修士論文

双対定理とその応用

四ツ谷直仁
北海道大学大学院理学研究科

2006

北海道大学大学院理学研究科
数学専攻博士前期課程

2006

双対定理とその応用

四ツ谷直仁
北海道大学大学院理学研究科

目次

1　はじめに **1**

2　準備 **4**

3　双対多様体と Conormal Bundle **13**

4　双対の巡回性 **17**

5　同伴曲線 **21**

6　例 **28**

1　はじめに

この論文は私が修士過程において学習した Gerd Fischer & Jens Piontkowski 氏著の Ruled Varieties, 特に双対多様体についての内容をまとめたものである.

双対多様体は, 代数多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対する接超平面の概念と類似して定義できる.X が非特異とし X の任意の点 p における接線の合併を考える場合は特に問題は無い. この様な場合, 超平面 $H \subset \mathbb{P}_N$ で X の接平面を含むような H は接超平面と呼ばれ, 任意の X の点で定める事ができる. 一方 X が特異点を持つ様な時は少し工夫が必要になる. $\mathbb{P}$ の双対空間を $\mathbb{P}_N^*$ で表す. この時 X に対する接超平面の集合というものを,X の非特異点における接平面を含むような超平面の集合を Γ としたとすると,$\mathbb{P}_N^*$ における

Γ の閉包として定める. これを X の双対多様体と呼び $X^* \subset \mathbb{P}_N^*$ により表す. 以下, 代数多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上定まるものとする. まず多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ が非特異な超曲面 $X = V(F)$ であったとする. この時 X の任意の点 p に対し,F の F 勾配を対応させる写像,

$$\delta : X \to \mathbb{P}_N \qquad p \mapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p) : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x_N}(p) \right)$$

が定まる. この時 X の双対多様体を $X^* := \delta(X)$ で定義する. これは一般に特異点を持つような次元 n の多様体 X であっても定まる.

より具体的には,$\mathbb{T}_p X$ を X の接空間とした時

$$\Gamma_X := \{(p, y) \in X \times \mathbb{P}_N^* : \langle \mathbb{T}_p X, y \rangle = 0\}$$

を考える. ここで $\langle x, y \rangle$ は $y(x)$ を意味するものとする. この時, 射影 $\pi : \Gamma_X \to X$ に対し C_X を

$$C_X := \text{closure of}(\Gamma_X \backslash \pi^{-1}(\text{sing}X)) \subset X \times \mathbb{P}_N^*$$

で定め, これを X の Conormal bundle と呼ぶ. ここで X の特異点における接超平面を p 近傍の非特異な点における接超平面の極限とみなすことで, 形式的に極限をとる操作を $X \times \mathbb{P}_N^*$ での閉包をとる事に対応させている. この時もう一方の射影 $\pi^* : X \times \mathbb{P}_N^* \to \mathbb{P}_N^*$ に対し $X^* := \pi^*(C_X)$ とする事で X の双対多様体が, 一般の多様体に対して定まる.C_X と X^* に対し, 次の基本的かつ重要な事実が成立する.

(1) C_X は既約で,$\dim C_X = N-1$ (2) $N-n-1 \leq \dim X^* \leq N-1$ (3) $(X^*)^* = X$.

特に X が一次元多様体 (曲線) である場合に注目する.S を Compact な Riemann 曲面とし, 曲線 $\varphi : S \longrightarrow \varphi(S) = X$ が与えられたとする. この時 S の開集合 U に対し,regular map $\rho : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ が任意の $s \in U$ に対し $\rho(s) \in \varphi(s)$ を満たす時,ρ を φ の U 上 moving vector という. すると regular map $\rho'(s) = \frac{d\rho}{ds}(s)$ を導き, 与えられた曲線 φ に対し

$$\varphi^{(k)} : S \longrightarrow \mathbb{G}(k, N) \qquad s \longmapsto \mathbb{C}(\rho(s) \wedge \ldots \wedge \rho^{(k)}(s))$$

で定め $\varphi^{(k)}$ を φ の k 次同伴曲線という. 一方 D を vector 空間 U に対し, その annihilator を対応させる写像とすれば次の可換図式が成立する.

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\varphi^{(N-k-1)}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}^{(k)}"] & \\ \mathbb{G}(N-k-1, N) \arrow[rr, "D"'] & & \mathbb{G}^*(k, N) \end{tikzcd}$$

$\widetilde{X}=\widetilde{\varphi}(S)$ を曲線 φ の双対曲線という. この時 $\widetilde{\widetilde{X}}= X$ が成立する.

一方 $\mathrm{Tan}^{(k)}X := \bigcup_{E\in B_k} E \subset \mathbb{P}_N B_k := \varphi^{(k)}(S) \subset \mathbb{G}(k,N)$ で定めると $\mathrm{Tan}^{(N-2)}\widetilde{X} = X^*$ がいえる. これらの事実を用いる事で X^* の方程式を特別な代数多様体に限ってではあるが, 具体的に計算する事ができる.$\varphi_0,\ldots,\varphi_N$ により,φ が

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_N \qquad (t_0 : t_1) \mapsto (\varphi_0(t_0,t_1) : \ldots : \varphi_N(t_0,t_1))$$

と表される時 φ を次数 d の非退化有理曲線という. 特に注目するべきなのは $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_{N-1} < m_N = d \qquad \varphi_i(t_0,t_1) := t_0^{d-m_i}t_1^{m_i}$ と表される時で, この時 φ を有理単項曲線という.$(y_0 : \ldots : y_N)$ を $\mathbb{P}_N^*$ 斉次座標とした時, 多項式 $\Phi(t;y) := y_0\varphi_0(t) + \ldots + y_N\varphi_N(t)$ を定める. この時 y_i を係数,$(t_0 : t_1)$ を変数とみる事で Φ の discriminant set

$$D := \{(y_0 : \ldots : y_N) \in \mathbb{P}_N^* : \Phi(t;y)\ \text{は}\ (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1\text{を重根にもつ}\ \}$$

が定められる. するとこの D に対し,$D = X^*$ が言える. この関係により次のように $X^* \subset \mathbb{P}_N^*$ に対する関係式を求める事ができる.

例えば ($d = 3 \quad N = 3$ の場合) ねじれ曲線

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to X \subset \mathbb{P}_3 \qquad (t_0 : t_1) \mapsto ({t_0}^3 : {t_0}^2t_1 : t_0{t_1}^2 : {t_1}^3)$$

に対して $\Phi(t;y) := y_0t^3 + y_1t^2 + y_2t + y_3$ となる. この y_i 係数に関する判別式は, $f^* = 27{y_0}^2{y_3}^2 - 18y_0y_1y_2y_3 + 4y_0{y_2}^3 + 4{y_1}^3y_3 - {y_1}^2{y_2}^2$ であるのでこれが X^* に対する関係式となる.一方 $\widetilde{X}^*$ に対するそれは $f = x_0^2x_3^2 - 6x_0x_1x_2x_3 + 4x_0x_2^3 + 4x_1^3x_3 - 3x_1^2x_2^2$ となった.

同様に $d = 4, N = 3$ の場合で

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_3 \qquad (t_0 : t_1) \mapsto ({t_0}^4 : {t_0}^3t_1 : t_0{t_1}^3 : {t_1}^4)$$

の時は $f^* = 4y_1^3y_2^3 + 27y_0^2y_2^4 + 6y_0y_1^2y_2^2y_3 + 27y_1^4y_3^2 + 192y_0^2y_1y_2y_3^2 - 256y_0^3y_3^3$

$f = -16x_1^3x_2^3 + 27x_0^2x_2^4 + 6x_0x_1^2x_2^2x_3 + 27x_1^4x_3^2 - 48x_0^2x_1x_2x_3^2 - 16x_0^3x_3^3$ であった.

このように双対多様体を, 特別な多様体に限ってではあるが具体的な形で計算する事ができたのは私自身にとって一つのささやかな喜びである. 代数幾何学は多くのスキーム論や可換環論などの予備知識が必要とされ, 非常に困難な分野ではあるがこの分野は他の代数幾何学のトピックと比べ受け入れやすいのも魅力の一つではあった.

以下この論文の構成について述べる. 2 章では必要な予備知識や後の 3 章,4 章における定義や定理などに用いられる命題が述べられている.

3 章では双対多様体を定めるにあたって必要な Conormal bundle と双対多様体を構成する.

4 章は $(X^*)^* = X$ というある意味直観的には明らかな双対の巡回性を示すにあたって必要な双対定理の証明の部分である.

5 章は, 特に多様体が曲線である場合に注目し, ある曲線 φ が与えられた際に誘導される同伴曲線なるものを構成し, 双対曲線を定める.

6 章は上で定めた双対多様体が曲線である場合にどの様な形で定まるのかを具体的に計算する.

この論文を書くにあたってはテキストである Ruled Variety (Gerd Fischer & Jens Piontkowski 氏著) と Joe Harris 氏著の Algebraic Geometry(A First Course) を主に参考にした.

2　準備

以下, 体は全て $\mathbb{C}$ とし, 位相は Zariski 位相とする.

定義 2.1. $X \subset \mathbb{C}^N$ が, 多項式 $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_m]$ の共通零点として表されるとき, これを $X = V(f_1, \ldots, f_m)$ と表記し X を代数的集合という.

定義 2.2. $Y \subset \mathbb{P}_N$ が斉次多項式 $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_m]$ により $Y = V(f_1, \ldots, f_m)$ と表されるとき Y を射影的代数的集合という.

定義 2.3. 位相空間 X の空でない部分集合 Y が既約とは Y の真部分閉集合 Y_1, Y_2 を用いて $Y = Y_1 \cup Y_2$ の形に表す事ができない時をいう. 空集合は既約とみなさない.

定義 2.4. 位相空間 X が *Noether* 的とは X の閉部分集合の任意の列 $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ について $Y_{\mathrm{r}} = Y_{\mathrm{r}+1} = \ldots$ となる整数 r が常に取れるときをいう.

命題 2.5. *Noether* 的位相空間 X において, 全ての空でない閉部分集合 Y は既約閉部分集合 Y_i に対し, $i \neq j \Rightarrow Y_i \not\supseteq Y_j$ なるものとすれば一意的に $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ と表される. これを Y の既約分解という. 既約な代数的集合を代数多様体という.

Proof. $[4, \mathrm{I}, 1.5]$ □

定義 2.6. $X \subset \mathbb{P}_N$, $Y \subset \mathbb{P}_M$ を代数的集合とする. 射 $\varphi : X \longrightarrow Y$ が *regular* であるとは任意の点 $p \in X$ に対し p を含む X の開集合 U があり任意の $x \in U$ に対し同次斉次多項式 $F_0, \ldots, F_M \in \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_N]$ により $\varphi(x) = (F_0(x) : \ldots : F_M(x))$ と表される時をいう. 但し,$V(F_0, \ldots, F_M(x)) \cap U = \phi$ とする.

定理 2.7 (既約性定理). $X \subset \mathbb{P}_N$ を代数的集合,$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}_M$ は *regular map* とし, 以下が成立するものとする.

(1) $\varphi(X)$ は既約.

(2) 任意の $y \in \varphi(X)$ に対し $\varphi^{-1}(y)$ は既約.

(3) 任意のファイバー φ^{-1} は同次元.

この時,X は既約で $\dim X = \dim \varphi(X) + \dim \varphi^{-1}(y)$ が成立.

Proof. [3, §11 *theorem*11.14] □

定義 2.8. X を任意の代数多様体とする. 任意の点 $p \in X$ に対し $\mathcal{O}_{X,p}$ を p の近傍で正則な関数の芽からなる局所環とし,$m_{X,p}$ を p で消える関数の芽からなる $\mathcal{O}_{X,p}$ の極大 *ideal* とする. また剰余体 $\mathcal{O}_{X,p}/m_{X,p}$ を $\mathbb{C}$ で表す. この時 $m_{X,p}/m_{X,p}^2$ の双対 $\mathbb{C}$-*vector* 空間を T_pX であらわす.

T_pX は X の点 p における *Zariski* 接空間と呼ばれる.

この T_pX に対し次が成立する.

命題 2.9. (1) 任意の点 $p \in X$ に対し $\dim T_pX \geq \dim X$

(2) X の特異点からなる集合,

$$\mathrm{sing}X := \{p \in X : \dim T_pX > \dim X\} \subset X$$

は X の真部分閉集合となる. 従って,X の非特異点よりなる集合

$$\mathrm{sm}X := \{p \in X : \dim T_pX = \dim X\} = X \setminus \mathrm{sing}X$$

は X の開集合となる.

Proof. 1)[8, 3.2.9] 2)[4, I, 5.3] □

定義 2.10. $\varphi : X \longrightarrow Y$ を多様体の間の regular map とする. この時任意の点 $p \in X$ に対し,φ によって引き起こされる自然な $\mathbb{C}$-線形写像

$$d_p\varphi : T_pX \longrightarrow T_{\varphi(p)Y}$$

があり, φ の p における微分と呼ばれる.

定理 2.11 (Jacobi 判定法). X, Y を射影多様体,$\varphi : X \longrightarrow Y$ を全射な regular map とする. すると空でないある開集合 $U \subset X$ があり, 任意の $p \in U$ に対し

(1) $\dim X = \dim T_pX$

(2) $\dim Y = \mathrm{rank}\, d_p\varphi$

(3) $\dim \varphi^{-1}(\varphi(p)) = \dim \ker d_p\varphi$

が成立する.

Proof. [7, §46 *theorem*46.3] □

定義 2.12. 空でない射影的代数多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対し X のアファイン錐 $\widehat{X}$ を次で定める. まず

$$\pi : \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_N \qquad (x_0, \ldots, x_N) \mapsto (x_0 : \ldots : x_N)$$

をアファイン座標が $(x_0, \ldots, x_N)$ である点を斉次座標が $(x_0 : \ldots : x_N)$ である点に移す写像とする. 以後これを標準写像と呼ぶ事にする. この π に対し,$\widehat{X} := \pi^{-1}(X) \cup \{(0, \ldots, 0)\}$ と定義する.

すると $\widehat{X}$ とその Zariski 接空間について次がいえる. $F_1, \ldots, F_m \in \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_N]$ は斉次多項式であり $\widehat{X} = V(F_1, \ldots, F_m)$ と表されていたとする. この時

$$T_q\widehat{X} = \{v \in \mathbb{C}^{N+1} : \mathrm{grad}_q F_k(v) = 0,\ k = 1, \ldots, m\}$$

となる. 実際, 接平面 $T_q\widehat{X}$ は $q = (q_0, \ldots, q_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ とすると, 方程式

$$l : (T_0 - q_0)\frac{\partial F_k}{\partial T_0}(q) + (T_1 - q_1)\frac{\partial F_k}{\partial T_1} + \ldots + (T_N - q_N)\frac{\partial F_k}{\partial T_N}(q) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

により定まる. そのため,$v = (v_0, \ldots, v_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ に対し

$$v \in T_qX \Leftrightarrow (v_0 - q_0)\frac{\partial F_k}{\partial T}(q) + \ldots + (v_N - q_N)\frac{\partial F_k}{\partial T}(q) = 0$$

がわかる. 一方で Euler の公式より F_k の次数を d_k とすれば,

$$q_0\frac{\partial F_k}{\partial T_0}(q) + \ldots + q_N\frac{\partial F_k}{\partial T_N}(q) = d_kF_k(q) = 0.$$

よって

$$v \in T_q\widehat{X} \Leftrightarrow v_0\frac{\partial F_k}{\partial T}(q) + \ldots + v_N\frac{\partial F_k}{\partial T}(q) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{grad}_q F_k(v) = 0$$

より $T_q\widehat{X} = \{v \in \mathbb{C}^{N+1} : \mathrm{grad}_q F_k(v) = 0 \quad k = 1, \ldots, m\}$ となる.

定義 2.13. 上で定められた $T_q\widehat{X}$ を射影化したもの, すなわち $\mathbb{T}_pX := \mathbb{P}(T_q\widehat{X}) \subset \mathbb{P}_N$ を X の p における射影接空間と呼ぶ.

定義 2.14. $X \subset \mathbb{P}_N, \quad Y \subset \mathbb{P}_M$ を代数多様体とする. *rational map* $\varphi : X \dashrightarrow Y$ とは次の様な対 $\langle U, \varphi_U \rangle$ の同値類の事を言う. U は X の空 でない開集合であって $\varphi_U : U \to Y$ は U から Y への *regular map* となる. すなわち同次斉次多項式 $h_0, \ldots, h_m \in \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_N]$ があり全ての $x \in U$ に対し $\varphi_U(x) = (h_0(x) : \ldots : h_m(x))$ と表される. ここで $h_0, \ldots, h_m$ は共通する既約因子をもたないと仮定する. また $\langle U, \varphi_U \rangle$ と $\langle V, \varphi_V \rangle$ は $U \cap V$ 上 φ_U と φ_V が一致する時, 同値と定め $\varphi_U \sim \varphi_V$ で表す.

X の Zariski 閉集合 $V(h_0, \ldots, h_m)$ 上においては全ての h_i の値が 0 になってしまい,φ の値が定まらない. そこで X の Zariski 閉集合 $\mathrm{Cen}\varphi := V(h_0, \ldots, h_m) \cap X$ を φ の中心, $\mathrm{Def}\varphi := X \setminus \mathrm{Cen}\varphi$ を φ の定義域という. 明らかに $\mathrm{Def}\varphi = X$ すなわち $\mathrm{Cen}\varphi = \phi$ の時に限り φ は regular map となる.

定義 2.15. *regular map* $\varphi : X \to \mathbb{P}_M$ *のグラフ* Γ_φ *とは, 次を満たす集合の事である;*

$$\Gamma_\varphi := \{(x, y) \in X \times \mathbb{P}_M : y = \varphi(x)\} \subset X \times \mathbb{P}_M$$

ここで Γ が代数的集合である事に注意する. 実際,φ が同次斉次多項式 $f_0, \ldots, f_M \in \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_N]$ により

$$\varphi(x) = (f_0(x) : \ldots : f_M(x)) \qquad (x \in X)$$

と表されていたとすると, $y = (y_0 : \ldots : y_M) = \varphi(x) \in \mathbb{P}_M$ より, 任意の $0 \leq i, j \leq N$ に対し $y_i f_j - y_j f_i = 0$ となる. よって Γ は全ての $0 \leq i, j \leq N$ に対する双斉次多項式 $y_i f_j - y_j f_i \in \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_N, y_0, \ldots, y_M]$ の共通零点である.

定義 2.16. *代数多様体* $\Gamma \subset X \times \mathbb{P}_M$ *が次を満たす時* Γ *を有理グラフという.* $\pi : \Gamma \longrightarrow X$ *を標準射影とする. この時* X *の空でない Zariski 開集合* U *があり,*π *の制限* $\pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ *が biregular となる.*

命題 2.17. *任意の代数多様体* $X \subset \mathbb{P}_N$ *に対し rational map* $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_M$ *と有理グラフ* $\Gamma \subset X \times \mathbb{P}_M$ *の間には自然な一対一対応がある.*

Proof. $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_M$ が与えられたとする. すると rational map の定義により, 空でないある開集合 $U \subset X$ が存在し φ_U が定まる. 同次斉次多項式 $f_0, \ldots, f_M$ が存在し任意の $x \in U$ に対して

$$\varphi_U(x) = (f_0(x) : \ldots : f_M(x))$$

となる. ここで代数的集合

$$\Gamma^* := \{(x; y) \in X \times \mathbb{P}_M : y_i f_j(x) - y_j f_i(x) = 0 \quad (0 \leq i, j \leq M)\}$$

を考える. するとこれは $\varphi_U : U \longrightarrow \mathbb{P}_M$ のグラフであるので, 射影 $\Gamma_0 := \Gamma^* \cap \pi^{-1}(U) \to U$ は biregular となる.

今 $\Gamma \subset \Gamma^*$ を Γ_0 を含む Γ^* の既約成分とする. すると [6], 3, 2I により $\Gamma = \overline{\Gamma_0}$ が成立する. 今 U は空でない開集合であるので既約かつ稠密. 従って φ の有理グラフとなる.

逆に有理グラフ $\Gamma \subset X \times \mathbb{P}_M \subset \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_M$ が与えられたとする. 射影 π, η を

$$
\begin{tikzcd}
& \Gamma \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
\mathbb{P}_N & & \mathbb{P}_M
\end{tikzcd}
$$

により定める. 有理グラフの定義により, 射影 $\pi_1 : \Gamma \to X$ に対し空でない Zariski 開集合 U があり,$\pi_1^{-1}(U) \to U$ は biregular. よって $\gamma = (p,q) \in \pi_1^{-1}(U)$ をとる事で $\mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{\Gamma,\gamma}$ が得られる.

$\mathbb{P}_N$ の斉次座標を $\mathbb{C}[T] = \mathbb{C}[T_0,\ldots,T_N]$ $\mathbb{P}_M$ の斉次座標を $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[S_0,\ldots,S_M]$ により表す. また π,η によって得られる局所準同型

$$\pi^* : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N,p} \to \mathcal{O}_{\Gamma,\gamma} \qquad \eta^* : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_M,q} \to \mathcal{O}_{\Gamma,\gamma}$$

を考える.π^* は全射であるので $s_j(q) \neq 0$ ならば, ある $f_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N,p}$ が存在し

$$\pi^*(f_{ij}) = \eta^*$$

が成立する.i,j を固定すると f_{ij} は同次斉次多項式の商の形で表されるので, 適当に取り直す事で $f_0,\ldots,f_M \in \mathbb{C}[T]$ により

$$\pi^*\left(\frac{f_i}{f_j}\right) = \eta^*\left(\frac{s_i}{s_j}\right) \qquad (\text{但し } f_j(p) \neq 0, s_j(q) \neq 0)$$

となる. よってこれらの f_i, f_j により $\pi^{-1}(U) \subset \Gamma$ をグラフとしてもつ regular map

$$\varphi_U : U = X \setminus V(f_0,\ldots,f_M) \cap X \to \mathbb{P}_M \qquad x \mapsto (f_0(x) : \ldots : f_M(x))$$

が得られ,rational map が構成できた. □

定義 2.18. $0 \leq n \leq N$ に対し, 集合 $Gr(n,N)$ を

$$Gr(n,N) := \{V \subset \mathbb{C}^N : V \text{ は次元 } n \text{ の部分ベクトル空間 }\}$$

で定め, これを *Grassmannian* という. また $\mathbb{P}_N$ の場合,*n-planes* の集合

$$\mathbb{G}(n,N) := \{E \subset \mathbb{P}_N : E \text{ は次元 } n \text{ の線形部分空間 }\}$$

を考える. これらは $\mathbb{G}(n,N) = Gr(n+1,N+1)$ により同一視することができる.

以下,V を有限次元複素ベクトル空間とする.

定義 2.19. $0 \leq n \leq \dim V$ に対し, V^* を V の双対空間とする. 線形空間 $U \subset V$ とその双対 $W \subset V^*$ に対し *annihilator* を, それぞれの余次元となっているもので

$$U^\circ = \{\varphi \in V^* : \varphi(U) = 0\} \subset V^*$$

$$W^\circ = \{v \in V : W(v) = 0\} \subset V$$

として定める.

定義 2.20. ベクトル空間 $V \subset \mathbb{C}^N$ は次元 n とし, 基底として $(v_1, \ldots, v_n)$ 及び $(w_1, \ldots, w_n)$ をもつものとする. 今 A を $v_1, \ldots, v_n$ を列ベクトルとして持つ行列とし,B を $w_1, \ldots, w_n$ を列ベクトルとしてもつ行列とする. すると基底変換行列 S によって $B = A \cdot S$ が成立する. ここで $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots N\}$ とする. この時 A_I を A の第 $i_1, \ldots, i_n$ 行ベクトルによってできる $N \times n$ 行列として定める. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \ldots & a_{Nn} \end{pmatrix} \text{に対し } A_I = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \ldots & a_{i_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & \ldots & a_{i_n n} \end{pmatrix}.$$

$B = A \cdot S$ より $b_{i_1 1} = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i_1 j} s_{j1}, \ \ldots, \ b_{i_l n} = \sum_{j=1}^n a_{i_l j} s_{jn}$ が成立しているので結局,

$$B_I = \begin{pmatrix} \sum a_{i_1 j} s_{j1} & \ldots & \sum a_{i_1 j} s_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum a_{i_n j} s_{jn} & \ldots & \sum a_{i_1 j} s_{jn} \end{pmatrix} = A_I S$$

がわかる. よって $\det B_I = \det A_I \cdot \det S$. 特に $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ により生成される一次元部分空間 $\mathbb{C}(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n)$ と,$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ により生成される $\mathbb{C}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$ が同じものであることがわかるので,V と I によってのみ定まる *well-defined* な写像

$$\pi : Gr(n, N) \to \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^n \mathbb{C}^N) \qquad \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\} \mapsto \mathbb{C}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$$

が定まる. これをプリュッカー埋め込みという. また $P_I(V) := \det A_I$ を V のプリュッカー座標という.

この時次が言える.

定理 2.21. プリュッカー埋め込みは単射.

Proof. [5, 3.7.2] □

定理 2.22. $\dim V = N$ とする.$0 \leq n \leq N$ に対し

$$D : Gr(n, V) \to Gr(N - n, V^*) \qquad U \mapsto U^\circ$$

は *biregular* で, 逆射は

$$D^*: Gr(N-n, V^*) \to Gr(n, V) \qquad W \mapsto W^\circ$$

で定まる. 特に $V = \mathbb{C}^{N+1}$ とし,

$$\mathbb{G}(n, N) := Gr(n+1, \mathbb{C}^{N+1}), \qquad \mathbb{G}^*(m, N) := Gr(m+1, (\mathbb{C}^{N+1})^*)$$

により定めると同型写像

$$D_{n,N}: \mathbb{G}(n, N) \to \mathbb{G}^*(N-n-1, N)$$

$$D^*_{N-n-1,N}: \mathbb{G}^*(N-n-1, N) \to \mathbb{G}(n, N)$$

が得られる.

Proof. 今 V の標準基底 $e_1, \ldots, e_N$ に対する双対基底を $e_1^*, \ldots, e_N^*$ とする.$I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, N\}$ に対し, $I^* := \{1, \ldots, N\} \setminus I = \{k_1, \ldots, k_{N-n}\}$ とし

$$\sigma(I) := \begin{pmatrix} k_1 & \ldots & k_{N-n} & i_1 & \ldots & i_n \\ 1 & \ldots & N-n & N-n+1 & \ldots & N \end{pmatrix}$$

で定める. この時 $\bigwedge^n V$ の基底 $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ を $\bigwedge^{N-n} V^*$ の基底 $(e_I)^* := \sigma(I)(e^*_{k_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{k_{N-n}})$ にうつす事で, 同型写像

$$\bigwedge^n V \to \bigwedge^{N-n} V^* \qquad w \mapsto w^*$$

が得られる. 但しこれは基底の取り方によっているため, 標準的に定まるものではない事に注意する. 標準写像 π を経由しこれらを射影化することで,biregular map $\varPsi : \mathbb{P}(\bigwedge^n V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^{N-n} V^*)$ を得るが, プリュッカー埋め込みと定理 2.20 により

$$Gr(n, V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^n V) \qquad Gr(N-n, V^*) \to \mathbb{P}(\bigwedge^{N-n} V^*)$$

は単射であるので, 求める D は $\varPsi$ の Grassmannians への制限に他ならない.

□

命題 2.23. *$S \subset \mathbb{C}$ に対し,regular map $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n : S \to \mathbb{C}^N$ が次を満たすとする.*

(1) *$\rho_1(o), \ldots, \rho_n(o)$ が一次独立となる, 点 $o \in S$ が存在する.*

(2) *任意の $s \in S$ に対し,$\rho(s), \rho_1(s), \ldots \rho_n(s)$ は一次従属.*

この時, 正則関数 $\lambda, \lambda_1, \ldots \lambda_n : S \longrightarrow \mathbb{C}$ で

$$\lambda(o) \neq 0, \quad \lambda\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i$$

を満たすものが存在する.$\rho_1(s), \ldots, \rho_n(s)$ が任意の $s \in S$ に対し一次独立である時, 特に $\lambda = 1$ とできる.

Proof. まず正則な $(N \times n)$ 行列

$$A(s) := (\rho_1(s), \ldots, \rho_n(s)) \quad (\rho_i(s) \in \mathbb{C}^N)$$

を考える. ここで仮定 2) より, 任意の $s \in S$ に対し $\rho(s), \rho_1(s), \ldots, \rho_n(s)$ は一次従属なので $[A, \rho]$ を方程式 $A(s) \cdot x = \rho(s) \quad (x \in \mathbb{C}^N)$ の拡大係数行列とすると, $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank}[A, \rho]$ が成立. 従って方程式 $A(s) \cdot x = \rho(s)$ は解をもつので, 適当な正則関数 $\mu_i : S \longrightarrow \mathbb{C}$ によって

$$\mu(s) = {}^t(\mu_1(s), \ldots, \mu_n(s)) \in \mathbb{C}^N \qquad A(s) \cdot \mu(s) = \rho(s) \tag{1}$$

となるものがとれる.

ここで仮定 1) より $\mathrm{rank} A(o) \geq n$ であるので,$A(o)$ の $(n \times n)$ 小行列式で消えないものがある. よって適当な $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, N\}$ に対し

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \ldots & a_{i_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & \ldots & a_{i_n n} \end{pmatrix}$$

で定めると, $\det \bar{A}(o) \neq 0$ が成立する.

同様に $\rho(s) = {}^t(b_1(s), \ldots, b_N(s))$, に対し$\bar{\rho}(s) = {}^t(b_{i_1}(s), \ldots, b_{i_n}(s))$ とすると (1) より

$$\bar{A}(s)\mu(s) = \bar{\rho}(s) \tag{2}$$

が得られる. 逆に $\bar{A}(s) \cdot x = \bar{\rho}(s)$ を満たす $x = \mu(s) \in \mathbb{C}^N$ は $A(s) \cdot x = \rho(s)$ も満たす.

実際 (2) の $\mu(s)$ が与えられたとする. ここで $s = o$ とすると $(\bar{A}(o))^{-1}$ が存在し $\mu(o) = (\bar{A}(o))^{-1}\bar{\rho}(o)$ となり $s = o$ で $\mu(s)$ は一意的に定まる. よって $s = o$ で (1) が成立するので, 任意の $s \in S$ に対し $\bar{A}(s) \cdot \mu(s) = \bar{\rho}(s)$ をみたす $\mu(s)$ は存在すれば一意的に定まる. そのような $\mu(s)$ の存在は $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank}[A, \rho]$ より保証されているので上述が言える.

すると, 集合 $\{s \in S : \det \bar{A}(s) \neq 0\}$ において,

$$\bar{A}_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{i_1 1}} & & \overset{j\,th}{\vee} & & \phantom{a_{i_1 n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \ldots & \rho_{i_1} & \ldots & a_{i_1 n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & \ldots & \rho_{i_n} & \ldots & a_{i_n n} \end{pmatrix} \end{array}$$

とすれば Cramer の公式より (2) の $\mu(s) = {}^t(\mu_1(s), \ldots, \mu_n(s))$ は

$$\mu_j = \frac{\det \bar{A}_j}{\det \bar{A}}$$

で与えられる. 上述よりこの $\mu(s)$ は (1) をみたす. よって正則関数 λ, λ_i を $\lambda := \det \bar{A} \quad \lambda_i := \det \bar{A}_i$ とすれば, 任意の $s \in S$ に対し

$$\lambda \cdot A(s) \cdot \mu(s) = \lambda(\rho_1(s), \dots, \rho_n(s)) \cdot {}^t(\mu_1(s), \dots, \mu_n(s))$$

$$= (\rho_1(s), \dots, \rho_n(s)) \cdot {}^t(\lambda_1(s), \dots, \lambda_n(s)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s)\rho_i(s).$$

一方 (1) より $\lambda A(s)\mu(s) = \lambda\rho(s)$ であるので

$$\lambda\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i$$

が成立. ここで $\det A(s) = 0$ となる $s \in S$ に対しては $\det A_j(s) = 0$ である事に注意する. 特に $\rho_1, \dots, \rho_n$ が S 上常に一次独立である時は, 任意の $s \in S$ に対し, 解

$$\mu_i(s) = \frac{\det \bar{A}_i}{\det \bar{A}}$$

が存在するので $\mu_i(s)$ を $\det \bar{A}_i = \lambda_i$ で取り直す事で $\rho = \sum \lambda_i \mu_i$ を得る.

□

補題 2.24 (Extension Lemma). $S \subset \mathbb{C}$ は原点 o を含み,*regular map*

$$\rho : S \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1} \qquad s \longmapsto \rho(s) = (\rho_0(s), \dots, \rho_N(s))$$

は $s \neq o$ に対し $\rho(s) \neq 0$ であるとする. この時, 写像 $\mathbb{P}(\rho) : S \setminus \{o\} \longrightarrow \mathbb{P}_N \qquad s \longmapsto (\rho_0(s) : \dots : \rho_N(s))$ に対し, 一意的な S への拡張が定まる.

Proof. $\rho = {}^t(\rho_0, \dots, \rho_N) \quad i = 0, \dots, N$ に対し $k_i := \mathrm{ord}_o \rho_i$ とする. ここで $\mathrm{ord}_o \rho_i$ は ρ_i の o での位数とする.$k = min\ k_i$ とした時,o 近傍の s に対し,

$$\rho(s) = s^k \tilde{\rho}(s) \quad \tilde{\rho}(o) \neq 0$$

と表せる. すると $s \neq o$ に対し

$$(\rho_0(s) : \dots : \rho_N(s)) = (s^k \tilde{\rho}_o(s) : \dots : s^k \tilde{\rho}_N(s))$$

$$= (\tilde{\rho}_0(s) : \dots : \tilde{\rho}_N(s))$$

であるので

$$\mathbb{P}(\tilde{\rho}) : S \longrightarrow \mathbb{P}_N \qquad s \longmapsto (\tilde{\rho}_0(s) : \dots : \tilde{\rho}_N(s))$$

が求める拡張に他ならない. □

3　双対多様体と Conormal Bundle

ここでは, 多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対する双対多様体と,Conormal bundle を定める. そのためにまず $\mathbb{P}_N$ に対し, 二つの双対射影空間

$$\mathbb{P}_N^\vee := \mathbb{G}(N-1,N) = \mathrm{Gr}(N,N+1) = \{H \subset \mathbb{C}^{N+1} : H \quad \text{hyperplane}\}$$

$$\mathbb{P}_N^* := \mathbb{G}(0,N) = \mathrm{Gr}^*(1,N+1) = \{L \subset (\mathbb{C}^{N+1})^* : L \quad \text{line}\}$$

を考える. ここで,2 章 の双対同型 D により,

$$D = D_{N-1,N} : \mathbb{G}(N-1,N) \cong \mathbb{G}(0,N),$$

であった事に注意する. 以下 3 つのステップに分けて, 多様体 X に対する双対多様体と Conormal bundle を構成する.

step1)

まず非特異な超曲面 $X = \mathrm{V}(F) \subset \mathbb{P}_N$ を考える. この時,

$$\delta : X \longrightarrow \mathbb{P}_N^*, \qquad p \longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p) : \cdots : \frac{\partial F}{\partial x_N}(p)\right),$$

なる regular map が得られる. 実際,$F_i := \partial F/\partial T_i \in \mathbb{C}[T_0,\cdots,T_N]$ とすると $\delta(p) = (F_0(p) : \cdots : F_N(p))$ と表され, さらに X の非特異性より $F_0(p) = 0,\cdots,F_N(p) = 0$ となることは無いので δ は確かに regular である事がわかる. この時 $X^* := \delta(X) \subset \mathbb{P}_N^*$ を X の双対多様体という. 定理 2.21 の写像 D^* を介して $X^\vee := D^*(\delta(X)) \subset \mathbb{P}_N^\vee$ と X^* を同一視する場合もある.

step2)

より一般的に X は非特異とは限らない既約な超曲面 $X = V(F) \subset \mathbb{P}_N$ とする. この時,rational map $\delta : X \dashrightarrow \mathbb{P}_N^*$ を次のようにして得る.

まず, 代数的集合

$$\Gamma_X := \{(x,y) \in X \times {\mathbb{P}_\mathbb{N}}^* : y_i \frac{\partial F}{\partial T_j}(x) - y_j \frac{\partial F}{\partial T_i}(x) = 0\} \qquad (i,j = 0,\ldots,N)$$

と行列

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} y_0 & \cdots & y_N \\ \frac{\partial F}{\partial T_0}(x) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial T_N}(x) \end{pmatrix}$$

を考える. すると rank$A$ は行列 A に含まれる 0 にならない小行列式の最大次数であるので,

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}A \le 1 &\Leftrightarrow A \text{ の小行列で 2 次のものは全て } 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_i & y_j \\ \frac{\partial F}{\partial T_i}(x) & \frac{\partial F}{\partial T_j}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad (0 \le i \ne j \le N) \end{aligned}$$

が成立する. つまり Γ_X の定義の条件は y と $\mathrm{grad}_x F$ の一次独立性, もしくは

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} y_0 & \cdots & y_N \\ \frac{\partial F}{\partial T_0}(x) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial T_N}(x) \end{pmatrix} \leq 1$$

を考える事と同値である. ここで射影

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ X \arrow[rr, "\delta"'] & & \mathbb{P}_N^* \end{tikzcd}$$

を考える. すると, 射影 $\pi : \Gamma_X \to X$ は $\mathrm{sm}X$ においては biregular であるので $\pi^{-1}(x') \in \Gamma_X$ がとれ,

$$\Gamma_\delta = \{(\pi^{-1}(x'), y) \qquad : x' \in smX,\ \eta(\pi^{-1}(x')) = y\}$$

とする事で $\pi^{-1}(\mathrm{sing}X)$ に含まれない Γ_X の既約成分 Γ_δ を構成できる. よっての命題 2.17 より, 有理グラフ Γ_δ に対する rational map として δ が定まり, 双対多様体を $X^* := \delta(X) = \eta(\Gamma_\delta)$ により定める.(但し $\eta : \Gamma_\delta \to \mathbb{P}_N^*$ は第二成分への射影)

step1 と同様, $\delta^\vee = D \circ \delta : X \dashrightarrow \mathbb{P}_N^\vee$ に対して $X^\vee := \delta^\vee(X)$ を X^* と同一視する時もある.

ここで

$$T_q\widehat{X} = \{x \in \mathbb{C}^{N+1} : \langle x, \mathrm{grad}F\rangle = 0 \quad q \in sm\widehat{X}\}$$

であり,

$$\langle T_q\widehat{X}, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank}\begin{pmatrix} y \\ \mathrm{grad}_q F \end{pmatrix} \leq 1$$

を後に見るので, $p \in \mathrm{sm}X$ に対しては,

$$\delta^\vee(p) = \{v \in \mathbb{P}_N^\vee : \mathrm{rank}\begin{pmatrix} D(v) \\ \mathrm{grad}_p F \end{pmatrix} \leq 1\}$$

$$= \{v \in \mathbb{P}_N^\vee : \langle \mathbb{T}_p X, D(v)\rangle = 0\} = ((\mathbb{T}_p X)^\circ)^\circ = \mathbb{T}_p X$$

である事に注意する. 一方 $p \in \mathrm{sing}X$ に対しての接超平面は p の近傍の $p' \in smX$ に対する接超平面の極限とみなし, 形式的に極限をとる操作を $X \times \mathbb{P}_N^*$ における Γ_δ の閉包をとる事に対応させる.

step3

一般的な次元 n の既約多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対し

$$X^\vee := \overline{\{H \in \mathbb{P}_N^\vee : H \supset \mathbb{T}_p X \quad p \in smX\}}$$

を定めたい. 今 $X = V(F_1, \ldots, F_m) \subset \mathbb{P}_N$ とし $\widehat{X}$ を $F_1, \ldots, F_m$ で定まる affine cone とする. この時 $q \in \mathrm{sm}\widehat{X} \setminus \{0\}$ に対し, 定義 2.12 により

$$T_q\widehat{X} = \{x \in \mathbb{C}^{N+1} : \langle x, \mathrm{grad}_q F_k \rangle = 0 \quad k = 1, \ldots, m\}$$

(但し $x \in \mathbb{C}^{N+1}, y \in (\mathbb{C}^{N+1})^*$ に対し $\langle x, y \rangle = y(x)$ とする.) と表される. よって $T_q\widehat{X}$ の形から

$$(T_q\widehat{X})^* = \mathrm{span}\{\mathrm{grad}_q F_1, \ldots, \mathrm{grad}_q F_m\} \subset (\mathbb{C}^{N+1})^*$$

となる事がわかる. ここで行列

$$A(x,y) := \begin{pmatrix} y \\ \mathrm{grad}_x F_1 \\ \vdots \\ \mathrm{grad}_x F_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & \cdots & y_N \\ \frac{\partial F_1}{\partial T_0}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial T_N}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial T_0}(x) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial T_N}(x) \end{pmatrix} \in M((m+1)\times(N+1), \mathbb{C}^*)$$

を考える. この時 $\Gamma_X := \{(x,y) \in \widehat{X} \times (\mathbb{C}^{N+1})^* : \mathrm{rank} A(x,y) \leq N-n\}$ とおくと rank の条件より,$A(x,y)$ の $N-n+1$ 次小行列式は全て 0 になる. 一方,$X = V(F_1, \ldots, F_m)$ より,$\dim X = n = N-m$ であるので $A(x,y)$ の $m+1 = N-n+1$ 次小行列式は全て消え,$\widehat{\Gamma}_X$ は $\begin{pmatrix} N+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$ 個の $A(x,y)$ の m+1 次小行列式

$$f_{i_0,\ldots,i_m} = \begin{vmatrix} y_{i_0} & \cdots & y_{i_m} \\ \frac{\partial F_1}{\partial T_{i_0}}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial T_{i_m}}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial T_{i_0}}(x) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial T_{i_m}}(x) \end{vmatrix} \qquad (\{i_0, \ldots, i_m\} \subset \{0, \ldots, N\})$$

で生成される ideal により定まる代数的集合である事がわかった.

また,$\mathrm{rank} A(x,y) \leq N-n = m \Leftrightarrow y, \mathrm{grad}_x F_1, \ldots, \mathrm{grad}_x F_m$ は一次従属 $\Leftrightarrow y \in (T_x\widehat{X})^*$ であるので

$$\mathrm{rank} A(x,y) \leq N-n \Leftrightarrow y \in (T_x\widehat{X})^* \Leftrightarrow \langle T_x\widehat{X}, y \rangle = 0$$

がいえる. よって

$$\widehat{\Gamma}_X = \{(x,y) \in \widehat{X} \times (\mathbb{C}^{N+1})^* \qquad \langle T_x\widehat{X}, y \rangle = 0\}$$

と表され, これを射影化することで次を得る.

補題 3.1. 多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対し, これに付随する代数的集合

$$\Gamma_X = \{(x,y) \in X \times (\mathbb{P}_N)^* : \quad \langle \mathbb{T}_x \widehat{X}, y \rangle = 0\}$$

を X のグラフという. 特に任意の $p \in smX$ に対して $\pi : \Gamma_X \to X$ を第一成分への射影とすれば

$$\Gamma_{X,p} := \pi^{-1}(p) = \{(p,y) \in p \times \mathbb{P}_N^* : \langle \mathbb{T}_p X, y \rangle = 0\}$$

となる.

以上で X の Conormal bundle を定める準備ができた.

定義 3.2. $p \in smX$ に対し, 補題 3.1 及び $\dim \mathbb{T}_p X = n$ より

$$\pi^{-1}(p) = \{(p,y) \in \{p\} \times \mathbb{P}_N^* : \langle \mathbb{T}_p X, y \rangle = 0\} \cong Ann(\mathbb{T}_p X) \cong \mathbb{P}_{N-n-1}$$

がわかる. この $\Gamma_{X,p} = \pi^{-1}(p)$ を含む Γ_X の既約な成分の閉包を C_X により表し X の Conormal bundle という. すなわち,

$$C_X = \overline{(\Gamma_X \backslash \pi^{-1}(\mathrm{sing} X))} \subset X \times \mathbb{P}_N^*.$$

ここで次が言える.

主張 3.3. Y が位相空間 X の既約な部分集合 $\Rightarrow Y$ の X における閉包 $\overline{Y}$ も既約.

主張 3.3 の証明. 背理法により示す.Y は既約かつ $\overline{Y}$ は可約とする. この時,

$$\overline{Y} = Y_1' \cup Y_2' \qquad Y_1', Y_2' \subsetneq \overline{Y}$$

と表され,Y_1', Y_2' は $\overline{Y}$ の閉集合であるので, ある X の閉集合 V, W が存在し

$$Y_1' = \overline{Y} \cap V \qquad Y_2' = \overline{Y} \cap W$$

と表される. すると $\overline{Y}$ は X で閉なので Y_1', Y_2' も X の閉集合. よって

$$Y = Y \cap \overline{Y} = Y \cap (Y_1' \cup Y_2') = (Y \cap Y_1') \cup (Y \cap Y_2').$$

ここでもし $Y \cap Y_i' = Y \quad (i = 1, 2)$ とすると $Y_i' \supset Y$ となるが, 上述より $Y_i' \subsetneq \overline{Y}$ であるので, これは $\overline{Y}$ が Y を含む X での最小の閉集合である事に矛盾. よって $Y \cap Y_i' \subsetneq Y$ となり Y が既約である事に矛盾. すなわち $\overline{Y}$ は既約. □

よって C_X の定義とこの主張 3.3 により C_X が既約である事がわかる. また $\psi : X \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ に対し $\varphi := \psi \circ \pi$ とし, この φ に対し, 定理 2.7 の既約性定理を施すと $\dim C_X = \dim X + \dim \pi^{-1}(p) = n + N - n - 1 = N - 1$ がわかる. 以上により次が言えた.

命題 3.4. $X \subset \mathbb{P}_N$ を次元 n の多様体,$C_X \subset X \times \mathbb{P}_N^*$ をその *Conormal bundle* とする. 射影

$$\begin{tikzcd} & X \times \mathbb{P}_N^* \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi^*"] & \\ X & & \mathbb{P}_N^* \end{tikzcd}$$

に対し X の双対多様体を

$$X^* := \pi^*(C_X) \subset \mathbb{P}_N^*, \qquad X^\vee := D(X^*) \subset \mathbb{P}_N^\vee$$

で定める. この時 C_X は既約かつ $\dim C_X = N-1$ が成立する.

定義より

$$X^* := \overline{\{y \in \mathbb{P}_N^* : \langle \mathbb{T}_p X, y \rangle = 0 \quad p \in smX\}}$$
$$X^\vee := D(X^*) = \overline{\{H \in \mathbb{P}_N^\vee : H \supset \mathbb{T}_p X \quad p \in smX\}}$$

となる. ここで H は $y \in \mathbb{P}_N^*$ に対する超平面である. よって任意の $p \in smX$ に対して $X^\vee$ は次元 $N-n-1$ の線形空間

$$\{H \in \mathbb{P}_N^\vee : H \supset \mathbb{T}_p X\} \cong \{y \in \mathbb{P}_N^* : \langle \mathbb{T}_p X, y \rangle = 0\} = \mathrm{Ann}(\mathbb{T}_p X)$$

を含むので,$N-n-1 \leq \dim X^\vee = \dim X^*$. また射影 π^* に対し $X^* := \pi^*(C_X)$, また $\dim C_X = N-1$ であったので $\dim X^* \leq N-1$. すなわち次が言える.

系 3.5.

$$N-n-1 \leq \dim X^* = \dim X^\vee \leq N-1$$

定義 3.6. 代数多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対し,$\delta_*(X) := N-1-\dim X^*$ で定め, これを X の *dual defect* という. 系 3.5 より $1-N \leq -\dim X^* \leq 1+n-N$ が成立. よって, $0 \leq \delta_*(X) \leq \dim X$ となる.X は $\delta_*(X) = 0$ の時,ordinary と呼ばれる.

4 双対の巡回性

定理 4.1 (双対定理). $X \subset \mathbb{P}_N$ は代数多様体, $X^* \subset \mathbb{P}_N^*$ は X の双対多様体とする. この時, それぞれの *conormal bundle*

$$C_X \subset X \times \mathbb{P}_N^* \subset \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N^*,$$

$$C_{X^*} \subset X^* \times \mathbb{P}_N \subset \mathbb{P}_N^* \times \mathbb{P}_N.$$

に対し, $C_X = C_{X^*}$. が成立する.

Proof. まず,$C_X \subset C_{X^*}$ を示したい. そこで今,

$$\text{ある}\widehat{C}_X\text{の開部分集合}\widehat{C}_X \supset U \text{ に対し,} U \subset \widehat{C}_{X^*}\text{が成立する.} \tag{3}$$

が言えたとする. この時, 次が言える.

主張 4.2. $C_X \subset C_{X^*}$.

[**主張 4.2 の証明**]

Canonical map

$$\pi : \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_N, \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_N) \longmapsto (x_0 : x_1 \ldots : x_N)$$

を考える. この時, 開集合 $U \subset \widehat{C}_X$ に対し,C_X の既約性より, $\overline{\pi(U)} = C_X$ が成立する. 一方、$U \subset \widehat{C}_{X^*}$ より、 $\pi(U) \subset \pi(\widehat{C}_{X^*}) = C_{X^*}$ である. よって, これと C_{X^*} が閉集合である事とあわせて,$C_X = \overline{\pi(U)} \subset \overline{C_{X^*}} = C_{X^*}$ すなわち, $C_X \subset C_{X^*}$ がわかる.

よって以後 (3) を示す事を目標とする. そのためにまず, affine 錐 $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{N+1}, \widehat{X^*} \subset (\mathbb{C}^{N+1})^*$ と, 補題 3.1 のそれぞれに付随するグラフ

$$\widehat{\Gamma}_X \subset \widehat{X} \times (\mathbb{C}^{N+1})^*$$

$$\widehat{\Gamma}_{X^*} \subset \mathbb{C}^{N+1} \times \widehat{X^*}$$

を考える. 射影 η, ξ に対し $(p, q) \in \widehat{C}_X$ を,

$$\begin{tikzcd} & \widehat{C}_X \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ \widehat{X} & & (\mathbb{C}^{N+1})^* \end{tikzcd}$$

$p \in \mathrm{sm}\widehat{X}, q \in \mathrm{sm}\widehat{X^*}$ なる点とする. ここで

$$(p, q) \in \mathrm{sm}\widehat{C}_X \Leftrightarrow (p, q) \in \widehat{C}_X, \quad p \in \mathrm{sm}\widehat{X}, \quad q \in \mathrm{sm}\widehat{X^*}$$

$$(p, q) \in \mathrm{sm}\widehat{C}_X^* \Leftrightarrow (p, q) \in \widehat{C}_{X^*}, \quad p \in \mathrm{sm}\widehat{X}, \quad q \in \mathrm{sm}\widehat{X^*}.$$

また $\mathrm{sm}\widehat{C}_X$ は $\widehat{C}_X$ の開集合であり, $\mathrm{sm}\widehat{C}_{X^*}$ は $\widehat{C}_{X^*}$ の開集合である事により (1) を示すには $(p, q) \in \widehat{C}_{X^*}$ が言えればよい. そのため, 開集合 $0 \in U \subset \mathbb{C}^N$ と局所座標系

$$\varphi : U \longrightarrow \widehat{C}_X \subset \widehat{\Gamma}_X, \qquad t = (t_1, \ldots, t_N) \longmapsto (x(t), y(t)) \quad \text{但し } \varphi(0) = (p, q)$$

を考える. ここで $\widehat{X} = V(F_1, \ldots, F_m) \quad (F_k$は斉次多項式) とする. この時 $x \in \widehat{X}$ に対し, $x \in T_x\widehat{X}$ である事が以下のようにしてわかる. まず $x = (x_0, x_1, \ldots, x_N) \in \widehat{X}$ を一つ固定すると,$\widehat{X}$ は $F_1, \ldots, F_m$ の共通零点であるので $F_k(x) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m)$ がいえる.

一方で,Eular の公式より

$$grad_x F_k(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x}(x) = \sum_{i=0}^{N} x_i \frac{\partial F_k}{\partial T_i}(x) = d \cdot F_k(x) = 0$$

となる. ここで, 定義 2.12 から

$$T_q\widehat{X} = \{x \in \mathbb{C}^{N+1} : \langle x, grad_q F_k \rangle = 0, for\ k = 1, \ldots, m\}$$

であるので、$x \in T_x\widehat{X}$ となる. すなわち,$x \in \widehat{X}$ に対し $x \in T_x\widehat{X}$ がいえた. 他方,

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) \in \widehat{\Gamma}_X &\Rightarrow \langle T_{x(t)}X, y(t) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x') = 0 \qquad (\forall x' \in T_{x(t)}\widehat{X})\end{aligned}$$

であり, 上記より $x(t) \in \widehat{X}$ に対し $x(t) \in T_{x(t)}\widehat{X}$ であるので, 任意の $t \in U$ に対し, $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$ がわかった. この両辺を t_i で偏微分してやると,

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, y \right\rangle + \left\langle x, \frac{\partial y}{\partial t_i} \right\rangle = 0 \qquad for\ i = 1, \ldots, N \tag{4}$$

を得る. また $x(t) \in \widehat{X}$ より $\partial x/\partial t_i \in T_{x(t)}\widehat{X}$ がいえるので,

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, y \right\rangle = 0 \qquad \text{したがって (2) より} \left\langle x, \frac{\partial y}{\partial t_i} \right\rangle = 0 \text{ がわかる.}$$

以下 $(p, q) \in \widehat{C}_{X^*}$ を見る為にまず, $(p, q) \in \widehat{\Gamma}_{X^*}$ を示す. それには次の主張を示せば良い.

主張 4.3.

$$T_q\widehat{X^*} = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial y}{\partial t_1}(0), \ldots, \frac{\partial y}{\partial t_N}(0)\right\}$$

なぜならば, もし主張 4.3 が示されたとすると, 上述の $\langle x, \partial y/\partial t_i \rangle = 0$ より,$t = 0$ として全ての i に対して $(\partial y(0)/\partial t_i)(p) = 0$ となるので,$T_q\widehat{X^*}(p) = 0$ がわかる. これは $(p, q) \in \widehat{\Gamma}_{X^*}$ に他ならないからである.

[**主張 4.3 の証明**]

射影

$$\xi : \widehat{C}_X \longrightarrow \widehat{X^*}, \qquad (x(t), y(t)) \longmapsto y(t)$$

とその $t = 0$ における微分,

$$d_0\xi : T_0\widehat{C}_X \longrightarrow T_q\widehat{X^*}, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_N}\right)_{t=0} \longmapsto \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial y(t)}{\partial t_N}\right)_{t=0}$$

を考える. すると Jacobi 判定法 により,rank $d_0\xi = \dim \widehat{X^*} = \dim T_q\widehat{X^*}$ が成立する. よって $d_0\xi$ もまた全射であり, 主張は示された.

以上により,$(p,q) \in \widehat{\Gamma}_{X^*}$ がわかった. 他方, 仮定 $q \in \mathrm{sm}\widehat{X^*}$ と $\widehat{C}_{X^*}$ の定義,

$$\widehat{C}_{X^*} = \overline{(\widehat{\Gamma}_{X^*} \backslash \pi_2^{-1}(\mathrm{sing}\widehat{X^*}))} \subset \mathbb{C}^{N+1} \times \widehat{X^*}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{\Gamma}_{X^*} \arrow[dl, "\pi_2^*"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
\mathbb{C}^{N+1} & & \widehat{X^*}
\end{tikzcd}$$

より,$(p,q) \in \widehat{C}_{X^*}$ である事が分かり, 結果 $C_X \subset C_{X^*}$ が言えた. 同様の議論から $C_{X^*} \subset C_X$ もいえ, 以上により題意は示された. $\square$

双対定理により, 双対の巡回性が導かれる.

系 4.4. $X \subset \mathbb{P}_N$ を多様体, $C_X \subset \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N^*$ をその *Conormal bundle* とし,$\pi_1 : C_X \longrightarrow \mathbb{P}_N, \qquad \pi_1^* : C_X \longrightarrow \mathbb{P}_N^*$ を標準射影とする. この時,$(X^*)^* = \pi_1(C_X) = X$.

Proof. $\pi_2^* : C_{X^*} \longrightarrow \mathbb{P}_N, \qquad \pi_2 : C_{X^*} \longrightarrow \mathbb{P}_N$ を C_{X^*} の標準射影とする.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N^* & & & \\
 & C_X \arrow[urr] \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_1^*"] & & & & C_{X^*} \arrow[ull] \arrow[dl, "\pi_2^*"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
\mathbb{P}_N & & \mathbb{P}_N^* & & \mathbb{P}_N & & \mathbb{P}_N^*
\end{tikzcd}$$

定義より $(X^*)^* := \pi_2^*(C_{X^*})$ であり, 一方で定理 4.3 より $C_X = C_{X^*}$ であるので,$\pi_1(C_X) = \pi_2^*(C_{X^*})$ がわかる. よって $(X^*)^* = \pi_1(C_X) = X$ となる. $\square$

5　同伴曲線

定義 5.1. S を *Compact* な *Riemann* 曲面とし, 曲線

$$\varphi : S \longrightarrow \varphi(S) = X \subset \mathbb{G}(k, N)$$

が与えられたとする. 開集合 $U \subset S$ に対し,*regular map*

$$\rho : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$$

が任意の $s \in U$ に対し $\rho(s) \in \varphi(s)$ を満たす時,ρ を φ の U 上 *moving vector* という.U 上の φ の *moving vector* の族

$$\rho_0, \ldots, \rho_k : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$$

が U 上 φ の *local basis* とは, 任意の $s \in U$ に対し $(\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s))$ が $\varphi(s)$ の基底である時を言う. 上の *local basis* 　$\rho_0, \ldots, \rho_k$ に対し, 任意の $s \in U$ を取った時, *moving vector* ρ は

(1) $\rho(s), \rho_0(s), \ldots, \rho_k(s)$ は一次従属

(2) $\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s)$ は一次独立

を満たす. よって命題 2.23 より U 上正則関数 λ_i を用いて $\rho = \displaystyle\sum_{i=o}^{k} \lambda_i \rho_i$ と表せる.

命題 5.2. 正則曲線 $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{G}(k, N)$ と $o \in S$ が与えられたとする. この時, 開近傍 $o \in U \subset S$ と φ の U 上 *local basis*

$$\rho_0, \ldots, \rho_k : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$$

がとれる.

Proof. $\varphi(o) = V \in \mathbb{G}(k, N)$ とする.Grassmannian $\mathbb{G}(k, N)$ は等質空間であるので $k+1$ 個の標準基底 $e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}$ により $V \subset \mathrm{span}\{e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}\}$ としてよい. この $i_0, \ldots, i_k$ に対し $I = \{i_0, \ldots, i_k\}$ とすれば,

$$V \in U_I = \{V' \in \mathbb{G}(k, N) : V' \cap \mathrm{span}\{e_j : j \notin I\} = 0\}$$

が成立.　今, 任意の $s \in U := \varphi^{-1}(U_I)$ に対し $(N+1) \times (k+1)$ 型行列 $B^I(s) = (e_{i_0}, \ldots, e_{i_k})$ を考える. すると正則行列 $B^I(s)$ の列 vector によって $\varphi(s)$ は生成される. よって $0 \leq j \leq k$ に対し, $\rho_j(s) = e_{i_j}$ で定めれば $(\rho_0, \ldots, \rho_k)$ は U 上の φ の local basis となる. □

一般に regular map $\rho : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ が与えられた時, 新たな regular map

$$\rho' : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}, \qquad s \longmapsto \frac{d\rho}{ds}(s)$$

が導かれる. この ρ' を用いて次が定まる.

定義 5.3. 曲線 $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{G}(k, N)$ と点 $o \in S$ が与えられ, ρ を命題 5.2 で得られる o の開近傍 U 上の *moving vector* とする. この時 φ_+, φ_- を

$$\varphi_+(o) := \{v \in \mathbb{C}^{N+1} : v = \rho'(o), \quad \rho(s) \in \varphi(s), \quad s \in U\}$$

$$\varphi_-(o) := \{v \in \mathbb{C}^{N+1} : v = \rho(o), \quad \rho(s) \in \varphi(s), \quad s \in U \text{ かつ} \rho'(o) \in \varphi(o)\}$$

により定める.

命題 5.4. 上述の $\varphi_+, \quad \varphi_-$ に対し

$$\varphi_-(o) \subset \varphi(o) \subset \varphi_+(o) \qquad (o \in S)$$

が成立する.

Proof. 任意の $v \in \varphi_-(o)$ をとる. すると命題 5.2 より o 近傍での φ の moving vector ρ がとれ,φ_- の定義より $v = \rho(o), \quad \rho'(o) \in \varphi(o)$ が成立する. ρ は moving vector であるので $v = \rho(o) \in \varphi(o)$, 従って $\rho_-(o) \subset \varphi(o)$.

次に任意の $v \in \varphi(o)$ をとり,φ の o 近傍の moving vector σ で $\sigma(o) = v$ となるものをとる.o 近傍の S の局所座標を s で表し,$\rho := (s-o)\sigma$ とする. この時 $\rho' = 1 \cdot \sigma + (s-o)\sigma'$ であるので $\rho'(o) = \sigma(o) = v$. よって $v \in \varphi_+(o)$ となり $\varphi(o) \subset \varphi_+(o)$.

□

補題 5.5 (Main Lemma). 任意の正則曲線 $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{G}(k, N)$ に対し, ある整数 $s \leq d \leq k+1$ が存在し, 任意の $o \in S$ をとった時,o の開近傍 U と U 上 *moving vector* $\rho_0, \ldots, \rho_k$ がとれ, 全ての $s \in U \setminus \{0\}$ に対し次を満たす.

(1) $(\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s))$ は $\varphi(s)$ の基底.

(2) $(\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s), \rho'_0(s), \ldots, \rho'_{d-1}(s))$ は $\mathrm{span}\{\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s), \rho'_0(s), \ldots, \rho'_k(s)\}$ の基底.

(3) $\rho'_d(s), \ldots, \rho'_k(s) \in \mathrm{span}\{\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s)\}$

この時 $d = d(\varphi)$ を φ の *drill* という. 定義より $0 \leq d(\varphi) \leq k+1$. 一方 (2) より $k+1+d(\varphi) \leq N+1$, すなわち $k + d(\varphi) \leq N$ が成立する.

Proof. $0 \in S$ をとり,o の開近傍 U 上 local basis$\rho_0, \ldots, \rho_k$ がとれる. また $n(s) := \mathrm{rank}(\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s), \sigma'_0(s), \ldots, \sigma'_k(s))$ と定める. ここで $n := max\{n(s) : s \in U\}$ とすると,$U' := \{s \in U : n(s) < n\}$ は曲線 $\varphi(S) = X$ の特異点であるので, 孤立点よりなる. すると n は local basis の取り方によらない事が次のようにしてわかる.

実際, 別の local basis$\tau_0, \ldots, \tau_{k'}$ をとり,

$$n'(s) = \mathrm{rank}\{\tau_0(s), \ldots, \tau_{k'}(s), \tau'_0(s), \ldots, \tau'_{k'}(s)\}$$

とする.$(\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s))$ と $(\tau_0(s), \ldots, \tau_{k'}(s))$ は共に $\varphi(s)$ の基底であるので $k = k'$ かつ

$$\mathrm{span}\{\tau_0(s), \ldots, \tau_k(s)\} = \mathrm{span}\{\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s)\}$$

が成立する. よって $\sigma_i(s) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j(s)\tau_j(s)$ とかける.

$$\sigma'(s) = \sum_{j=0}^{k} (\lambda'_j(s)\tau_j(s) + \lambda_j(s)\tau'_j(s))$$

であるので

$$\mathrm{span}\{\tau_0(s), \ldots, \tau_k(s), \tau'_0(s), \ldots, \tau'_k(s)\} = \mathrm{span}\{\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s), \sigma'_0(s), \ldots, \sigma'_k(s)\}.$$

すなわち $n(s) = n'(s)$.

よって $d := n - k - 1$ が定められる.$n(s) = n \quad (s \in U \setminus \{0\})$ となる様に U を適当に縮め, 必要があれば添字を取り直してやる事で,

$$(\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s), \sigma'_0(s), \ldots, \sigma'_{d-1}(s)) \text{ が } \mathrm{span}\{\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s), \sigma'_0(s), \ldots, \sigma'_k(s)\}$$

の基底となるようにとれる. そのため,$i = d, \ldots, k$ に対し

$$\sigma_0, \ldots, \sigma_k, \sigma'_0, \ldots, \sigma'_{d-1}, \sigma'_i$$

は U 上一次従属になる. すると命題 2.23 より,U 上正則関数 $a_{ij}, b_{ij}, c_i \quad (c_i(s) \neq 0,\ s \neq 0)$ により

$$\sum_{j=0}^{k} a_{ij}\sigma_j + \sum_{j=0}^{d-1} b_{ij}\sigma'_j + c_i\sigma'_i = 0 \qquad (*)$$

とできる. 今 $\rho_0 := \sigma_0, \ldots, \rho_{d-1} := \sigma_{d-1}$,

$$\rho_i := \sum_{j=0}^{d-1} b_{ij}\sigma_j + c_i\sigma_i \quad (i = d, \ldots, k)$$

とすると,$c_i(s) \neq 0$ と合わせて $\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s)$ は $\varphi(s)$ の基底となる. よって (1) は示された.

また (2) も $\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s), \sigma'_0(s), \ldots \sigma'_{d-1}(s)$ が

$$\mathrm{span}(\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s), \sigma'_0(s), \ldots, \sigma'_k(s))$$

の基底である事から従う.

(3) については $(*)$ より

$$\rho'_i = \sum_{j=0}^{d-1}(b'_{ij}\sigma_j + b_{ij}\sigma'_j) + c'_i\sigma_i + c_i\sigma'_i$$

$$= \sum_{j=0}^{d-1} b_{ij}\sigma_j - \sum_{j=0}^{k} a_{ij}\sigma_j + c'_i\sigma_i$$

であるので,

$$\rho'_d(s), \ldots, \rho'_k(s) \in \mathrm{span}\{\sigma_0(s), \ldots, \sigma_k(s)\} = \mathrm{span}\{\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s)\}$$

より従う. □

命題 5.6. S を *Compact* な *Riemann* 曲面とし,*drill* d の正則曲線

$$\varphi : S \longrightarrow \mathbb{G}(k, N)$$

が与えられたとする. この時正則曲線

$$\varphi^{(1)} : S \longrightarrow \mathbb{G}(k+d, N)$$

$$\varphi_{(1)} : S \longrightarrow \mathbb{G}(k-d, N)$$

で, ほとんど全ての $s \in S$ に対し,$\varphi^{(1)} = \varphi_+(s) \quad \varphi_{(1)}(s) = \varphi_-(s)$ となるものがとれる. 特に定理 2.22 の写像 D に対し

$$D(\varphi_{(1)}) = (D\varphi)^{(1)}, \qquad D(\varphi^{(1)}) = (D\varphi)_{(1)}$$

が成立する.

Proof. 任意の点 $o \in S$ を一つ固定する. 補題 5.5 で得られる 0 近傍 U と U 上 local basis $\rho_0, \ldots, \rho_k$ をとる. この時 $U \setminus \{0\}$ 上で

$$\varphi_+ = \mathrm{span}\{\rho_0, \ldots, \rho_k, \rho'_0, \ldots, \rho'_{d-1}\} \qquad \varphi_- = \mathrm{span}\{\rho_d, \ldots, \rho_k\}$$

が成立する事が次のようにしてわかる.

実際,φ の U 上 moving vectorρ が $\rho = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \rho_i$ と表されていたとすると任意の $s \in U \setminus \{0\}$ に対し, 補題 5.5 の (2) より

$$\rho'(s) = \sum_i \lambda_i'(s)\rho_i(s) + \sum_i \lambda_i(s)\rho_i'(s)$$
$$= \mathrm{span}\{\rho_0, \ldots, \rho_k, \rho_0', \ldots, \rho_{d-1}'\}$$

であるので, 前者が言える.

後者を示す. 任意の $v \in \varphi_-(s)$ をとると定義より $\rho(s) = v$ かつ $\rho'(s) \in \varphi(s)$. ここで補題 5.5(2) より

$$\rho' = \sum_{j=0}^{k} (\lambda_j' \rho_j + \lambda_j \rho_j') = \sum_{j=0}^{k} \mu_j \rho_j + \sum_{j=0}^{d-1} \lambda_j \rho_j'$$

であり, さらに補題 5.5(1) より $\varphi(s) = \mathrm{span}(\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s))$ がわかっているので,$\lambda_0(s) = 0, \ldots \lambda_{d-1} = 0$ でなければならない. したがって

$$v = \rho(s) = \sum_{j=d}^{k} \lambda_j \rho_j \in \mathrm{span}\{\rho_d, \ldots, \rho_k\}$$

逆に任意の $v \in \mathrm{span}\{\rho_d, \ldots, \rho_k\}$ をとる. $v = \sum_{j=d}^{k} \alpha_j(s)\rho_j(s) = \rho(s)$ であったとすると,

$$\rho'(s) = \sum_{j=d}^{k} (\alpha_j' \rho_j + \alpha_j \rho_j')$$

となる. 補題 5.5(1), (3) より $j = d, \ldots, k$ に対し

$$\rho_j' \in \mathrm{span}\{\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s)\} = \varphi(s)$$

であるので $\rho'(s) \in \varphi(s)$ が言える.

この φ_+, φ_- は補題 5.5 の証明でみたのと同様の議論で local basis の取り方によっていない事がわかる. 特に任意の $s \in U \setminus \{o\} := U(o)$ に対し,

$$\varphi_-(s) = \{\rho(s) : \rho \in \varphi, \quad \rho' \in \varphi\}$$

が成立している事に注意する.

すると $\bigcup_{o \in S} U(o)$ は S の開被覆であり, 各 $U(o)$ に対しては上が成立する事から, ほとんど全ての $s \in S$ に対し

$$\varphi_-(s) = \{\rho(s) : \rho \in \varphi, \rho' \in \varphi\}$$

が成立する. 今 S は Compact であるので高々有限個の o_i 開近傍 $U(o_1),\ldots,U(o_n)$ により S は覆われる. この時各 $U(o_i)$ の任意の元 s に対し, 正則写像

$$\varphi^{(1)} : U_i \setminus \{o_i\} \longrightarrow \mathbb{G}(k+d,N)$$

$$s \longmapsto \varphi^{(1)}(s) = \mathrm{span}\{\rho_0,\ldots,\rho_k(s),\rho'_0(s),\ldots,\rho'_{d-1}(s)\}$$

$$\varphi_{(1)} : U_i \setminus \{o_i\} \longrightarrow \mathbb{G}(k-d,N) \qquad s \longmapsto \varphi_{(1)}(s) = \mathrm{span}\{\rho_d(s),\ldots,\rho_k(s)\}$$

が定まる. すると補題 2.24 より一意的な U_i への拡張

$$\varphi^{(1)} : U_i \longrightarrow \mathbb{G}(k+d,N)$$

$$\varphi_{(1)} : U_i \longrightarrow \mathbb{G}(k-d,N)$$

が定まる. よって任意の i についてこの事が言え, 求めていた

$$\varphi^{(1)} : S \longrightarrow \mathbb{G}(k+d,N), \qquad \varphi_{(1)} : S \longrightarrow \mathbb{G}(k-d,N)$$

が得られ, 前半の主張は示された.

後半の主張を示す. そのためには,

$$D(\varphi_{(1)}) = (D\varphi)^{(1)} \tag{$*'$}$$

を言えばよい.

実際,$(*')$ で φ を $D\varphi$ で置き換えれば

$$D((D\varphi)_{(1)}) = (DD\varphi)^{(1)} = \varphi^{(1)}$$

が言えるので, さらに両辺に D を施せば $(D\varphi)_{(1)} = D(\varphi^{(1)})$ が示されるからである.

以下 $(*')$ を示す.

$$\langle v,w\rangle = \sum_{j=0}^{N} v_j w_j$$

により $\mathbb{C}^{N+1}$ 上の標準双線形対称形式を表す.$D\varphi$ と φ の moving vector $\rho,\sigma : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ をとる. すると任意の $s \in U$ に対し

$$\rho(s) \in \varphi(s) = V \in \mathbb{G}(k,N) \qquad \sigma(s) \in D(\varphi(s)) = V^\circ \in \mathbb{G}^*(N-k-1,N)$$

であるので U 上 $\langle \rho,\sigma\rangle = 0$ が成立. この両辺を微分して,

$$0 = \langle \rho,\sigma\rangle' = (\sum_{j=0}^{N} \rho_j\sigma_j)' = \sum_{j=0}^{N} \rho'_j\sigma_j + \sum_{j=0}^{N} \rho_j\sigma'_j = \langle \rho',\sigma\rangle + \langle \rho,\sigma'\rangle\,.$$

よって任意の $s \in U$ に対し,

$$\begin{aligned}\langle \rho(s), \sigma'(s)\rangle = 0 \qquad ({}^\forall \sigma \in D\varphi) &\Longleftrightarrow \langle \rho'(s), \sigma(s)\rangle = 0 \qquad ({}^\forall \sigma \in D\varphi)\\ &\Longleftrightarrow \langle \rho'(s), w\rangle = 0 \qquad ({}^\forall w \in (D\varphi)(s))\\ &\Longleftrightarrow \rho'(s) \in ((D\varphi)(s))^\circ = \varphi(s)\end{aligned}$$

がわかる. 一方で $s \in U \setminus \{0\}$ に対し

$$\begin{aligned}(D\varphi)^{(1)}(s) = (D\varphi)_+(s) &:= \{v \in (\mathbb{C}^{N+1})^* : v = \sigma'(s) \quad \sigma \in D\varphi\}\\ &= \{\sigma'(s) : \sigma \in D\varphi\}\end{aligned}$$

であるので, 以上の事実よりほとんど全ての $s \in S$ に対して

$$\begin{aligned}D((D\varphi)^{(1)})(s) &= \{v \in \mathbb{C}^{N+1} : \langle v, v'\rangle = 0, \quad {}^\forall v' \in (D\varphi)^{(1)}(s)\}\\ &= \{v \in \mathbb{C}^{N+1} : \langle v, \sigma'(s)\rangle = 0, \quad {}^\forall \sigma \in D\varphi\}\\ &= \{\rho(s) : \rho \in \varphi, \quad \langle \rho(s), \sigma'(s)\rangle = 0, \quad {}^\forall \sigma \in D\varphi\}\\ &= \{\rho(s) : \rho'(s) \in \varphi(s)\} = \varphi_{(1)}(s).\end{aligned}$$

となり, 両辺にさらに D 施し $(*')$ を得る. □

S を Compact な Riemann 曲面とし, 曲線 $\varphi : S \longrightarrow \varphi(S) = X \subset \mathbb{G}(k, N)$ と φ の moving vector ρ が与えられたとする.U 上の座標に関する ρ の微分の列,

$$\rho, \rho', \ldots, \rho^{(r)}, \ldots : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$$

を考える. ここで φ の階数 rankφ を

$max\{r \in \mathbb{N} : \rho(s), \rho'(s), \ldots, \rho^{(r)}(s) \in \mathbb{C}^{N+1}$は, ある $s \in U, \rho(s) \in \varphi(s)$ に対し一次独立$\}$

により定める. 補題 5.5 の証明で見たように,rankφ は local basis の取り方によらず φ のみによって定まる. 全ての $i(0 \leq i \leq N+1)$ について $\rho^{(i)}(s) \in \mathbb{C}^{N+1}$ であるので, 特に

$$\rho(s), \ldots, \rho^{(N+1)}(s)$$

を考えるとこれは必ず一次従属になる. 従って $0 \leq \mathrm{rank}\varphi \leq N$ である事に注意する.

rank$\varphi = N$ である時 φ を非退化という.

定義 5.7. $0 \leq k \leq \mathrm{rank}\varphi$ に対し

$$\varphi^{(k)} : S \longrightarrow \mathbb{G}(k, N) \subset \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^{k+1} \mathbb{C}^{N+1}) \qquad s \longmapsto \mathbb{C}(\rho(s) \wedge \ldots \wedge \rho^{(k)}(s))$$

とし, $\varphi^{(k)}$ を φ の k 次同伴曲線という.

命題 5.8. 曲線 $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{G}(0, N)$ に対し $\psi := \varphi^{(k)}$ で定める. この時

$$\psi^{(1)} = \varphi^{(k+1)} \qquad (0 \leq k < \mathrm{rank}\varphi)$$

$$\psi_{(1)} = \varphi^{(k-1)} \qquad (0 < k \leq \mathrm{rank}\varphi)$$

Proof. $d(\psi)$ を求めるために, 曲線 φ の moving vector を ρ とすれば $0 \leq k < \mathrm{rank}\varphi$ に対し,$\psi^{(k)}$ の local basis は

$$(\rho_0, \ldots, \rho_k) = (\rho, \rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(k)})$$

で与えられるので,

$$\begin{aligned}(\rho_0, \ldots, \rho_k, \rho'_0, \ldots, \rho'_k) &= (\rho, \ldots, \rho^{(k)}, \rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(k+1)}) \\ &= (\rho, \ldots, \rho^{(k+1)}).\end{aligned}$$

よって $d(\varphi^{(k)}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k < \mathrm{rank}\varphi \\ 0 & k = \mathrm{rank}\varphi \end{cases}$ 従って, 命題 5.6 より

$$\psi^{(1)} : S \longrightarrow \mathbb{G}(k+1, N) \qquad s \longmapsto \mathbb{C}(\rho(s) \wedge \ldots \wedge \rho^{(k+1)}(s))$$

$$\psi_{(1)} : S \longrightarrow \mathbb{G}(k-1, N) \qquad s \longmapsto \mathbb{C}(\rho^{(1)}(s) \wedge \ldots \wedge \rho^{(k)}(s))$$

がわかる. □

6 例

$x \subset \mathbb{P}_N$ が曲線, すなわち一次元多様体である時を考える. 曲線 X が非退化である時, 曲線

$$\varphi : S \longrightarrow X \subset \mathbb{P}_N$$

に対し, 同伴曲線

$$\varphi^{(k)} : S \longrightarrow X^{(k)} = \varphi^{(k)}(S) \subset \mathbb{G}(k, N) \qquad (0 \leq k \leq N-1)$$

が得られる.

特に $k = N-1$ の場合を考える. この時, 定理 2.22 の同型写像 D を用いて, 可換図式

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"] & \\ \mathbb{G}(N-1, N) \arrow[rr, "D"'] & & \mathbb{G}^*(0, N) = \mathbb{P}^*_N \end{tikzcd}$$

が成立する. この時に得られる

$$\widetilde{\varphi} := D \circ \varphi^{(N-1)} : S \longrightarrow \widetilde{X} = \widetilde{\varphi}(S) \subset \mathbb{P}^*_N$$

を φ の双対曲線という. また $s \in S$ に対し $\varphi^{(N-1)}(s)$ を X の $\varphi(s) \in X$ における osculating (N-1) plane という.

一般の k $(0 \leq k \leq N-1)$ に対しても, 双対同型 $D_{N-k-1,N}$ により同様に可換図式は成立し,$\widetilde{\varphi} := D \circ \varphi^{(N-1)}$ は, この $k = 0$ の場合に他ならない.

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\varphi^{(N-k-1)}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}^{(k)}"] & \\ \mathbb{G}(N-k-1, N) \arrow[rr, "D_{N-k-1,N}"'] & & \mathbb{G}^*(k, N) \end{tikzcd}$$

定理 6.1. 非退化曲線 $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}_N$ と $0 \leq k \leq N-1$ に対し

$$D \circ \varphi^{N-k-1} = \tilde{\varphi}^{(k)}$$

が成立する.

Proof. k に関する帰納法により示す.

$k = 0$ とすると, これは $\widetilde{\varphi}$ の定義そのものであるので $k > 0$ とする.$k-1$ に対して定理の主張を仮定する. この時

$$\widetilde{\varphi}^{(k)} = (\widetilde{\varphi}^{(k-1)})^{(1)} = (D(\varphi^{(N-k)}))^{(1)}$$

すると命題 5.6 及び命題 5.8 より

$$(D(\varphi^{(N-k)}))^{(1)} = D((\varphi^{(N-k)})_{(1)}) = D \circ \varphi^{(N-k-1)}.$$

よって帰納法により, 任意の k $(0 \leq k \leq N-1)$ について成立する. □

上述で特に $k = N-1$ とすると,$D \circ \varphi = \widetilde{\varphi}^{(N-1)}$ となる.$\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ は定義から $\widetilde{\widetilde{\varphi}} := D \circ \widetilde{\varphi}^{(N-1)}$ である事に注意すれば,

$$\varphi = D \circ (D \circ \varphi) = D \circ \widetilde{\varphi}^{(N-1)} = \widetilde{\widetilde{\varphi}}$$

よって $\widetilde{\widetilde{X}} := \widetilde{\widetilde{\varphi}}(S) = \varphi(S) = X$. 従って次が示された.

系 6.2. $\widetilde{\widetilde{X}} = X$

次に $k = N-2$ とする. この時定理 6.1 より $\widetilde{\varphi}^{(N-2)}(s) = D \circ \varphi^{(1)}(s)$ がいえる. すなわち $\widetilde{\varphi}^{(N-2)}(s)$ は接線 $\varphi^{(1)}$ の annihilator であるので, すなわち $\bigcup_{s \in S} \widetilde{\varphi}^{(N-2)}(s)$ は X^* に他ならない.

ここで次を定義する.

定義 6.3.

$$\mathrm{Tan}^{(k)}X := \bigcup_{E \in B_k} E \subset \mathbb{P}_N$$

$$B_k := \varphi^{(k)}(S) \subset \mathbb{G}(k, N)$$

この時 $\mathrm{Tan}^{(k)}X$ を X の *tangent scroll* という.

すると $\mathrm{Tan}^{(N-2)}\widetilde{X} = \bigcup_{s \in S} \widetilde{\varphi}^{(N-2)}(s) = X^*$ であるので次が言える.

系 6.4. $\mathrm{Tan}^{(N-2)}\widetilde{X} = X^*$

定義 6.5. 次数 d の非退化有理曲線を, 共通零点をもたない次数 d の斉次多項式 $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ に対し

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_N \qquad (t_0 : t_1) \longmapsto (\varphi_0(t_0, t_1), \ldots, \varphi_N(t_0, t_1))$$

の像として定める.

特に $0 = m_0 < m_1 < \ldots, m_{N-1} < m_N = d$ に対し

$$\varphi_i(t_0, t_1) := t_0^{d-m_i} t_1^{m_i} \in \mathbb{C}$$

の時, これを有理単項曲線という.

以下, 有理単項曲線について考える.

$(y_0 : \ldots : y_N)$ を $\mathbb{P}_N^*$ の座標とし多項式 Φ を

$$\Phi(t; y) := \sum_{i=0}^{N} y_i \varphi_i(t)$$

で定める.y_i を係数 $(t_0 : t_1)$ を変数とみなせば Φ が $(t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$ で重根をもつために y_i が満たすべき, 判別式集合

$$\Delta := \{(y_0 : \ldots : y_N) \in \mathbb{P}_N^* : \Phi(t; y) \text{ は重根 } (t_0 : t_1) \in \mathbb{P} \text{ をもつ }\}$$

が定まる. すると次がいえる.

命題 6.6. $\Delta = X^*$

Proof. 今, 集合 Z, Z' を

$$Z := \{(t; y) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_N^* : \Phi(t; y) = 0\}$$

$$Z' := \{(t; y) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_N^* : \frac{\partial \Phi}{\partial t_0}(t; y) = \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t; y) = 0\}$$

により定める. 今 $\Phi(t;y)=\sum_{i=0}^{N} y_i t_0$ であるので, Eular の公式より

$$\sum_{j=0}^{1} t_j \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} = d\cdot\Phi(t;y)$$

が成立するので,

$$(t;y)\in Z' \Rightarrow (t;y)\in Z \tag{$\sharp$}$$

すなわち $Z'\subset Z$ がわかる. ここで

$$\begin{aligned}
(t';y)\in\Delta &\Longleftrightarrow \text{多項式}\Phi(t;y)\text{ が重根 } t'\text{をもつ}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}\Phi'(t';y)=0\\ \Phi(t';y)=0\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t_0}\right|_{t=t'} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}\right|_{t=t'}=0\\ \Phi(t';y)=0\end{cases}\\
\text{すると }(\sharp)\text{ より} &\Longleftrightarrow \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t_0}\right|_{t=t'} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}\right|_{t=t'}=0
\end{aligned}$$

であるので,$\pi:\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}^*_N\longrightarrow\mathbb{P}^*_N$ を第二成分への射影とすれば,

$$\Delta=\pi(Z') \tag{$\sharp'$}$$

がわかる. 次に

$$\varphi\times\mathrm{id}:\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}^*_N\longrightarrow\mathbb{P}_N\times\mathbb{P}^*_N \quad ((t_0:t_1),y)\longmapsto((\varphi_0(t_0:t_1):\ldots:\varphi_N(t_0:t_1)),y)$$

を考える. 有理単項曲線 X の Conormal bundle $C_X \subset \mathbb{P}_1\times\mathbb{P}^*_N$ に対し $\pi_1^*:C_X\longrightarrow\mathbb{P}^*_N$ を標準射影とする. ここで $X^*:=\pi_1^*(C_X)$ であったので次を言えばよい.

主張 6.7. $\varphi\times\mathrm{id}(Z')=C_X$

実際もし主張 6.7 が示されたとすると可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & C_X \arrow[ddl, "\pi_1"'] \arrow[ddr, "\pi_1^*"] & \\
Z' \arrow[ur, "\varphi\times\mathrm{id}"] \arrow[drr, "\pi"'] & & \\
X & & \mathbb{P}^*_N
\end{tikzcd}$$

より $\pi(Z') = \pi_1^*(\varphi \times \mathrm{id}(Z'))$ が成立する. よって主張 6.7 及び $(\sharp')$ より

$$\Delta = \pi(Z') = \pi_1^*(\varphi \times \mathrm{id}(Z')) = \pi_1^*(C_X) = X^*$$

となるからである.

以下主張 6.7 を示す.

まず

$$\mathbb{T}_{\varphi(t)}X = \mathbb{P}\left(\mathrm{span}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t)\right\}\right)$$

であるので,

$$\left\langle \mathbb{T}_{\varphi(t)}X, y\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t), y\right\rangle = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), y\right\rangle = 0.$$

また $j = 0, 1$ に対し

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_j}(t; y) = \sum_{i=0}^{N} y_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j}(t) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t), y\right\rangle$$

より

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t), y\right\rangle = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), y\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial t_0}(t; y) = \frac{\partial\Phi}{\partial t_1}(t; y) = 0$$

以上より任意の $(t; y) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_N^*$ に対し,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_0}(t; y) = \frac{\partial\Phi}{\partial t_1}(t; y) = 0 \Longleftrightarrow \left\langle \mathbb{T}_{\varphi(t)}X, y\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow (\varphi(t), y) \in C_X$$

がわかったので $C_X = (\varphi \times \mathrm{id})(Z')$ がいえる.

□

例 6.8. *($d = 3, N = 3$ の場合)*

ねじれ曲線

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow X \subset \mathbb{P}_3 \qquad (t_0 : t_1) \longmapsto (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3)$$

について考える. この時

$$\Phi(t; y) := y_0 t_0^3 + y_1 t_0^2 t_1 + y_2 t_0 t_1^2 + y_3 t_1^3.$$

ここで $t_1 \neq 0$ とする.$t = t_0/t_1$ とおけば,

$$\Phi(t; y) = y_0 t^3 + y_1 t^2 + y_2 t + y_3$$

となる. この Φ の y_i 係数に関する判別式は

$$f^* = 27y_0^2 y_3^2 - 18y_0 y_1 y_2 y_3 + 4y_0 y_2^3 + 4y_1^3 y_3 - y_1^2 y_2^2$$

であるので f^* が $X^* = \mathrm{Tan}\widetilde{X}$ の定義方程式になる.

$t_1 = 0 \Rightarrow t_0 \neq 0$ であるので $t = t_1/t_0$ として同様の結果を得る.

次に φ の双対曲線について考える. $N=3$ であるので定義より $\widetilde{\varphi} := D \circ \varphi^{(2)}$. ここで

$$\varphi^{(2)} := \mathbb{P}\left(\mathrm{span}\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_0^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_0 \partial t_1}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}\right\}\right)$$

であるので,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_0^2} &= {}^t\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t_0^2}, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_0^2}, \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t_0^2}, \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t_0^2}\right) \\
&= {}^t\left(6t_0, 2t_0, 0, 0\right) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_0 \partial t_1} &= {}^t(0, 2t_0, 2t_1, 0) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} &= {}^t(0, 0, 2t_0, 6t_1)
\end{aligned} \qquad \text{より}$$

$$\varphi^{(2)} = \mathbb{P}\left(\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 6t_0 \\ 2t_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2t_0 \\ 2t_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t_0 \\ 6t_1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

がわかる. よって $\widetilde{\varphi}((t_0 : t_1)) = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ とすると,

$$\begin{cases} 6t_0 z_0 + 2t_1 z_1 = 0 \\ 2t_0 z_1 + 2t_0 z_2 = 0 \\ 2t_0 z_2 + 6t_1 z_3 = 0 \end{cases} \text{より} \begin{cases} (z_0 : z_1) = (t_1 : -3t_0) \\ (z_1 : z_2) = (t_1 : -t_0) \\ (z_2 : z_3) = (-3t_1 : t_0) \end{cases}.$$

よって $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) = (t_1^3 : -3t_0 t_1^2 : 3t_0^2 t_1 : -t_0^3)$ すなわち

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \widetilde{X} \subset \mathbb{P}_3^* \qquad (t_0 : t_1) \longmapsto (t_0^3 : -3t_0^2 t_1 : 3t_0 t_1^2 : -t_1^3)$$

がわかった. 上と同様にして

$$\widetilde{\Phi}(t; y) = x_0 t^3 - 3x_1 t^2 + 3x_2 t - x_3$$

であるので, $\widetilde{X}^* = \mathrm{Tan}X \subset \mathbb{P}_3$ の方程式は

$$f = x_0^2 x_3^2 - 6x_0 x_1 x_2 x_3 + 4x_0 x_2^3 + 4x_1^3 x_3 - 3x_1^2 x_2^2$$

である事がわかる.

例 6.9. *($d = 4, N = 3$ の場合)*

Case1

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow X \subset \mathbb{P}_4 \qquad (t_0 : t_1) \longmapsto (t_0^4 : t_0^3 t_1 : t_0 t_1^3 : t_1^4)$$

の場合を考える. この時

$$\Phi(t_0,t_1;y)=y_0t_0^4+y_1t_0^3t_1+y_2t_0t_1^3+y_3t_1^4.$$

ここで $t_1\neq 0$ とする.$t=t_0/t_1$ とおくと

$$\Phi(t;y)=y_0t^4+y_1t^3+y_2t+y_3$$

となる.X^* の方程式を求めるために Φ の判別式を考えると,

$$f^*=4y_1^3y_2^3+27y_0^2y_2^4+6y_0y_1^2y_2^2y_3+27y_1^4y_3^2+192y_0^2y_1y_2y_3^2-256y_0^3y_3^3$$

となる.$t_1=0\Rightarrow t_0\neq 0$ より $t=t_1/t_0$ として同様の考察をすれば同じ式を得る. また $\widetilde{\varphi}:=D\circ\varphi^{(2)}$ であるので

$$\widetilde{\Phi}(t;x)=x_0t^4-2x_1t^3+2x_2t-x_3$$

となりこの判別式は

$$f=-16x_1^3x_2^3+27x_0^2x_2^4+6x_0x_1^2x_2^2x_3+27x_1^4x_3^2-48x_0^2x_1x_2x_3^2-16x_0^3x_3^3$$

であり, これが $\widetilde{X}^*=\mathrm{Tan}X$ に関する方程式である事がわかる.

Case2

$$\varphi:\mathbb{P}_1\longrightarrow X\subset\mathbb{P}_3\qquad (t_0:t_1)\longmapsto(t_0^4:t_0^3t_1:t_0^2t_1^2:t_1^4)$$

の場合を考える. この時

$$\Phi(t;y)=y_0t^4+y_1t^4+y_2t^2+y_3$$

であり, この t 変数 4 次多項式の判別式は

$$f^*=y_3(-27y_1^4y_3+16y_0(y_2^2-4y_0y_3)^2-4y_1^2(y_2^3-36y_0y_2y_3)))$$

でありこれが $X^*=\mathrm{Tan}\widetilde{X}$ の定義方程式である. また双対曲線については,$\widetilde{\varphi}=D\circ\varphi^{(2)}$ で

$$\varphi^{(2)}=\mathbb{P}\left(\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}12t_0^2\\6t_0t_1\\2t_1^2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3t_0^2\\4t_0t_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2t_0^2\\12t_1^2\end{pmatrix}\right\}\right)$$

がわかるので,

$$\widetilde{\varphi}:(t_0:t_1)\longmapsto(3t_1^4:-8t_0t_1^3:-6t_0^2t_1^2:t_0^4)$$

となり, $\widetilde{\Phi}(t;x)=3x_0t^4-8x_1t^3+6x_2t^2-x_3$ が導かれる. したがって

$$f=x_3(16x_1^4x_3+x_0(3x_2^2+x_0x_3)^2-8x_1^2(x_2^3+3x_0x_2x_3))$$

が $\widetilde{X^*}$ に関する方程式である事が計算された.

謝辞

最後に色々と御指導頂いた松下先生をはじめ, 数学教室の先生方に心から感謝致します.

参考文献

[1] Fischer,G. & Piontkowski,J. *Ruled Varieties.*Vieweg,2001,142pp.

[2] Piontkowski,J. *Developable Variety of Gauss rank 2.*Preprint,2001.

[3] Harris,J. *Algebraic Geometry-a first course.*Springer,1992,328pp.

[4] Hartshorne,R. *Algebraic Geometry*Springer,1977,496pp.

[5] 川又雄二郎, 「射影空間の幾何学」, 朝倉書店,2001,214pp.

[6] Whitney,H. *Complex Analytic Varieties.*Addison-Wesley,Reading 1972.

[7] Masayoshi Nagata. *LOCAL RINGS*,Interscience,1962,234pp.

[8] 永田雅宣, 「可換環論」, 紀伊國屋,1974,254pp.

[9] 佐竹一朗「線形代数学」*(*第 57 版*)*, 裳華房,1998,324pp.

[10] Griffiths,P. and J,Harris. *Principles of Algebraic geometry*,Wiley-Interscience,New York,1978,813pp.