一般相対論

佐々木　節

I. 序章

II. 計量と曲率

III. 曲がった時空と測地線方程式

IV. 曲がった時空上での微積分

以下，未完成（2002 年 5 月現在）

I. 序章

§1. ガリレイの相対性原理

(1) 互いに等速直線運動をしている二つの系（慣性系）において，物理法則は同一．

ニュートンの絶対時空： (t, x^i)

運動の第二法則：

$$m_I \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}, \quad m_I \cdots \text{慣性質量}$$

ガリレイ変換：

$$t \to t' = t,$$
$$\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t,$$

ユークリッド空間の 2 点間距離 ℓ の不変性:

$$\ell^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_1^i - x_2^i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_1'^i - x_2'^i)^2$$

重力の法則：

$$\vec{F}_A = -Gm_{G,A}m_{G,B}\frac{\vec{x}_A - \vec{x}_B}{|\vec{x}_A - \vec{x}_B|^3} \quad m_G \cdots \text{重力質量}$$

等価原理：

$$\frac{m_{G,A}}{m_{I,A}} = \frac{m_{G,B}}{m_{I,B}} = \cdots = \text{一定}.$$

§2. 特殊相対性原理

(1) 物理法則はすべての慣性系において同一．

(2) 真空中を伝播する光の速さはすべての慣性系において同一．

ローレンツ変換:

$$t \to t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$
$$y \to y' = y\,, \quad z \to z' = z$$

Minkowski 時空でのローレンツ不変距離:

$$s_{AB}^2 = -c^2(t_A - t_B)^2 + (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2,$$

ローレンツ共変な運動方程式:

$$m_I \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu,$$

§3. 一般相対性原理

重力 = 万有引力 ⇔ 等価原理 ⇒ 重力は慣性力
（重力は局所的には消える！）

一般相対性原理：

(1) 物理法則はすべての局所慣性系で同一．

(2) 真空中を伝播する光の速さはすべての局所慣性系において同一．

⇓

曲がった時空，重力 = 時空の曲率

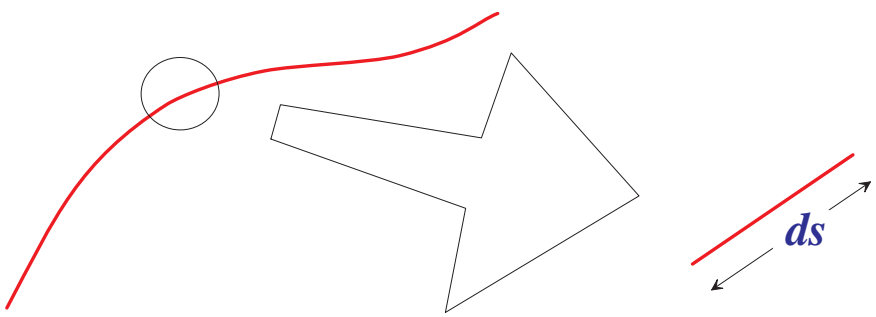
II. 計量と曲率

§1. 空間の計量

⋆ 計量 (metric)：空間（時空）の 2 点間の距離を与える

平坦な n 次元空間の例 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} dx^i dx^j \ (= \delta_{ij} dx^i dx^j),$$



一般化　$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$;　$g_{ij} = g_{ji}$

g_{ij} ⋯ 計量テンソル (metric tensor)

等価原理：十分に小さな領域では $g_{ij} = \delta_{ij}$ となる座標が存在．

§2. テンソル代数

(a) 共変テンソルと反変テンソル

n 次元空間上の二つの座標：

$$(x^1, x^2, \cdots, x^n), \quad (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^n)$$

基底ベクトル (座標基底):

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n), \quad (\vec{\bar{e}}_1, \vec{\bar{e}}_2, \cdots, \vec{\bar{e}}_n)$$

反変ベクトル：

$$\vec{V} = V^i \vec{e}_i = \bar{V}^i \vec{\bar{e}}_i\,, \quad \vec{\bar{e}}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad \bar{V}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} V^j\,.$$

共変ベクトル (1-form, 1-形式):

$$\boldsymbol{W} = W_i \boldsymbol{dx}^i = \bar{W}_i \boldsymbol{d\bar{x}}^i\,, \quad \boldsymbol{d\bar{x}}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \boldsymbol{dx}^j \quad \Rightarrow \quad \bar{W}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} W_j$$

テンソル：$\vec{e}_i$ や $\boldsymbol{dx}^i$ のテンソル積で張られるベクトル空間の要素

ℓ 階の反変テンソル $((\ell, 0)\text{-type tensor})$:

$$\bar{T}^{i'_1 i'_2 \cdots i'_\ell} = \frac{\partial \bar{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i'_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i'_\ell}}{\partial x^{i_\ell}} T^{i_1 i_2 \cdots i_\ell}\,,$$

ℓ 階の共変テンソル $((0, \ell)\text{-type tensor})$

$$\bar{T}_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\ell} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{i'_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_\ell}}{\partial \bar{x}^{i'_\ell}} T_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}\,,$$

(k, ℓ) 型の混合テンソル

$$\bar{T}_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\ell}{}^{j'_1 j'_2 \cdots j'_k} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{i'_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \bar{x}^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_\ell}}{\partial \bar{x}^{i'_\ell}} \frac{\partial \bar{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \bar{x}^{j'_2}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{j'_k}}{\partial x^{j_k}} T_{i_1 i_2 \cdots i_k}{}^{j_1 j_2 \cdots j_k}\,,$$

$\star$ 計量テンソル (成分 g_{ij}) は 2 階の (対称な) 共変テンソル

$\star$ g_{ij} の逆行列 $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ は 2 階の対称反変テンソル

$$\bar{g}^{i'j'}(\bar{x}) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{j'}} = g^{ij}(x)\,,$$

(b) ベクトルの内積

n 次元ユークリッド空間では

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j; \qquad g_{ij} = \delta_{ij}\,.$$

このとき，

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \delta_{ij}A^iB^j \ (= g_{ij}A^iB^j),$$

一般化：

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = g_{ij}A^iB^j$$

(c) 添字の上げ下げ

共変テンソルと反変テンソルとの一対一対応：

$$T_i = g_{ij}T^j\,, \quad V^i = g^{ij}V_j\,, \quad \text{etc.}$$

(d) テンソルの縮約 (contraction)

(k,ℓ) 型テンソル $\Rightarrow$ $(k-1,\ell-1)$ 型テンソル：

$$\tilde{T}^{i_1 i_2\cdots i_{k-1}}{}_{j_1 j_2\cdots j_{\ell-1}} = T^{i_1 i_2\cdots i_{p-1}\,j\,i_{p+1}\cdots i_k}{}_{j_1 j_2\cdots j_{q-1}\,j\,j_{q+1}\cdots j_\ell}\,.$$

(e) 対称化と反対称化

完全対称化と完全反対称化の表式：

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(T_{ij}+T_{ji}\right),$$
$$T_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(T_{ij}-T_{ji}\right),$$

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{3!}\left(T_{ijk}+T_{ikj}+T_{jik}+T_{jki}+T_{kij}+T_{kji}\right),$$
$$T_{[ijk]} = \frac{1}{3!}\left(T_{ijk}-T_{ikj}-T_{jik}+T_{jki}+T_{kij}-T_{kji}\right),$$

§3. 平行移動と共変微分

スカラー $f(x)$ の微分は共変ベクトル：

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{f}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}.$$

ベクトルやテンソルの偏微分はテンソルではない：

$$\begin{aligned}\frac{\partial A^i(x)}{\partial x^j} &= \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\ell}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\bar{A}^k(\bar{x})\right)\\ &= \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{A}^k}{\partial \bar{x}^\ell} + \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\ell \partial \bar{x}^k}\bar{A}^k,\end{aligned}$$

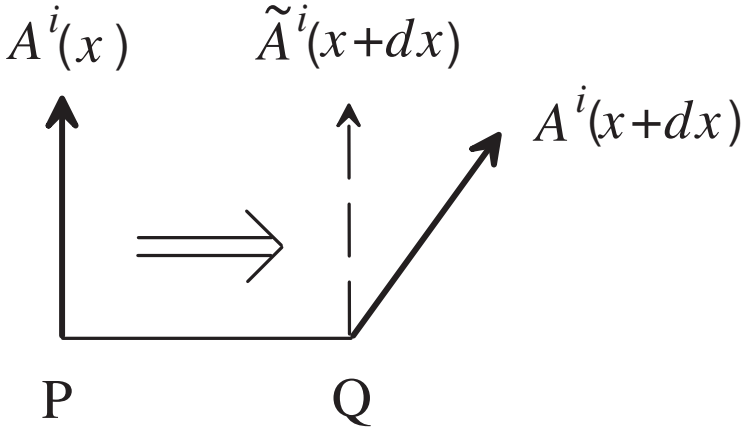
微分（ = 無限小離れた 2 点での物理量の比較 ）を共変的に定義する

ベクトルを無限小平行移動して同一点で比較する

- 平行移動の定義

$$\tilde{A}^i(x+\delta x) := A^i(x) - \Gamma^i{}_{jk}(x)A^j(x)\delta x^k,$$

$\Gamma^i{}_{jk}$ ・・・ 接続係数 (connection coefficient)



任意の 2 つのベクトルの内積は平行移動で不変：

$$\begin{aligned}&g_{ij}(x)A^i(x)B^j(x)\\ &= g_{ij}(x+\delta x)\tilde{A}^i(x+\delta x)\tilde{B}^j(x+\delta x)\\ &= \left(g_{ij}+g_{ij,k}\delta x^k\right)\left(A^i(x)-\Gamma^i{}_{\ell k}A^\ell(x)\delta x^k\right)\left(B^j(x)-\Gamma^j{}_{\ell k}B^\ell(x)\delta x^k\right)\\ &= g_{ij}(x)A^i(x)B^j(x) + \left[g_{ij,k} - g_{\ell j}\Gamma^\ell{}_{ik} - g_{i\ell}\Gamma^\ell{}_{jk}\right]A^iB^j\delta x^k + O\left((\delta x)^2\right),\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g_{ij,k} - g_{\ell j}\Gamma^\ell{}_{ik} - g_{i\ell}\Gamma^\ell{}_{jk} = 0,$$

接続係数 $\Gamma^i{}_{jk}$ の変換性

$$\bar{\Gamma}^i{}_{jk}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} = \Gamma^\ell{}_{pq} - \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^p \partial x^q}$$

$\Gamma^i{}_{jk}$ はテンソルではない．しかし，
下つき添字 j, k の反対称部分 $\Gamma^i{}_{[jk]}$ はテンソルである：

$$\bar{\Gamma}^i{}_{[jk]}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} = \Gamma^\ell{}_{[pq]}\,.$$

等価原理 = 局所的に平坦 $\Rightarrow$ $\Gamma^i{}_{[jk]} = 0$,
$\therefore$ 任意の座標で $\Gamma^i{}_{[jk]} = 0$

対称な接続 $\cdots$ $g_{ij,k}$ と同数の自由度 $\left(n \times \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} g^{i\ell}\left(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}\right)$$

$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ $\cdots$ クリストッフェル記号 (Christoffel's symbol)

- 共変微分

反変ベクトルの共変微分：

$$\begin{aligned} DA^i &:= A^i(x+\delta x) - \tilde{A}^i(x+\delta x) \\ &= A^i(x+\delta x) - A^i(x) + \Gamma^i{}_{jk}A^j\delta x^k \\ &= \left(A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk}A^j\right)\delta x^k, \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$A^i{}_{;k} \equiv \nabla_k A^i = A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk}A^j.$$

共変ベクトルの共変微分：

$$\begin{aligned} D(A^iB_i) &= \left(A^i{}_{,k}B_i + A^iB_{i,k}\right)\delta x^k \\ &= (DA^i)B_i + A^i(DB_i) \\ &= \left(A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk}A^j\right)B_i\delta x^k + A^i(DB_i)\,. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad DB_i = \left(B_{i,k} - \Gamma^j{}_{ik}B_j\right)\delta x^k,$$

$$\Downarrow$$

$$B_{i;k} \equiv \nabla_k B_i = B_{i,k} - \Gamma^j{}_{ik} B_j \,,$$

一般に

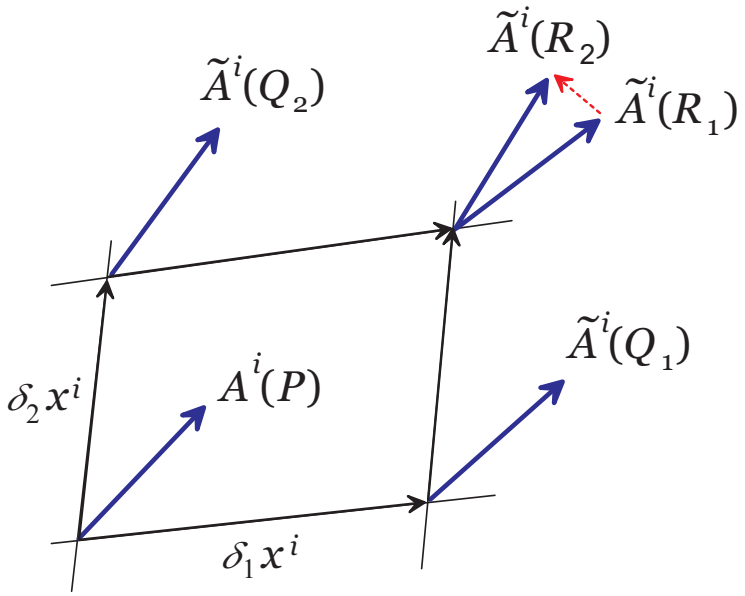
$$\begin{aligned} T^{i_1 i_2 \cdots i_k}{}_{j_1 j_2 \cdots j_\ell ; q} \;=\; & T^{i_1 i_2 \cdots i_k}{}_{j_1 j_2 \cdots j_\ell , q} \\ & + \sum_{m=1}^{k} \Gamma^{i_m}{}_{p\,q} T^{i_1 i_2 \cdots i_{m-1}\, p\, i_{m+1} \cdots i_k}{}_{j_1 j_2 \cdots j_\ell} \\ & - \sum_{m=1}^{\ell} \Gamma^{p}{}_{j_m\, q} T^{i_1 i_2 \cdots i_k}{}_{j_1 j_2 \cdots j_{m-1}\, p\, j_{m+1} \cdots j_\ell} \,, \end{aligned}$$

特に

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma^\ell_{ik} g_{\ell j} - \Gamma^\ell{}_{jk} g_{i\ell} = 0$$

共変微分の際には g_{ij} や g^{ij} を定数と見なしてよい

§4. 曲率テンソル



ベクトルの平行移動は経路に依存

$$\delta A^i := \tilde{A}^i(R_2) - \tilde{A}^i(R_1) = R^i{}_{jk\ell}\, A^j \delta_1 x^k \delta_2 x^\ell,$$

$R^i{}_{jk\ell}$ ・・・ リーマン曲率テンソル (Riemann curvature tensor)

平行移動の定義より

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^i(R_1) &= \tilde{A}^i(Q_1) - \Gamma^i{}_{jk}(Q_1)\tilde{A}^j(Q_1)\delta_1 x^k \\
&= A^i(P) - \Gamma^i{}_{jk}(P)A^j(P)\delta_1 x^k \\
&\quad - \left(\Gamma^i{}_{jk}(P) + \Gamma^i{}_{jk,\ell}(P)\delta_2 x^\ell\right)\left(A^j(P) - \Gamma^j{}_{mn}(P)A^m(P)\delta_2 x^n\right)\delta_1 x^k \\
&= A^i - \Gamma^i{}_{jk}A^j\left(\delta_1 x^k + \delta_2 x^k\right) \\
&\quad - \left(\Gamma^i{}_{jk,\ell} - \Gamma^i_{nk}\Gamma^n{}_{j\ell}\right)A^j\delta_1 x^k\delta_2 x^\ell,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^i(R_2) &= \tilde{A}^i(Q_2) - \Gamma^i{}_{jk}(Q_2)\tilde{A}^j(Q_2)\delta_2 x^k \\
&= A^i - \Gamma^i{}_{jk}A^j\left(\delta_1 x^k + \delta_2 x^k\right) \\
&\quad - \left(\Gamma^i{}_{jk,\ell} - \Gamma^i_{nk}\Gamma^n{}_{j\ell}\right)A^j\delta_2 x^k\delta_1 x^\ell,
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\delta A^i &= \tilde{A}^i(R_2) - \tilde{A}^i(R_1) \\
&= \left(\Gamma^i{}_{j\ell,k} - \Gamma^i_{jk,\ell} + \Gamma^i{}_{nk}\Gamma^n{}_{j\ell} - \Gamma^i{}_{n\ell}\Gamma^n{}_{jk}\right)A^j\delta_1 x^k\delta_2 x^\ell,
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad R^i{}_{jk\ell} = \Gamma^i{}_{j\ell,k} - \Gamma^i_{jk,\ell} + \Gamma^i{}_{nk}\Gamma^n{}_{j\ell} - \Gamma^i{}_{n\ell}\Gamma^n{}_{jk},$$

共変微分の非可換性とリーマンテンソル：

$$A^i{}_{;j;k} - A^i{}_{;k;j} = R^i{}_{\ell kj}A^\ell$$

リーマンテンソルの対称性：

$$R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij} = R_{[ij][k\ell]}\,, \quad R_{i[jk\ell]} = 0\,.$$

リーマンテンソルの代数的独立成分の個数：$n^2(n^2-1)/12$

$$n = 2 \ \cdots\ 1, \quad n = 3 \ \cdots\ 6, \quad n = 4 \ \cdots\ 20$$

リッチテンソル (Ricci tensor)，リッチスカラー (Ricci scalar)

$$R_{ij} := R^\ell{}_{i\ell j}\,, \quad R := g^{ij}R_{ij}\,, \quad R_{ij} = R_{ji}$$

リッチの代数的独立成分数：$n(n+1)/2$ 個 $(n \geq 3)$

$$n = 3 \ \cdots\ 6, \quad n = 4 \ \cdots\ 10$$

ワイルテンソル (Weyl tensor) (= (リーマン) − (リッチ))

$$C_{ijk\ell} := R_{ijk\ell} - \frac{2}{n-2}\left\{ g_{i[k}R_{\ell]j} + g_{j[\ell}R_{k]i} - \frac{1}{n-1} g_{i[k}g_{\ell]j}R \right\} \quad (n \geq 3)$$

ワイルの代数的独立成分数：$n(n+1)(n+2)(n-3)/12$ 個

$$n = 3 \ \cdots \ 0, \qquad n = 4 \ \cdots \ 10$$

4 次元でワイルの自由度が残ることが
重力場の存在にとって極めて重要

ワイルの対称性： リーマンの対称性 & $C^{\ell}{}_{i\ell j} = 0$
ビアンキ恒等式 (Bianchi identities)：

$$R_{ij[k\ell;n]} \equiv 0\,, \quad \Longleftrightarrow \ R_{ijk\ell;n} + R_{ij\ell n;k} + R_{ijnk;\ell} \equiv 0\,.$$

縮約されたビアンキ恒等式 (contracted Bianchi identities)

$$g^{ik}g^{j\ell}R_{ij[k\ell;n]} \ = \ R_{;n} - 2R_n{}^{i}{}_{;i} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad G^{ij}{}_{;j} \equiv 0\,; \qquad G^{ij} := R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\,,$$

G^{ij} $\cdots$ アインシュタインテンソル (Einstein tensor)

リーマンテンソルは一般に (長さ)$^{-2}$ の次元を持ち，次元解析的に

$$R_{ijk\ell} \sim \frac{1}{(\text{曲率半径})^2}\,,$$

III. 曲がった時空と測地線方程式

§1. 時空の計量と等価原理

一般の時空の線素:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

$g_{\mu\nu}$ の行列式は負：$\det g_{\mu\nu}(= g \text{ と書く}) < 0$

- 時空の局所的平坦性（ = 等価原理 ）

$x^\mu = a^\mu$ のまわりで $g_{\mu\nu}$ を展開（ $x^\mu - a^\mu \to x^\mu$ と原点を取り直す ）:

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(0) + g_{\mu\nu,\alpha}(0)x^\alpha + O(x^2)\,,$$

座標変換：

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \frac{1}{2}C^\alpha{}_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + O(x^3), \quad \left(C^\alpha{}_{\mu\nu} = C^\alpha{}_{\nu\mu} = C^\alpha{}_{(\mu\nu)}\right)$$

逆変換：

$$x^\alpha = \bar{x}^\alpha - \frac{1}{2}C^\alpha{}_{(\mu\nu)}\bar{x}^\mu\bar{x}^\nu + O(\bar{x}^3)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta^\alpha_\mu - C^\alpha{}_{(\mu\nu)}\bar{x}^\nu + O(\bar{x}^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}g_{\alpha\beta} \\
&= \left(\delta^\alpha_\mu - C^\alpha{}_{(\mu\sigma)}\bar{x}^\sigma\right)\left(\delta^\beta_\nu - C^\beta{}_{(\nu\rho)}\bar{x}^\rho\right)\left(g_{\alpha\beta}(0) + g_{\alpha\beta,\gamma}(0)\bar{x}^\gamma\right) + O(\bar{x}^2) \\
&= g_{\mu\nu}(0) + \left(g_{\mu\nu,\gamma} - g_{\mu\alpha}C^\alpha{}_{(\nu\gamma)} - g_{\nu\alpha}C^\alpha{}_{(\mu\gamma)}\right)x^\gamma + O(\bar{x}^2),
\end{aligned}$$

よって $C^\alpha{}_{(\mu\nu)} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}(0)$ と選ぶと

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = g_{\mu\nu}(0) + O(\bar{x}^2), \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_{\mu\nu,\alpha}(0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}(0) = 0$$

これより，適当な 1 次変換 $\bar{x}^\mu = A^\mu{}_\nu\tilde{x}^\nu$ によって

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(0) = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}\bar{g}_{\alpha\beta}(0) = A^\alpha{}_\mu\bar{g}_{\alpha\beta}(0)A^\beta{}_\nu = A^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta}(0)A^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

局所的にミンコフスキー計量を与える座標系を
局所ローレンツ系 (local Lorentz frame) という .

§2. 測地線方程式

直線の概念の曲がった時空への一般化 ⇒ 測地線 (geodesics)

2 点 P_1, P_2 を結ぶ経路 $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ の長さ：

$$S = \int_{P_1}^{P_2} |ds| = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{|ds|}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) d\lambda\,;$$

$$L = \sqrt{\left| g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right|}$$

S を極小（極大）にする経路:

$$\delta S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) \right] \delta x^\alpha d\lambda = 0 \qquad \left(\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{|g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu|}}\right) - \frac{g_{\mu\nu,\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{2\sqrt{|g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu|}} = 0,$$

$$\Downarrow \quad d\tau = |ds| = \sqrt{|g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|} = \sqrt{\left| g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \right|}\, d\lambda,$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(2g_{\alpha\nu,\sigma} - g_{\nu\sigma,\alpha}\right)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}$$
$$= \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad \cdots \quad \text{測地線方程式}$$

測地線は時間的 (timelike)，空間的 (spacelike)，光的 (null) のいずれか

時間的 ⇒ 有限質量粒子の軌道，　光的 ⇒ 質量ゼロ粒子の軌道

光的の場合，$d\tau = |ds|$ は意味を失うが，それに代わる

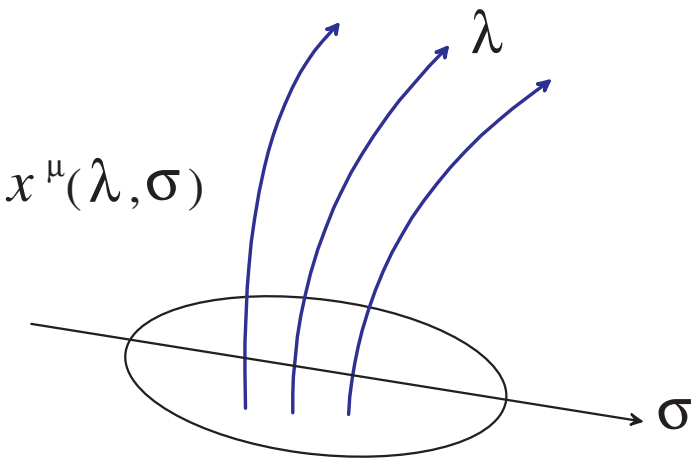
アフィン・パラメータ (affine parameter) が存在．

§3. 測地線偏差の方程式

単独の測地線軌道には時空の曲率（重力）の効果が現れない

⇔ 等価原理

重力は隣り合う測地線の相対的な運動に影響する



$x^\mu = x^\mu(\lambda,\sigma)$ ・・・ 測地線束 (geodesic congruence)

σ の自由度：測地線が timelike のとき 3 個，null のとき 2 個．

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = k^\mu \quad \cdots \quad \text{測地線の接ベクトル}$$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = Z^\mu \quad \cdots \quad \text{ヤコビ場 (Jacobi field)}$$

$$\frac{\partial Z^\mu}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \lambda \partial \sigma} = \frac{\partial k^\mu}{\partial \sigma} \Rightarrow \quad Z^\mu{}_{;\nu} k^\nu = k^\mu{}_{;\nu} Z^\nu$$

$$k^\mu{}_{;\nu} k^\nu = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{D^2 Z^\mu}{\partial \lambda^2} &= \left(Z^\mu{}_{;\nu} k^\nu\right)_{;\alpha} k^\alpha = \left(k^\mu{}_{;\nu} Z^\nu\right)_{;\alpha} k^\alpha \\ &= k^\mu{}_{;\nu\alpha} Z^\nu k^\alpha + k^\mu{}_{;\nu} Z^\nu{}_{;\alpha} k^\alpha = k^\mu{}_{;\nu\alpha} Z^\nu k^\alpha + k^\mu_{;\nu} k^\nu{}_{;\alpha} Z^\alpha \\ &= \left(k^\mu{}_{;\nu\alpha} - k^\mu{}_{;\alpha\nu}\right) Z^\nu k^\alpha = -R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} k^\alpha k^\beta Z^\nu\end{aligned}$$

測地線偏差方程式 (geodesic deviation equation)

潮汐現象や重力レンズ現象を表す

IV. 曲がった時空上での微積分

§1. 重要な微分演算子

(a) div $\vec{V}$

ベクトルの発散

$$V^{\mu}{}_{;\mu} = V^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu}V^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}V^{\mu}\right)$$

2 階のテンソルの発散は

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= V^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}V^{\mu\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}V^{\alpha\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}\left(\sqrt{-g}V^{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu}V^{\alpha\nu}\,, \end{aligned}$$

$V^{\mu\nu}$ が反対称 $(V^{\mu\nu} = V^{[\mu\nu]})$ のとき：

$$V^{[\mu\nu]}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}\left(\sqrt{-g}V^{[\mu\nu]}\right).$$

高階の反対称テンソルの発散も同様に全微分形になる．

(b) rot $\vec{V}$

ベクトルに対する回転:

$$\begin{aligned} V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} &= 2V_{[\mu;\nu]} = V_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}V_{\alpha} - (V_{\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}V_{\alpha}) \\ &= V_{\mu,\nu} - V_{\nu,\mu} \end{aligned}$$

共変ベクトルの回転は接続 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ に依らない．
高階の反対称共変テンソルに対する回転も同様

$$\begin{aligned} V_{[\mu\nu;\alpha]} &= V_{[\mu\nu,\alpha]}\,, \\ V_{[\mu\nu\alpha;\beta]} &= V_{[\mu\nu\alpha,\beta]}\,, \end{aligned}$$

4 次元時空では 4 階の反対称テンソルの回転は恒等的にゼロ．

回転の回転は恒等的にゼロ：

$$\begin{aligned} V_{[[\mu;\nu];\alpha]} &= V_{[\mu;\nu\alpha]} \equiv 0, \\ V_{[[\mu\nu;\alpha];\beta]} &= V_{[\mu\nu;\alpha\beta]} \equiv 0. \end{aligned}$$

(c) $\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi\,(=\Delta\varphi)$

ラプラシアン (Laplacian) ，またはダランベルシャン (d'Alembertian)：

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\varphi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\varphi^{;\mu}\right)=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right),$$

ラプラス・ベルトラミ (Laplace-Beltrami) 演算：

$$\left(V^{\mu;\nu}-V^{\nu;\mu}\right)_{;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\left(V^{\mu;\nu}-V^{\nu;\mu}\right)\right),$$

$$V^{[\mu\nu;\alpha]}{}_{;\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}V^{[\mu\nu;\alpha]}\right).$$

特にベクトルに対しては

$$\begin{aligned}\left(V^{\mu;\nu}-V^{\nu;\mu}\right)_{;\nu}&=V^{\mu;\nu}{}_{;\nu}-V^{\nu;\mu}{}_{;\nu}\\&=\Box V^\mu-\left(V^\nu{}_{;\nu}\right)^{;\mu}-R^\mu{}_\nu V^\nu,\end{aligned}$$

§2. 時空上での積分

(a) 3 次元ユークリッド空間

- 線積分

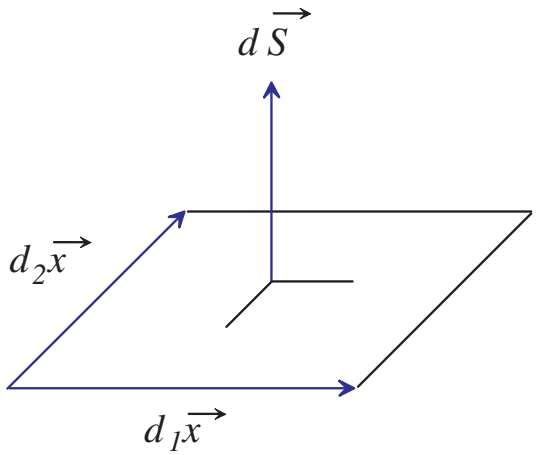
$d_1\vec{x}$: 曲線 ℓ に接する無限小ベクトル (線要素)

$$d\vec{\ell} = d_1\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad d\ell^i = d_1x^i\,.$$

- 面積分

$d\vec{S}$: 無限小のベクトル $d_1\vec{x}$, $d_2\vec{x}$ で張られる面要素

$$\begin{aligned} & d\vec{S} = \vec{n}\,dS = d_1\vec{x}\times d_2\vec{x}\,; \quad dS = \vec{n}\cdot d\vec{S}\,, \\ \Leftrightarrow \quad & dS_i = n_i dS = \epsilon_{ijk}\,d_1x^j d_2x^k; \quad dS = n^i\epsilon_{ijk}\,d_1x^j d_2x^k\,. \end{aligned}$$



ϵ_{ijk} は (3 次元ユークリッド空間上の) 完全反対称テンソル :

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{[ijk]}\,, \quad \epsilon_{123} = 1\,.$$

ϵ_{ijk} の積:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{\ell mn} &= \delta^i_\ell\delta^j_m\delta^k_n + \delta^i_m\delta^j_n\delta^k_\ell + \delta^i_n\delta^j_\ell\delta^k_m - \delta^i_\ell\delta^j_n\delta^k_m - \delta^i_m\delta^j_\ell\delta^k_n - \delta^i_n\delta^j_m\delta^k_\ell \\ &= 3!\delta^{[i}_\ell\delta^j_m\delta^{k]}_n\,, \end{aligned}$$

添字 k, n に関して縮約を取ると

$$\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{\ell mk} = 2\delta^{[i}_\ell\delta^{j]}_m \quad \Rightarrow \quad dS^{ij} := \epsilon^{ijk}\,dS_k = 2d_1x^{[i}d_2x^{j]}\,.$$

面積要素は 2 階の反対称テンソル dS^{ij} と等価

- 体積積分

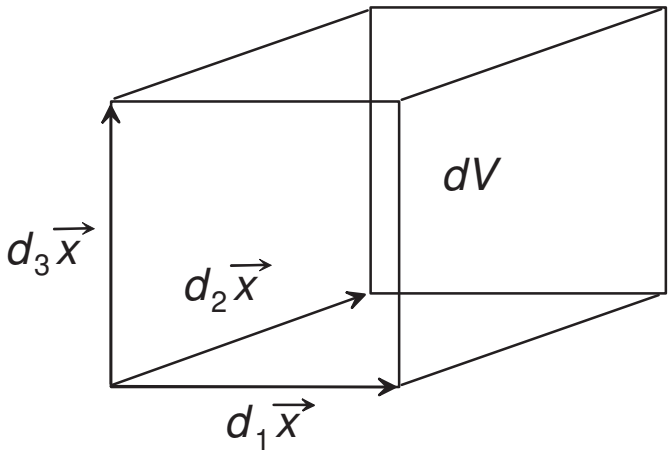
dV: 無限小ベクトル $d_1\vec{x}$, $d_2\vec{x}$, $d_3\vec{x}$ で張られる積分要素

$$dV = (d_1\vec{x} \times d_2\vec{x}) \cdot d_3\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad dV = \epsilon_{ijk} d_1x^i d_2x^j d_3x^k \,.$$

また，ϵ^{ijk} を使うと

$$dV^{ijk} := \epsilon^{ijk} dV = 3! d_1x^{[i} d_2x^j d_3x^{k]} \,.$$

体積要素は 3 階の完全反対称テンソル dV^{ijk} と等価



- まとめ：
線要素，面要素，体積要素を反対称テンソルで表示すると，

$$d\ell^i = d_1x^i \,, \quad dS^{ij} = 2 d_1x^{[i} d_2x^{j]} \,, \quad dV^{ijk} = \epsilon^{ijk} dV = 3! d_1x^{[i} d_2x^j d_3x^{k]} \,.$$

n 次元積分要素は，n 次元完全反対称テンソルで与えられる

(b) 4 次元ミンコフスキー時空

基本的に 3 次元ユークリッド空間と同じ．違いは，

$$\epsilon_{ijk} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \ (4\text{ 次元単位完全反対称テンソル})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \epsilon_{[\mu\nu\alpha\beta]}\,, \quad \epsilon_{0123} = 1, \quad (\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = -1 \text{ に注意})$$

$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の積：

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4!\delta^{[\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\gamma}_{\rho}\delta^{\delta]}_{\sigma}\,, \quad \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = -4\delta^{[\mu}_{\rho}\delta^{\nu]}_{\sigma}\,, \quad \text{etc..}$$

- 線要素：

$$d\ell^{\mu} = d_1x^{\mu}\,.$$

- 2 次元面要素：

$$d\sigma_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_1x^{\alpha}d_2x^{\beta} = \mp n_{[\mu}s_{\nu]}dS\,; \quad dS = n^{\mu}s^{\nu}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_1x^{\alpha}d_2x^{\beta}, \quad n_{\mu}n^{\mu} = \mp 1\,,$$
$$\Leftrightarrow \quad dS^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,d\sigma_{\alpha\beta} = 2d_1x^{[\mu}d_2x^{\nu]}\,.$$

ここで n^{μ}, s^{μ} は S に垂直な互いに直交する単位ベクトル．
一般性を失わずに，s^{μ} を空間的 $(s_{\mu}s^{\mu} = 1)$ とした．
また，$(n^{\mu}, s^{\mu}, d_1x^{\mu}, d_2x^{\mu})$ がこの順で右手系を成すとする．

- 3 次元面（超曲面）要素：

$$d\Sigma_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_1x^{\nu}d_2x^{\alpha}d_3x^{\beta} = \mp n_{\mu}d\Sigma\,; \quad d\Sigma = n^{\mu}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_1x^{\nu}d_2x^{\alpha}d_3x^{\beta},$$
$$\Leftrightarrow \quad d\Sigma^{\mu\nu\alpha} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,d\Sigma_{\beta} = 3!d_1x^{[\mu}d_2x^{\nu}d_3x^{\alpha]}\,.$$

ここで n^{μ} は超曲面 $d\Sigma$ に垂直な単位ベクトル.
空間的超曲面に対しては $n_{\mu}n^{\mu} = -1$，時間的超曲面に対しては $n_{\mu}n^{\mu} = 1$ ．

- 体積要素：

$$dV = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,d_0x^{\mu}d_1x^{\nu}d_2x^{\alpha}d_3x^{\beta}\,,$$
$$\Leftrightarrow \quad dV^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,dV = 4!d_0x^{[\mu}d_1x^{\nu}d_2x^{\alpha}d_3x^{\beta]}\,.$$

- 座標を使った通常の積分要素との関係：
  無限小ベクトル $d_\alpha x^\mu$ $(\alpha = 0,1,2,3)$ を以下のように取る：

$$d_0x^\mu = (dx^0, 0, 0, 0),\ \ d_1x^\mu = (0, dx^1, 0, 0),$$
$$d_2x^\mu = (0, 0, dx^2, 0),\ \ d_3x^\mu = (0, 0, 0, dx^3).$$

  また，n^μ, s^μ を

$$n^\mu = (1,0,0,0), \quad s^\mu = (0,0,0,1)$$

  と取る．このとき，

$$dS = n^\mu s^\nu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, d_1x^\alpha d_2x^\beta = \epsilon_{0312}\, dx^1dx^2 = dx^1dx^2,$$
$$d\Sigma = n^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, d_1x^\nu d_2x^\alpha d_3x^\beta = \epsilon_{0\nu\alpha\beta}\, d_1x^\nu d_2x^\alpha d_3x^\beta = dx^1dx^2dx^3,$$
$$dV = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, d_0x^\mu d_1x^\nu d_2x^\alpha d_3x^\beta = \epsilon_{0123}\, dx^0dx^1dx^2dx^3 = dx^0dx^1dx^2dx^3\,.$$

(c) 一般の 4 次元時空

一般の 4 次元時空 = 局所的にはミンコフスキー時空

すなわち，積分要素は基本的にミンコフスキー時空と同じ．
唯一の違いは，ミンコフスキー時空での $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の表式が
一般時空では局所ローレンツ系でのみ正しいという点．

- $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の一般座標での表式：
  座標変換 $x^\mu \to \bar{x}^\mu$ で

$$\bar{\epsilon}_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{\partial x^{\nu_0}}{\partial \bar{x}^{\mu_0}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial \bar{x}^{\mu_2}} \frac{\partial x^{\nu_3}}{\partial \bar{x}^{\mu_3}} \epsilon_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3}\,.$$

  これより特に $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$ とおけば,

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}_{0123} &= \frac{\partial x^{\nu_0}}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^{\nu_3}}{\partial \bar{x}^3} \epsilon_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\partial x^{[\nu_0}}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^{\nu_3]}}{\partial \bar{x}^3} \epsilon_{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} \\
&= 4! \frac{\partial x^{[0}}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^{3]}}{\partial \bar{x}^3} \epsilon_{0123} \\
&= \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma) \frac{\partial x^{\sigma(0)}}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^{\sigma(1)}}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial x^{\sigma(2)}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^{\sigma(3)}}{\partial \bar{x}^3} \epsilon_{0123}\,.
\end{aligned}$$

  ここで σ は添字 0, 1, 2, 3 に関する置換.
  $\mathrm{sign}(\sigma)$ は σ が偶置換なら $+1$, 奇置換なら -1.

これは行列 $\left(\dfrac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu}\right)$ の行列式そのもの．よって

$$\bar{\epsilon}_{0123} = \det\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu}\right)\,\epsilon_{0123} \quad \cdots\ (*)$$

一方，

$$\det(\bar{g}_{\mu\nu}) = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}g_{\alpha\beta}\right) = \left(\det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\right)\right)^2 \det(g_{\alpha\beta}),$$

より

$$\sqrt{-\bar{g}} = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\right)\sqrt{-g} \quad \cdots\ (**)$$

ここで座標変換によって時空の向きづけは変わらない $\left(\det(\partial x^\alpha/\partial \bar{x}^\mu) > 0\right)$ とした．
$(*)$, $(**)$ より α を正の定数として

$$\epsilon_{0123} = \alpha\sqrt{-g}\,.$$

一方，局所ミンコフスキー座標では，$\sqrt{-g} = 1$, $\epsilon_{0123} = 1$. $\therefore\ \alpha = 1$ ．よって

$$\epsilon_{0123} = \sqrt{-g}\,, \quad \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \epsilon_{[\mu\nu\alpha\beta]}\,.$$

(d) 座標不変な積分

- 4 次元体積積分：

時空の 4 次元不変体積要素は

$$dV = \epsilon_{0123}\,dx^0dx^1dx^2dx^3 = \sqrt{-g}\,dx^0dx^1dx^2dx^3 = \sqrt{-g}\,d^4x\,.$$

関数 $\varphi(x)$ の領域 V での積分は

$$\int_V \varphi\,dV = \int_V \varphi(x)\sqrt{-g}d^4x\,.$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_V \varphi\,dV = \int_V \varphi^*_{\mu\nu\alpha\beta}\,dV^{\mu\nu\alpha\beta}\,; \quad \varphi^*_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\varphi\,.$$

$\varphi^*_{\mu\nu\alpha\beta}$ を φ に双対 (dual) なテンソルという．

一般に時空上のある領域にわたる積分は座標の取り方に依存してはならない．
すなわち，積分はスカラー（またはそれに双対な 4 階反対称共変テンソル）に対してのみ意味を持つ．

- 3 次元超曲面上の積分:
  3 次元超曲面 Σ が $x^\mu = x^\mu(\sigma^i)\ (i=1,2,3)$ で与えられるとき，
  σ^i は Σ 面上の座標を与え，その面上に誘起される計量 h_{ij} は

$$ds^2_\Sigma = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma^j}d\sigma^i d\sigma^j = h_{ij}d\sigma^i d\sigma^j\,.$$

  特に，Σ を空間的超曲面とし，Σ が時間一定面 $(x^0 = \text{定数})$ となる座標を選び，
  $\sigma^i = x^i$ と取ると

$$h_{ij} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma^j} = g_{ij}\,.$$

  一方

$$g^{00} = \frac{\det g_{ij}}{\det g_{\mu\nu}} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{\mu\nu}} = \frac{h}{g} \quad (h \text{ は計量 } h_{ij} \text{ の行列式})$$

  Σ に垂直な単位ベクトルは $n_\mu dx^\mu \propto dx^0$ より $n_\mu = (-N,0,0,0)$.
  このとき $g^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = g^{00}n_0 n_0 = -1$ より $g^{00} = -1/N^2$. よって

$$n^0 = g^{0\mu}n_\mu = g^{00}n_0 = \frac{1}{N}\,,\quad h = g\,g^{00} = \frac{-g}{N^2}\,.$$

  以上により Σ 上の面積要素は

$$d\Sigma = n^\mu\epsilon_{\mu123}\,dx^1dx^2dx^3 = n^0\epsilon_{0123}\,dx^1dx^2dx^3 = \frac{1}{N}\sqrt{-g}\,d^3x = \sqrt{h}\,d^3x\,.$$

  Σ が時間的超曲面（例えば $x^1 =$ 一定）の場合は $h<0$ となるから

$$d\Sigma = \sqrt{-h}\,dx^0dx^2dx^3\,.$$

⋆ ベクトル V^μ に対する超曲面 Σ 上の積分：

$$\int_\Sigma V^\mu d\Sigma_\mu = \int_\Sigma(\mp n_\mu V^\mu)\sqrt{|h|}d^3x\,,\quad n_\nu n^\nu = \mp 1\,.$$

  または

$$\int_\Sigma V^\mu d\Sigma_\mu = \int_\Sigma V^*_{\mu\nu\rho}\,d\Sigma^{\mu\nu\rho}\,;\quad V^*_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{3!}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho}V^\alpha\,.$$

  $V^*_{\mu\nu\alpha}$ を V^μ に双対なテンソルという．

  3 次元超曲面上の積分もやはり時空の座標の取り方に依らない．
  よって，4 次元時空で定義された量で 3 次元超曲面上で積分できるのは
  ベクトル（またはそれに双対な 3 階の反対称共変テンソル）のみ

- 2 次元面上の積分：
  2 次元面 S を $x^0 =$ 一定，$x^3 =$ 一定の空間的 2 次元面とし，
  $x^A = (x^1, x^2)$ を S 上の座標に取り，$n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$, $s_\mu = (0, 0, 0, M)$ とする．
  S の計量 H_{AB} は

$$ds_S^2 = H_{AB}dx^A dx^B = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^A}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^B}dx^A dx^B = h_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^A}\frac{\partial x^j}{\partial x^B}dx^A dx^B = h_{AB}dx^A dx^B\,.$$

  また，$n^0 = 1/N$, $s^3 = 1/M$ より

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} = NM\sqrt{H}\,; \quad H = \det H_{AB}\,.$$

  従って

$$dS = \frac{\sqrt{h}}{M}\,dx^1 dx^2 = \sqrt{H}\,d^2x\,.$$

  n^μ と s^μ の両方が空間的な場合には S が時間的 2 次元面となり，

$$dS = \sqrt{-H}\,d^2x\,.$$

⋆ テンソル $A^{\mu\nu}$ に対する 2 次元面積分：

$$\int_S A^{\mu\nu}d\sigma_{\mu\nu} = \int_S (\pm A^{\mu\nu}n_{[\mu}s_{\nu]})dS\,; \quad n_\alpha n^\alpha = \pm 1\,.$$

  または，

$$\int_S A^{\mu\nu}d\sigma_{\mu\nu} = \int_S A^*_{\mu\nu}dS^{\mu\nu}\,; \quad A^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta},$$

  $A^*_{\mu\nu}$ を $A^{[\mu\nu]}$ に双対な反対称共変テンソルという．

  2 次元面上の積分は 2 階の反対称テンソルに対してのみ意味を持つ.

一般に，n 次元積分は n 階の反対称共変テンソルに対して定義される．

すなわち，

$$
\begin{aligned}
T_\mu \quad &\Rightarrow \quad \int_\ell T_\mu \, dx^\mu \,, \\
T_{[\mu\nu]} \quad &\Rightarrow \quad \int_S T_{\mu\nu} \, dS^{\mu\nu} \,, \\
T_{[\mu\nu\alpha]} \quad &\Rightarrow \quad \int_\Sigma T_{\mu\nu\alpha} \, d\Sigma^{\mu\nu\alpha} \,, \\
T_{[\mu\nu\alpha\beta]} \quad &\Rightarrow \quad \int_V T_{\mu\nu\alpha\beta} \, dV^{\mu\nu\alpha\beta} \,.
\end{aligned}
$$

ここで，

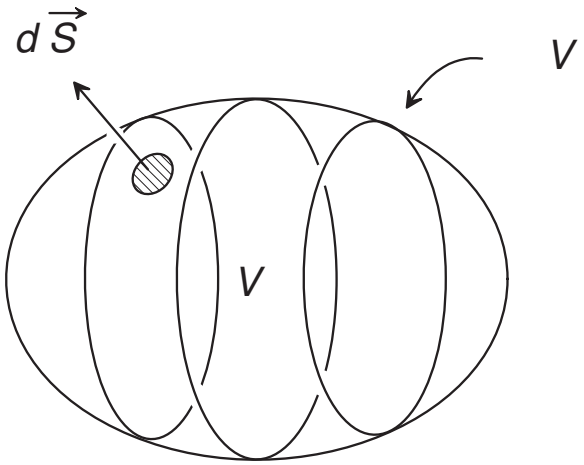
$$
\begin{aligned}
&dS^{\mu\nu} = 2! d_1 x^{[\mu} d_2 x^{\nu]} \,, \quad d\Sigma^{\mu\nu\alpha} = 3! d_1 x^{[\mu} d_2 x^{\nu} d_3 x^{\alpha]} \,, \\
&dV^{\mu\nu\alpha\beta} = 4! d_0 x^{[\mu} d_1 x^{\nu} d_2 x^{\alpha} d_3 x^{\beta]}
\end{aligned}
$$

上の積分の定義には時空の計量の存在は必要ない

§3. ガウスの定理とストークスの定理

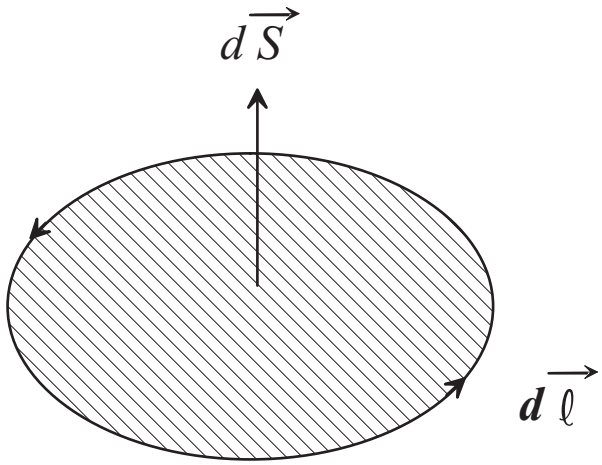
3 次元ユークリッド空間での Gauss の定理

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,dV = \int_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S}\,.$$



Stokes の定理は

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\vec{A})\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \int_S A_{[i,j]}dS^{ji} = \int_{\partial S} A_i d\ell^i\,.$$



Stokes の定理には，計量が要らない.

よって，一般の 4 次元時空においても全く同形：

$$\int_S A_{[\mu,\nu]}dS^{\nu\mu} = \int_{\partial S} A_\mu d\ell^\mu\,.$$

Stokes の定理は 2 次元面以上の面に対しても同様に成り立つ：

$$\int_\Sigma A_{[\mu\nu,\alpha]} d\Sigma^{\alpha\mu\nu} = \int_{\partial\Sigma} A_{[\mu\nu]} dS^{\mu\nu}, \quad \int_V A_{[\mu\nu\alpha,\beta]} dV^{\beta\mu\nu\alpha} = \int_{\partial V} A_{[\mu\nu\alpha]} d\Sigma^{\mu\nu\alpha}.$$

上式で $\partial V = \Sigma$, $\partial\partial V = \partial\Sigma$, $A_{[\mu\nu\alpha]} = A_{[\mu\nu,\alpha]}$ とおくと，

$$0 \equiv \int_V A_{[\mu\nu,\alpha\beta]} dV^{\beta\mu\nu\alpha} = \int_{\partial V} A_{[\mu\nu,\alpha]} d\Sigma^{\alpha\mu\nu} = \int_{\partial\partial V} A_{[\mu\nu]} dS^{\mu\nu} .$$

すなわち，任意の 4 次元閉領域 V の境界の境界はゼロ集合：$\partial\partial V = \emptyset$.
同様に，$\partial\Sigma = S$, $\partial\partial\Sigma = \partial S$, $A_{[\mu\nu]} = A_{[\mu,\nu]}$ とおくと

$$0 \equiv \int_\Sigma A_{[\mu,\nu\alpha]} d\Sigma^{\alpha\mu\nu} = \int_{\partial\Sigma} A_{[\mu,\nu]} dS^{\nu\mu} = \int_{\partial\partial\Sigma} A_\mu d\ell^\mu .$$

すなわち，$\partial\partial\Sigma = \emptyset$.

閉領域の境界の境界がゼロ ⇔ 反対称共変テンソルの回転の回転がゼロ

- ガウスの定理の共変形:

$$A^\beta := \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\mu\nu\alpha} ,$$

とおくと，

$$A_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} A^\rho .$$

$A_{[\mu\nu\alpha,\beta]} = A_{[\mu\nu\alpha;\beta]}$ に注意して，これを Stokes の定理に代入すると

$$\int_V \frac{1}{3!} \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} A^\rho{}_{;\beta} \, dV^{\beta\mu\nu\alpha} = \int_{\partial V} \frac{1}{3!} \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} A^\rho \, d\Sigma^{\mu\nu\alpha} .$$

これに

$$\frac{1}{3!} \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} \, dV^{\beta\mu\nu\alpha} = -\frac{1}{3!} \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} \, \epsilon^{\beta\mu\nu\alpha} dV = \delta^\beta_\rho \, dV$$
$$\frac{1}{3!} \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} \, d\Sigma^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\rho\mu\nu\alpha} \, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} d\Sigma_\beta = d\Sigma_\rho ,$$

を使うと，

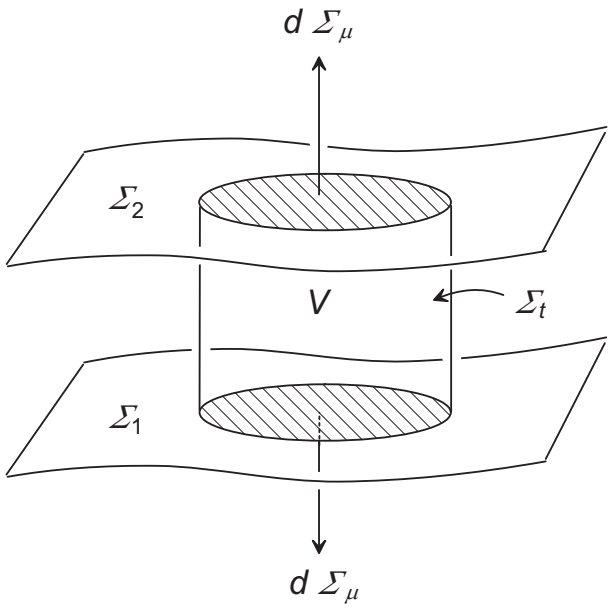
$$\int_V A^\mu{}_{;\mu} dV = \int_{\partial V} A^\mu d\Sigma_\mu .$$

ガウスの定理には計量テンソルの存在が本質的.

⇓

場の量の変化や伝播が本質的である物理学にとって，
ガウスの定理が重要な役割を果たすことを示唆

⋆ 例：電磁気学における荷電流の保存則



ベクトル流の保存則，$J^{\mu}{}_{;\mu} = 0$ に対して，

$$0 = \int_V J^{\mu}{}_{;\mu} dV = \int_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_t} J^{\mu} d\Sigma_{\mu} = \int_{\Sigma_1} J^{\mu} d\Sigma_{\mu} + \int_{\Sigma_2} J^{\mu} d\Sigma_{\mu} + \int_{\Sigma_t} J^{\mu} d\Sigma_{\mu}$$
$$= \int_{\Sigma_1} J^{\mu} d\Sigma_{\mu} + \int_{\Sigma_2} J^{\mu} d\Sigma_{\mu} \,.$$

ここで Σ_1, Σ_2 に垂直な未来を向いた時間的単位ベクトルを n_{μ} とすると，

$$\int_{\Sigma_2} (-J^{\mu} n_{\mu}) d\Sigma - \int_{\Sigma_1} (-J^{\mu} n_{\mu}) d\Sigma = 0 \,.$$

$$\therefore \quad Q\,[\Sigma] := \int_{\Sigma} (-J^{\mu} n_{\mu}) d\Sigma = \text{一定}.$$

特に Σ 上で $x^0 =$ 一定となるように時間座標を選べば

$$Q\,[\Sigma(x^0)] = \int J^0 \sqrt{-g}\, d^3x = \text{一定}\,; \quad d^3x = dx^1 dx^2 dx^3.$$