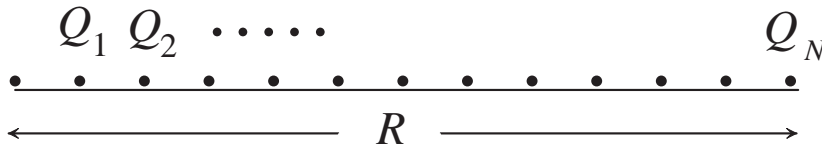


簡単のために長さ  $R$  の 1 次元空間上の場の理論を考える．そのためにまず  $N$  個の力学変数  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) の作用汎関数として次のようなものを考える．

$$S = \int dt L; \quad L = \ell \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2C^2} \dot{Q}_i^2 - \frac{(Q_i - Q_{i-1})^2}{2\ell^2} - U(Q_i) \right) \quad (1)$$

ここで、 $\ell$  や  $C$  は理論のパラメータである．この理論は、それぞれの  $Q_i$  が同じポテンシャル関数  $U(Q_i)$  を持ち、指標  $i$  が互いに隣り合う  $Q_i$  同士が相互作用する  $N$  次元の力学系である．この系の特徴は、ある力学変数（例えば  $Q_i$ ）が変動すると、それがまず隣接した力学変数（ $Q_{i\pm 1}$ ）に影響を与え、それがまたその隣の力学変数に影響する、というように順番に影響が伝わっていくようになっており、指標  $j$  が  $i$  と大きく異なる力学変数  $Q_j$  には  $Q_i$  の変動が直接伝わらないことである．係数  $C^2$  は、その隣接相互作用の強さを表す指標となっている．



ここで、空間を間隔  $\ell = R/N$  の格子に切って、 $Q_i$  の指標  $i$  をその格子上的点  $x_i$  に対応させる．すなわち  $Q_i$  を離散化された空間上の各点  $x_i$  上で定義された力学変数  $Q_i(t) = Q(x_i, t)$  と考える．この  $N$  次元力学系で  $\ell \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) の極限を取れば 1 次元空間上の（スカラー場  $Q$  に対する）場の理論が得られる：

$$S = \int dt \int_R dx \mathcal{L}; \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2C^2} \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 - U(Q). \quad (2)$$

すなわち、場とは空間上の各点で定義された力学変数である．力学変数  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) を座標として、それらで張られる  $N$  次元空間を配位空間という．場の理論は「無限次元の配位空間を持つ力学」である．ただし、意味のある場の理論を導くためには、(1) 式で隣接する点同士の  $Q_i$  のみが相互作用するとしたように、元々の力学変数間の相互作用の形には強い制限がある．特に、特殊相対論に従う理論であるためには、連続極限を取って得られる場の作用汎関数  $S$  は Lorentz 不変でなければならない．

(2) 式から導かれる  $Q$  の運動方程式（場の方程式）は

$$-\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - U'(Q) = 0$$

となる．ここで  $U(Q) = 0$  とすると、これは伝播速度が  $C$  で与えられる波動方程式である．例えば、 $Q$  を気体密度の揺らぎ  $\delta\rho$  と見なせば、上式は  $C$  を音速とする音波の波動方程式を与える．ポテンシャル  $U(Q)$  が存在する場合にも、 $C$  の意味は本質的に同じであり、波動の伝播速度の上限を与える．言い換えると、物理的情報伝達速度が  $C$  で与えられる因果律が成り立っている．すなわち、場の理論の本質は波動理論である．

(2) 式の 3 次元空間への拡張は

$$S = \int dt \int_V d^3x \mathcal{L}; \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2C^2} \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x^i} \right)^2 - U(Q) \quad (3)$$

である．ここで  $V$  は場が定義されている空間の体積である．特に、伝播速度  $C$  が光速  $c$  に等しいとし、体積  $V$  が無限大の極限を考えると、この理論は 4 次元ミンコフスキー時空上のローレンツ不変な実スカラー場の理論となる．