次元還元による視点から, その理由について考察する.

Dualities

まず得られた結果を列挙する：

- 自己双対方程式[39]

$$\begin{aligned}
\text{(A)SD 方程式 (Instanton)} \quad &: \quad F_{\mu\nu} + {}^*F_{\mu\nu} = 0 \\
&\Leftrightarrow \eta^{(+)\mu\nu}[D_\mu, D_\nu] = 0 \\
&\Leftrightarrow [D_i, D_4] + \frac{1}{2}\epsilon_{ijl}[D_j, D_l] = 0 \quad i = 1, 2, 3 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} [D_1, D_2] + [D_3, D_4] = 0 \\ [D_1, D_3] - [D_2, D_4] = 0 \\ [D_1, D_4] + [D_2, D_3] = 0 \end{cases} \\
\text{Bogomol'nyi 方程式 (Monopole)} \quad &: \quad [D_i, \Phi] + B_i = 0 \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

[37] モノポールに関する詳しいレヴューとして例えば [59, 73] がある.
[38] レヴューとして例えば [7, 118, 158] 等がある.
[39] $\epsilon_{ijk} := \epsilon_{ijk4}$ とした.

$$\Leftrightarrow \partial_i\Phi + [A_i,\Phi] + \frac{i}{2}\epsilon_{ijl}[D_j,D_l] = 0 \quad i=1,2,3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [D_1,D_2]+[D_3,A_4]=0 \\ [D_1,D_3]-[D_2,A_4]=0 \qquad A_4 := -i\Phi \\ [D_1,A_4]+[D_2,D_3]=0 \end{cases}$$

Nahm 方程式[40] : $$\frac{d}{d\xi}T_i - i[T_4,T_i] - \frac{i}{2}\epsilon_{ijl}[T_j,T_l] = 0 \quad i=1,2,3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [T_1,T_2]-[T_3,\widehat{D}_4]=0 \\ [T_1,T_3]-[T_2,\widehat{D}_4]=0 \qquad \widehat{D}_4 := \dfrac{d}{d\xi} - iT_4 \\ [T_1,\widehat{D}_4]+[T_2,T_3]=0 \end{cases}$$

ADHM 方程式 : $$\mathrm{tr}\left(\sigma^i(S^\dagger S + T^\dagger T)\right) = 0 \quad i=1,2,3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [T_1,T_2]+[T_3,T_4] - \dfrac{i}{2}(I^\dagger I - JJ^\dagger) = 0 \\ [T_1,T_3]-[T_2,T_4] - \dfrac{1}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) = 0 \\ [T_1,T_4]+[T_2,T_3] - \dfrac{i}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) = 0 \end{cases}$$

- Dirac 方程式

$$\begin{aligned}
\text{Instanton} \quad &: \quad \bar{\mathcal{D}}_x\psi(x) = \bar{e}^\mu(\partial_\mu + A_\mu)\psi(x) = 0 \\
\text{Monopole} \quad &: \quad \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}\psi_\xi(\mathbf{x}) = \left\{\bar{e}^i(\partial_i + A_i) - i(\xi - \Phi)\right\}\psi_\xi(\mathbf{x}) = 0 \\
\text{Nahm} \quad &: \quad \nabla^\dagger_\xi v_{\mathbf{x}}(\xi) = \left(i\frac{d}{d\xi} - T_4 + \bar{e}_i(x^i - T^i)\right)v_{\mathbf{x}}(\xi) = 0 \\
\text{ADHM} \quad &: \quad \nabla^\dagger V_x = S^\dagger u_x + \bar{e}_\mu(x^\mu - T^\mu)v_x = 0
\end{aligned}$$

- Dirac 零モードを用いたゲージ場, ADHM/Nahm データの構成

$$\begin{aligned}
\text{Instanton} \quad &: \quad A_\mu = V_x^\dagger \frac{\partial}{\partial x^\mu} V_x \\
\text{Monopole} \quad &: \quad A_4 = \int d\xi\ v^\dagger_{\mathbf{x}}(\xi)(-i\xi)v_{\mathbf{x}}(\xi),\ A_i = \int d\xi\ v^\dagger_{\mathbf{x}}(\xi)\frac{\partial}{\partial x^i}v_{\mathbf{x}}(\xi) \\
\text{Nahm} \quad &: \quad T_4 = \int d^3x\ \psi^\dagger_\xi(\mathbf{x})i\frac{d}{d\xi}\psi_\xi(\mathbf{x}),\ T_i = \int d^3x\ \psi^\dagger_\xi x^i\psi_\xi \\
\text{ADHM} \quad &: \quad T_\mu = -\int d^4x\ \psi^\dagger(x)x_\mu\psi(x),\ S \approx -\pi g^\dagger\widetilde{\psi}|x|^2x^\dagger
\end{aligned}$$

- 曲率

$$\begin{aligned}
\text{Instanton} \quad &: \quad [D_\mu, D_\nu] = 2iv^\dagger f_x \eta^{(-)}_{\mu\nu} v \\
\text{Monopole} \quad &: \quad [D_\mu, D_\nu] = 2i\int d\xi d\xi'\ v^\dagger_{\mathbf{x}}(\xi)f_{\mathbf{x}}(\xi,\xi')\eta^{(-)}_{\mu\nu}v_{\mathbf{x}}(\xi') \\
\text{Nahm} \quad &: \quad [T_\mu, T_\nu] = 2i\int d^3x\ d^3y\ \psi^\dagger_\xi(\mathbf{x})G_\xi(\mathbf{x},\mathbf{y})\eta^{(-)}_{\mu\nu}\psi_\xi(\mathbf{y}) \\
\text{ADHM} \quad &: \quad [T_\mu, T_\nu] = 2i\int d^4x\ d^4y\ \psi^\dagger(x)G(x,y)\eta^{(-)}_{\mu\nu}\psi(y) - \frac{i}{4}\mathrm{tr}\,(\eta^{(+)}_{\mu\nu}S^\dagger S)
\end{aligned}$$

- Green 関数

$$\text{Instanton} \quad : \quad V_x^\dagger V_y = (2\pi)^2(x-y)^2G(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
\text{Monopole} \quad &: \quad v^{\dagger}_{\mathbf{x}}(\xi)v_{\mathbf{y}}(\xi) = 2\pi\left((\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 - \frac{d^2}{d\xi^2}\right)G_{\xi}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
\text{Nahm} \quad &: \quad \psi^{\dagger}_{\xi}(\mathbf{x})\psi_{\xi'}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{x}^2} + (\xi-\xi')^2\right)f_{\mathbf{x}}(\xi,\xi') \\
\text{ADHM} \quad &: \quad \psi^{\dagger}(x)\psi(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_x
\end{aligned}
$$

このように, ADHM/Nahm 構成法には美しい双対性が成り立っていることが見て取れる. 特に $x \leftrightarrow \xi,\ A_\mu \leftrightarrow T_\mu$, (微分)↔(掛け算) の入れ替えに関する対称性が顕著である. (微分)↔(掛け算) の入れ替えに関する対称性は Fourier 変換に類似した対称性を示唆している.

Dimensional Reductions

- (A)SD Equations

  ASD 方程式 $F_{\mu\nu} + *F_{\mu\nu} = 0$ の次元還元によって, Bogomol'nyi 方程式, Nahm 方程式, ADHM 方程式が得られることを示す.

  まず, ゲージ場 A_μ が x^4 に依存しない $(\partial_4 A_\mu = 0)$ 場合を考える. このとき ASD 方程式 (1.15) は

  $$[A_4, D_i] + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}[D_j, D_k] = 0 \tag{1.147}$$

  となるが, $\Phi := -iA_4$ とおけば, Bogomol'nyi 方程式に一致する.

  次に, ゲージ場 A_μ が x^i に依存しない $(\partial_i A_\mu = 0)$ 場合を考える. このとき ASD 方程式 (1.15) は

  $$[D_4, A_i] - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}[A_j, A_k] = 0 \tag{1.148}$$

  となるが, $\partial_4 = \dfrac{d}{d\xi}, A_\mu = -iT_\mu$ とおけば,

  $$\frac{d}{d\xi}T_i - i[T_4, T_i] - \frac{i}{2}\epsilon_{ijl}[T_j, T_l] = 0 \tag{1.149}$$

  となり, Nahm 方程式を与えていることが分かる.

  さらに, ゲージ場 A_μ が x^ν に依存しない $(\partial_\mu A_\nu = 0)$ 場合を考える. このとき ASD 方程式 (1.15) は

  $$\eta^{(+)\mu\nu}[A_\mu, A_\nu] = 0 \tag{1.150}$$

  となるが, 式 (1.10) : $\eta^{(+)\mu\nu} = -(i/2)\mathrm{tr}\,(\sigma^i\bar{e}^\mu e^\nu)\sigma_i$ に注意すれば,

  $$\mathrm{tr}\,(\sigma^i[\bar{e}^\mu A_\mu, e^\nu A_\nu]) = 0 \tag{1.151}$$

  が得られる. ここで $T = ie^\mu A_\mu$ $(T^\dagger = i\bar{e}^\mu A_\mu)$ とおけば, これが本質的に ADHM 方程式を与えていることが分かる. 「自己双対性 = Dirac 作用素の 2 乗が Pauli 行列と可換」という図式は基本的に式 (1.10) そのものなのである. この議論だと S が含まれないが, S は無限遠の情報から得られるものであり, S^4 と $\mathbf{R}^4$ の微妙な差異から生じるものであると考えられるので, このような大雑把な議論からは導出されないのであろう. これについては次の節でより詳しく考察する.

- Dirac Equations

  インスタントン・バックグラウンドの下での Dirac 方程式 $\bar{\mathcal{D}}_x\psi(x)=0$ の次元還元 (あるいは Fourier 変換) によって, モノポール・バックグラウンド, 「Nahm データ・バックグラウンド」, 「ADHM データ・バックグラウンド」の下での「Dirac 方程式」$\bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}\psi_\xi(\mathbf{x})=0,\ \nabla_\xi^\dagger v_{\mathbf{x}}(\xi)=0,\ \nabla^\dagger V_x=0$ が得られることを示す.

  まず, ゲージ場 A_μ が x^4 に依存しない $(\partial_4 A_\mu=0)$ 場合を考える. このとき変数 x^4 に関して (自明な) Fourier 変換を考えることができて $(\psi(x)=\psi_\xi(\mathbf{x})e^{i\xi x^4})$,

$$\begin{aligned} \bar{e}^\mu D_\mu\left(\psi_\xi(\mathbf{x})e^{i\xi x^4}\right) &= 0 \\ \text{よって}\quad \left\{\bar{e}^i D_i + i(\xi-\Phi)\right\}\psi_\xi(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{1.152}$$

  が導かれるが, これはまさにモノポール・バックグラウンドの下での「3 次元 Dirac 方程式」(1.136) である.

  次に, ゲージ場 A_μ が x^i に依存しない $(\partial_i A_\mu=0)$ 場合を考える. このとき, 変数 x^i に関して Fourier 変換を考えることができて,

$$\begin{aligned} \bar{e}^\mu D_\mu\left(\psi_\xi(x^4)e^{ix^i\xi_i}\right) &= 0 \\ \text{よって}\quad \left(\partial_4 + A_4 + \bar{e}_i(A_i+i\xi_i)\right)\psi_\xi(x^4) &= 0 \end{aligned} \tag{1.153}$$

  となる. ここで, $A_\mu=-iT_\mu, \psi=v$ とおき, $x\leftrightarrow\xi$ と変数を入れ換えると,

$$\left(i\frac{d}{d\xi} - T_4 + \bar{e}_i(x^i-T^i)\right)v_{\mathbf{x}}(\xi)=0 \tag{1.154}$$

  となるが, これは「Nahm データ・バックグラウンド」の下での「1 次元 Dirac 方程式」である.

  さらにゲージ場 A_ν が x^μ に依存しない $(\partial_\mu A_\nu=0)$ 場合を考える. このとき変数 x^μ に関して Fourier 変換を考えることができて,

$$\begin{aligned} \bar{e}^\mu D_\mu\left(\psi_\xi e^{ix^\mu\xi_\mu}\right) &= 0 \\ \text{よって}\quad \bar{e}^\mu(A_\mu+i\xi_\mu)\psi_\xi &= 0 \end{aligned} \tag{1.155}$$

  となる. ここで, $A_\mu=-iT_\mu, \psi=v$ とおき, $x\leftrightarrow\xi$ と変数を入れ換えると,

$$(x^\dagger - T^\dagger)v_x=0 \tag{1.156}$$

  が得られる. これは「ADHM データ・バックグラウンド」の下での「0 次元 Dirac 方程式」$\nabla^\dagger V_x=0$, すなわち

$$S^\dagger u_x + (x^\dagger - T^\dagger)v_x = 0 \tag{1.157}$$

  に類似している. S が含まれていない理由は自己双対方程式の考察のときと同様である.

このように, ADHM/Nahm 構成法の背後にはある普遍的な構造が潜んでいることが明らかになった. インスタントン解と ADHM データ, あるいはモノポール解と Nahm データとの間の双対性は結局, 同じものの異なる記述に過ぎないと言える.

Notes

- 2 次元への次元還元も可能であり, この場合の自己双対方程式は $\partial_{2,3}A_\mu = 0$ として,

$$F = -\frac{i}{2}[\Phi, \Phi^\dagger], \qquad d_A''\Phi = 0 \tag{1.158}$$

となる (ただし, $F := [D_4, D_1],\ \Phi := A_2 + iA_3,\ d_A'' := D_4 - iD_1$). この方程式系は Hitchin システム [87] として知られており, 数学的研究が活発になされている.

- 自己双対方程式の次元還元は, その方法を工夫することで, 様々な可積分方程式を生み出すことが知られている (Ward 予想 [171]). 自己双対方程式の次元還元とさまざまな可積分系との関連について包括的にまとめた本として [1, 113] がある.

1.4 Nahm Transformation

1.3 節では次元還元の視点から考察を行ったが, この 1.4 節ではさらに, なぜ (4 次元) と (0 次元) の間, あるいは (3 次元) と (1 次元) の間に双対性が成立したのか, また, なぜ Fourier 変換的な双対性があるのか, その理由を Nahm 変換という双対変換から考察を行う.

Nahm 変換は 4 次元トーラス T^4 上の $G = U(N),\ k$ インスタントンを双対トーラス $\widehat{T}^4$ 上の $\widehat{G} = U(k),\ N$ インスタントンにうつす変換であり, 両者のモジュライ空間は 1 対 1 である. ここでは主に Braam-van Baal の論文 [21] に沿って議論を進めるが, Schenk の論文 [153] および Donaldson-Kronheimer の教科書 [43] の節 3.2 も参考にした. 記述はやや数学的になるが, この方が背景の幾何学的構造がより明解になると思われる. 議論の流れや証明は ADHM 構成法とほぼ同様であるので省略し, Poincaré 直線束などの舞台を説明する. 最後に ADHM/Nahm 構成法の双対性について再考する.

Poincaré Line Bundle

まず舞台設定を行う. トーラス, 双対トーラスおよび Poincaré 直線束を定義する.

Λ を $\mathbf{R}^4$ におけるランク 4 の格子とする. このとき 4 次元トーラス T^4 および双対トーラス $\widehat{T}^4$ は

$$T^4 := \mathbf{R}^4/\Lambda, \quad \widehat{T}^4 := \mathbf{R}^{4*}/2\pi\Lambda^* \tag{1.159}$$

で与えられる. ただし, $\mathbf{R}^{4*}$ は $\mathbf{R}^4$ の双対ベクトル空間であり, Λ^* は Λ の双対格子

$$\Lambda^* := \left\{\mu \in \mathbf{R}^{4*} \mid \mu \cdot \lambda \in \mathbf{Z},\ {}^\forall\lambda \in \Lambda\right\} \tag{1.160}$$

である[41] . つまりトーラスと双対トーラスとは大雑把に言って「半径が逆数の」関係にあり, $(\mathrm{vol}\, T^4)\cdot(\mathrm{vol}\,\widehat{T}^4) = (2\pi)^4$ が成り立つ. また $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^{4*}$ の座標をそれぞれ x^μ, ξ_μ と表す.

次に, トーラス T^4 上の自明直線束 $\mathcal{L} = T^4 \times \mathbf{C} \to T^4$ を導入し, これを射影 $\pi : T^4 \times \mathbf{R}^{4*} \to T^4$ で $T^4 \times \mathbf{R}^{4*}$ 上に引き戻すことを考える. この直線束のゲージ群は $U(1)$ である. $\mathcal{L}$ を射影 π で引き戻した自明直線束 $\pi^*\mathcal{L} \to T^4 \times \mathbf{R}^{4*}$ には自然なゲージ場

$$\omega(x, \xi) = i\xi_\mu dx^\mu \tag{1.161}$$

が定義できるが, これは $\pi^*\mathcal{L} \to T^4 \times \widehat{T}^4$ 上のゲージ場として理解することができる. 実際 $\omega(x,\xi)$ と $\omega(x, \xi + 2\pi\mu)$ とはゲージ変換で結ばれている :

$$\omega(x, \xi + 2\pi\mu) = g^{-1}\omega(x,\xi)g + g^{-1}dg, \qquad {}^\exists g(x) = e^{2\pi i\mu\cdot x} \in U(1), \quad \mu \in \Lambda^*. \tag{1.162}$$

[41] 以下この節ではドット "$\cdot$" は $\mathbf{R}^4$ と $\mathbf{R}^{4*}$ との内積を表すものとする.

この同値関係により $T^4 \times \widehat{T}^4$ 上の直線束が定義される. これを Poincaré 直線束といい, $\mathcal{P} \to T^4 \times \widehat{T}^4$ で表す. Poincaré 直線束の曲率 $\Omega(x,\xi)$ は

$$\Omega(x,\xi) = id\xi_\mu \wedge dx^\mu \tag{1.163}$$

となる.

双対 Poincaré 直線束 $\widehat{\mathcal{P}} \to T^4 \times \widehat{T}^4$ も双対トーラス $\widehat{T}^4$ 上の自明直線束 $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{T}^4 \times \mathbf{C} \to \widehat{T}^4$ から同様に定義され, そのゲージ場は $\omega'(x,\xi) = ix^\mu d\xi_\mu$ となる. また, $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^{4*}$ 上のゲージ変換 $\exp(-i\xi \cdot x)$ により, ゲージ場 $\omega(x,\xi) = i\xi_\mu dx^\mu$ は $\omega'(x,\xi) = -ix^\mu d\xi_\mu$ にうつされる：

$$\omega(x,\xi) = i\xi_\mu dx^\mu \quad \longrightarrow \quad \omega'(x,\xi) = \omega(x,\xi) + e^{i\xi\cdot x} d e^{-i\xi\cdot x} = -ix^\mu d\xi_\mu. \tag{1.164}$$

したがって $\widehat{\mathcal{P}}$ は $\mathcal{P}$ の複素共役である.

ADHM/Nahm 構成法に潜んでいた双対性が Fourier 変換的性質を帯びている理由は, この背後にある Poincaré 直線束の存在に他ならない.

Poincaré 直線束についてまとめると次のようになる：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P} & & \\ & & \downarrow & & \\ \mathcal{L} & & T^4 \times \widehat{T}^4 & & \widehat{\mathcal{L}} \\ \downarrow & \overset{\pi}{\swarrow} & & \overset{\hat{\pi}}{\searrow} & \downarrow \\ T^4 & & & & \widehat{T}^4 \end{array}$$

Nahm Transformation

ここで Nahm 変換 $\mathcal{N} : (E, A) \mapsto (\widehat{E}, \widehat{A})$ を定義する.

まず, T^4 上のエルミート計量の入った, ランク N の複素ベクトル束 E を導入し, これを射影 π で引き戻す. ゲージ群は $U(N)$ である. $\mathcal{P} \otimes \pi^* E|_{T^4 \times \{\xi\}}$ 上のゲージ場を $A_\xi := A \otimes 1_{\mathcal{L}} + 1_{[N]} \otimes i\xi_\mu dx^\mu$ で定義する. A_ξ の与える曲率 F_ξ は A の与える曲率 F に等しい. また, A_ξ から定まる共変微分を $D[A_\xi] := d + A_\xi$ で表す.

次に Dirac 作用素を定義する. $S^\pm \to T^4$ を T^4 上のスピノル束とすると, 切断 $\Gamma(T^4, S^\pm \otimes E \otimes \mathcal{P})$ に作用する Dirac 作用素は次のように与えられる：

$$\mathcal{D}[A_\xi] := e^\mu \otimes D[A_\xi] = e_\mu \otimes (\partial_\mu + A_\mu + i\xi_\mu), \quad \bar{\mathcal{D}}[A_\xi] := \bar{e}^\mu \otimes D[A_\xi] = \bar{e}_\mu \otimes (\partial_\mu + A_\mu + i\xi_\mu). \tag{1.165}$$

(1.3 節の Dirac Equations における Dirac 作用素との類似に注意されたい.)

この Dirac 作用素の零モード $\psi^p_\xi(x),\ p = 1, \cdots, k$ を用いて $\widehat{T}^4$ 上のベクトル束 $\widehat{E}$ を構成する. すなわちファイバー $\widehat{E}_\xi$ として, $\operatorname{Ker} \bar{\mathcal{D}}[A_\xi]$ を持ってくる. 指数定理より $\dim \operatorname{Ker} \bar{\mathcal{D}}[A_\xi] = k$ である. $\widehat{H} \to \widehat{T}^4$ をファイバーが $\widehat{H}_\xi := L^2(T^4, S^+ \otimes E \otimes \mathcal{P}|_{T^4 \times \{\xi\}})$ であるような無限次元の自明束であるとすると, $\widehat{E}_\xi = \operatorname{Ker} \bar{\mathcal{D}}[A_\xi]$ は $\widehat{H}_\xi$ の部分空間となっており, $\widehat{E}$ は $\widehat{H}$ の部分束となる. (図 2 に概略を描いた.)

ここで, 射影

$$P : \widehat{H} \to \widehat{E} \tag{1.166}$$

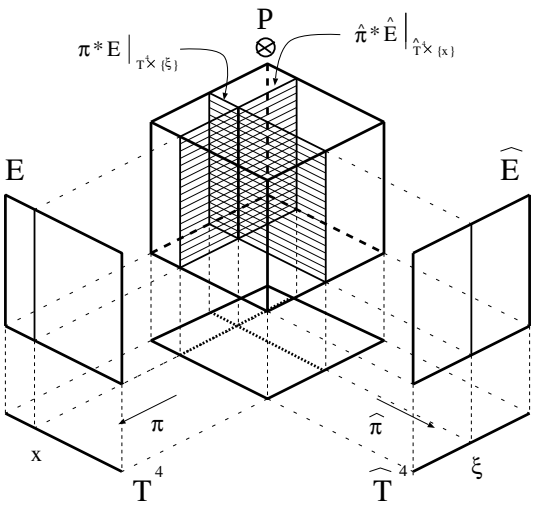


図 2: Nahm 変換の舞台設定

を導入し, ADHM のときと同様に共変微分を

$$\widehat{D} = P\widehat{d} : \Gamma(\widehat{T}^4, \widehat{E}) \to \Gamma(\widehat{T}^4, \Lambda^1 \otimes \widehat{E}) \tag{1.167}$$

で定義する. これによって, $\widehat{E}$ 上のゲージ場 $\widehat{A}$ が定まる.

これで Nahm 変換が定義できる. Nahm 変換とは, $\mathcal{N} : (E, A) \mapsto (\widehat{E}, \widehat{A})$ のことである. 今の議論を $\widehat{T}^4$ から始めると, 同様の変換 $\widehat{\mathcal{N}} : (\widehat{E}, \widehat{A}) \mapsto (E, A)$ を定めることができる. このとき双対 Dirac 作用素は

$$\widehat{\mathcal{D}}[\widehat{A}_x] \quad := \quad = e_\mu \otimes (\widehat{\partial}^\mu + \widehat{A}^\mu - ix^\mu), \quad \widehat{\bar{\mathcal{D}}}[\widehat{A}_x] := \bar{e}_\mu \otimes (\widehat{\partial}^\mu + \widehat{A}^\mu - ix^\mu). \tag{1.168}$$

で定義される.

以下全く同様に Nahm 変換の全単射が示せる. 結果をまとめると次のようになる :

Nahm 変換

$$\begin{array}{ccc} E & & \widehat{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^4 & & \widehat{T}^4 \\ G = U(N) & & \widehat{G} = U(k) \\ k\text{-instanton} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & N\text{-instanton} \end{array}$$

$$\text{instanton} \ : \ A_{\mu[N]} \quad \overset{\substack{\text{零質量 Dirac 方程式} \\ \bar{\mathcal{D}}\psi = 0 \text{ を解く} \\ k \text{ 個の独立解} : \psi(\xi,x)}}{\longrightarrow} \quad \widehat{A}_{\mu[k]} = \int_{T^4} d^4x \ \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \psi$$

$$A_{\mu[N]} = \int_{\widehat{T}^4} d^4\xi \ v^\dagger \frac{\partial}{\partial x^\mu} v \quad \overset{\substack{\text{零質量 Dirac 方程式} \\ \widehat{\bar{\mathcal{D}}} v = 0 \text{ を解く} \\ N \text{ 個の独立解} : v(x,\xi)}}{\longleftarrow} \quad \text{instanton} \ : \ \widehat{A}_{\mu[k]}$$

Examples

具体解を変換してみよう [69]. $G = U(N^2)(\simeq U(N) \otimes U(N))$, k^2 インスタントン解として次のものが知られている：

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{i}{2\pi}\frac{k}{N}x_1 \otimes 1_{[N]}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 1_{[N]} \otimes \frac{i}{2\pi}\frac{k}{N}x_3. \tag{1.169}$$

これは実際 ASD 方程式を満たし, インスタントン数は $-k^2$ となる：

$$F_{12} = -F_{34} = -\frac{i}{2\pi}\frac{k}{N}1_{[N]} \otimes 1_{[N]}. \tag{1.170}$$

このインスタントン・バックグラウンドの下 Dirac 方程式を解くと, 次の Dirac 零モードが求まる：

$$\begin{aligned}\psi_{uu'}^{pp'}(\xi, x) &= \left(\frac{N}{2\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s,t\in\mathbf{Z}} e^{ix_1(\frac{k}{N}(\frac{x_2}{2\pi}+u+Ns)+p)} e^{2\pi i\xi_2(\frac{x_2}{2\pi}+u+Ns+\frac{N}{k}(\xi_1+p))} e^{-\frac{\pi k}{N}(\frac{x_2}{2\pi}+u+Ns+\frac{N}{k}(\xi_1+p))^2} \\ &\quad \times e^{-ix_3(\frac{k}{N}(\frac{x_4}{2\pi}+u'+Nt)+p')} e^{-2\pi i\xi_4(\frac{x_4}{2\pi}+u'+Nt+\frac{N}{k}(\xi_3+p'))} e^{-\frac{\pi k}{N}(\frac{x_4}{2\pi}+u'+Nt+\frac{N}{k}(\xi_3+p'))^2}. \end{aligned} \tag{1.171}$$

これから双対トーラス上のゲージ場を求めると次のようになる.

$$\widehat{A}_1 = -2\pi i\frac{N}{k}\xi_2 \otimes 1_{[k]}, \quad \widehat{A}_2 = 0, \quad \widehat{A}_3 = 1_{[k]} \otimes 2\pi i\frac{N}{k}\xi_4, \quad \widehat{A}_4 = 0. \tag{1.172}$$

これは確かに ASD 方程式を満たし, $\widehat{G} = U(k^2)$, N^2 インスタントン解を与える. 美しく対称的な変換がなされた. (1.171) から Green 関数も計算することができる.

Duality Revisited

1.1 節, 1 .2 節で議論した ADHM/Nahm 構成法をトーラスの視点から見直す.

- トーラスの半径を 4 つとも全て無限大にする $\Rightarrow$ ADHM 構成法

  このとき双対トーラスの半径は 4 つとも全てゼロになる. したがって双対トーラスは 1 点につぶれてしまい, 無限に近い 2 点上の差を読み取る操作である微分は意味を持たなくなる. その結果, 双対トーラス上の自己双対方程式および (双対) 零質量 Dirac 方程式の中の微分は全て落ち, それらは行列の方程式になる. これにより, 行列の方程式を解くことで $\mathbf{R}^4$ (= 半径無限大のトーラス) 上のインスタントンが得られる. これが ADHM 構成法である. (なお $T_\mu = \widehat{A}_\mu$.)

- トーラスの半径を 3 つだけ無限大, 残り 1 つをゼロにする $\Rightarrow$ Nahm 構成法

  このとき双対トーラスの半径は, 3 つはゼロ, 1 つは無限大になる. したがって双対トーラスは直線になり, 双対トーラス上の自己双対方程式および (双対) 零質量 Dirac 方程式の中の 3 つの方向の微分は落ち, 1 つの方向の微分だけが残る. その結果, 常微分方程式を解くことで $\mathbf{R}^3$ 上のインスタントン (= BPS モノポール) が得られる. これが Nahm 構成法である.

もともとの状況は全く双対的であったが, 半径というパラメータのある特別な極限で双対性が非自明となり, 片側の記述が易しくなったのである. その結果, 偏微分方程式を解くという難しい問題が行列方程式を解くといった易しい問題に置き換わったというわけである.

ADHM データの S を再現するためには, 曲率 F の中の微分項を精密に取り扱う必要がある [168].

1.5 D-brane's Descriptions of ADHM/Nahm Construction and Nahm Transformation

この 1.5 節では D-brane を用いた解釈を行う. D-brane は弦理論におけるソリトンであり, 開弦の端点が付着する. 開弦の端点はカラーの足を持っているため, D-brane 上にはゲージ理論が誘起される. このゲージ理論から ADHM/Nahm 構成法および Nahm 変換に関わる双対性の起源について考察する. D-brane についての詳しい説明は省略する. D-brane の基本事項については [137, 143, 144, 145] などを御参照ください. 特に D-brane 上のゲージ理論については [56, 96] などが詳しい.

ADHM 構成法の D-brane 解釈

背景となる系は k 個の D0-brane と N 枚の D4-brane の BPS 複合系である (図 3 参照) [176, 45, 46].

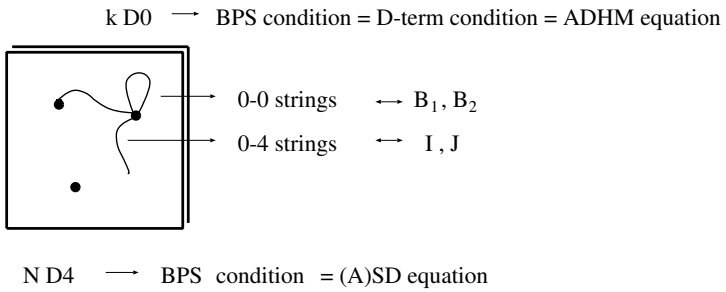


図 3: ADHM 構成法の D-brane 解釈

この系を 2 つの異なった立場から記述しよう. まず D4 から見る. このとき例えばゲージーノの SUSY 変換の式から, (4 次元) 自己双対方程式がこの BPS 系を記述するものとして得られ, D0-brane はインスタントンとして記述される. 一方 D0 から見ると SUSY を保つ条件は D 項条件として得られる. D 項条件を書き下すには, D0 上の SYM 理論の零質量スカラー場を持ってこなければならないが, これは 0-0 ストリングからくるもの ($k \times k$ 行列) および (ハイパー多重項の)[42] 0-4 ストリングからくるもの ($k \times N$ 行列) がある. これらをそれぞれ $B_{1,2}$ および $I, J^\dagger$ と表して, D 項条件を書き下すと, ちょうど ADHM 方程式が得られる. どちらの方程式も同じ物理系を記述するものであるから, 解空間の等価性は自明である. またインスタントン・モジュライの次元は $4Nk$ であることが知られているが, この D0-D4 BPS 系で D0 の動く自由度を考えると, これも明らかである.

「 0 次元 Dirac 方程式 」を経由してゲージ場を構成する手順としては, この系を T 双対変換して D5-D9-brane 系に持って行き, プローブとしての D1-brane から記述する方法が知られている [175, 46].

Nahm 構成法の D-brane 解釈

まずモノポールの D-brane 解釈を説明する. $G = U(N)$ Yang-Mills-Higgs 理論は N 枚の D3-brane の有効理論で記述できる. このとき Higgs 場 Φ の値は D3-brane の広がった方向に垂直なある 1 方向の D3-brane の位置を表す. 例えば Dirac モノポール解の配位は, まっすぐ無限にのびた D1-brane が D3-brane に端を持ち, 安定化した状況に相当する. (図 11 の左下参照.) このとき D1-brane は D3-brane と一体化し, D3-brane の突起と解釈される. (図 11 の左上参照.) D1-brane の端は磁荷を帯びており, D3-brane からみるとモノポールに見える.

[42] 今考えている状況は Higgs ブランチに相当する.

Nahm 構成法の D-brane 解釈 [42] はこの D1-D3 brane 複合系である (図 4 参照). (D1-brane が k 本, D3-brane が N 枚で, $G = U(N)$, k モノポールの状況となる.) インスタントンの時と同様に, Bogomol'nyi 方程式および Nahm 方程式はそれぞれ D3 および D1 からみたときの BPS 条件として表される. したがって両者の解空間の等価性は自明である.

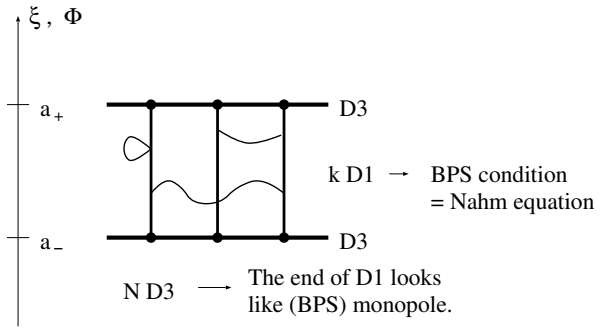


図 4: Nahm 構成法の D-brane 解釈

さらに境界条件の D-brane 解釈について考える. まず D3-brane から考える. Higgs 場 Φ の値は (対角化したときの対角成分が) D3-brane の位置を表す. $SU(2)$ モノポールの境界条件は, D3-brane が D1-brane に引っ張られて漏斗状になったことを表していると考えられる. 一方 D1-brane においては, T_i が D1-brane の位置を表す. しかし $k > 1$ のとき T_i は同時対角化できないため, D1-brane の位置は明確に定まらない. ただ 2 次の Casimir の条件式として $\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = (k^2 - 1)/4$ が成り立つので,

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \overset{\xi \to \pm a/2}{\longrightarrow} \frac{1}{4\xi^2}(k^2 - 1) \tag{1.173}$$

が分かる. つまり D1-brane はこのように D3-brane に端を持つ状況では球面状に広がっていると解釈できる (図 5 参照).

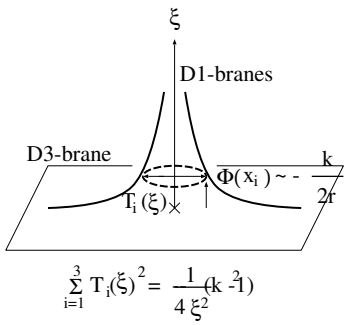


図 5: Myers 効果

これこそまさに Myers 効果 [119] なのである.

- $SU(N)$, $N \geq 3$ モノポールの Nahm 構成法と D-brane 解釈

ここで D3-brane が 3 枚以上ある場合の Nahm 構成法について簡単に説明する. (図 6 参照) [90]

$G = SU(2)$ の場合と異なり, Dirac 作用素に ADHM のときと同様, $k \times N_b, N_b \times k$ 行列 I, J が余分に現れる：

$$\hat{\nabla} := \begin{pmatrix} J & I^\dagger \\ i\dfrac{d}{d\xi} - i(x_3 - T_3) & -i(\hat{\bar{z}}_1 - T_z^\dagger) \\ -i(\hat{z}_1 - T_z) & i\dfrac{d}{d\xi} + i(x_3 - T_3) \end{pmatrix}, \tag{1.174}$$

ここで次のような記号を定義しておくと便利である：

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' := \sum_{b=1}^{N_b} u_b^\dagger u_b' \delta(\xi - \xi_b) + \vec{v}^\dagger \vec{v}', \tag{1.175}$$

$$\langle \vec{V}, \vec{V}' \rangle := \int d\xi \ \vec{V} \cdot \vec{V}' = \sum_{b=1}^{N_b} u_b^\dagger u_b' + \int d\xi \ \vec{v}^\dagger \vec{v}', \tag{1.176}$$

ここで Nahm データ $T_i(\xi)$ は不連続である. サイズも一般に変わるが, ここではサイズは各区間で等しいとする. $\xi = \xi_b$ のことを “jumping point” と呼ぶ. これらはゲージ群 $SU(N)$ がどのように破れているかに依存する. (図 6 参照.) N_b は “jumping point” の数である.

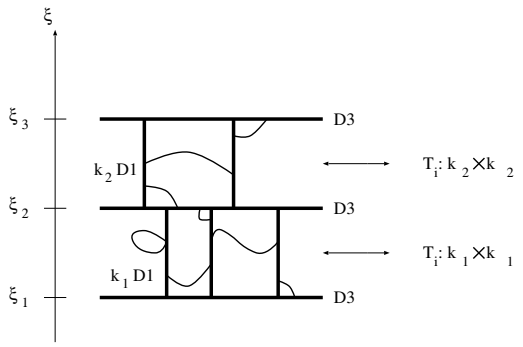


図 6: $U(3)$ モノポールの D-brane 解釈 ($k_1 = k_2$ のとき $\xi = \xi_2$ が “jumping point”)

Nahm 方程式は「$\nabla \cdot \nabla$ が Pauli 行列と可換」という条件で表される：

$$\begin{aligned} &[T_z, T_z^\dagger] + [\frac{d}{d\xi} + T_3, -\frac{d}{d\xi} + T_3] + \sum_{b=1}^{N_b} (I_b I_b^\dagger - J_b^\dagger J_b)\delta(\xi - \xi_b) = 0, \\ &[T_z, \frac{d}{d\xi} + T_3] + \sum_{b=1}^{N_b} I_b J_b \delta(\xi - \xi_b) = 0. \end{aligned} \tag{1.177}$$

以下モノポールを構成する手続きは同様で,「 1 次元 Dirac 方程式 」

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} \cdot \hat{V} &= \sum_{b=1}^{N_b} \begin{pmatrix} J_b^\dagger \\ I_b \end{pmatrix} \hat{u}_b \delta(\xi - \xi_b) \\ &\quad + \begin{pmatrix} i\dfrac{d}{d\xi} + i(x_3 - T_3) & i(\hat{\bar{z}}_1 - T_z^\dagger) \\ i(\hat{z}_1 - T_z) & i\dfrac{d}{d\xi} - i(x_3 - T_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{1.178}$$

$$\langle \hat{V}, \hat{V} \rangle = 1. \tag{1.179}$$

を解き,

$$\hat{\Phi} = \langle \hat{V}, \xi \hat{V} \rangle, \quad \hat{A}_i = \langle \hat{V}, \partial_i \hat{V} \rangle. \tag{1.180}$$

として Higgs 場, ゲージ場を求めればよい.

Nahm 変換の D-brane 解釈

4 次元トーラスに巻き付いた N 枚の D4-brane に k 個の D0-brane が乗っている系を考える. これは $G = U(N),\ k$ インスタントンの状況である. この系に対して D4-brane が広がっている方向に 4 回 T 双対変換を取ると, 双対トーラスに巻き付いた k 枚の D4-brane に N 個の D0-brane が乗っている系に変わる. これは $G = U(k),\ N$ インスタントンの状況であり, まさに Nahm 変換そのものである. モジュライ空間の等価性は明らかであり, モジュライ空間の次元 $4Nk$ も自明である [89].

ADHM/Nahm 構成法を導く極限では T 双対変換が自明となるため, D0-D4-brane 系, D1-D3-brane 系として記述することが可能となるのである.

カロロン (Caloron) の D-brane 解釈

カロロンとは $\mathbf{R}^3 \times S^1$ 上のインスタントン解のことで [72], インスタントンとモノポールを補間する [150, 63, 103, 106]. これも D-brane を用いて明快に説明することができる [108]. $G = SU(2),\ 1$ カロロン解の D-brane 解釈は図 7 で与えられる.

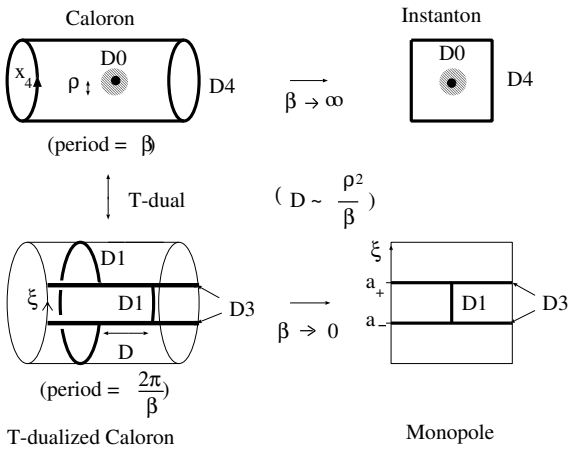


図 7: $SU(2)$ 1 カロロンの D-brane 解釈.

このときインスタントンのサイズ ρ と S^1 の周長 β, および $\xi = a_\pm$ での D1-brane の「飛び」D とは $D \sim \rho^2/\beta$ の関係がある. $\beta \to \infty$ でインスタントンに一致するのは自明であるが, $\beta \to 0$ でモノポールに一致するのは, 一度 T 双対変換を取ってから見ると容易に理解できる (図 7). なおこのとき D は無限大となるため, インスタントンのサイズゼロ極限に対応する特異点は, $SU(2)$ モノポールには存在しない.

1.6 Notes

次のものについては空間 $\mathbf{R}^4/\Lambda$ 上のインスタントン解とその双対空間 $\mathbf{R}^4/\Lambda^*$ 上のインスタントン解の 1 対 1 対応が知られており, ADHM/Nahm 構成法あるいは Nahm 変換が存在する：

- $\Lambda = \{0\}$ の場合 (すなわち $\mathbf{R}^4/\Lambda = \mathbf{R}^4$)：($\mathbf{R}^4$ or S^4 上) インスタントン解の ADHM 構成法
- $\Lambda = \mathbf{R}$ の場合 (すなわち $\mathbf{R}^4/\Lambda = \mathbf{R}^3$)：モノポール解の Nahm 構成法
- $\Lambda = \mathbf{Z}$ の場合 (すなわち $\mathbf{R}^4/\Lambda = \mathbf{R}^3 \times S^1$)：カロロン解の Nahm 構成法
- $\Lambda = \mathbf{Z}^4$ の場合 (すなわち $\mathbf{R}^4/\Lambda = T^4$)：($T^4$ 上) インスタントン解の Nahm 変換
- $\Lambda =$ ($SU(2)$ の有限部分群) の場合 (ただしその特異点を解消した空間上, すなわち $\widetilde{\mathbf{R}^4/\Lambda} =$ ALE 空間上) [104, 17]：KN(=Kronheimer-Nakajima)-ADHM 構成法

この記事で扱ったのは上の 4 つであるが, 最後のものについても同様の議論ができ, D-brane 解釈も与えることができる [48].

2 ADHM/Nahm Construction on Non-Commutative Spaces

この第 2 章では, 非可換空間上でのインスタントン解/モノポール解の ADHM/Nahm 構成法について簡単に紹介する. 非可換空間上でのインスタントン解の ADHM 構成は Nekrasov と Schwarz によって初めて与えられ, 新しいクラスの解：$U(1)$ インスタントン解が構成された [135]. この解は特異ゲージをとった解に相当するものであり, Furuuchi によって非特異な解を与える方法[43] が与えられた [52, 53]. これらはいずれも非可換パラメータの自己双対性とゲージ場の自己双対性が逆のものである. 非可換パラメータの自己双対性とゲージ場の自己双対性が同じインスタントン解 [2] の ADHM 構成については, $U(2)$ の場合が [55] で $U(1)$ の場合が [67] で与えられた. 非可換空間上でのモノポール解の Nahm 構成は, $U(1)$ モノポール (Dirac モノポール) については [60] で, $U(2)$ モノポール ('t Hooft-Polyakov モノポール) については [62] で, フラクソン [146, 61] については [67] でなされた.[44]

この記事では, (ADHM/Nahm) $\rightarrow$ (instanton/monopole) の議論を紹介し, 基本的な解を具体的に構成する. 構成の際注意すべき点と, それを回避する方法についても説明する. 解の性質や D-brane 解釈についても触れる.

2.1 Gauge Theories on Non-Commutative (=NC) Spaces

まず, 非可換空間上のゲージ理論 (= NC ゲージ理論) を紹介する.

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \tag{2.1}$$

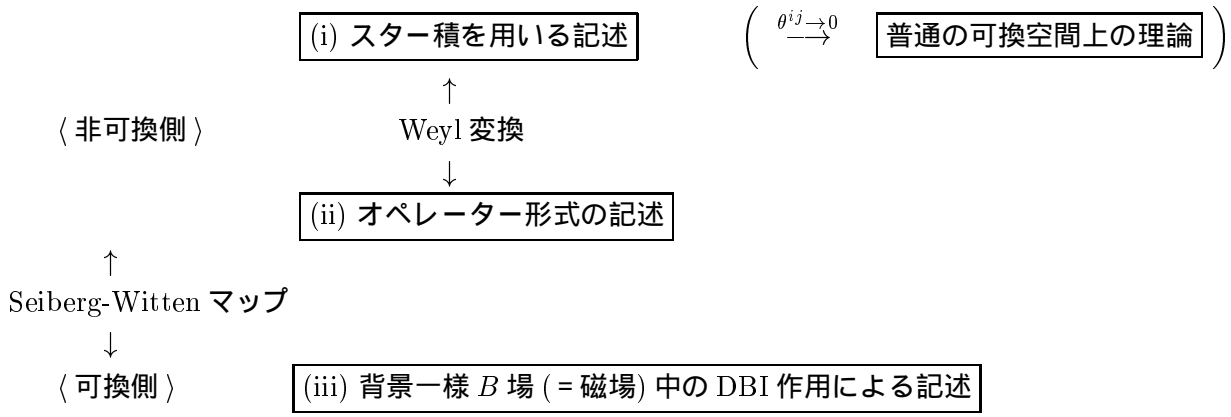
ここで, θ^{ij} は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる. この関係式は, 量子力学の正準交換関係

$$[q, p] = i\hbar \tag{2.2}$$

[43] この記事では古内さんに敬意を表して "Furuuchi's Method" と呼ぶ.
[44] レヴューとして [54, 100, 133] がある.

に類似しており,「空間の不確定性関係」を導く. このことから非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ. その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる. 分布の広がりの幅は $\sqrt{|\theta^{ij}|}$ に比例し, 可換な空間への極限 $\theta^{ij} \to 0$ で特異性が復活する.

NC ゲージ理論の記述には次の 3 つの方法があり[45] , Weyl 変換および Seiberg-Witten マップによって 1 対 1 に対応づけられる[46] :



Seiberg と Witten が明らかにしたのは (i) と (iii) の等価性である [151].[47] この節ではまずスター積を用いる記述 (i) によって NC ゲージ理論を定義し, それから Weyl 変換という変換を用いてオペレーター形式の記述 (ii) に移る. オペレーター形式の記述で議論を進める.

(i) スター積を用いる記述

スター積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである[48] :

$$\begin{aligned} f \star g(x) &:= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right) f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x} \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

スター積は次の重要な性質を持つ :

- 結合則が成り立つ : $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$
- 座標関数同士の非可換性 (2.1) を再現 : $[x^i, x^j]_\star := x^i \star x^j - x^j \star x^i = i\theta^{ij}$
- $\theta^{ij} \to 0$ で普通の積に戻る.

NC ゲージ理論は, 普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積を全てスター積に置き換えることで得られる. [49] したがって例えば NC Yang-Mills 理論の作用, BPS 方程式は, 式 (1.16), (1.15) などにおいて場同士の積が全てスター積に置き換わったものに等しい.

[45] 記述 (iii) は座標関数同士の非可換性 (2.1) がなく「可換側」と呼ばれる.
[46] この記事では「非可換 Euclid 空間」のみを扱う. なお「曲がった非可換空間」では (i) と (ii) の 1 対 1 対応は一般には成り立たない.
[47] 磁場中の荷電粒子の運動で重心座標が非可換に見えるという話は良く知られているが, その弦理論版と解釈することもできる (cf. [74] の 3.1 節).
[48] 正確にはスター積は変形量子化の枠組み [102, 24] でもっと一般的に定義されるものであるが (解説として [112] がある.), ここでは「非可換 Euclid 空間」のみを扱うので, このような具体的表式 (Moyal 積と呼ばれる) で表した.
[49] ただし Non-Abelian ゲージ理論と見なして置き換えを行わなければならない. 例えば曲率 $F_{\mu\nu}$ に含まれる $[A_\mu, A_\nu]$ の部分は可換空間上の Abelian 理論では零になるが, これも残したままスター積に置き換えなければならない.

作用に無限個の微分が入っているが, 場は普通の可換な関数なので, 運動方程式, BPS 方程式を導出するには, 可換な場合と同じ手順を踏めばよい. なおゲージ群は普通 $U(N)$ で考える[50] .

(ii) オペレーター形式の記述

今度は, 座標の非可換性 (2.1) から出発して NC ゲージ理論を定義する. 簡単のため非可換 2 次元空間を考える. 新しい変数を $\hat{a} := (1/\sqrt{2\theta})\hat{z},\ \hat{a}^\dagger := (1/\sqrt{2\theta})\hat{\bar{z}}$ (ただし $\hat{z} := \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ より,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{2.4}$$

が分かる. これより, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる. これらが作用する Fock 空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathbf{C}|n\rangle$ である. ここで, $|n\rangle := \left\{(\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}\right\}|0\rangle,\ (n = 0, 1, \ldots)$ は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす.

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の関数であるから, Fock 空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される:

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}|m\rangle\langle n|. \tag{2.5}$$

代表的な演算子として次のものがある:

$$\hat{P}_k = \sum_{p=0}^{k-1}|p\rangle\langle p|, \tag{2.6}$$

$$\hat{U}_k = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+k| = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\hat{a}^k\frac{1}{\sqrt{(n+k)\cdots(n+1)}}, \tag{2.7}$$

$$\hat{U}_k^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty}|n+k\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+k)\cdots(n+1)}}(\hat{a}^\dagger)^k|n\rangle\langle n|. \tag{2.8}$$

$\hat{U}_k$ はシフト演算子あるいは "partial isometry" と呼ばれ次式を満たす:

$$\hat{U}_k\hat{U}_k^\dagger = 1, \quad \hat{U}_k^\dagger\hat{U}_k = 1 - \hat{P}_k. \tag{2.9}$$

この射影演算子 $\hat{P}_k$ とシフト演算子 $\hat{U}_k$ が非可換空間では重要な役割を果たし, ソリトン数と密接に関わってくる.[51]

(i) と (ii) の等価性[52]

(i) と (ii) は (「非可換 Euclid 空間」では) 等価な記述であり, Weyl 変換という変換によって対応づけられる. (i) の記述における場 $f(x^1, x^2)$ は, 次式で定義される Weyl 変換によって, (ii) の記述における場 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ にうつされる:

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) := \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk_1 dk_2\ \widetilde{f}(k_1, k_2)e^{-i(k_1\hat{x}^1 + k_2\hat{x}^2)}. \tag{2.10}$$

[50] 積がスター積なので $g_1, g_2 \in G$ であったとしても, $g_1 \star g_2 \in G$ とは限らない. 例えば $G = SU(N)$ だと行列式が 1 という条件からはみ出してしまう.
[51] シフト演算子は ABS 構成 [11] を非可換の場合に応用することで具体的に構成することができる [76].
[52] 詳しくは [74] などを参照.

ただし,

$$\widetilde{f}(k_1,k_2) \quad := \quad \int dx^1 dx^2 \ f(x^1,x^2) e^{i(k_1 x^1 + k_2 x^2)}. \tag{2.11}$$

場 $f(x^1,x^2)$ を一度 Fourier 変換したものを, そのまま逆 Fourier 変換する際, exp の肩の座標 x^1, x^2 をオペレーター $\hat{x}^1, \hat{x}^2$ に置き換えて変換したようなものである：

$$\begin{array}{ccc} & & f(x^1,x^2) \\ & \swarrow & \downarrow \\ \widetilde{f}(k_1,k_2) & & \text{Weyl 変換} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2). \end{array}$$

Weyl 変換はスター積を行列の積にうつす：

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}. \tag{2.12}$$

Weyl 変換の逆変換は直接には

$$f(x^1,x^2) = \int dk_2 \ e^{-ik_2 x^2} \Big\langle x^1 + \frac{k_2}{2} \Big| \hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2) \Big| x^1 - \frac{k_2}{2} \Big\rangle \tag{2.13}$$

と書ける. Weyl 変換により, 場や掛け算だけでなく, 微分, 積分も 1 対 1 に対応し, (i) と (ii) の記述は等価になる. 対応関係は以下の通り：

	(i) スター積を用いる記述	(ii) オペレーター形式の記述
場	普通の関数 $f(x^1,x^2)$	無限次元正方行列 $\hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn} \lvert m\rangle\langle n\rvert$
積 $(\widehat{f\star g} = \hat{f}\hat{g})$	スター積 結合則：$f\star(g\star h) = (f\star g)\star h$	行列の積 結合則：$\hat{f}(\hat{g}\hat{h}) = (\hat{f}\hat{g})\hat{h}$ (自明)
非可換性	$[x^i,x^j]_\star := x^i\star x^j - x^j \star x^i = i\theta^{ij}$	$[\hat{x}^i,\hat{x}^j] = i\theta^{ij}$
微分	$\partial_i f$ 特に $\partial_i x^j = \delta_i{}^j$	$\partial_i \hat{f} := [\underbrace{-i(\theta^{-1})_{ij}\hat{x}^j}_{=:\hat{\partial}_i}, \hat{f}]$ 特に $\partial_i \hat{x}^j = -i(\theta^{-1})_{ik}[\hat{x}^k,\hat{x}^j] = \delta_i{}^j$
積分	$\int dx^1 dx^2 \ f(x^1,x^2)$	$2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f}(\hat{x}^1,\hat{x}^2)$
曲率	$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i,A_j]_\star$	$\hat{F}_{ij} = \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i + [\hat{A}_i,\hat{A}_j]$ $= [\hat{D}_i,\hat{D}_j] - i(\theta^{-1})_{ij}$ (ただし $\hat{D}_i := \hat{\partial}_i + \hat{A}_i$)
(ii) の行列要素 $\Big\vert$ $\Big($ x^1-x^2平面 で回転対称 $\Big)$ $\downarrow$	$\sqrt{\frac{n!}{m!}} \left(2r^2/\theta\right)^{\frac{m-n}{2}} e^{i(m-n)\varphi} \times$ $2(-1)^n L_n^{m-n}(2r^2/\theta) e^{-\frac{r^2}{\theta}}$ $\Big\vert$ $\Big($ φ に依らない $\Leftrightarrow m=n$ $\Big)$ $\downarrow$	$\lvert n\rangle\langle m\rvert$ $\Big\vert$ $\Big($ $(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 \sim \hat{a}^\dagger\hat{a}$ と可換 $\Leftrightarrow m=n$ $\Big)$ $\downarrow$
ある射影	$2(-1)^n L_n(2r^2/\theta) e^{-\frac{r^2}{\theta}}$	$\lvert n\rangle\langle n\rvert$

ここで, (r, φ) は極座標, $L_n^\alpha(x)$ は次式で定義される Laguerre 多項式である：

$$L_n^\alpha(x) := \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}). \tag{2.14}$$

(特に $L_n(x) := L_n^0(x).$) 注意すべきことは, オペレーター形式の曲率の式で, $[\hat{D}_i, \hat{D}_j]$ とくくったため, $[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j](= i(\theta^{-1})_{ij})$ を相殺するための定数項 $-i(\theta^{-1})_{ij}$ が現れたことである.

2.2 ADHM Construction of NC Instantons

この小節では, いくつかの代表的な非可換インスタントン解の ADHM 構成法をオペレーター形式で具体的に行う. 空間の非可換性は次のようにとることができる：

$$\theta^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \theta_1 & 0 & 0 \\ -\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & -\theta_2 & 0 \end{array}\right). \tag{2.15}$$

したがって 4 次元の非可換 Euclid 空間 $\mathbf{R}^4_{\mathrm{NC}}$ は 2 つの 2 次元の非可換 Euclid 空間 $\mathbf{R}^2_{\mathrm{NC}}$ に分解する. 場は Fock 空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に作用するオペレータとなり, 次のように表される：

$$\hat{f}(\hat{x}^\mu) = \sum_{m_1,m_2,n_1,n_2=0}^{\infty} f_{m_1,m_2,n_1,n_2}|m_1, m_2\rangle\langle n_1, n_2|. \tag{2.16}$$

非可換 ADHM 構成では非可換パラメータの自己双対性が重要であり, インスタントン解に反映されてくる.

手順は可換空間上の場合と同様で

- 手順 (i) ADHM 方程式

$$\begin{aligned} (\mu_R :=) \quad & [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = -2(\theta_1 + \theta_2) =: \zeta, \\ (\mu_C :=) \quad & [B_1, B_2] + IJ = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

  を解く. ADHM 方程式の第一式の右辺が空間の非可換性のために変形されている点が重要である.[53]

- 手順 (ii) 「 0 次元 Dirac 方程式 」

$$\hat{\nabla}^\dagger \hat{V} = 0 \tag{2.18}$$

  を規格化条件とともに解く.

- 手順 (iii) 「 0 次元 Dirac 方程式 」の規格化可能解 V を用いて, ゲージ場を

$$\hat{A}_\mu = \hat{V}^\dagger \partial_\mu \hat{V}, \tag{2.19}$$

[53] ゲージ場が SD の場合, 右辺は $(\theta_1 - \theta_2)$ に比例する. したがってゲージ場と非可換パラメータの相対的自己双対性が重要となる.

として構成する. これは実際に非可換自己双対方程式

$$(\hat{F}_{z_1\bar{z}_1} + \hat{F}_{z_2\bar{z}_2} =) \qquad [\hat{D}_{z_1}, \hat{D}_{\bar{z}_1}] + [\hat{D}_{z_2}, \hat{D}_{\bar{z}_2}] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right),$$
$$(\hat{F}_{z_1 z_2} =) \qquad [\hat{D}_{z_1}, \hat{D}_{z_2}] = 0 \tag{2.20}$$

を満たす. ADHM 方程式 (2.17) と見比べると, これもまた双対性が顕著である. なお非可換パラメータが ASD のとき, (2.17), (2.20) に現れた定数が共に消える.

この手順で実際にインスタントン解が構成される. ただしオペレーターとしての可逆性が微妙な問題を含んでくる.

インスタントン・モジュライについてのコメント

インスタントン・モジュライ空間は μ_R の値で決まることが知られている [127, 129][54] . すなわち,

- $\mu_R = 0$ のとき, インスタントン・モジュライ空間はスモール・インスタントン特異点を含む. (可換空間 $\mathbf{R}^4$ および特別な非可換空間 $\mathbf{R}^4$ (θ : ASD) の場合)
- $\mu_R \neq 0 =: \zeta$ のとき, スモール・インスタントン特異点は解消され, $U(1)$ インスタントンという新しいクラスの解が存在する. (一般の非可換空間 $\mathbf{R}^4$ の場合)

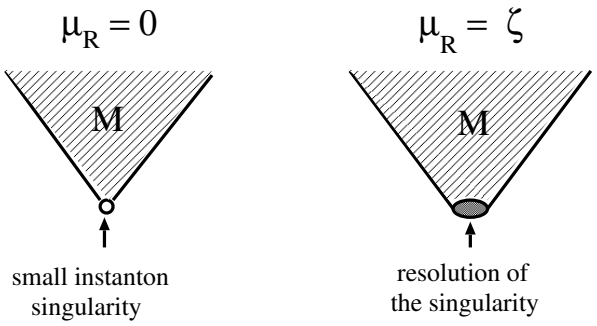


図 8: インスタントン・モジュライ

非可換 ASD インスタントンの場合, $\mu_R = \zeta = -2(\theta_1 + \theta_2)$ であるから, 非可換パラメータの自己双対性が重要になってくる. ゲージ場を ASD に固定すると, 非可換インスタントン解の「相図」は次のようになる.

$\theta_1 + \theta_2 = 0$ すなわち非可換パラメータ θ が ASD のとき, インスタントン・モジュライ空間は特異となる. 原点は可換空間に相当する. θ 軸上は $\mathbf{R}^2_{\mathrm{NC}} \times \mathbf{R}_{\mathrm{Com}}$ 上のインスタントンである. それ以外の場合は基本的に同じ振る舞いをするので, その場合は非可換パラメータ θ を SD に固定して考えよう. これが最初に Nekrasov-Schwarz [135] によって議論されたものである.[55]

D-brane 解釈

$\mu_R = \zeta$ の D-brane 解釈を少しコメントする. ADHM 方程式は D0-D4 brane 系における D0-brane 上の超対称ゲージ理論の D 項条件であった. この系の背景に B 場が導入されると D 項条件に FI パラメー

[54] [50] にも少し解説がある.

[55] ゲージ場と非可換パラメータの自己双対性が逆の Nekrasov-Schwarz タイプのインスタントンの ADHM 構成は [52, 53, 54, 93, 98, 132, 135, 105] 等で, ゲージ場とパラメータの自己双対性が同じタイプのものの ADHM 構成は [55, 67] で, $\mathbf{R}^2_{\mathrm{NC}} \times \mathbf{R}_{\mathrm{Com}}$ 上のインスタントンの ADHM 構成は [99] で議論されている. なお [26] は "Localized" タイプ (後者の $U(1)$ の場合) 以外のものを一通り詳しくまとめており, 薦められる. なお可換側の解の構成は [115, 151, 160] などにある.

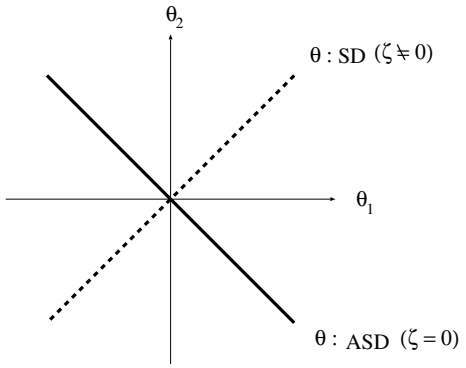


図 9: 非可換 ASD インスタントン解の「相図」

タが現れる. これはゲージーノの超対称変換に B 場が定数として現れることから理解できる. この FI パラメータの物理的な意味は, B 場を導入したことで系がいったん不安定となり (超対称性が破れ) 生じたタキオン場の期待値であると解釈される. タキオンが凝縮した後は, 再び超対称性が (もとのものと違う形で) 回復し, 系は安定化する. 非可換インスタントン解は一般にその状況を表すのである.

さて具体的に解を構成しよう.

- $U(1),\ k=1$ 解 ($U(1)$ ASD インスタントン解, $\theta:$ SD)

  まずゲージ場と非可換パラメータの自己双対性が逆の場合を考える. 簡単のため $k=1$ とし, またインスタントンの位置を原点にとる.[56]

  まず ADHM 方程式を解かなければならないが, ゲージ群が $U(1)$ のときは I か J が零になることが知られている [129]. したがって ADHM 方程式はトリビアルに解け ($B_{1,2}=0, I=\sqrt{\zeta}, J=0$), 「0 次元 Dirac 作用素」は次のようになる：

$$\hat{\nabla}=\begin{pmatrix}\sqrt{\zeta} & 0\\ \hat{\bar{z}}_2 & -\hat{z}_1\\ \hat{\bar{z}}_1 & \hat{z}_2\end{pmatrix},\quad \hat{\nabla}^\dagger=\begin{pmatrix}\sqrt{\zeta} & \hat{z}_2 & \hat{z}_1\\ 0 & -\hat{\bar{z}}_1 & \hat{\bar{z}}_2\end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

  $\nabla^\dagger\nabla$ の逆行列は存在し,

$$\hat{f}=\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{1}{n_1+n_2+\zeta}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2| \tag{2.22}$$

  である.[57] 問題は Dirac 零モードである. 「0 次元 Dirac 方程式」の解としては規格化因子を除いて次のものが自然である：

$$\hat{V}_1=\begin{pmatrix}\hat{z}_1\hat{\bar{z}}_1+\hat{z}_2\hat{\bar{z}}_2\\ -\sqrt{\zeta}\hat{\bar{z}}_2\\ -\sqrt{\zeta}\hat{\bar{z}}_1\end{pmatrix},\quad \hat{\nabla}^\dagger\hat{V}_1=0. \tag{2.23}$$

  しかしこれはオペレータの意味で規格化条件を満たさない. $\hat{V}_1$ が零モード $|0,0\rangle$ を持ち, 規格化因子を求める際 $\hat{V}_1^\dagger\hat{V}_1$ の逆行列を $\mathcal{H}$ の中で求めることができないからである. したがって $\hat{V}$ を規格化する際はこの点に注意する必要がある.

[56] インスタントンの位置のモジュライを加えたければ, あとで平行移動を行えばよい. なお非可換空間上では平行移動はゲージ変換である.

[57] $\zeta\neq 0$ の場合はつねに $\hat{f}$ は存在する ([52] の Appendix A).

Furuuchi は [52] において, 全ての議論を $\mathcal{H}_1 := \mathcal{H} - |0,0\rangle\langle 0,0|$ に制限すれば, $\hat{V}_1$ が正しい自己双対ゲージ場を与えることを示した. さらにシフト演算子を用いて, $\mathcal{H}_1$ に制限された議論を $\mathcal{H}$ に変換し (ラベルを付け変え), $\mathcal{H}$ で規格化された $\hat{V}$ を求めた [53]：

$$\hat{V} = \hat{V}_1 \hat{\beta}_1 \hat{U}_1^\dagger, \quad \hat{V}^\dagger \hat{V} = 1 \tag{2.24}$$

ここで

$$\hat{\beta}_1 = (1-\hat{P}_1)(\hat{V}_1^\dagger \hat{V}_1)^{-\frac{1}{2}}(1-\hat{P}_1) = \sum_{(n_1,n_2)\neq(0,0)} \frac{1}{\sqrt{(n_1+n_2)(n_1+n_2+\zeta)}} |n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2| \tag{2.25}$$

である. 零モード $\hat{V}$ に現れた射影 $(1-\hat{P}_1)$ が $\mathcal{H}_1$ への制限を表し, シフト演算子 $\hat{U}_1$ が $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}$ への変換を表している. この 2 つの操作により正しい零モードが求められる ("Furuuchi's Method"). この零モードから非特異なゲージ場および曲率が計算され, そのインスタントン数は -1 となることが分かる.

- $U(2),\ k=1$ 解 (NC BPST インスタントン解, θ : SD)

  この解も "Furuuchi's Method" を用いて同様に求まる. ADHM 方程式の解は

  $$B_{1,2} = 0, \quad I = (\sqrt{\rho^2+\zeta}, 0), \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

  となる. 可換空間での BPST 解と比べれば I に ζ の項が加わった分だけインスタントンのサイズが大きくなったと解釈される. 実際 $\rho \to 0$ 極限を取っても場の配位は特異にならず, $U(1)$ パートが生き残る. それは本質的に上記の $U(1),\ k=1$ の解と等価である.

- $U(1),\ k=1$ 解 (Localized $U(1)$ ASD インスタントン解, θ : ASD)

  今度はゲージ場と非可換パラメータの自己双対性が共に等しい場合を考えよう. このときインスタントン・モジュライ空間はスモール・インスタントン特異点が存在する. ゲージ群の $U(1)$ パートはここに対応するが, この解を構成してみよう.

  まず ADHM 方程式の解は完全にトリビアルとなる：

  $$B_{1,2} = I = J = 0. \tag{2.27}$$

  この「ADHM バックグラウンド」の下「0 次元 Dirac 方程式」を解こう. $I = J = 0$ だから式 (1.37) から $\hat{u}$ は決まらない. このときは最初に完全性条件から観察した方がよい. 完全性条件の右辺がまず計算されるので, そこから $\hat{v}_1 = |0,0\rangle\langle 0,0|,\ \hat{v}_2 = 0$ が決まる. それを規格化条件に代入すると $\hat{u}\hat{u}^\dagger = 1,\ \hat{u}^\dagger\hat{u} = 1 - \hat{P}_1$ すなわち $\hat{u} = \hat{U}_1$ (シフト演算子！) が決まり, これが Dirac 方程式も満たす：

  $$\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ |0,0\rangle\langle 0,0| \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

  シフト演算子 $\hat{U}_1$ が自然に現れたのが面白い.[58]

[58] Furuuchi's Method はここでは必要がない.

これからゲージ場 (あるいは共変微分オペレータ) を計算すると次のようになる：

$$\begin{aligned}\hat{D}_{z_i} &= \hat{V}^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{V} = \hat{u}^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{u} + \hat{v}^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{v} = \hat{U}_1^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{U}_1 - |0,0\rangle\langle 0,0| \frac{\hat{\bar{z}}_i}{2\theta^i} |0,0\rangle\langle 0,0| \\ &= \hat{U}_1^\dagger \hat{\partial}_{z_i} \hat{U}_1. \end{aligned} \tag{2.29}$$

これはまさに Solution Generating Technique の本質的部分を捉えている．Solution Generating Technique とは次式で定義される変換のことである：

$$\hat{D}_{z_i} \to \hat{U}_k^\dagger \hat{D}_{z_i} \hat{U}_k \tag{2.30}$$

ほとんどゲージ変換のように見えるが, $\hat{U}_k$ がシフト演算子である (ユニタリ演算子でない) ため, ノントリビアルな変換となる．この変換は一般に運動方程式を不変に保つため, 真空解といった自明解から, いとも簡単に非自明な (ソリトン) 解が構成される.[59]　この真空解から生成される解を “Localized ソリトン” と呼ぶことがあるが, 一般に Solution Generating Technique で生成される解は変換前の既知解と “Localized ソリトン” との複合系となる．したがって “Localized ソリトン” は Solution Generating Technique の本質であり, 上記の結果は “Localized インスタントン” が ADHM 構成法から自然に現れたということを示している．

上記の解の曲率は簡単に計算することができ

$$F_{12} = -F_{34} = i\frac{1}{\theta}|0,0\rangle\langle 0,0| \tag{2.31}$$

となる．インスタントン数は -1 である．

さらにこの解は厳密な Seiberg-Witten マップ [151, 138] によって可換側にうつすことが可能である．D0-brane 密度は

$$J_{\mathrm{D0}}(x) = \frac{2}{\theta^2} + \delta^{(4)}(x). \tag{2.32}$$

となる [82]．右辺第 2 項が原点に Localize した D0-brane (すなわちインスタントン) を表しており, 実際の配位は特異であることが分かる．これはもちろんモジュライ空間の特異性を考えると当然の結果である．なお右辺第一項は B 場の存在により無限個の D0-brane が束縛して D4-brane を形成していることを表しており, 行列模型 [13, 91] の解釈とも一致している．この系はもとの超対称性が保たれたまま B 場が導入された場合に相当し, タキオンは凝縮していない．それが $\zeta = 0$ に現れているのである．

このように非可換の手法は, 特異性を持つ領域まで適用可能であり, その取り扱い易さにより, D-brane を調べるのに非常に有用であったと振り返ることもできる．より詳しい議論については [66] を御覧ください．

- $U(2),\ k = 1$ 解 (NC BPST インスタントン解, θ : ASD)

  同様の手順で構成が可能であり, $\rho \to 0$ 極限で “Localized $U(1)$ インスタントン” に帰着することが言える [55]．

[59] Solution Generating Technique は弦の場の理論に応用され, タキオン凝縮により不安定な D-brane がより低い次元の D-brane に崩壊するという Sen の予想 [154] が有効理論の枠組みで厳密に検証された [75]．(レヴューとして [4, 65, 74] などがある.)

2.3 Nahm Construction of NC Monopoles

この小節では, いくつかの代表的な $G = U(2), U(1)$ 非可換モノポール解の Nahm 構成法を具体的に行う. 手順は可換空間上の場合と同様で

- 手順 (i) Nahm 方程式

$$\frac{dT_i}{d\xi} - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}[T_j, T_k] = -\theta\delta_{i3} \tag{2.33}$$

を境界条件を満たすように解く. 空間座標の非可換性のため定数項が現れているが, この定数項は T_3 のシフトで吸収できる [12]. $k = 1$ の場合は境界条件が自明となり, 取り扱いが簡単になる. (Nahm 方程式もほぼ自明.)

- 手順 (ii) 「 1 次元 Dirac 方程式 」

$$\hat{\nabla}^\dagger \hat{V} = 0 \tag{2.34}$$

を規格化条件とともに解く.

- 手順 (iii) 「 1 次元 Dirac 方程式 」の規格化可能解 $\hat{V}$ を用いて, Higgs 場, ゲージ場をそれぞれ

$$\hat{\Phi} = \int d\xi\ \hat{V}\xi\hat{V}, \quad \hat{A}_i = \int d\xi\ \hat{V}\partial_i\hat{V} \tag{2.35}$$

として構成する.

具体的に解を構成しよう.

- $U(1),\ k = 1$ 解 (NC Dirac モノポール解)

簡単のため, モノポールの位置を原点に取る. Nahm 方程式の解は

$$T_{1,2} = 0,\ T_3 = -\theta\xi \tag{2.36}$$

となる. ただし ξ は半直線 $(-\infty, 0)$ の元である. ここで $W, b, b^\dagger$ という記号を導入しておくと便利である:

$$\begin{aligned} W(x_3, \xi) &= x_3\xi + \frac{1}{2}\theta\xi^2 \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\partial_\xi + x_3 + \theta\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} e^{-W}\partial_\xi e^W \\ b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(-\partial_\xi + x_3 + \theta\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\theta}} e^{W}\partial_\xi e^{-W}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

b は Heisenberg 交換関係を満たす :

$$[b, b^\dagger] = 1. \tag{2.38}$$

「 1 次元 Dirac 方程式 」は

$$\begin{pmatrix} b & \hat{a}^\dagger \\ \hat{a} & -b^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.39}$$

と書ける. ($\hat{a}$ は式 (2.4) で定義したものと同じで $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たす.) これを解くために, $\hat{v}$ として次のようなものを考えよう：[60]

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} -\hat{a}^\dagger \\ b \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |n-1\rangle\langle n-1| \hat{U}_1^\dagger + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\zeta_0}} e^{-W} |0\rangle\langle 0| \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_0 = \int_{-\infty}^{0} d\xi \, e^{-2W} \tag{2.40}$$

β_n は

$$\left(b^\dagger b + n\right) \beta_n = 0, \tag{2.41}$$

を満たす. したがって β_n は β_1 に b を作用させていくことで順次求まる. あとは規格化条件から係数を定めるだけである. 境界条件としては

$$\beta_n b \beta_n(0) = 1, \quad \beta_n(\xi) \overset{\xi \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.42}$$

が必要で, この結果 β_n は

$$\beta_n(\xi) = \frac{\zeta_{n-1}(x_3 + \theta\xi)}{\sqrt{\zeta_n(x_3)\zeta_{n-1}(x_3)}}, \qquad \zeta_n(x_3) := \int_0^\infty dp \; p^n e^{-\theta p^2 + 2px^3} \tag{2.43}$$

となる. これより Higgs 場, ゲージ場を求めると次のようになる：

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n |n\rangle\langle n| = -\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 - \xi_{n-1}^2\right) |n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2 + \frac{x^3}{\theta}\right) |0\rangle\langle 0| \right\}, \\ \hat{D}_z &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} a^\dagger |n\rangle\langle n|, \quad \hat{A}_3 = 0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\xi_n(x_3) := \sqrt{\frac{n\zeta_{n-1}}{2\theta\zeta_n}}. \tag{2.45}$$

これは至るところ非特異な解である. 無限遠の振る舞い ($r_n + x_3 \to \infty, \; r_n := \sqrt{(x_3)^2 + 2\theta n}$) は次のようになる[61] ：

$$\Phi_n \sim \begin{cases} -\dfrac{x_3}{\theta} & : \; n = 0, \; x_3 \to +\infty \\ -\dfrac{1}{2r_n} = -\dfrac{1}{2\sqrt{(x_3)^2 + 2\theta n}} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{2.46}$$

$$(B_3)_n \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & : n = 0, \; x_3 \to +\infty \\ -\dfrac{x_3}{2(r_n)^3} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{2.47}$$

これから分かるように, Higgs 場および磁場はともに $n = 0, \; x_3 \to \infty$, すなわち x_3 軸の正の部分で特別な振る舞いをし, [62] 磁場分布はおおよそ図 10 の右のようになる.

x_3 軸の正の部分の一様な磁場 $(B_3(x_3 \to +\infty))_0 |0\rangle\langle 0|$ は, Weyl 変換でスター積を用いる記述に戻ると, ちょうど Gauss 型の分布 $(2/\theta) \exp\left\{-((x_1)^2 + (x_2)^2)/\theta\right\}$ になり, その幅は大体 $\sqrt{\theta}$ である. したがって可換空間上への極限 $\theta \to 0$ で, これはちょうどデルタ関数型の分布になり, もとの特異な Dirac ストリングに一致する.

[60] なぜこのような仮定を置くのかを説明するには少し議論を要する. 説明が完全にまとまったら, どこかで報告したい. (cf. [71] の version 3 の 3.4 節.)
[61] 鞍点法で ζ_n の積分を処理した.
[62] 今 n を大体 1-2 平面上の原点からの距離の 2 乗と思っている ($(x_1)^2 + (x_2)^2 \sim 2\theta n$).

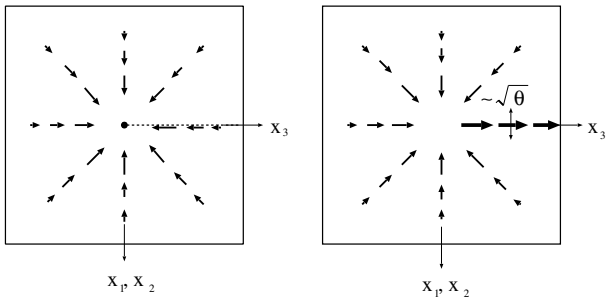


図 10: Dirac モノポールの磁場分布 (可換空間上 (左) V.S. 非可換空間上 (右))

次に D-brane 解釈を考える. 今考えている非可換の場合に相当するのは, D3-brane 上に背景一様 B 場 (磁場) が x_3 方向に入っている状況であり, D1-brane の端は一様 B 場に引っ張られ, ある傾きを持った状態で D1-brane の張力と釣り合って安定となる [78], [79], [80]. (図 11 の右下参照.)

Higgs 場の配位 (1.145) および (2.46) を図示すると, 図 11 の左上および右上のようになる. 上記の

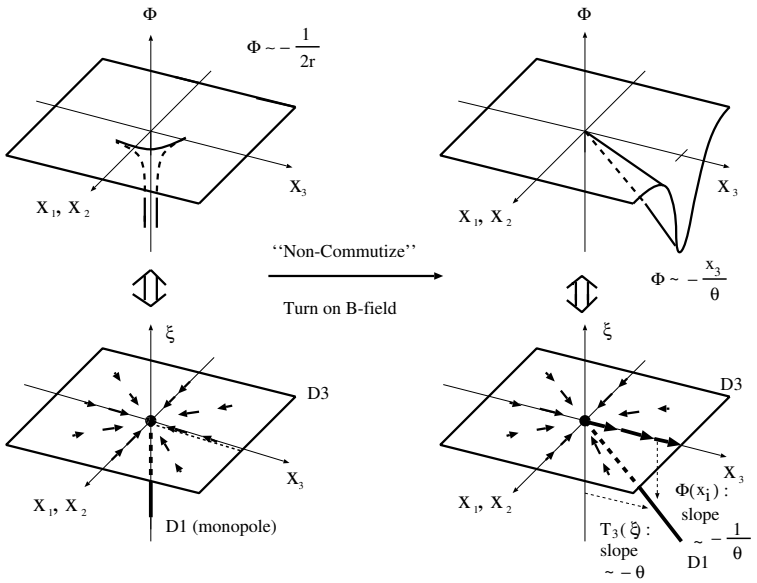


図 11: Dirac モノポールの Higgs 場の配位 (上) と D-brane 解釈および磁場分布 (下) (左：可換空間, 右：非可換空間)

D-brane 解釈 (図 11 下) と比較すると, Higgs 場の x_3 軸の正の部分での特異な振る舞いは D3-brane が突起してできた D1-brane を表していると考えられる. x_3 軸の正の部分の磁束は, この D1-brane の「影」である [60]. [63] D1-brane の傾きは, D3-brane から測って $-1/\theta$ であり, ξ 軸から測った傾きが $-\theta$ であることと全く矛盾せず (図 11 の右下参照), また, DBI 作用の解析から求められた可換側の記述 (iii) での非可換モノポールの D-brane 解釈 [114], [81] の結果とも, ちょうど一致する. [64]

- $U(2),\ k=1$ 解 (NC Prasad-Sommerfield 解)

  この解も Gross と Nekrasov によって求められた [62]. 手順は Dirac モノポールの場合と全く同様である. ただし解は複雑で, その性質についてはまだ詳しく良く分かっていない.

[63] これが物理的対象であるかどうかは微妙で難しい問題である.
[64] 記述 (iii) の詳しい議論は [92] の中の森山さんの記事を, 記述 (ii) と (iii) との比較の詳しい議論は [92] の中の浜中の記事を御参照ください.

- $U(1)$ フラクソン解 $(k=1)$

  Nahm 構成法においても, ADHM 構成法のときの Localized インスタントンに対応する非可換空間特有のソリトンが存在する. これを構成しよう.

  カロロン解からの示唆を考えると, この解は $\rho = \zeta = 0$ すなわち $D = 0$ の場合のモノポール解の非可換版であると考えられる. すなわち ξ は全実数の領域を走り "jumping point" も存在する. $(\xi_b = 0$ とする.)

  Nahm 方程式の解は

$$I = J = 0, \quad T_i(\xi) = -\theta\delta_{i3}\xi. \tag{2.48}$$

  であり,「 1 次元 Dirac 方程式 」の解は

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_k \\ f(\xi, x_3)|0\rangle\langle 0| \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

  である. ただし

$$f(\xi, x_3) = \left(\frac{\pi}{\theta}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{\theta}{2}\left(\xi + \frac{x_3}{\theta}\right)^2\right]. \tag{2.50}$$

  これを式 (1.180) に代入し, Higgs 場, ゲージ場を構成すると次のようになる [67]:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \xi_1 \hat{U}_1^\dagger \hat{U}_1 + \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \ \left(\xi - \frac{x_3}{\theta}\right) e^{-\theta\xi^2} |0\rangle\langle 0| = -\frac{x_3}{\theta}|0\rangle\langle 0|, \\ \hat{A}_3 &= = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \ \hat{v}^\dagger \left(-\frac{x_3}{\theta} - \xi\right) \hat{v} = \left(-\frac{x_3}{\theta} - \hat{\Phi}\right)|0\rangle\langle 0| = 0, \\ \hat{D}_z &= = \hat{U}_1^\dagger \hat{\partial}_z \hat{U}_1. \end{aligned} \tag{2.51}$$

  これはフラクソンと呼ばれる非可換空間特有のソリトンである [146], [61]. 磁場は容易に計算される:

$$\hat{B}_3 = \frac{1}{\theta}\hat{P}_1, \quad \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 0. \tag{2.52}$$

  Higgs 場の配位およびその D-brane 解釈と磁場分布は図 12 のようになる.

  フラクソンは非可換 Dirac モノポールに現れた x_3 軸の正の部分の磁束が無限にのびているものと解釈でき, モノポールというよりはむしろ渦に近い. 単位長さあたりの質量は $2\pi/g_{\rm YM}^2\theta$ である.

  フラクソンも "Solution Generating Technique" を Bogomol'nyi 方程式に応用することで生成されるが, Higgs 場の取り扱いに工夫が必要であった [71, 77]. しかし Nahm 構成法を用いると, その部分も (2.51) から容易に読み取ることができる.

2.4 Notes

- NC Nahm 変換

  Nahm 変換の非可換版も [5] で議論されている. 基本的には同様の手順となるが, Poindaré 束とのテンソル積に対する共変微分をどう定義するかが不明瞭で具体的な変換は難しい. また非可換トー

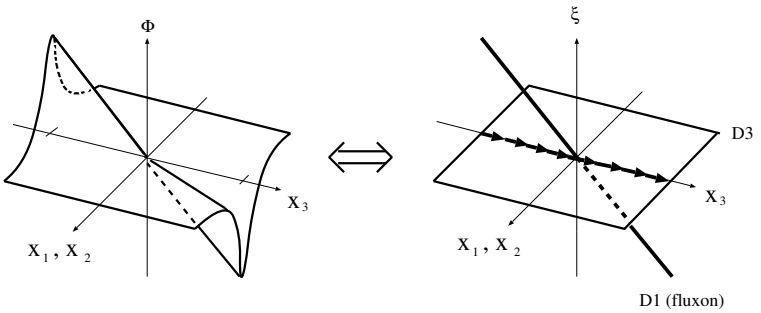


図 12: 1 フラクソンの Higgs 場 (左) および D-brane 解釈と磁場分布 (右)

ラスの非可換パラメータと双対側の非可換パラメータの関係が [5] では不明 (独立) である. しかし T 双対変換では非可換パラメータ同士の関係は明確であるから, この部分を明らかにすることは興味が持たれる. また非可換トーラスでは T 双対性と等価な Morita 同値[65] という概念もあり, それとの関係を議論するのも面白い. 弦理論の T 双対変換をゲージ場 (あるいは Dirac 零モード) の変換として記述できるのは, この Nahm 変換を通じてのみであり T 双対性に関して何らかのより深い性質を解明できるかもしれない [70].

3 Conclusion

以上 ADHM/Nahm 構成法の一通りの話題を概観した. 紙数の都合上省略したものもあるが, 主なものは以下の通り :

- ツイスター理論との関わり ([172] など)
- インスタントン・バックグラウンドにおける経路積分の計算 ([44, 97] など)
- ALE 空間上の ADHM 構成法 [104], Quiver ゲージ理論 [128] との関わり
- 高次元 ADHM 構成法 [31, 38, 170] とその非可換化 [84, 136, 140]
- 一般ゲージ群での ADHM/Nahm 構成法 ([25, 20, 90] など)
- モジュライ空間の計量の性質 ([109, 107, 110, 126] など) とその応用 ([68] など)
- タキオン凝縮から見た ADHM/Nahm 構成法, Nahm 変換 ([70, 89] など)

ADHM/Nahm 構成法はインスタントン/モノポール・モジュライを最も的確に捉える方法であり, ゲージ場の自己双対性の本質を最も見やすい形で提示している. その美しい数学的構造に対して, ある D-brane 系の BPS 条件から, いくつか物理的意味が明快に与えられた. それにより D-brane についての新しい知見がいくつか得られたわけであるが, 全ての部分に解釈が与えられたわけではない. そこに新しい D-brane 力学解明への鍵がまだまだ多く潜んでいることであろう.

謝辞 : これまでお逢い出来た皆様, 中でも議論などで私に少しでも時間を費やしてくださった方々, どうもありがとうございました. 一人一人お名前を挙げていまお礼を申し上げたいのですが, きりがないし,

[65] レヴューとして例えば [100] がある.

照れ臭いし, 次回また何らかの形で致します. ただしこの記事に関連した研究指導という点に関して, 松尾泰先生, 寺嶋靖治先輩, 細道和夫先輩には特別感謝を申し上げます.

この記事の作成は日本育英会および日本証券奨学財団の経済援助の下行われました.

参考文献

[1] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, (Cambridge UP, 1991) [ISBN/0521387302].

[2] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0104** (2001) 001 [hep-th/0009142].

[3] D. Amati, K. Konishi, Y. Meurice, G. C. Rossi and G. Veneziano, Phys. Rept. **162** (1988) 169.

[4] 浅川 嗣彦, 『String 理論における K-theory と非可換幾何』, [66] ※ 研究会「開 Calabi-Yau 多様体への代数幾何と弦理論からのアプローチ」のプロシーディング.

[5] A. Astashkevich, N. Nekrasov and A. Schwarz, Commun. Math. Phys. **211** (2000) 167 [hep-th/9810147].

[6] M. F. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills Fields* (Pisa, 1979) [ISBN/1-000-00071-1].

[7] M. F. Atiyah and N. J. Hitchin, *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles* (Princeton UP, 1988) [ISBN/0-691-08480-7].

[8] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld and Y. I. Manin, Phys. Lett. A **65** (1978) 185.

[9] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. M. Singer, Proc. Roy. Soc. Lond. A **362** (1978) 425.

[10] M. F. Atiyah and R. S. Ward, Commun. Math. Phys. **55** (1977) 117.

[11] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Topology **3** suppl. 1 (1964) 3.

[12] D. Bak, Phys. Lett. B **471** (1999) 149 [hep-th/9910135].

[13] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55** (1997) 5112 [hep-th/9610043].

[14] C. W. Bernard, N. H. Christ, A. H. Guth and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **16** (1977) 2967.

[15] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz[67] and Y. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59** (1975) 85.

[16] A. A. Belavin and V. E. Zakharov, Phys. Lett. B **73** (1978) 53.

[17] M. Bianchi, F. Fucito, G. Rossi and M. Martellini, Nucl. Phys. B **473** (1996) 367 [hep-th/9601162].

[18] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.

[19] M. C. Bowman, Phys. Rev. D **32** (1985) 1569.

[20] M. C. Bowman, E. Corrigan, P. Goddard, A. Puaca and A. Soper, Phys. Rev. D **28** (1983) 3100.

[66] [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~asakawa] から入手可能.

[67] 著者の一人 A. S. Schwartz はスペルが若干異なるものの A. S. Schwarz 氏と同一人物であると思われる.

[21] P. J. Braam and P. van Baal, Commun. Math. Phys. **122** (1989) 267.

[22] L. S. Brown, R. D. Carlitz, D. B. Creamer and C. k. Lee, Phys. Rev. D **17** (1978) 1583.

[23] C. Callias, Commun. Math. Phys. **62** (1978) 213.

[24] A. S. Cattaneo and G. Felder, Commun. Math. Phys. **212** (2000) 591 [math.qa/9902090].

[25] N. H. Christ, E. J. Weinberg and N. K. Stanton, Phys. Rev. D **18** (1978) 2013.

[26] C. S. Chu, V. V. Khoze and G. Travaglini, Nucl. Phys. B **621** (2002) 101 [hep-th/0108007].

[27] S. R. Coleman, "The Magnetic Monopole Fifty Years Later," in *The Unity of the Fundamental Interactions* (Plenum, 1983) 21 [ISBN/0-306-41242-X].

[28] S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge UP, 1985) [ISBN/0-521-31827-0].

[29] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, JHEP **9802** (1998) 003 [hep-th/9711162].

[30] E. Corrigan, Phys. Rept. **49** (1979) 95.

[31] E. Corrigan, C. Devchand, D. B. Fairlie and J. Nuyts, Nucl. Phys. B **214** (1983) 452.

[32] E. Corrigan and D. B. Fairlie, Phys. Lett. B **67** (1977) 69.

[33] E. Corrigan, D. B. Fairlie, S. Templeton and P. Goddard, Nucl. Phys. B **140** (1978) 31.

[34] E. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates and P. Goddard, Commun. Math. Phys. **58** (1978) 223.

[35] E. Corrigan and P. Goddard, "Some aspects of instantons," Lecture Note in Physics **129** (1980) 14 [ISBN/3-540-10010-5].

[36] E. Corrigan and P. Goddard, Commun. Math. Phys. **80** (1981) 575.

[37] E. Corrigan and P. Goddard, Ann. Phys. **154** (1984) 253.

[38] E. Corrigan, P. Goddard and A. Kent, Commun. Math. Phys. **100** (1985) 1.

[39] E. Corrigan, P. Goddard, H. Osborn and S. Templeton, Nucl. Phys. B **159** (1979) 469.

[40] N. S. Craigie, P. Goddard and W. Nahm, *Monopoles in Quantum Field Theory* (World Sci., 1982) [ISBN/9971950294].

[41] P. A. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A **133** (1931) 60.

[42] D. Diaconescu, Nucl. Phys. B **503** (1997) 220 [hep-th/9608163].

[43] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds* (Oxford UP, 1990) [ISBN/0-19-850269-9].

[44] N. Dorey, T. J. Hollowood, V. V. Khoze and M. P. Mattis, "The calculus of many instantons," *to appear*.

[45] M. R. Douglas, "Branes within branes," hep-th/9512077.

[46] M. R. Douglas, J. Geom. Phys. **28** (1998) 255 [hep-th/9604198].

[47] M. R. Douglas and C. Hull, JHEP **9802** (1998) 008 [hep-th/9711165].

[48] M. R. Douglas and G. W. Moore, "D-branes, quivers, and ALE instantons," hep-th/9603167.

[49] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73** (2002) 977 [hep-th/0106048].

[50] 江口 徹 (浜中 真志 記), 「位相的場の理論とその周辺」特定領域研究 (B)707 「超対称性理論」講義録シリーズ **2** (1998) [http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html]. [68]

[51] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, Phys. Rept. **66** (1980) 213.

[52] K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043 [hep-th/9912047].

[53] K. Furuuchi, Commun. Math. Phys. **217** (2001) 579 [hep-th/0005199].

[54] K. Furuuchi, "Topological charge of U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," hep-th/0010006.

[55] K. Furuuchi, JHEP **0103** (2001) 033 [hep-th/0010119].

[56] A. Giveon and D. Kutasov, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 983 [hep-th/9802067].

[57] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, Phys. Rept. **244** (1994) 77 [hep-th/9401139].

[58] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0005** (2000) 020 [hep-th/0003160].

[59] P. Goddard and D. I. Olive, Rept. Prog. Phys. **41** (1978) 1357.

[60] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0007** (2000) 034 [hep-th/0005204].

[61] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0010** (2000) 021 [hep-th/0007204].

[62] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0103** (2001) 044 [hep-th/0010090].

[63] D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 43.

[64] 浜中 真志, 『非可換ゲージ理論におけるソリトン解 (増補版)』, [69] ※ 2001 年 2 月の研究会「可積分系研究の現状と展望」の講演アブストラクト.

[65] 浜中 真志, "Recent developments in non-commutative gauge theory," 素粒子論研究 **104-5** (2002-2) E27, ※ 2001 年 7 月の基研研究会「場の量子論 2001」のプロシーディング.

[66] 浜中 真志, 『非可換空間上のゲージ理論とソリトン』, 研究集会「量子化の幾何学 2」[70] の報告集.

[67] M. Hamanaka, Phys. Rev. D **65** (2002) 085022 [hep-th/0109070].

[68] M. Hamanaka, Y. Imaizumi and N. Ohta, Phys. Lett. B **529** (2002) 163 [hep-th/0112050].

[69] M. Hamanaka and H. Kajiura, "Gauge fields on tori and T-duality," *to appear*.

[70] M. Hamanaka, H. Kajiura and T. Takayanagi, *work in progress*.

[71] M. Hamanaka and S. Terashima, JHEP **0103** (2001) 034 [hep-th/0010221].

[72] B. J. Harrington and H. K. Shepard, Phys. Rev. D **17** (1978) 2122.

[73] J. A. Harvey, "Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry," [hep-th/9603086].

[68] 出版物の正誤表が私のホームページ [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka] に置かれています.
[69] 私が書いた記事については, 私のホームページ [http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka] にも置かれております.
[70] URL: [http://www.math.waseda.ac.jp/~kori/workshop-2002.html].

[74] J. A. Harvey, "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes," [hep-th/0102076].

[75] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP **0012** (2000) 024 [hep-th/0010060].

[76] J. A. Harvey and G. W. Moore, J. Math. Phys. **42** (2001) 2765 [hep-th/0009030].

[77] K. Hashimoto, JHEP **0012** (2000) 023 [hep-th/0010251].

[78] A. Hashimoto and K. Hashimoto, JHEP **9911** (1999) 005 [hep-th/9909202].

[79] K. Hashimoto, H. Hata and S. Moriyama, JHEP **9912** (1999) 021 [hep-th/9910196].

[80] K. Hashimoto and T. Hirayama, Nucl. Phys. B **587** (2000) 207 [hep-th/0002090].

[81] K. Hashimoto, T. Hirayama and S. Moriyama, JHEP **0011** (2000) 014 [hep-th/0010026].

[82] K. Hashimoto and H. Ooguri, Phys. Rev. D **64** (2001) 106005 [hep-th/0105311].

[83] 林 浩一, 『モノポール』, 物理学最前線 **6** (共立出版, 1984) 77 [ISBN/4-320-03188-1].

[84] Y. Hiraoka, to appear in Phys. Lett. B hep-th/0203047.

[85] N. J. Hitchin, Commun. Math. Phys. **83** (1982) 579.

[86] N. J. Hitchin, Commun. Math. Phys. **89** (1983) 145.

[87] N. J. Hitchin, Proc. Lond. Math. Soc. **55** (1987) 59.

[88] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstrom and M. Rocek, Commun. Math. Phys. **108** (1987) 535.

[89] K. Hori, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 281 [hep-th/9902102].

[90] J. Hurtubise and M. K. Murray, Commun. Math. Phys. **122** (1989) 35.

[91] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498** (1997) 467 [hep-th/9612115].

[92] 石川 洋, 加藤 光裕, 川野 輝彦, 佐々木 隆, 寺嶋 靖治, 綿村 哲, *Proceeding of Workshop on Noncommutative Geometry in String Theory and Field Theories*, 文部省特定領域研究 (B)707「超対称性理論」会議録シリーズ No.8 (2001). [71]

[93] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, JHEP **0112** (2001) 000 [hep-th/0109111].

[94] T. Ishikawa, S. I. Kuroki and A. Sako, "Instanton number calculus on noncommutative $\mathbf{R}^4$," hep-th/0201196.

[95] R. Jackiw, C. Nohl and C. Rebbi, Phys. Rev. D **15** (1977) 1642.

[96] C. V. Johnson, "D-brane primer," hep-th/0007170. [72]

[97] V. V. Khoze, M. P. Mattis and M. J. Slater, Nucl. Phys. B **536** (1998) 69 [hep-th/9804009].

[98] K. Y. Kim, B. H. Lee and H. S. Yang, "Comments on instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," hep-th/0003093.

[71] [http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html] に掲載中.
[72] 近々Cambridge UP から出版される予定である [ISBN/0-521-80912-6].

[99] K. Y. Kim, B. H. Lee and H. S. Yang, Phys. Lett. B **523** (2001) 357 [hep-th/0109121].

[100] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry," hep-th/0012145.

[101] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry, part II," hep-th/0107251.

[102] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds, I," q-alg/9709040.

[103] T. C. Kraan and P. van Baal, Phys. Lett. B **428** (1998) 268 [hep-th/9802049];
T. C. Kraan and P. van Baal, Nucl. Phys. B **533** (1998) 627 [hep-th/9805168].

[104] P. B. Kronheimer and H. Nakajima, Math. Ann. **288** (1990) 263.

[105] O. Lechtenfeld and A. D. Popov, JHEP **0203** (2002) 040 [hep-th/0109209].

[106] K. Lee and C. Lu, Phys. Rev. D **58** (1998) 025011 [hep-th/9802108].

[107] K. M. Lee, D. Tong and S. Yi, Phys. Rev. D **63** (2001) 065017 [hep-th/0008092].

[108] K. Lee and P. Yi, Phys. Rev. D **56** (1997) 3711 [hep-th/9702107].

[109] K. M. Lee and P. Yi, Phys. Rev. D **61** (2000) 125015 [hep-th/9911186].

[110] A. Maciocia, Commun. Math. Phys. **135** (1991) 467.

[111] J. Madore, J. L. Richard and R. Stora, Phys. Rept. **49** (1979) 113.

[112] 前田 吉昭, 梶浦 宏成 (高村 亮 記), 「変形量子化入門」東京大学数理科学セミナリーノート **20** (2002) [ISSN/0919-8180].

[113] L. J. Mason and N. M. Woodhouse, *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (Oxford UP, 1996) [ISBN/0-19-853498-1].

[114] S. Moriyama, Phys. Lett. B **485** (2000) 278 [hep-th/0003231].

[115] S. Moriyama, JHEP **0008** (2000) 014 [hep-th/0006056].

[116] S. Mukai, Nagoya Math. J. **81** (1981) 153.

[117] 向井 茂, 『アーベル多様体上のベクトル束について』, 数理解析研究所講究録 **597** (1986) 6;
向井 茂 (浜中 真志 記), 『Fourier-Mukai 変換』, 研究会「弦理論の数学的側面」講義録 (1999) [http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html].

[118] M. K. Murray, "Monopoles," math-ph/0101035.

[119] R. C. Myers, JHEP **9912** (1999) 022 [hep-th/9910053].

[120] 長島 順清, 「高エネルギー物理学の発展」(朝倉書店, 1999) [ISBN/4-254-13676-5].

[121] W. Nahm, Phys. Lett. B **90** (1980) 413.

[122] W. Nahm, Phys. Lett. B **93** (1980) 42.

[123] W. Nahm, "The construction of all self-dual multimonopoles by the ADHM method," in [40] p. 87.

[124] W. Nahm, "Self-dual monopoles and calorons," Lecture Notes in Physics **201** (1984) 189 [ISBN/0-387-13335-6].

[125] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (IOP, 1990) [ISBN/0-85274-095-6].

[126] H. Nakajima, "Monopoles and Nahm's equations," Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **145** (Dekker, 1993) 193 [ISBN/0-8247-9069-3].

[127] H. Nakajima, "Resolutions of moduli spaces of ideal instantons on $\mathbf{R}^4$," in *Topology, Geometry and Field Theory* (World Sci., 1994) 129 [ISBN/981-02-1817-6].

[128] 中島 啓, 「箙多様体と量子アファィン環」, 数学 **52** (2000) 337, and references therein.

[129] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces* (AMS, 1999) [ISBN/0-8218-1956-9].

[130] C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory* (Academic, 1991) [ISBN/0-12-514076-2].

[131] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists* (Academic, 1983) [ISBN/0125140819].
邦訳：佐々木 隆 監訳, 南部 保貞, 吉井 久博 訳, 「物理学者のためのトポロジーと幾何学」(マグロウヒル, 1989) [ISBN/4-89501-306-5].

[132] N. A. Nekrasov, "Noncommutative instantons revisited," hep-th/0010017.

[133] N. A. Nekrasov, "Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories," hep-th/0011095.

[134] N. A. Nekrasov, "Lectures on open strings, and noncommutative gauge fields," hep-th/0203109.

[135] N. Nekrasov and A. Schwarz, Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689 [hep-th/9802068].

[136] K. Ohta, Phys. Rev. D **64** (2001) 046003 [hep-th/0101082].

[137] 太田 信義, 「超弦理論・ブレイン・M 理論」(シュプリンガー東京, 2002) [ISBN/4-431-70970-3].

[138] Y. Okawa and H. Ooguri, Phys. Rev. D **64** (2001) 046009 [hep-th/0104036].

[139] H. Osborn, Nucl. Phys. B **159** (1979) 497.

[140] G. Papadopoulos and A. Teschendorff, Phys. Lett. B **419** (1998) 115 [hep-th/9708116].

[141] R. Penrose, Gen. Rel. Grav. **7** (1976) 31.

[142] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time: Vol. 1, 2* (Cambridge UP, 1984, 1986) [ISBN/0-521-24527-3, 0-521-25267-9].

[143] J. Polchinski, "TASI lectures on D-branes," hep-th/9611050.

[144] J. Polchinski, *String Theory, Vol. 1, 2* (Cambridge UP, 1998) [ISBN/0-521-63312-5].

[145] J. Polchinski, S. Chaudhuri and C. V. Johnson, "Notes on D-Branes," hep-th/9602052.

[146] A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **495** (2000) 407 [hep-th/0007043].

[147] M. K. Prasad, Physica D **1** (1980) 167.

[148] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760.

[149] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (Elsevier, 1982) [ISBN/0-444-87047-4].

[150] P. Rossi, Nucl. Phys. B **149** (1979) 170.

[151] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032 [hep-th/9908142].

[152] T. Schafer and E. V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323 [hep-ph/9610451].

[153] H. Schenk, Commun. Math. Phys. **116** (1988) 177.

[154] A. Sen, "Non-BPS states and branes in string theory," [hep-th/9904207].

[155] M. A. Shifman, *Instantons in Gauge Theories* (World Sci., 1994) [ISBN/981-02-1826-5].

[156] M. A. Shifman, "ITEP lectures on particle physics and field theory: Vol. 1, 2," World Sci. Lect. Notes Phys. **62** (1999) 1.

[157] M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, "Instantons versus supersymmetry: Fifteen years later," hep-th/9902018 in [156] p. 485.

[158] P. M. Sutcliffe, Int. J. Mod. Phys. A **12** (1997) 4663 [hep-th/9707009].

[159] C. H. Taubes, Commun. Math. Phys. **91** (1983) 235.

[160] S. Terashima, Phys. Lett. B **477** (2000) 292 [hep-th/9911245].

[161] D. Tsimpis, Phys. Lett. B **433** (1998) 287 [hep-th/9804081].

[162] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8.

[163] G. 't Hooft, *unpublished*.

[164] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432 [Erratum-ibid. D **18** (1978) 2199].

[165] G. 't Hooft, "Monopoles, instantons and confinement," hep-th/0010225.

[166] K. K. Uhlenbeck, Commun. Math. Phys. **83** (1982) 11.

[167] A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, V. A. Novikov and M. A. Shifman, Sov. Phys. Usp. **24** (1982) 195 [Usp. Fiz. Nauk **136** (1982) 553] in [155] p. 468, in [156] p. 201.

[168] P. van Baal, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **49** (1996) 238 [hep-th/9512223].

[169] R. S. Ward, Phys. Lett. A **61** (1977) 81.

[170] R. S. Ward, Nucl. Phys. B **236** (1984) 381.

[171] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **315** (1985) 451.

[172] R. S. Ward and R. O. Wells, *Twistor Geometry and Field Theory* (Cambridge UP, 1990) [ISBN/0-521-42268-X].

[173] E. J. Weinberg, Phys. Rev. **20** (1979) 936.

[174] F. Wilczek, "Geometry and interactions of instantons," in *Quark Confinement and Field Theory* (Wiley, 1977) 211 [ISBN/0-471-02721-9].

[175] E. Witten, J. Geom. Phys. **15** (1995) 215 [hep-th/9410052].

[176] E. Witten, Nucl. Phys. B **460** (1996) 541 [hep-th/9511030].

[177] C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1377.