電磁気３ 補足１

一般の Lorentz 変換，電磁場の Lorentz 変換

まず，一般の Lorentz 変換を考える．慣性系 K の座標軸 x^1 の正の方向へ速度 v で運動する慣性系 $\overline{K}$ への Lorentz 変換は

$$
\begin{aligned}
\overline{x}^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1)\,, \\
\overline{x}^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0)\,, \\
\overline{x}^2 &= x^2\,, \quad \overline{x}^3 = x^3\,,
\end{aligned}
$$

であった．ここで，記号の簡単化のため $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ とおいた．これを一般の方向の速度 $\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c)$ に拡張するには，座標を $\boldsymbol{v}$ に平行な成分と垂直な成分に分解して上の公式を適用すればよい．すなわち，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\beta}/\beta$ $(= \boldsymbol{v}/v)$ を $\boldsymbol{v}$ 方向の単位ベクトルとして $x_{||} = n_i x^i$, $x^i_{\perp} = (\delta^i_j - n^i n_j)x^j$ などとおくと

$$
\begin{aligned}
\overline{x}^0 &= \gamma(x^0 - \beta x_{||})\,, \\
\overline{x}_{||} &= \gamma(x_{||} - \beta x^0)\,, \\
\overline{x}^i_{\perp} &= x^i_{\perp}\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで

$$
x^i = (\delta^i_j - n^i n_j)x^j + n^i n_j x^j = x^i_{\perp} + n^i x_{||}\,,
$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
\overline{x}^0 &= \gamma(x^0 - \beta_j x^j)\,, \\
\overline{x}^i &= x^i_{\perp} + \gamma n^i (n_j x^j - \beta x^0) = x^i + (\gamma - 1) n^i n_j x^j - \gamma \beta^i x^0\,,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

を得る．さらに $\gamma - 1 = (\gamma^2 - 1)/(\gamma + 1) = \gamma^2\beta^2/(\gamma+1)$ を使うと，結局

$$
\begin{aligned}
\overline{x}^0 &= \gamma(x^0 - \beta_j x^j)\,, \\
\overline{x}^i &= x^i + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i \beta_j x^j - \gamma \beta^i x^0\,.
\end{aligned}
$$

あるいは，$\overline{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ として行列表示すると

$$
\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_j \\ \Lambda^i{}_0 & \Lambda^i{}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_j \\ -\gamma\beta^i & \delta^i_j + \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j \end{pmatrix}\,,
\tag{3}
$$

を得る．また逆行列は

$$
\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} (\Lambda^{-1})^0{}_0 & (\Lambda^{-1})^0{}_j \\ (\Lambda^{-1})^i{}_0 & (\Lambda^{-1})^i{}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_j \\ \gamma\beta^i & \delta^i_j + \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^i\beta_j \end{pmatrix}\,,
\tag{4}
$$

である．

さて，任意の反変ベクトルあるいは共変ベクトルに対して，それらの成分の Lorentz 変換が

$$
\overline{V}^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha V^\alpha\,, \quad \overline{W}_\nu = W_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu\,,
$$

となることを思い起こすと電磁場テンソル $F^\mu{}_\nu$ は，その成分が

$$
\overline{F}^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu\,,
$$

と変換することが分かる．よって，電場は $F^0{}_i = E_i$ 磁場は $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$ $(F^{ij} = F^i{}_j)$ より，

$$\begin{aligned}
\overline{E}_i &= \overline{F}^0{}_i = \Lambda^0{}_\alpha F^\alpha{}_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_i = \Lambda^0{}_0 F^0{}_j (\Lambda^{-1})^j{}_i + \Lambda^0{}_j F^j{}_0 (\Lambda^{-1})^0{}_i + \Lambda^0{}_j F^j{}_k (\Lambda^{-1})^k{}_i \\
&= \gamma E_i - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^j E_j \beta_i + \gamma \epsilon^{ijk} \beta_j B_k \,, \\
\overline{B}_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ij}{}^k \overline{F}^j{}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}{}^k \Lambda^j{}_\alpha F^\alpha{}_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}{}^k \left[\Lambda^j{}_0 F^0{}_\ell (\Lambda^{-1})^\ell{}_k + \Lambda^j{}_\ell F^\ell{}_0 (\Lambda^{-1})^0{}_k + \Lambda^j{}_\ell F^\ell{}_n (\Lambda^{-1})^n{}_k\right] \\
&= -\gamma \epsilon_{ijk} \beta^j E^k + \gamma B_i - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^j B_j \beta_i \,,
\end{aligned} \tag{5}$$

を得る．ここで，$\gamma^2\beta^2/(\gamma+1)+1=\gamma$ の関係を使った．(5) 式を 3 次元ベクトル記号で表せば，

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{E}} &= \gamma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{\beta}\right), \\
\overline{\boldsymbol{B}} &= \gamma\left(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\beta}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

いま，$F_{\mu\nu}$ から作られる Lorentz 不変量を考えると

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\,,$$

の 2 つがある．これらを具体的に $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を用いて表せば

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2)\,, \quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} = 8\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}\,, \tag{7}$$

となる．さて，任意の電磁場に対して，適当に十分狭い時空領域を考えると，そこでは電磁場は一定と考えてよい．このような領域で考える慣性系を局所慣性系と言う．また，そこでの Lorentz 変換を局所 Lorentz 変換と言う．(6) 式と (7) 式より電磁場の局所的 Lorentz 変換に対する性質として以下のことが分かる：

(a) ある世界点で $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$ かつ $\boldsymbol{E}^2 > \boldsymbol{B}^2$ のとき，その世界点で $\overline{\boldsymbol{B}}=0$ となる局所慣性系が存在する．その系への Lorentz 変換は

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}^2}$$

で与えられる．

(b) ある世界点で $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$ かつ $\boldsymbol{B}^2 > \boldsymbol{E}^2$ のとき，$\overline{\boldsymbol{E}}=0$ となる局所慣性系が存在し，その系への Lorentz 変換は

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}^2}$$

で与えられる．

(c) ある世界点で $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$ かつ $\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{B}^2$ であれば，そこでの任意の局所慣性系 $\overline{K}$ で $\overline{\boldsymbol{E}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}=0$ かつ $\overline{\boldsymbol{E}}^2=\overline{\boldsymbol{B}}^2$ である．

ちなみに，電磁波は性質 (c) を満たしている．これは (i) 電磁波が光速度で伝播し，(ii) 光円錐が Lorentz 不変であること，のひとつの帰結と考えることができる．