

平成 22 年 3 月 2 日

## 目次

<b>1</b>	<b>フリー・コードなど</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>流れの数値解法</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>偏微分方程式の型と解の特徴</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>非圧縮 NS 方程式の特徴</b>	<b>4</b>
4.1	非圧縮 NS を数値的に解く方法は次の 4 種類に大別される。 . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Scalar turbulence</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>FEM</b>	<b>5</b>
6.1	非圧縮 NS 方程式 . . . . .	6
6.2	Mesh 分割 (A 参照) . . . . .	6
6.3	重み付き残差法 . . . . .	7
6.3.1	弱形式 (部分積分をしているだけ) . . . . .	7
6.4	Galerkin 法 . . . . .	7
6.4.1	補間関数 . . . . .	7
6.4.2	Galerkin 法 . . . . .	8
6.5	SUPG 法 (移流による問題の回避) . . . . .	9
6.6	PSPG 法 (非圧縮性の問題の回避) . . . . .	9
6.6.1	GLS 法 . . . . .	9
6.6.2	SUPG/PSPG 法 . . . . .	10
6.7	解くべき非圧縮 NS 方程式 . . . . .	10
6.8	安定化パラメータ . . . . .	11
<b>7</b>	<b>移流拡散方程式</b>	<b>11</b>
7.1	重み付き残差法 . . . . .	12
7.2	Galerkin 法 . . . . .	12
7.3	SUPG . . . . .	12
7.4	面積座標 . . . . .	13
7.5	係数行列の計算 . . . . .	13
7.6	有限要素方程式 . . . . .	17
7.7	時間方向の離散化 . . . . .	18

<b>8 連立一次方程式の解法</b>	<b>19</b>
8.1 GPBi-CG 法 . . . . .	19
8.1.1 前処理法 . . . . .	19
8.2 行列・ベクトル積の削減 . . . . .	20
8.2.1 全体行列 . . . . .	20
8.2.2 element-by-element . . . . .	21
<b>A メッシュ</b>	<b>22</b>

## 1 フリー・コードなど

- freeFEM
- libMesh

他にも libMesh の Wiki にフリーリンクが多数 [1]。deal.II, FEniCS, keyFE2, OOFEM, Impact, OpenCFD

## 2 流れの数値解法

数値解法は大きく次の 3 グループに別れる ([2],[3])

- 有限要素法 (Finite element method :FEM)
- 差分法 (Finite difference method :FDM)
  - 有限体積法 (Finite volume method :FVM) → FDM+FEM としたもの
- 境界積分法 (Bounday integral method :BIM)
  - 境界要素法 (Bounday element method :BEM)

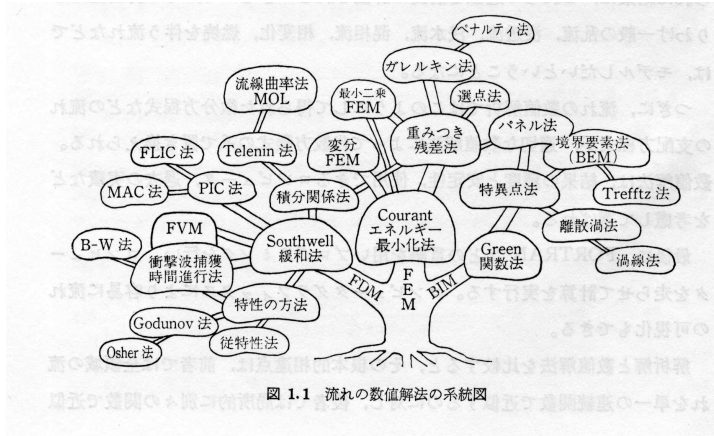


図 1.1 流れの数値解法の系統図

図 1: 流れの数値解法の系統図

	差分法	有限要素法	境界要素法
問題の定式化	微分方程式の差分近似表現	微分方程式の弱形式表現 (または汎関数の極値問題)	微分方程式の積分方程式表現
離散化	格子点 (境界適合格子、境界非適合格子)	有限要素 (三角形、四角形、三角柱、六面体など)	境界要素 (線分、三角形、四辺形)
解法	領域型	領域型	境界型
連立一次方程式の係数行列	大型、疎、帯行列	大型、疎、帯行列	小型、成分の詰まっている行列
主な特徴	離散化が簡単。計算時間が速い。離散化の精度やスキームの安定性が明確である。	任意の形状に対する取り扱いが用意。境界条件 (ノイマン型境界条件) の処理が容易。計算の自動化が達成しやすい。	問題の次元を 1 次元低下できる。外部問題を内部問題と同様に扱える。境界の微分量も直接の未知量として定式化できる。計算量少ない?
適用性	適用性広い (非線形問題も可)。主として流体解析に利用されている。	適用性広い (非線形問題も可)。主として構造解析に利用されているが流体解析も活発になってきた。	基本解の存在する問題に限定される (非線形問題は困難である)。線形の 3 次元問題。特異応力問題。移動境界問題。

### 3 偏微分方程式の型と解の特徴

双曲型方程式と放物線方程式の解の特徴は正反対であり、ふさわしい空間と時間の離散化手法も異なる。双曲型では解に方向性があることから、空間の離散化には方向性のある重み関数 (風上側

に重みを増す) を用いた風上有限要素法 (SUPG) を用いることが望ましいと言える。時間の離散化には放物型と同様に陽解法も陰解法も有効であるが、双曲型では解の時間変化が局所的である (初期の分布形を保ちながら伝搬する) ことから、局所的に解を決定する陽解法の特徴を活かすことも出来る。

双曲型と放物型の混合型である NS 方程式などでは高レイノルズ数では Galerkin 法に基づく有限要素法を適用すると、不安定な数値解が得られる。ここではその回避法を以下で述べる。

	楕円型	放物型	双曲型
例	Laplace 方程式	拡散方程式	移流方程式
解の空間的特徴	周辺の数値の平均値になる。	方向性がない。	方向性がある。
FEM	Galerkin 法	Galerkin 法	SUPG(風上)
解の時間的特徴		大域的な変化	局所的な変化

## 4 非圧縮 NS 方程式の特徴

非圧縮 NS 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

の特徴として

1. 非線形項  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  がある。
  2. 2 階の微分方程式で最高階の係数にパラメータが入っている。
  3. 速度  $\mathbf{u}$  については時間発展型になっているが、圧力  $p$  については時間発展型になっていないこと。
- 1,2 は圧縮 NS 方程式でも同様であるが、3 は非圧縮性の場合の特有の問題であり、ある意味で非圧縮 NS 方程式の数値解法を (圧縮性に比べ) 困難にしている。すなわち、速度  $\mathbf{u}$  を時間発展的に求める場合、各時間ステップで連続の式 (2) を満足するように圧力  $p$  を決める必要がある。

NS 方程式に現れる非線形項を考える。いま、流速  $u$  を Fourier 級数展開してその一つの成分を  $u = \bar{u}(t) \sin(kx)$  のように仮定し、これを次元問題の移流項に代入すると次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{u}^2(t) k \cos(kx) \sin(kx) = \frac{1}{2} \bar{u}^2(t) k \sin(2kx) \quad (3)$$

- このように、移流項の働きにより波数  $k$  の成分から波数  $2k$  の高周波成分が発生し、これが小さい渦の発生の原因となる。
- 高レイノルズ数の流れでは、NS 方程式の拡散項の係数が小さいため、かなりの高周波成分まで、ある程度の時間が経過するまで拡散されずに残ってしまう。

- 差分近似計算のさい、荒い格子を用いると、実際には高周波成分であるものが低周波成分として計算に取り込まれてしまい非線形不安定性（エリアシング誤差）を起こしてしまう。
- 中心差分を用いて近似する場合には、実際の粘性では拡散されずに残っている高周波成分まで”解像”できる格子を用いない限り、非線形不安定性によって計算が不安定となる。したがって、高レイノルズ数の流れでは、よほど細かい格子を用いない限り中心差分では計算できないことになる。しかし、そのような細かい格子を用いることは通常不可能である。
- 高レイノルズ数では上流差分（風上差分）法が用いられる。
- 上流差分を変形すると”(高精度中心差分)+(数値粘性項)”と変形でき、数値粘性項（人工粘性）により高周波成分を有効に拡散させることができる。

#### 4.1 非圧縮 NS を数値的に解く方法は次の4種類に大別される。

1. 圧力を消去する方法
2. 圧力を独立に求める方法
3. 擬似的な圧縮性を導入する方法
4. 連続の式、NS 方程式をそのまま同時に連立させて解く方法。

1 は流れ関数-渦度法。2 は MAC 法など。以下の FEM では 4 を用いる。

## 5 Scalar turbulence

水中に落としたインクや染料、空気中に浮遊する煤煙、川の水や海水に溶けた汚染物質、あるいはパイプや内燃焼機関内の各種溶液に溶けた混合物などは流体とともに流されながら拡散する。このような物質の濃度の時間変化は、いわゆる移流拡散方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{ReSc} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4)$$

で記述される。ここに  $Sc(\nu/\kappa)$  は Schmidt 数、 $\kappa$  は拡散係数。乱れた流れの中で受動的に運ばれる物質の濃度がどのように変化するかを考察できる。スカラー場  $\phi$  が速度場によって受動的に流されるだけで速度場を変化させないので、パッシブスカラーと呼ぶ。

## 6 FEM

以下では有限要素法の具体的な方法について述べる。

## 6.1 非圧縮 NS 方程式

単一閉曲線  $\Gamma$  で囲まれた平面内の領域  $\Omega$  における非圧縮 NS 方程式 (1) と (2) を考える。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

[Dirichlet 境界]  $\Gamma$  の一部  $\Gamma_g$  で

$$u_i = g_i \quad (7)$$

[Neumann 境界] 残りの境界  $\Gamma_h$  で

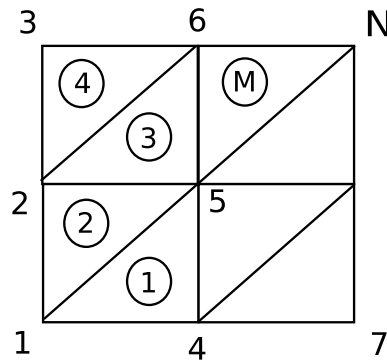
$$\left( -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) n_j = h_i \quad (8)$$

$n_j$  は外向き単位法線。  $g_i, h_i$  はそれぞれの境界上で規定される流速とトラクションである。

## 6.2 Mesh 分割 (A 参照)

三角形分割において

- 三角形の各頂点を節点 (node) と呼び、1 から順に節点番号  $1, 2, \dots, N$  を付ける。
- 各三角形を要素 (element) と呼び、1 から順に要素番号  $1, 2, \dots, M$  を付ける。



対応関係を示すと

三角形の要素	対応節点
三角形-丸 1	1-4-5
三角形-丸 2	1-5-2
三角形-丸 M	5-N-6

### 6.3 重み付き残差法

方程式 (5)、つまり

$$r_1(x, y) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (9)$$

で定まる関数  $r_1$  を残差と呼ぶ。もし、 $u, v, p$  が真の解ならば、残差  $r_1$  はゼロ関数となる。残差  $r_1$  に重み関数  $w$  をかけ領域  $\Omega$  で積分すると、ゼロ関数なら

$$\int_{\Omega} w(x, y) r_1(x, y) d\Omega = 0 \quad (10)$$

同様に方程式 (6) に対して重み付き残差式を

$$r_2(x, y) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (11)$$

とし重み関数  $q$  をかけ領域で積分すると

$$\int_{\Omega} q r_2(x, y) d\Omega = 0 \quad (12)$$

#### 6.3.1 弱形式 (部分積分をしているだけ)

重み付き残差式の圧力項と粘性項に対して Gauss-Green の公式を用いて部分積分し、(10) と (12) を足し合わせたものを考えると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left( -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega \\ = \int_{\Gamma_h} w_i \left( -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

この問題では重み関数  $w$  が一回微分可能であることが必要な代わりに、関数  $u$  も一回微分可能であればよい。この「弱」は関数  $u$  に対する微分可能性の弱いことに由来する。

### 6.4 Galerkin 法

Galerkin 法とは未知関数と重み関数に対し、同じ線形の補間関数を弱形式に用いることである。

#### 6.4.1 補間関数

解析領域  $\Omega$  を有限要素と呼ばれる小領域  $\Omega_e$  で分割し、その小領域ごとに補間関数によって近似する。ここでは、未知関数である流速と圧力に対して三角形一次要素による補間を行う。

真の解  $u$  の近似解を  $u^h$  で表す。 $u^h$  を構成する関数として、

$$N_i(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) = (x_i, y_i) \text{ 第 } i \text{ 節点座標} \\ 0 & (x, y) = (x_j, y_j) (i \neq j) \end{cases} \quad (14)$$

を導入する。これは第  $i$  番目の節点で値 1 をとり、残りの全ての節点で値 0 をとり、しかも各要素内では  $x, y$  の 1 次式である関数である。このような  $N_i$  を有限要素法では形状関数という。  $N_\alpha(x, y)$  は三角形要素  $e$  内で、

$$N_\alpha(x, y) = (a_\alpha + b_\alpha x + c_\alpha y) \quad (15)$$

と表せ、  $\alpha$  は要素節点番号である ( $\alpha = 1, 2, 3$ )。各係数は

$$a_\alpha = \frac{1}{2\Delta}(x_\beta y_\gamma - x_\gamma y_\beta) \quad b_\alpha = \frac{1}{2\Delta}(y_\beta - y_\gamma) \quad c_\alpha = \frac{1}{2\Delta}(y_\gamma - y_\beta) \quad (16)$$

である。ここで、  $\Delta$  は三角形の面積である。このような  $N_\alpha$  は節点の数  $N$  だけあり、お互いに一次独立である。近似解  $u^h$  を  $N_i$  の一次結合として求める。

$$u^h(x, y) = \sum_{j=1}^N c_j N_j(x, y) \quad (17)$$

係数  $c_j$  は (14) より  $u^h(x_j, y_j) = u_j$  に等しくなるから、改めて次のように書く。

$$u^h(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j N_j(x, y) \quad (18)$$

このとき、  $u_j$  は真値  $u(x_i, y_j)$  に対する近似値を意味する。このように展開の係数そのものが具体的な物理量を表すことは、有限要素法の特徴である。

#### 6.4.2 Galerkin 法

要素領域内の未知関数である、流速  $u_i$ 、移流速度  $\bar{u}_i$ 、圧力  $p$  の補間関数を形状関数  $N$  を用いて表すと

$$u_i^h = N_\alpha u_{i,\alpha} \quad \bar{u}_i^h = N_\alpha \bar{u}_{i,\alpha} \quad p_i^h = N_\alpha p_{i,\alpha} \quad (19)$$

ここで  $\alpha$  は各節点値を示している。

重み関数  $w_i$ 、連続の式に対する重み関数  $q$  に対しても Galerkin 法に基づいて未知関数と同じ補間関数を用いると

$$w_i^h = N_\alpha w_{i,\alpha} \quad q^h = N_\alpha q_\alpha \quad (20)$$

となる。

これらを代入すると、(13) は

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_i^h \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega} q^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_i} d\Omega \\ = \int_{\Gamma_h} w_i^h \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) n_j d\Gamma \quad (21) \end{aligned}$$



## 6.5 SUPG 法 (移流による問題の回避)

1. Galerkin 法による有限要素法において、高レイノルズ数では、正しい計算結果が得られない。
2. これは、Galerkin 法による離散化は差分法の中心差分による離散化と等価なため、移流が卓越すると数値振動が発生することによる。
3. この問題を解決するために、有限要素法では流れ方向に適切な量の人工拡散を加える SUPG(Streamline Upwind/Petrov-Galerkin) 法を用いる。(風上差分法)

SUPG 法では、重み関数  $\tilde{w}_i$  を

$$\tilde{w}_i^h = w_i^h + \tau_s u_j^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \quad (22)$$

と表す。 $\tau_m$  は時間の次元を持つ安定化のパラメータである。これを用いて

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i^h \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega} q^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_i} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left( \tau_s u_j^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \right) \left[ \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) \right] d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_h} w_i^h \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) n_j d\Gamma \quad (23) \end{aligned}$$

安定化パラメータ  $\tau_s$  は後に述べる。

## 6.6 PSPG 法 (非圧縮性の問題の回避)

非圧縮条件の過拘束に起因する圧力場の数値不安定性についても注意する必要がある。

### 6.6.1 GLS 法

不安定性の回避方法として、GLS 法 (Galerkin/Least-square method) に基づく安定化有限要素法を用いる。この手法は安定化に寄与する重みとして、NS 方程式と連続の式の最小 2 乗形式になる重みを与えるものである。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i^h \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega} q^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_i} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_s \left[ \frac{\partial w_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -q^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j^h}{\partial x_i} \right) \right) \right] \\ & \quad \left[ \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) \right] d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_s \left( \frac{\partial w_i^h}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^h}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_h} w_i^h \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) n_j d\Gamma \quad (24) \end{aligned}$$

第1,2,3項と右辺の総積分は Galerkin 項、第4項は NS 方程式に対する GLS 項、第5項は連続の式に対する GLS 項で特に衝撃補足項と呼ばれる安定化項である。4、5項を見て分かる通り、GLS 法は安定化の項が NS 方程式と連続の式の最小2乗形式になっていることが分かる。

第4項の最初の [ ] 内、つまり GLS 項の重み側である第2項が移流の卓越による不安定性を抑える SUPG 項に対応し、第3項が非圧縮性に起因する圧力振動を抑える項である PSPG 項 (Pressure stabilizing/Petrov Galerkin) を表している。圧力の拡散項に相当する項が圧力場に導入され、圧力の数値不安定現象を回避している。

### 6.6.2 SUPG/PSPG 法

(24) の第4項の最初の [ ] 内の重みの第1項は重み関数が時間の関数ではないので考慮されないことになる。また第4項は、三角形の一次要素で離散化するため考慮されないことになる。この場合は GLS 法は SUPG/PSPG 法と等価になる。ここでは、衝撃捕捉項を無視し、上の式を NS 方程式と連続の式に改めて書き直すと、NS 方程式は

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i^h \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \left( \tau_s u_j^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \right) \left[ \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial p^h}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) \right] d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_h} w_i^h \left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) n_j d\Gamma \quad (25) \end{aligned}$$

連続の式は

$$\int_{\Omega} q^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_i} d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \left( \tau_s \frac{\partial q^h}{\partial x_i} \right) \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p^h}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) \right] d\Omega = 0 \quad (26)$$

## 6.7 解くべき非圧縮 NS 方程式

流速に関しても、三角形の一次要素で離散化するため考慮されないことになり、2階微分の項は消える。非圧縮 NS 方程式に対し、安定化有限要素法 (SUPG/PSPG) を適用すると

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i^h \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + \bar{u}_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_i} p d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \left( \tau_s \bar{u}_k^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + \bar{u}_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial p^h}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_h} w_i^h h_i^h d\Gamma \quad (27) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} q^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_i} d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \left( \tau_p \frac{\partial q^h}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial t} + \bar{u}_j^h \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial p^h}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \quad (28)$$

(8) より

$$\left( -p^h \delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \right) n_j = h_i \quad \Gamma_h \quad (29)$$

ここで  $\bar{u}_i$  は移流速度を表す。この後時間方向の離散化において、移流速度を陽的に評価される関数として取り扱い、流速  $u_i$  と評価が異なるため以下では区別するため導入する。

## 6.8 安定化パラメータ

安定化パラメータとして

$$\tau_s = \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2 \|\bar{u}_i^e\|}{h_e} \right)^2 + \left( \frac{4}{Re h_e^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (30)$$

を用いる。 $\bar{u}_i^e (i=1,2)$  は要素移流速度、 $h_e$  は要素長、 $\|\bar{u}_i^e\|$  は要素移流速度のノルムを表す。要素  $e$  での各節点  $\alpha = 1, 2, 3$  での移流速度は  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ 、 $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  で要素移流速度を

$$\bar{u}^e = \frac{1}{3}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3) \quad \bar{v}^e = \frac{1}{3}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3) \quad (31)$$

と表し、要素移流速度のノルムを

$$\|\bar{u}_i^e\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_d} (\bar{u}_i^e)^2} = \sqrt{(\bar{u}^e)^2 + (\bar{v}^e)^2} \quad (32)$$

ここで  $n_d$  は次元数を表し、 $n_d = 2$  とおいた。また、要素長は

$$\begin{aligned} h_e &= 2 \left( \sum_{\alpha=1}^{n_{en}} \left| \left( \frac{\bar{u}_i^e}{\|\bar{u}_i^e\|} \right) \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \right) \right| \right)^{-1} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{\|\bar{u}_i^e\|} \left( \left| \bar{u}^e \frac{\partial N_1}{\partial x} + \bar{v}^e \frac{\partial N_1}{\partial y} \right| + \left| \bar{u}^e \frac{\partial N_2}{\partial x} + \bar{v}^e \frac{\partial N_2}{\partial y} \right| + \left| \bar{u}^e \frac{\partial N_3}{\partial x} + \bar{v}^e \frac{\partial N_3}{\partial y} \right| \right) \right]^{-1} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{\|\bar{u}_i^e\|} (|\bar{u}^e b_1 + \bar{v}^e c_2| + |\bar{u}^e b_2 + \bar{v}^e c_2| + |\bar{u}^e b_3 + \bar{v}^e c_3|) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、 $n_{en}$  は要素の節点数でありここでは  $n_{en} = 3$  を用いている。

## 7 移流拡散方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{ReSc} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \quad (34)$$

[Dirichlet 境界]  $\Gamma$  の一部  $\Gamma_g$  で

$$u_i = g_i \quad (35)$$

[Neumann 境界] 残りの境界  $\Gamma_h$  で

$$\frac{1}{ReSc} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i = q \quad \Gamma_q \quad (36)$$

$n_j$  は外向き単位法線。

## 7.1 重み付き残差法

重み関数  $s$  を掛け領域について積分すると

$$\int_{\Omega} s \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{1}{ReSc} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \right) d\Omega = 0 \quad (37)$$

ここで、時間方向の離散化において、移流速度を陽的に評価される関数として取り扱うので、予め NS 方程式同様に移流速度を  $\bar{u}_i$  とする。

部分積分を行うと

$$\int_{\Omega} s \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{ReSc} \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Gamma_q} s \frac{1}{ReSc} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i d\Gamma \quad (38)$$

## 7.2 Galerkin 法

要素内における未知関数及び重み関数は Galerkin 法に基づいて同じ補間関数を用いる。すなわち、

$$\phi^h = N_{\alpha} \phi_{\alpha} \quad s^h = N_{\alpha} s_{\alpha} \quad (39)$$

とし、代入すると、

$$\int_{\Omega} s^h \frac{\partial \phi^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} s^h \bar{u}_i^h \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{ReSc} \frac{\partial s^h}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Gamma_q} s^h q^h d\Gamma \quad (40)$$

## 7.3 SUPG

安定化パラメータ  $\tau_e$  を含む近似関数として

$$\tilde{s}^h = s^h + \tau_e \bar{u}_i \frac{\partial s^h}{\partial x_i} \quad (41)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} s^h \frac{\partial \phi^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} s^h \bar{u}_i^h \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{ReSc} \frac{\partial s^h}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{el}} \tau_e \int_{\Omega} \bar{u}_i^h \frac{\partial s^h}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} - \frac{1}{ReSc} \frac{\partial^2 \phi^h}{\partial x_i^2} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_q} s^h q^h d\Gamma \end{aligned} \quad (42)$$

補間関数は 1 次式なので、2 階微分の項は消え

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} s^h \frac{\partial \phi^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} s^h u_i^h \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{ReSc} \frac{\partial s^h}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{el}} \tau_e \int_{\Omega} \bar{u}_i^h \frac{\partial s^h}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_q} s^h q^h d\Gamma \end{aligned} \quad (43)$$

## 7.4 面積座標

面積座標に関する多項式の三角形上の積分は

$$\int L_1^i L_2^j L_3^k d\Omega = \frac{2!i!j!k!\Delta}{(2+i+j+k)!} \quad (44)$$

ただし、 $i, j, k$  は非負の整数。

## 7.5 係数行列の計算

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} + \bar{u}^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial u^h}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial x} p^h d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial w^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial w^h}{\partial y} \frac{\partial v^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \frac{\partial w^h}{\partial y} \frac{\partial v^h}{\partial x} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_s \left( \bar{u}^h \frac{\partial w^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial w^h}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} + \bar{u}^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial u^h}{\partial y} + \frac{\partial p^h}{\partial x} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} w^h h_1^h d\Gamma \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^h \left( \frac{\partial v^h}{\partial t} + \bar{u}^h \frac{\partial v^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial v^h}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial w^h}{\partial y} p^h d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial w^h}{\partial y} \frac{\partial v^h}{\partial y} + \frac{\partial w^h}{\partial x} \frac{\partial v^h}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \frac{\partial w^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial y} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_s \left( \bar{u}^h \frac{\partial w^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial w^h}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v^h}{\partial t} + \bar{u}^h \frac{\partial v^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial v^h}{\partial y} + \frac{\partial p^h}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} w^h h_2^h d\Gamma \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} q^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial v^h}{\partial y} \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left( \tau_p \frac{\partial q^h}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} + \bar{u}^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial u^h}{\partial y} + \frac{\partial p^h}{\partial x} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \left( \tau_p \frac{\partial q^h}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v^h}{\partial t} + \bar{u}^h \frac{\partial v^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial v^h}{\partial y} + \frac{\partial p^h}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} s^h \left( \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + u^h \frac{\partial \phi^h}{\partial x} + v^h \frac{\partial \phi^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{ReSc} \left( \frac{\partial s^h}{\partial x} \frac{\partial \phi^h}{\partial x} + \frac{\partial s^h}{\partial y} \frac{\partial \phi^h}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \tau_e \int_{\Omega} \left( \bar{u}^h \frac{\partial s^h}{\partial x} + \bar{v}^h \frac{\partial s^h}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + u^h \frac{\partial \phi^h}{\partial x} + v^h \frac{\partial \phi^h}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_q} s^h q^h d\Gamma \quad (48) \end{aligned}$$

以下では  $w_i = N_{\alpha} w_{\alpha,i}$  の代入の際、 $w_{\alpha,i}$  は表示せずに  $N_{\alpha}$  だけを記す。要素の節点は  $\alpha = 1 \sim 3$ 。また、片にある  $h$  は書いていない。

- M: 時間項

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega &= \int_{\Omega} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega \frac{\partial u_{\beta}}{\partial t} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \langle N_1 N_2 N_3 \rangle d\Omega \begin{Bmatrix} \partial_t u_1 \\ \partial_t u_2 \\ \partial_t u_3 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\Delta^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial t} = \mathbf{M} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial t} \quad (49) \end{aligned}$$

- **A:** 移流項

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} w\bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} \left[ N_{\alpha} N_{\beta} \bar{u}_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial x} + N_{\alpha} N_{\beta} \bar{v}_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial y} \right] d\Omega u_{\gamma} \\
& = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \langle N_1 N_2 N_3 \rangle d\Omega \left[ \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} \langle b_1 b_2 b_3 \rangle + \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} \langle c_1 c_2 c_3 \rangle \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\
& = \frac{\Delta^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \left[ \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} \langle b_1 b_2 b_3 \rangle + \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} \langle c_1 c_2 c_3 \rangle \right] u_{\gamma} = \mathbf{A} u_{\gamma} \quad (50)
\end{aligned}$$

- **G:** 压力項

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} p d\Omega & = \int_{\Omega} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} N_{\beta} p_{\beta} d\Omega = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \langle N_1 N_2 N_3 \rangle d\Omega p_{\beta} = \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix} p_{\beta} = \mathbf{G}_1 p_{\beta} \\
\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} p d\Omega & = \int_{\Omega} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} N_{\beta} p_{\beta} d\Omega = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \langle N_1 N_2 N_3 \rangle d\Omega p_{\beta} = \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} p_{\beta} = \mathbf{G}_2 p_{\beta} \quad (51)
\end{aligned}$$

- **D<sub>ij</sub>:** 粘性項

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \left( 2 \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} \right) d\Omega u_{\beta} \\
& = \frac{1}{Re} \left( 2 \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \langle b_1 b_2 b_3 \rangle d\Omega + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \langle c_1 c_2 c_3 \rangle \right) \int_{\Omega} d\Omega u_{\beta} \\
& = \frac{\Delta}{Re} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} u_{\beta} = \mathbf{D}_{11} u_{\beta} \quad (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{1}{Re} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega & = \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} \right) d\Omega v_{\beta} = \frac{1}{Re} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \langle b_1 b_2 b_3 \rangle \int_{\Omega} d\Omega v_{\beta} \\
& = \frac{\Delta}{Re} \begin{bmatrix} c_1 b_1 & c_1 b_2 & c_1 b_3 \\ c_2 b_1 & c_2 b_2 & c_2 b_3 \\ c_3 b_1 & c_3 b_2 & c_3 b_3 \end{bmatrix} v_{\beta} = \mathbf{D}_{12} v_{\beta} \quad (53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{1}{Re} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega &= \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} \right) \right] d\Omega u_{\beta} = \frac{1}{Re} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \langle c_1 c_2 c_3 \rangle \int_{\Omega} d\Omega u_{\beta} \\
&= \frac{\Delta}{Re} \begin{bmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & b_1 c_3 \\ b_2 c_1 & b_2 c_2 & b_2 c_3 \\ b_3 c_1 & b_3 c_2 & b_3 c_3 \end{bmatrix} u_{\beta} = \mathbf{D}_{21} u_{\beta} \quad (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} + 2 \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} \right) d\Omega v_{\beta} \\
&= \frac{1}{Re} \left( \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \langle b_1 b_2 b_3 \rangle d\Omega + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \langle c_1 c_2 c_3 \rangle \right) \int_{\Omega} d\Omega v_{\beta} \\
&= \frac{\Delta}{Re} \left[ \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} \right] v_{\beta} = \mathbf{D}_{22} v_{\beta} \quad (55)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{C}_s$ : 連続の式の項

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} d\Omega u_{\beta} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \langle b_1 b_2 b_3 \rangle d\Omega u_{\beta} = \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} u_{\beta} = \mathbf{C}_{s1} u_{\beta} \quad (56)$$

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} d\Omega v_{\beta} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \langle c_1 c_2 c_3 \rangle d\Omega v_{\beta} = \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} v_{\beta} = \mathbf{C}_{s2} v_{\beta} \quad (57)$$

- $\mathbf{M}_s$ : 時間項 (SUPG)

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} \tau_s \left( \bar{u} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\Omega} \tau_s \left( \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} N_{\beta} \bar{u}_{\beta} N_{\gamma} + \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} N_{\beta} \bar{v}_{\beta} N_{\gamma} \right) d\Omega \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial t} \\
&= \tau_s \frac{\Delta^e}{12} \left( \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \langle \bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 \rangle + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \langle \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \rangle \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial t} = \mathbf{M}_s \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial t} \quad (58)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{A}_s$ : 移流項 (SUPG)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \tau_s \left( \bar{u} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (59) \\
&= \int_{\Omega} \tau_s \left[ \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta \bar{u}_\beta N_\gamma \bar{u}_\gamma \frac{\partial N_\delta}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \bar{v}_\beta N_\gamma \bar{u}_\gamma \frac{\partial N_\delta}{\partial x} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta \bar{u}_\beta N_\gamma \bar{u}_\gamma \frac{\partial N_\delta}{\partial y} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \bar{v}_\beta N_\gamma \bar{u}_\gamma \frac{\partial N_\delta}{\partial y} \right) \right] d\Omega u_\delta \\
&= \tau_s \frac{\Delta^e}{12} \left( \begin{bmatrix} b_1 \bar{u}_1 & b_1 \bar{u}_2 & b_1 \bar{u}_3 \\ b_2 \bar{u}_1 & b_2 \bar{u}_2 & b_2 \bar{u}_3 \\ b_3 \bar{u}_1 & b_3 \bar{u}_2 & b_3 \bar{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \bar{v}_1 & c_1 \bar{v}_2 & c_1 \bar{v}_3 \\ c_2 \bar{v}_1 & c_2 \bar{v}_2 & c_2 \bar{v}_3 \\ c_3 \bar{v}_1 & c_3 \bar{v}_2 & c_3 \bar{v}_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \left( \begin{bmatrix} \bar{u}_1 b_1 & \bar{u}_1 b_2 & \bar{u}_1 b_3 \\ \bar{u}_2 b_1 & \bar{u}_2 b_2 & \bar{u}_2 b_3 \\ \bar{u}_3 b_1 & \bar{u}_3 b_2 & \bar{u}_3 b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{v}_1 c_1 & \bar{v}_1 c_2 & \bar{v}_1 c_3 \\ \bar{v}_2 c_1 & \bar{v}_2 c_2 & \bar{v}_2 c_3 \\ \bar{v}_3 c_1 & \bar{v}_3 c_2 & \bar{v}_3 c_3 \end{bmatrix} \right) u_\delta = \mathbf{A}_s u_\delta \quad (60)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{G}_{si}$ : 圧力項 (SUPG)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \tau_s \left( \bar{u} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial p}{\partial x} = \int_{\Omega} \tau_s \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta \bar{u}_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \bar{v}_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} \right) d\Omega p_\gamma \\
&= \tau_s \frac{\Delta^e}{3} \left( \begin{bmatrix} b_1 \bar{u}_1 & b_1 \bar{u}_2 & b_1 \bar{u}_3 \\ b_2 \bar{u}_1 & b_2 \bar{u}_2 & b_2 \bar{u}_3 \\ b_3 \bar{u}_1 & b_3 \bar{u}_2 & b_3 \bar{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \bar{v}_1 & c_1 \bar{v}_2 & c_1 \bar{v}_3 \\ c_2 \bar{v}_1 & c_2 \bar{v}_2 & c_2 \bar{v}_3 \\ c_3 \bar{v}_1 & c_3 \bar{v}_2 & c_3 \bar{v}_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix} p_\gamma = \mathbf{G}_{s1} p_\gamma \quad (61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \tau_s \left( \bar{u} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial p}{\partial y} = \int_{\Omega} \tau_s \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta \bar{u}_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \bar{v}_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} \right) d\Omega p_\gamma \\
&= \tau_s \frac{\Delta^e}{3} \left( \begin{bmatrix} b_1 \bar{u}_1 & b_1 \bar{u}_2 & b_1 \bar{u}_3 \\ b_2 \bar{u}_1 & b_2 \bar{u}_2 & b_2 \bar{u}_3 \\ b_3 \bar{u}_1 & b_3 \bar{u}_2 & b_3 \bar{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \bar{v}_1 & c_1 \bar{v}_2 & c_1 \bar{v}_3 \\ c_2 \bar{v}_1 & c_2 \bar{v}_2 & c_2 \bar{v}_3 \\ c_3 \bar{v}_1 & c_3 \bar{v}_2 & c_3 \bar{v}_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} p_\gamma = \mathbf{G}_{s2} p_\gamma \quad (62)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{M}_{pi}$ : 時間項 (PSPG)

$$\int_{\Omega_e} \tau_p \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\Omega} \tau_p \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta d\Omega \frac{\partial u_\beta}{\partial t} = \tau_p \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix} \frac{\partial u_\beta}{\partial t} = \mathbf{M}_{p1} \frac{\partial u_\beta}{\partial t} \quad (63)$$

$$\int_{\Omega_e} \tau_p \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} = \int_{\Omega} \tau_p \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta d\Omega \frac{\partial v_\beta}{\partial t} = \tau_p \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \frac{\partial v_\beta}{\partial t} = \mathbf{M}_{p2} \frac{\partial v_\beta}{\partial t} \quad (64)$$

- $\mathbf{A}_{pi}$ : 移流項 (PSPG)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \tau_p \frac{\partial q}{\partial x} \left( \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \int_{\Omega} \tau_p \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} N_\beta \bar{u}_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \bar{v}_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \right) d\Omega u_\gamma \\
&= \tau_p \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \bar{u}_1 b_1 & \bar{u}_1 b_2 & \bar{u}_1 b_3 \\ \bar{u}_2 b_1 & \bar{u}_2 b_2 & \bar{u}_2 b_3 \\ \bar{u}_3 b_1 & \bar{u}_3 b_2 & \bar{u}_3 b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{v}_1 c_1 & \bar{v}_1 c_2 & \bar{v}_1 c_3 \\ \bar{v}_2 c_1 & \bar{v}_2 c_2 & \bar{v}_2 c_3 \\ \bar{v}_3 c_1 & \bar{v}_3 c_2 & \bar{v}_3 c_3 \end{bmatrix} \right) u_\gamma = \mathbf{A}_{p1} u_\gamma \quad (65)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \tau_p \frac{\partial q}{\partial y} \left( \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \int_{\Omega} \tau_p \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \bar{u}_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} N_\beta \bar{v}_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \right) d\Omega u_\gamma \\
& = \tau_p \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \bar{u}_1 b_1 & \bar{u}_1 b_2 & \bar{u}_1 b_3 \\ \bar{u}_2 b_1 & \bar{u}_2 b_2 & \bar{u}_2 b_3 \\ \bar{u}_3 b_1 & \bar{u}_3 b_2 & \bar{u}_3 b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{v}_1 c_1 & \bar{v}_1 c_2 & \bar{v}_1 c_3 \\ \bar{v}_2 c_1 & \bar{v}_2 c_2 & \bar{v}_2 c_3 \\ \bar{v}_3 c_1 & \bar{v}_3 c_2 & \bar{v}_3 c_3 \end{bmatrix} \right) u_\gamma = \mathbf{A}_{p2} u_\gamma \quad (66)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{G}_p$ : 圧力項 (PSPG)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \tau_p \left( \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \int_{\Omega} \tau_p \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} \right) d\Omega p_\gamma \\
& = \tau_p \Delta^e \left( \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} \right) p_\gamma = \mathbf{G}_p p_\gamma \quad (67)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{D}_{con}$ : 移流拡散方程式の粘性項

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{ReSc} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \int \frac{1}{ReSc} \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) d\Omega \phi_\beta \\
& = \frac{1}{ReSc} \left( \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \langle b_1 b_2 b_3 \rangle d\Omega + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \langle c_1 c_2 c_3 \rangle \int_{\Omega} d\Omega \phi_\beta \right) \\
& = \frac{\Delta}{ReSc} \left[ \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix} \right] u_\beta = \mathbf{D}_{con} \phi_\beta \quad (68)
\end{aligned}$$

## 7.6 有限要素方程式

NS 方程式に対して

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{G}_1 \mathbf{p} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{v} + \mathbf{M}_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{A}_s \mathbf{u} - \mathbf{G}_{s1} \mathbf{p} = 0 \\
& \mathbf{M} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{G}_2 \mathbf{p} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{v} + \mathbf{M}_s \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{A}_s \mathbf{v} - \mathbf{G}_{s2} \mathbf{p} = 0 \\
& \mathbf{C}_1 \mathbf{u} + \mathbf{C}_2 \mathbf{v} + \mathbf{M}_{p1} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{M}_{p2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{A}_{p1} \mathbf{u} + \mathbf{A}_{p2} \mathbf{v} + \mathbf{G}_p \mathbf{p} = 0 \quad (69)
\end{aligned}$$

移流拡散方程式に対して、

$$\mathbf{M} \frac{d\phi}{dt} + \mathbf{A}\phi + \mathbf{D}_{con} \phi + \mathbf{M}_s \frac{d\phi}{dt} + \mathbf{A}_s \phi = 0 \quad (70)$$

これらの式を整理すると、

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_s) \mathbf{u} - (\mathbf{G} - \mathbf{G}_{s1}) \mathbf{p} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{v} = 0 \quad (71)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_s) \mathbf{v} - (\mathbf{G} - \mathbf{G}_{s2}) \mathbf{p} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{v} = 0 \quad (72)$$

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{u} + \mathbf{M}_{p1} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{A}_{p1} \mathbf{u} + \mathbf{C}_2 \mathbf{v} + \mathbf{M}_{p2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{A}_{p2} \mathbf{v} + \mathbf{G}_p \mathbf{p} = 0 \quad (73)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) \frac{d\phi}{dt} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_s + \mathbf{D}_{con})\phi = 0 \quad (74)$$

## 7.7 時間方向の離散化

時間方向の離散化において、時間微分は次のように表される

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (75)$$

また、流速に対しては Crank-Nicolson 法を適用し、圧力と (73) の  $\mathbf{C}_i \mathbf{u}_i$  を陰的に取り扱おうと

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_s) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + (\mathbf{G} - \mathbf{G}_{s1}) \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ (\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_s) \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} + (\mathbf{G} - \mathbf{G}_{s1}) \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{M}_{p1} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_{p1} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{C}_2 \mathbf{v}^{n+1} + \mathbf{M}_{p2} \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_{p2} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{G}_p \mathbf{p}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (76)$$

ここで  $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$  は以下のように表される。

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \quad (77)$$

また、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{G}$  などに含まれる移流速度  $\bar{u}_i$  は Adams-Bashforth 法により以下のように陽的に近似し、線形化する

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{3}{2} \mathbf{u}^n - \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n-1} \quad (78)$$

各要素における節点 ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) での流速、圧力を  $U, V, P$  としマトリックスを組むと

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \\ V_3^{n+1} \\ P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \\ P_3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_s + \mathbf{D}_{11}) \quad (80)$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}\mathbf{D}_{12} \quad (81)$$

$$A_{13} = -(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_{S1}) \quad (82)$$

$$A_{21} = \frac{1}{2}\mathbf{D}_{21} \quad (83)$$

$$A_{22} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_s + \mathbf{D}_{22}) \quad (84)$$

$$A_{23} = -(\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_{S2}) \quad (85)$$

$$A_{31} = \mathbf{C}_1 + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{p1} + \frac{1}{2}\mathbf{A}_{p1} \quad (86)$$

$$A_{32} = \mathbf{C}_2 + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{p2} + \frac{1}{2}\mathbf{A}_{p2} \quad (87)$$

$$A_{33} = \mathbf{G}_P \quad (88)$$

$$B_1 = \left( \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) - \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_s + \mathbf{D}_{11}) \right) U^n - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{12}V^n \quad (89)$$

$$B_2 = \left( \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) - \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_s + \mathbf{D}_{22}) \right) V^n - \frac{1}{2}\mathbf{D}_{21}U^n \quad (90)$$

$$B_3 = \left( \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{p1} - \frac{1}{2}\mathbf{A}_{p1} \right) U^n + \left( \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{p2} - \frac{1}{2}\mathbf{A}_{p2} \right) V^n \quad (91)$$

## 8 連立一次方程式の解法

離散化により、

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (92)$$

の連立方程式を解かなければならない。連立方程式を解くアルゴリズムとして、ガウス消去法といった直接解法や共役勾配法といった反復法がある。共役勾配法は初期値を適切に選べば収束も高いが、左辺行列を正定値対称行列に限っており、今回のような左辺行列が非対称行列となるような問題に適用することはできない。ここでは、非対称行列にも適用可能な方法として、双共役勾配法を用いる。

### 8.1 GPBi-CG 法

#### 8.1.1 前処理法

反復法を用いる場合、方程式をそのまま解くのではなく、方程式に前処理を施し、収束が速い方程式に変換してから反復法を適用する。ここでは、対角スケールリング法（左辺行列の対角成分を前処理として使用）を用いる。今、左辺行列  $\mathbf{A}$  の対角成分の絶対値のみの対角行列を  $\mathbf{D}$  とし、二つの行列式で表すとす

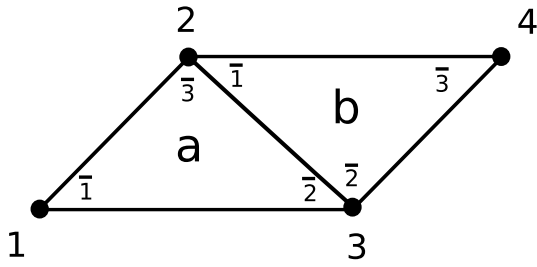


図 2: 有限要素モデル

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} |a_{11}| & 0 \\ 0 & |a_{nn}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{|a_{11}|} & 0 \\ 0 & \sqrt{|a_{nn}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{|a_{11}|} & 0 \\ 0 & \sqrt{|a_{nn}|} \end{bmatrix} = \sqrt{\mathbf{D}}\sqrt{\mathbf{D}} \quad (93)$$

この行列を用いて (92) を変形すると

## 8.2 行列・ベクトル積の削減

行列・ベクトル積の演算では

- 全体行列による計算
- Element-by-Element 処理による計算

が考えられる。演算の際、左辺行列  $\mathbf{A}$  を記憶しておく必要があり、小さい行列であれば大差は無いが、自由度の増加に伴い、必要とされる記憶容量は増大する。実際の実装では、記憶容量を削減するための方法として Element-by-element 処理を導入する。比較のため、図 8.2 のようなモデルを考える。1 ~ 4 は節点番号、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  は要素番号、 $\bar{1} \sim \bar{3}$  は要素節点番号を表す。

### 8.2.1 全体行列

要素  $\mathbf{a}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{\mathbf{a}} & a_{12}^{\mathbf{a}} & a_{13}^{\mathbf{a}} \\ a_{21}^{\mathbf{a}} & a_{22}^{\mathbf{a}} & a_{23}^{\mathbf{a}} \\ a_{31}^{\mathbf{a}} & a_{32}^{\mathbf{a}} & a_{33}^{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \quad (94)$$

要素  $\mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{\mathbf{b}} & a_{12}^{\mathbf{b}} & a_{13}^{\mathbf{b}} \\ a_{21}^{\mathbf{b}} & a_{22}^{\mathbf{b}} & a_{23}^{\mathbf{b}} \\ a_{31}^{\mathbf{b}} & a_{32}^{\mathbf{b}} & a_{33}^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (95)$$

これらを、全体系に重ね合わせると、以下のように全体行列となる。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{\mathbf{a}} & a_{13}^{\mathbf{a}} & a_{12}^{\mathbf{a}} & 0 \\ a_{31}^{\mathbf{a}} & a_{33}^{\mathbf{a}} + a_{11}^{\mathbf{b}} & a_{32}^{\mathbf{a}} + a_{12}^{\mathbf{b}} & a_{13}^{\mathbf{a}} \\ a_{21}^{\mathbf{a}} & a_{23}^{\mathbf{a}} + a_{21}^{\mathbf{b}} & a_{22}^{\mathbf{a}} + a_{22}^{\mathbf{b}} & a_{23}^{\mathbf{b}} \\ 0 & a_{31}^{\mathbf{b}} & a_{32}^{\mathbf{b}} & a_{33}^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (96)$$

例えば、 $\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{p}$  という行列・ベクトル積を考えると以下のような演算となる。

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{\mathbf{a}} & a_{13}^{\mathbf{a}} & a_{12}^{\mathbf{a}} & 0 \\ a_{31}^{\mathbf{a}} & a_{33}^{\mathbf{a}} + a_{11}^{\mathbf{b}} & a_{32}^{\mathbf{a}} + a_{12}^{\mathbf{b}} & a_{13}^{\mathbf{a}} \\ a_{21}^{\mathbf{a}} & a_{23}^{\mathbf{a}} + a_{21}^{\mathbf{b}} & a_{22}^{\mathbf{a}} + a_{22}^{\mathbf{b}} & a_{23}^{\mathbf{b}} \\ 0 & a_{31}^{\mathbf{b}} & a_{32}^{\mathbf{b}} & a_{33}^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (97)$$

この方法では  $N \times N$  の行列を作る必要があり、メモリを大きく使ってしまう。

### 8.2.2 element-by-element

次にメモリ容量を削減するために、element-by-element 処理を施すことを考える。まず要素ごとにマトリックスとベクトルを掛け合わせたものを作る。すなわちこの場合は要素  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の二つである。

$$\begin{bmatrix} q_1^{\mathbf{a}} \\ q_2^{\mathbf{a}} \\ q_3^{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{\mathbf{a}} & a_{12}^{\mathbf{a}} & a_{13}^{\mathbf{a}} \\ a_{21}^{\mathbf{a}} & a_{22}^{\mathbf{a}} & a_{23}^{\mathbf{a}} \\ a_{31}^{\mathbf{a}} & a_{32}^{\mathbf{a}} & a_{33}^{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{\mathbf{a}} \\ p_2^{\mathbf{a}} \\ p_3^{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\begin{bmatrix} q_1^{\mathbf{b}} \\ q_2^{\mathbf{b}} \\ q_3^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{\mathbf{b}} & a_{12}^{\mathbf{b}} & a_{13}^{\mathbf{b}} \\ a_{21}^{\mathbf{b}} & a_{22}^{\mathbf{b}} & a_{23}^{\mathbf{b}} \\ a_{31}^{\mathbf{b}} & a_{32}^{\mathbf{b}} & a_{33}^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{\mathbf{b}} \\ p_2^{\mathbf{b}} \\ p_3^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (99)$$

ただし、要素番号  $\mathbf{a}$  における要素節点番号  $\bar{2}$  の値（この場合スカラー量） $p_2^{\mathbf{a}}$  は節点番号  $3$  の値  $p_3$  と表すことができ、対応させると

$$\begin{bmatrix} p_1^{\mathbf{a}} \\ p_2^{\mathbf{a}} \\ p_3^{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p_1^{\mathbf{b}} \\ p_2^{\mathbf{b}} \\ p_3^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (100)$$

これらを代入すると

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{\mathbf{a}} & a_{12}^{\mathbf{a}} & a_{13}^{\mathbf{a}} \\ a_{21}^{\mathbf{a}} & a_{22}^{\mathbf{a}} & a_{23}^{\mathbf{a}} \\ a_{31}^{\mathbf{a}} & a_{32}^{\mathbf{a}} & a_{33}^{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{\mathbf{b}} & a_{12}^{\mathbf{b}} & a_{13}^{\mathbf{b}} \\ a_{21}^{\mathbf{b}} & a_{22}^{\mathbf{b}} & a_{23}^{\mathbf{b}} \\ a_{31}^{\mathbf{b}} & a_{32}^{\mathbf{b}} & a_{33}^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (102)$$

同様に全体系に重ね合わせると、

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^a & a_{13}^a & a_{12}^a & 0 \\ a_{31}^a & a_{33}^a + a_{11}^b & a_{32}^a + a_{12}^b & a_{13}^a \\ a_{21}^a & a_{23}^a + a_{21}^b & a_{22}^a + a_{22}^b & a_{23}^b \\ 0 & a_{31}^b & a_{32}^b & a_{33}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (103)$$

となり、最初に述べた全体行列と同じになる。Element-by-Element では、行列を全体系で重ね合わせるのではなく、要素ごとのベクトルを計算し、それを全体系に重ね合わせるのである。

## A メッシュ

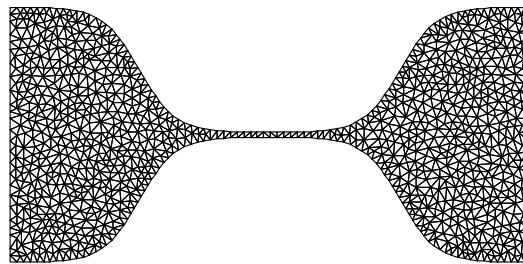
各要素における節点の対応をいちいち作るのは大変なので、フリーソフトを使用。ここでは2次元の Triangle を使用 [5](freeFEM も自動でメッシュを切ることが可能)。例えば、File に作りたい図形の (x 座標、y 座標) を入れ、各三角形の角度は 31.5 度以上、面積は 20 以上と設定

- ./triangle -pq31.5a20 File

し、以下の様なデータを得ることができる。

- (節点番号,x 座標,y 座標)
- (三角形の要素番号, 三角形の節点 1 の番号, 節点 2 の番号, 節点 3 の番号)
- (境界の番号)

つまり、作りたい図形の座標を入れることにより、メッシュは自動的にできる。



## 参考文献

- [1] Libmesh の HP。多数のフリーソフト: [http://libmesh.sourceforge.net/wiki/index.php/Main\\_Page](http://libmesh.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page)
- [2] 流れの数値シミュレーション 日本機会学会編 コロナ社 (1988)
- [3] 偏微分方程式の数値シミュレーション 登坂宣好 大西和榮 東大出版 (1991)
- [4] 非圧縮性流体解析 数値流体力学編集委員会編 東大出版 (1995)
- [5] Triangle の HP。メッシュ分割: <http://www-2.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>

- [6] 流体解析1 河村哲也 朝倉書店 (1996)
- [7] 続・有限要素法による流れのシミュレーション 日本計算工学流れの有限要素法研究委員会編  
シュプリンガー・ジャパン (2008)
- [8] 有限要素法概説 菊池文雄 サイエンス社 (1999)
- [9] T. E. Tezduyar, Computers and Fluids 36 (2007)191