電磁気３ 補足３

場のエネルギー運動量テンソルとその保存則の導出

質点系の力学では Lagrangean の時間推進 $t \to \bar{t} = t + \Delta t$ に対する不変性と空間推進 $x^i \to \bar{x}^i = x^i + \Delta x^i$ に対する不変性（空間の一様性）から系のエネルギー運動量保存則（$E =$ 一定，$P^i =$ 一定）が導かれた．場の理論でもこれに対応して無限小の座標変換

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu ; \quad |\xi^\mu| \ll 1 \tag{1}$$

を考える．ここで場の局所的保存則を考えるために ξ^μ を定数とせず，$\xi^\mu = \xi^\mu(x)$ とする．

この座標変換での場の量の変換を考えると

$$\begin{aligned}
&\text{スカラー：} && \bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x) \\
&\text{共変ベクトル：} && \bar{\phi}_\mu(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\phi_\alpha(x) = \phi_\mu(x) - \partial_\mu \xi^\alpha \, \phi_\alpha \\
&\text{共変テンソル：} && \bar{\phi}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\phi_{\alpha\beta}(x) = \phi_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \xi^\alpha \, \phi_{\alpha\nu} - \partial_\nu \xi^\beta \, \phi_{\mu\beta}
\end{aligned}$$

などとなる．ところで，変分を取るときには，同じ $\{x^\mu\}$ の座標点での場の変位を比較する必要がある．そこで上式のそれぞれの左辺を展開して

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(\bar{x}) &= \bar{\phi}(x+\xi) = \bar{\phi}(x) + \xi^\alpha \partial_\alpha \phi \\
\bar{\phi}_\mu(\bar{x}) &= \bar{\phi}_\mu(x+\xi) = \bar{\phi}_\mu(x) + \xi^\alpha \partial_\alpha \phi_\mu \\
\bar{\phi}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= \bar{\phi}_{\mu\nu}(x+\xi) = \bar{\phi}_{\mu\nu}(x) + \xi^\alpha \partial_\alpha \phi_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

これらより

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \phi &= \bar{\phi}(x) - \phi(x) = -\xi^\alpha \partial_\alpha \phi \\
\delta_\xi \phi_\mu &= \bar{\phi}_\mu(x) - \phi_\mu(x) = -\xi^\alpha \partial_\alpha \phi_\mu - \phi_\alpha \partial_\mu \xi^\alpha \\
\delta_\xi \phi_{\mu\nu} &= \bar{\phi}_{\mu\nu}(x) - \phi_{\mu\nu}(x) = -\xi^\alpha \partial_\alpha \phi_{\mu\nu} - \phi_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha - \phi_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha
\end{aligned} \tag{2}$$

を得る．特に Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ の変位を考えると $\partial_\alpha \eta_{\mu\nu} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \eta_{\mu\nu} &= \bar{\eta}_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}(x) \\
&= -\eta_{\alpha\nu}\partial_\mu \xi^\alpha - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu \xi^\alpha \\
&= -(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) ; \quad \xi_\mu := \eta_{\mu\nu}\xi^\nu
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで，元の $\eta_{\mu\nu}$ は定数であるが，(1) の変換で，座標がわずかに揺らいでおり，$\bar{\eta}_{\mu\nu}$ は定数ではないことに注意しなければならない．また，

$$d^4\bar{x} = \det\left|\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right| d^4x = \det|\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \xi^\mu| \, d^4x = (1 + \partial_\mu \xi^\mu)\, d^4x \tag{4}$$

さて，力学変数となる場の量を一般に $\phi_A(x)$ とする（ϕ_A は ϕ, ϕ_μ, $\phi_{\mu\nu}$, $\cdots$ を表す）．作用 S は

$$S = \frac{1}{c}\int d^4x \mathcal{L}(\phi_A, \partial_\mu \phi_A(x), \eta_{\mu\nu})$$

で与えられる．ここで，座標 $\{x\}$ は便宜上のもの（積分変数）に過ぎないから (1) の変換で S は不変である．よって (4) と $\mathcal{L}$ がスカラーであることに注意して

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{c}\int d^4x \mathcal{L}\left(\phi_A(x), \partial_\mu \phi_A(x), \eta_{\mu\nu}(x)\right) \\
&= \frac{1}{c}\int d^4\bar{x}(1 - \partial_\mu \xi^\mu)\mathcal{L}\left(\bar{\phi}_A(\bar{x}), \partial_\mu \bar{\phi}_A(\bar{x}), \bar{\eta}_{\mu\nu}(\bar{x})\right) \\
&= \frac{1}{c}\int d^4x(1 - \partial_\mu \xi^\mu)\mathcal{L}\left(\bar{\phi}_A(x), \partial_\mu \bar{\phi}_A(x), \bar{\eta}_{\mu\nu}(x)\right)
\end{aligned}$$

ここで第2行から第3行にかけて積分変数を $\bar{x}^\mu$ から x^μ へ戻した．これに (2), (3) で与えた $\bar{\phi}_A(x) = \phi_A(x) + \delta_\xi \phi_A$ の式を代入して

$$S = \frac{1}{c}\int d^4x \mathcal{L}\left(\phi_A(x), \partial_\mu \phi_A(x), \eta_{\mu\nu}(x)\right) + \delta_\xi S = S + \delta_\xi S \quad \Rightarrow \quad \delta_\xi S = 0$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}
\delta_\xi S &= \frac{1}{c}\int d^4x \left\{(-\partial_\mu \xi^\mu)\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\mu\nu}}\delta_\xi \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A}\delta_\xi \phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)}\delta_\xi \partial_\mu \phi_A\right\} \\
&= \frac{1}{c}\int d^4x \left\{-\partial_\mu \xi^\mu \mathcal{L} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\mu\nu}}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{c}\int d^4x \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)}\right)\right\}\delta_\xi \phi_A
\end{aligned}$$

上の最後の第2項は ϕ_A が場の方程式を満たすならゼロである．よって

$$\begin{aligned}
\delta_\xi S &= \frac{1}{c}\int d^4x \left\{-\partial_\mu \xi^\mu \mathcal{L} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\mu\nu}}\right\} \\
&= \frac{1}{c}\int d^4x \left(-2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\mu\nu}} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\partial_\mu \xi_\nu \\
&= \frac{1}{c}\int d^4x \partial_\mu \left(2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\mu\nu}} + \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\xi_\nu = 0
\end{aligned}$$

すなわち

$$\partial_\mu \left(2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\mu\nu}} + \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right) = 0$$

を得る．ここに現れるテンソル

$$T^{\mu\nu} := 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\mu\nu}} + \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

を場のエネルギー運動量テンソル (energy-momentum tensor) という．

$T^{\mu\nu}$ は定義により $\mu \leftrightarrow \nu$ に関して対称である．また上の導出過程から分かるように，エネルギー運動量保存則 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ は場が「場の方程式を満たす」ときに成り立つ．