

ブラックホール時空の
幾何学と
流体的記述

棚橋 典大

中央大学理工学部

ブラックホール時空の 幾何学と流体的記述

■ 特殊相対性理論： 光と時計の理論

- 時間 + 空間 → 時空

■ 一般相対性理論： 重力 (\approx 時空のゆがみ) の理論

- 基礎方程式： アインシュタイン方程式
- 代表的な解： ブラックホール解

◆ ブラックホールの性質

- 時空の因果構造、ブラックホールの定義
- ブラックホール地平面の幾何学的性質 (極小曲面)
- ブラックホール地平面の流体的記述

目次

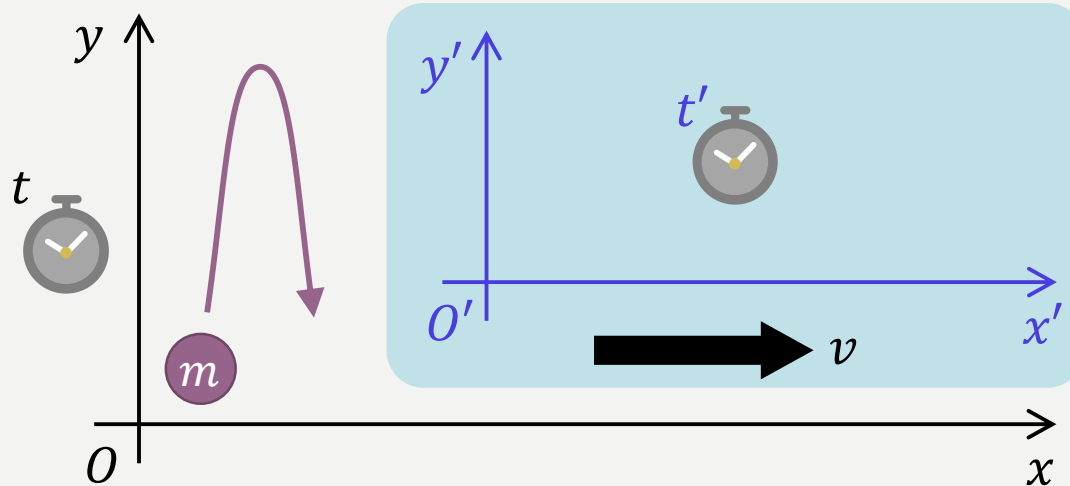
1. 特殊・一般相対性理論
2. ブラックホール時空
3. ブラックホール地平面の性質
 - 事象の地平面 (event horizon)
 - 見かけの地平面 (apparent horizon) \simeq 極小曲面
4. ブラックホール地平面の流体的記述
 - 一般相対性理論の Large D 極限

特殊相対性理論

- **特殊相対性原理**

「すべての**慣性系**は物理的に等価である」

- **慣性系**： 速度一定の（座標）系



- **ニュートン力学**： **ガリレイ変換**に対して不変な理論

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \end{cases}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ in } O \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ in } O'$$

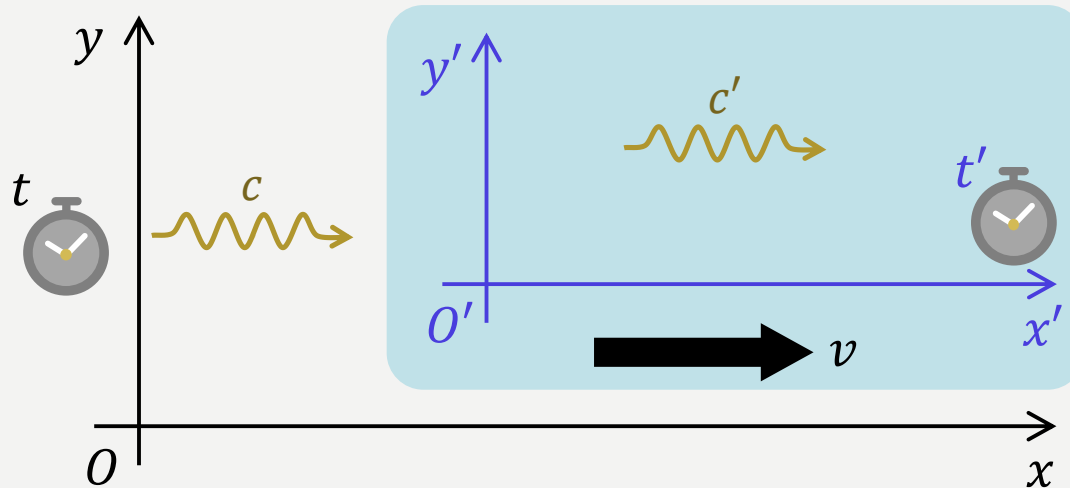
特殊相対性理論

- **特殊相対性原理**

「すべての**慣性系**は物理的に等価である」

→ 「光の速さは任意の慣性系で一定である」 (光速度不変の原理)

- **慣性系**： 速度一定の (座標) 系



- **ガリレイ変換**と光速度不変の原理は両立しない

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \end{cases}$$

O系の光速 c \Rightarrow O'系での光速 $c' = c - v \neq c$

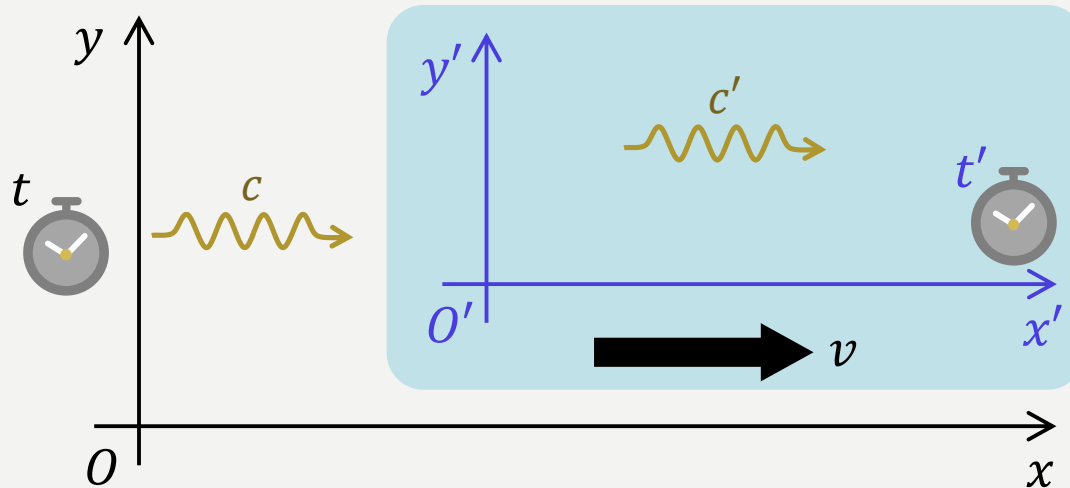
特殊相対性理論

- **特殊相対性原理**

「すべての**慣性系**は物理的に等価である」

→ 「光の速さは任意の慣性系で一定である」 (光速度不変の原理)

- **慣性系** : 速度一定の (座標) 系



- **ローレンツ変換** : 光速度不変の原理を守る座標変換

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - v x/c^2) \\ x' = \gamma(x - v t) \\ y' = y \end{cases}$$
$$\left[\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \right]$$

➤ O系の光速 c \Rightarrow O'系での光速 $c' = c$

✓ 特殊相対性原理 = 「物理法則は**ローレンツ不変**」

✓ 時間 + 空間 \rightarrow 時空

特殊相対性理論

• 特殊相対性原理

「すべての慣性系は物理的に等価である」

→ 「光の速さは任意の慣性系で一定である」 (光速度不変の原理)

• 世界間隔、Minkowski計量

微小に離れた2点 $x_1^\mu = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$, $x_2^\mu = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ の間の世界間隔 ds^2 を次で定義 (距離の一般化。ローレンツ不変量)

$$ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

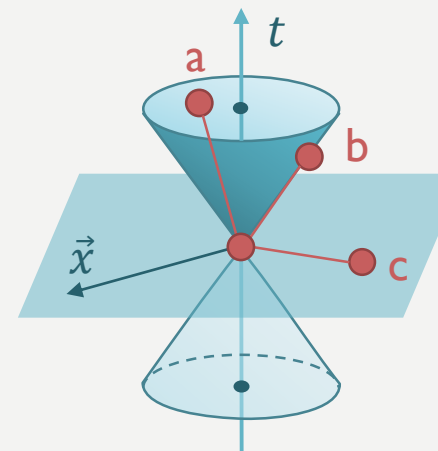
$\eta_{\mu\nu} \equiv \text{Diag}[-1, 1, 1, 1]$: Minkowski計量

• 光円錐

ある地点から出る光がなす波面上で

$$c dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \Leftrightarrow ds^2 = 0$$

2点の因果関係 : $ds^2 \begin{cases} < 0: \text{「時間的」} & a \\ = 0: \text{「光的 (ヌル)」} & b \\ > 0: \text{「空間的」} & c \end{cases}$



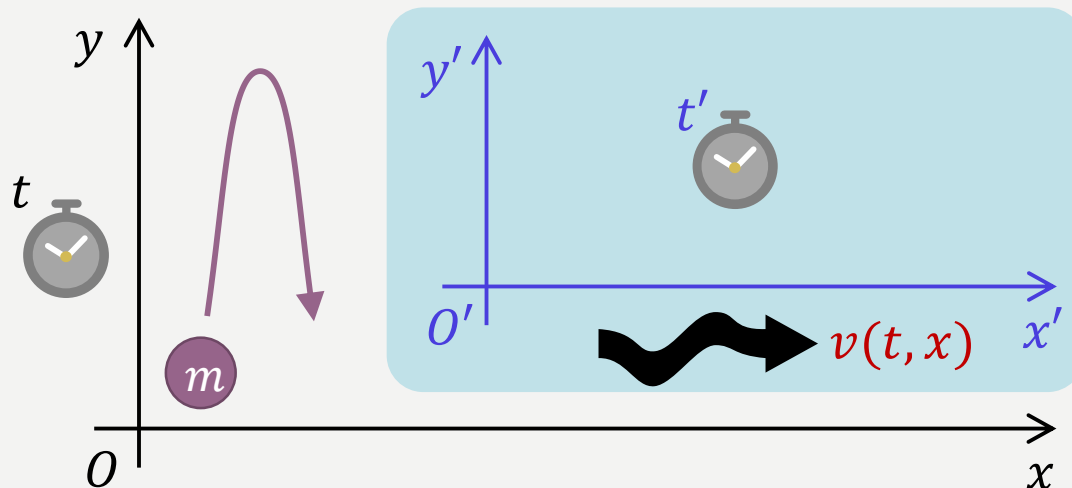
一般相対性理論

一般相対性原理

「すべての**基準系**は物理的に等価である」

慣性系だけでなく、**非慣性系（加速度系）**でも物理法則は不変

「一般座標変換不変性」



等価原理

「局所的には、**重力** と **加速度運動による見かけの力** は等価」



一般相対性理論

• 一般相対性原理

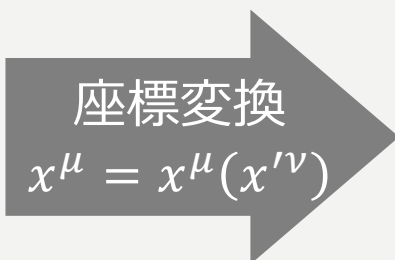
「すべての基準系は物理的に等価である」
慣性系だけでなく、非慣性系（加速度系）でも物理法則は不変

「一般座標変換不変性」

• 等価原理

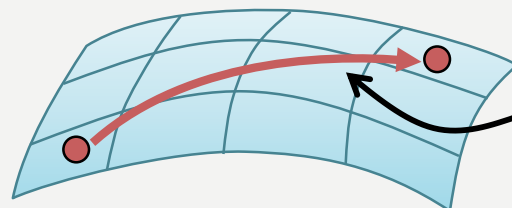
「局所的には、重力と加速度運動による見かけの力は等価」

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$
$$\eta_{\mu\nu} \equiv \text{Diag}[-1, 1, 1, 1]$$



$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$$
$$g_{\mu\nu}(x'^\alpha) = \eta_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \right) \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right)$$

- 「曲がった」時空 $g_{\mu\nu}(x^\rho)$ を導入する必要がある
- 重力場中の粒子の運動 = 曲がった時空中の「直線」運動



測地線
(2点を結ぶ最小距離の曲線)

一般相対性理論

- **一般相対性原理 + 等価原理**

- 重力理論 = 曲がった時空の物理理論

- ◆ 曲がった時空を記述するための道具 = リーマン幾何学

- ◆ 時空の曲がり具合を決める方程式 = Einstein方程式

一般相対性理論

- 一般相対性原理 + 等価原理

→ 重力理論 = 曲がった時空の物理理論

- ◆ 曲がった時空を記述するための道具 = リーマン幾何学

- ◆ 時空の曲がり具合を決める方程式 = Einstein方程式

- ✓ スカラー ϕ , ベクトル V^μ , テンソル $T^{\mu\nu}$:

座標変換 $x^\mu = x^\mu(x'^\nu)$ に対する変換性で定義

$$\phi(x^\mu) = \phi(x^\mu(x'^\nu)) \equiv \phi'(x'^\nu), \quad V^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) V'^\nu, \quad T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \right) T'^{\rho\sigma}$$

- ✓ 計量テンソル $g_{\mu\nu}$: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ($V_\mu \equiv g_{\mu\nu} V^\nu$ etc.)

- ✓ 共変微分 ∇_μ : 曲がった空間における微分

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0 \quad \left(\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\nu\sigma} \right)$$

- ✓ 曲率テンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma}$: $g_{\mu\nu}$ に対応する空間の曲がり具合を記述

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) v^\rho = R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma v^\sigma \quad \left[R_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \dots \right]$$

一般相対性理論

- 一般相対性原理 + 等価原理

→ 重力理論 = 曲がった時空の物理理論

◆ 曲がった時空を記述するための道具 = リーマン幾何学

◆ 時空の曲がり具合を決める方程式 = Einstein方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$\left[\begin{array}{l} R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu\sigma}g^{\rho\sigma} \\ R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \end{array} \right]$ →

$\left[\begin{array}{l} G: \text{ニュートンの重力定数} \\ \text{エネルギー・運動量テンソル } T_{\mu\nu} \\ \text{物質場の分布を記述} \\ \text{例) 真空: } T_{\mu\nu} = 0 \\ \text{完全流体: } T_{\mu\nu} = \text{Diag}[-\rho, p, p, p] \end{array} \right]$ ←

- 計量 $g_{\mu\nu}$ とその微分 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ で与えられるテンソル方程式のうち、
 - ✓ 重力場が弱いときにニュートン重力の方程式に帰着する
 - ✓ 保存則を満たす 等といった条件を満たす式として導出される。
- 真空についてのEinstein方程式: $R_{\mu\nu} = 0$ (リッチ平坦)

目次

1. 特殊・一般相対性理論
2. ブラックホール時空
3. ブラックホール地平面の性質
 - 事象の地平面 (event horizon)
 - 見かけの地平面 (apparent horizon) \simeq 極小曲面
4. ブラックホール地平面の流体的記述
 - 一般相対性理論の Large D 極限

ブラックホール時空

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \dots = 0$$

◆真空Einstein方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ の解の代表例

- 平坦(Minkowski)時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ $[R_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta_{\alpha\beta}) = 0]$

- シュバルツシルト時空 $[R_{\mu\nu\rho\sigma}(g_{\alpha\beta}) \neq 0]$

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \equiv 1 - \frac{r_g}{r} \quad (r_g: \text{シュバルツシルト半径}) \end{array} \right.$$

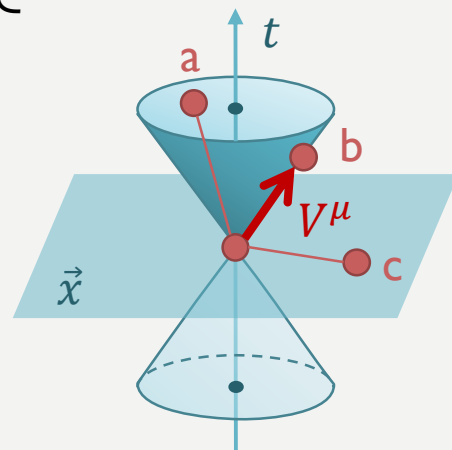
◆因果律 (causality)

ある地点から出る光がなす波面の接ベクトル V^μ について

$$g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{電磁波 (=光) の運動方程式: } g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \dots = 0 \\ \Rightarrow \text{電磁波の伝搬面について } g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0 \end{array} \right)$$

$$\text{2点の因果関係: } g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \begin{cases} < 0: \text{「時間的」} \\ = 0: \text{「光的 (ヌル)」} \\ > 0: \text{「空間的」} \end{cases}$$

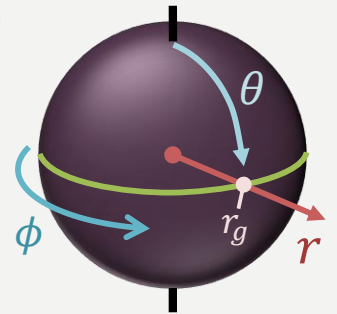


ブラックホール時空

◆シュバルツシルト時空の因果構造

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \equiv 1 - \frac{r_g}{r} \quad (r_g: \text{シュバルツシルト半径})$$



- $r = 0$ で曲率が発散 ($R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \sim 1/r^6$): 曲率特異点
- 計量が $r = r_g$ で発散するが、曲率は有限
↑ 座標の取り方が悪いことによる見かけの特異点
- $r = r_g$ での発散を取り除く座標変換 $(t, r) \rightarrow (T(t, r), X(t, r))$ をかける

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{r_g} = \ln\left(\frac{X+T}{X-T}\right)$$

$$\Rightarrow ds^2 = \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

[クルスカール座標]

✓ $r = r_g$ で計量が正則に

✓ $r = r_g \Leftrightarrow X^2 - T^2 = 0$

ブラックホール時空

◆シュバルツシルト時空の因果構造

$$ds^2 = \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$
$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{r_g} = \ln\left(\frac{X+T}{X-T}\right)$$

● この時空における**光の軌道**について調べる。

✓ 光の経路 = ヌル方向

✓ 動径方向の光の軌道を以下のように指定：

$$(T, X) = (T, X(T))$$

$$\Rightarrow ds^2 \propto -dT^2 + dX^2 = (-1 + \dot{X}^2(T)) dT^2 = 0$$

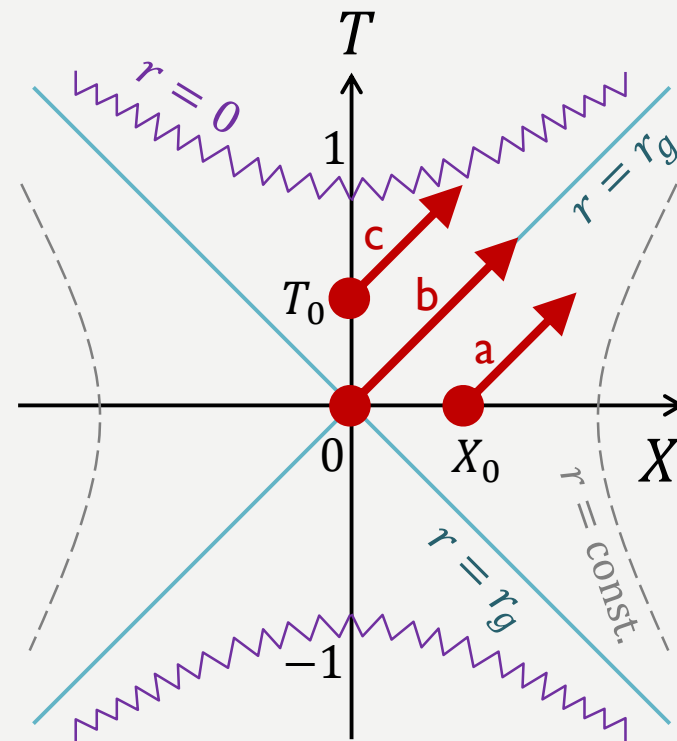
∴ $X(T) = X_0 \pm T$ が光の経路 (外向き：+符号)

✓ 光の起点について分類

a: $r > r_g$ の地点から出発

b: $r = r_g$ から出発

c: $0 < r < r_g$ から出発



ブラックホール時空

◆シュバルツシルト時空の因果構造

$$ds^2 = \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{r_g} = \ln\left(\frac{X+T}{X-T}\right)$$

● 動径方向の光の軌道: $X(T) = X_0 + T$

✓ 光の起点について分類

a: $r > r_g$ の地点から出発: $X(T) = X_0 + T$ ($X_0 > 0$)

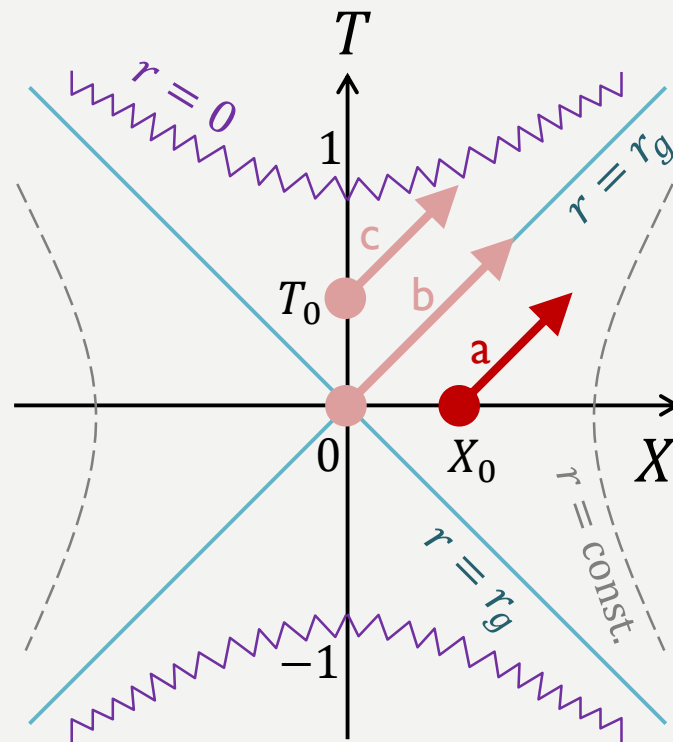
この軌道に対応する $r(T)$ は

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2 = X_0^2 + 2X_0 T$$

時間経過 ($T \nearrow$) で $r(T) \nearrow$: 無限遠に飛び去る光

b: $r = r_g$ から出発

c: $0 < r < r_g$ から出発



ブラックホール時空

◆シュバルツシルト時空の因果構造

$$ds^2 = \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{r_g} = \ln\left(\frac{X+T}{X-T}\right)$$

● 動径方向の光の軌道: $X(T) = X_0 + T$

✓ 光の起点について分類

a: 時間経過 ($T \nearrow$) で $r(T) \nearrow$: 無限遠に飛び去る

b: $r = r_g$ から出発: $X = T$

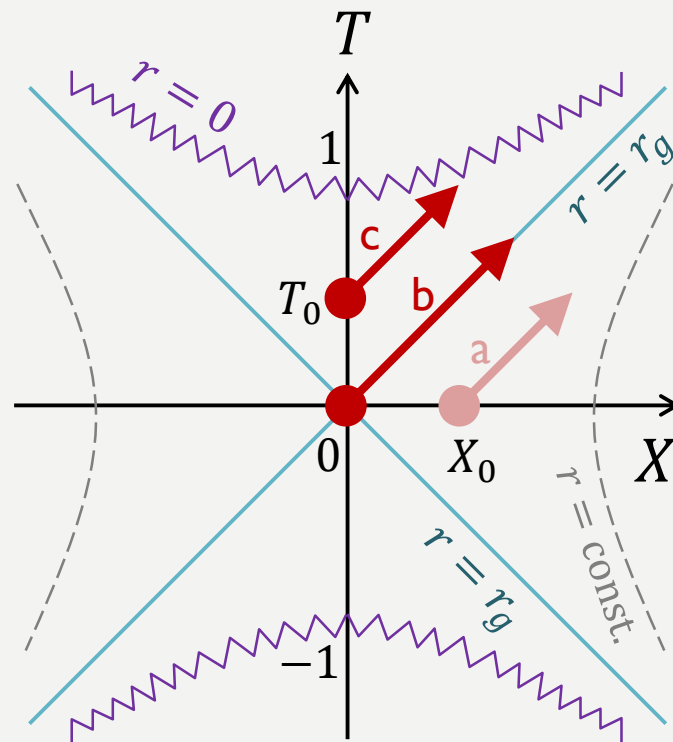
$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2 = 0 \Rightarrow r(T) = r_g$$

光は半径 $r = r_g$ にとどまり続ける

c: $0 < r < r_g$ から出発: $X = T - T_0$

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2 = T_0(T_0 - 2T)$$

曲率特異点 $r = 0$ に有限時間 $T = \frac{1}{2}\left(T_0 + \frac{1}{T_0}\right)$ で到達



ブラックホール時空

◆シュバルツシルト時空の因果構造

$$ds^2 = \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$
$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{r_g} = \ln\left(\frac{X+T}{X-T}\right)$$

◆ 動径方向の光の軌道: $X(T) = X_0 + T$

✓ $r = r_g$: 光が無遠に到達できるか否かの境界
↑

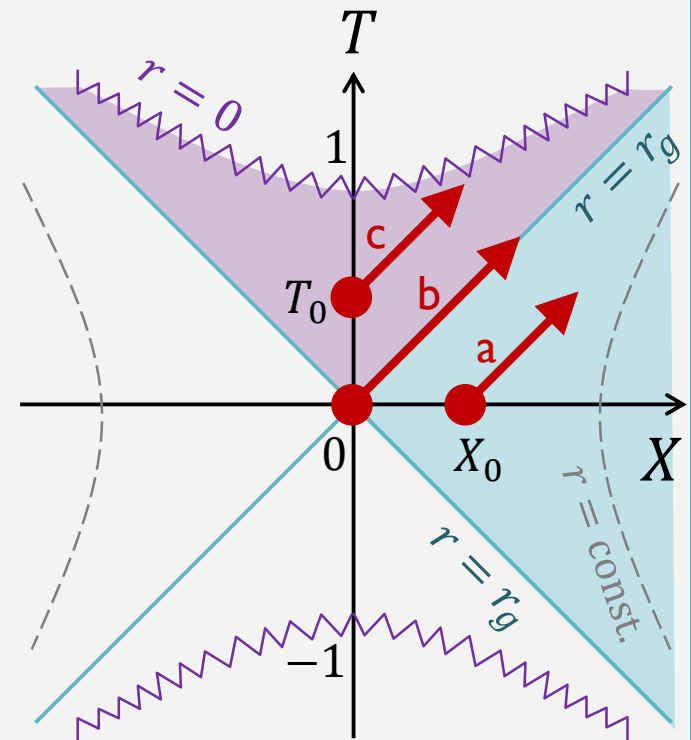
光より早く伝搬する信号は存在しない

⇒ $r \leq r_g$ から外部領域へ信号を送ることは不可能

$r > r_g$ から無限遠まで信号を送ることは可能

⇒ $r \leq r_g$: ブラックホール

$r = r_g$: 事象の地平面 (event horizon, EH)



目次

1. 特殊・一般相対性理論
2. ブラックホール時空
3. **ブラックホール地平面の性質**
 - 事象の地平面 (event horizon)
 - 見かけの地平面 (apparent horizon) \simeq 極小曲面
4. ブラックホール地平面の流体的記述
 - 一般相対性理論の Large D 極限

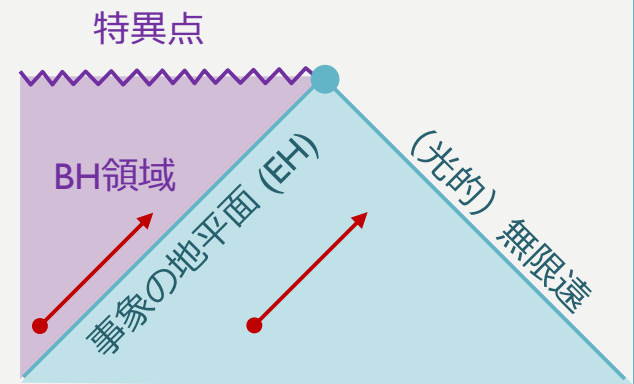
ブラックホール地平面の性質

• BH領域の定義

無限遠と因果的曲線（時間的か光的曲線）で結ぶことのできない時空領域

• 事象の地平面の性質

- ✓ 事象の地平面は光的超曲面
- ✓ 無限遠を含めた時空全体の構造が分からないと事象の地平面の位置は決まらない
- ✓ 典型的には、BH領域は光もとらえるような強い重力場によって生成される



• ブラックホール時空に関連する定理

- ✓ **一意性定理**： 漸近平坦かつ真空における静的BH解はシュバルツシルト解のみ、等
- ✓ **面積増大定理**： 物理的に自然な仮定（物質のエネルギーが正など）の下で、BHの表面積 $A_{\text{BH}}(t)$ は時間について非減少 ($dA_{\text{BH}}(t)/dt \leq 0$)
- ✓ **特異点定理**： BH内部領域で、因果的な測地線は無限に伸びることはない（BH内部には特異点が必ず存在し、有限時間でそれに到達する）
- ✓ **正質量定理**： ブラックホールの(ADM)質量は必ず正／質量ゼロの時空は平坦時空のみ

ブラックホール地平面の性質

◆見かけの地平面 (apparent horizon, AH)

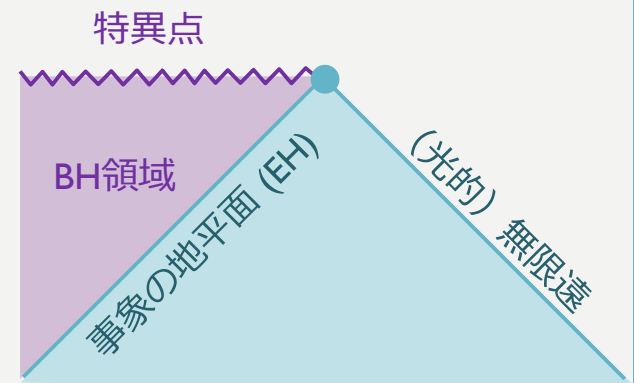
• 事象の地平面の欠点

時空全体の情報がないと決められない

- 時空（計量）の局所的な情報だけで決めることができ、事象の地平面と類似の性質を持つ面があると便利

• 見かけの地平面

- ✓ 極小曲面を一般化したような定義（後述）
- ✓ 計量の局所的な情報（値とその微分）さえあればAHの位置を決定できる
- ✓ 定常な時空ではAHとEHは一致
- ✓ 一般の時空でも、AHが存在すればその外側にEHが必ず存在する
→ EHの代用物としてAHを使える
- ✓ 数値相対論などでしばしば用いられる (cf. [SXS collaboration movie](#))

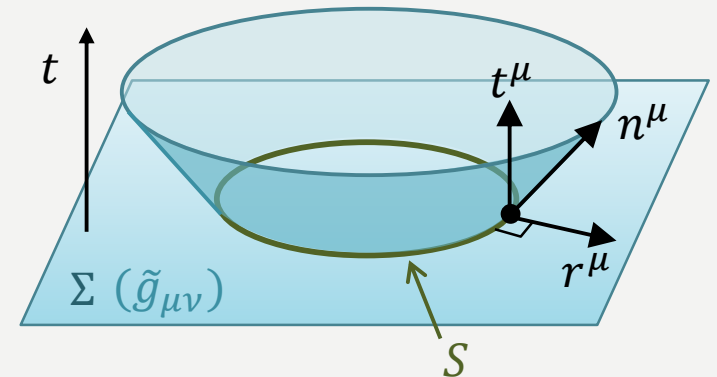


ブラックホール地平面の性質

◆見かけの地平面 (apparent horizon, AH)

●定義のための準備

- ✓ 時刻(t)一定面 Σ
- ✓ Σ 上の閉曲面 S
- ✓ S に垂直な外向き光的ベクトル n^μ
(S から外向きに出る光波面の接ベクトル)



$$n^\mu = \alpha(x^\mu)(t^\mu + r^\mu)$$

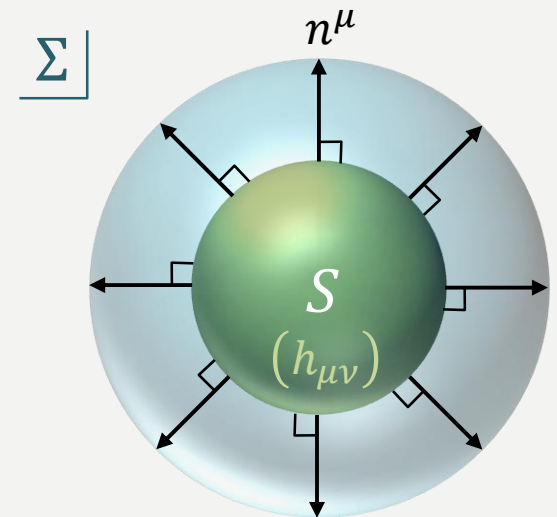
- Σ に垂直な時間的単位ベクトル t^μ
- Σ 上の空間的単位ベクトル r^μ ($\perp S$)

- ✓ Σ 上の誘導計量 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu}$ を Σ へ射影したもの)

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + t_\mu t_\nu$$

- ✓ S 上の誘導計量 $h_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu}$ を S へ射影したもの)

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + t_\mu t_\nu - r_\mu r_\nu$$



ブラックホール地平面の性質

◆見かけの地平面 (apparent horizon, AH)

- S から出る光線 $n^\mu = \alpha(x^\mu)(t^\mu + r^\mu)$
- S から発する**光的測地線束** (光線の束)
- この光的測地線束の**膨張率 $\hat{\theta}$** (面積増加率)

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &\equiv h^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu \\ &= \dots = \alpha(K - K_{\mu\nu}r^\mu r^\nu + k_\mu{}^\mu)\end{aligned}$$

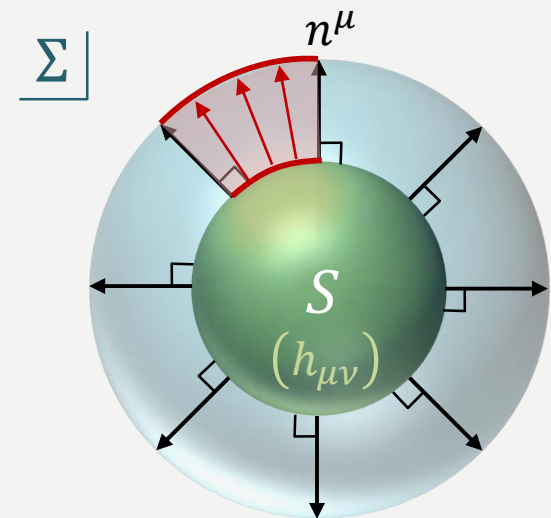
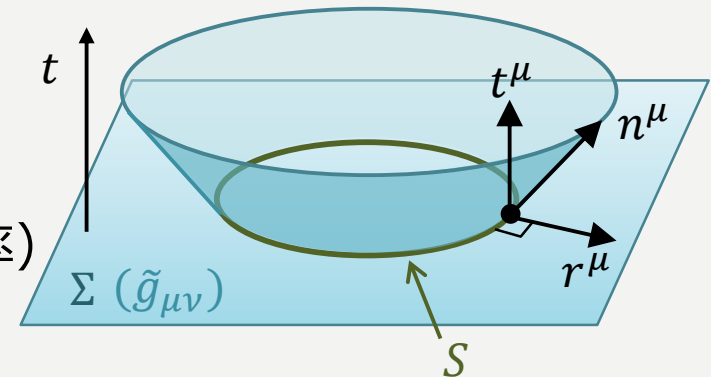
ただし

$K_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\rho}\tilde{g}_{\nu\sigma}\nabla^\rho t^\sigma$: t 一定面 Σ の外的曲率

$k_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}\nabla^\rho r^\sigma$: 閉曲面 S の外的曲率

- 閉曲面 S 上全体で膨張率がゼロ ($\hat{\theta} = 0$) となる
とき、 S を見かけの地平面 (AH) と呼ぶ。

(光をその表面から飛ばしても、面積が広がらない
ような閉曲面)



ブラックホール地平面の性質

◆見かけの地平面 (apparent horizon, AH)

- 光的測地線束の膨張率 $\hat{\theta}$ (面積変化率)

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &\equiv h^{\mu\nu}\nabla_{\mu}n_{\nu} \\ &= \dots = \alpha(K - K_{\mu\nu}r^{\mu}r^{\nu} + k_{\mu}^{\mu})\end{aligned}$$

$$K_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\rho}\tilde{g}_{\nu\sigma}\nabla^{\rho}t^{\sigma} : t\text{-一定面 } \Sigma \text{ の外的曲率}$$

$$k_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}\nabla^{\rho}r^{\sigma} : \text{閉曲面 } S \text{ の外的曲率}$$

- 閉曲面 S 上全体で膨張率がゼロ ($\hat{\theta} = 0$) となる
とき、 S を見かけの地平面 (AH) と呼ぶ。

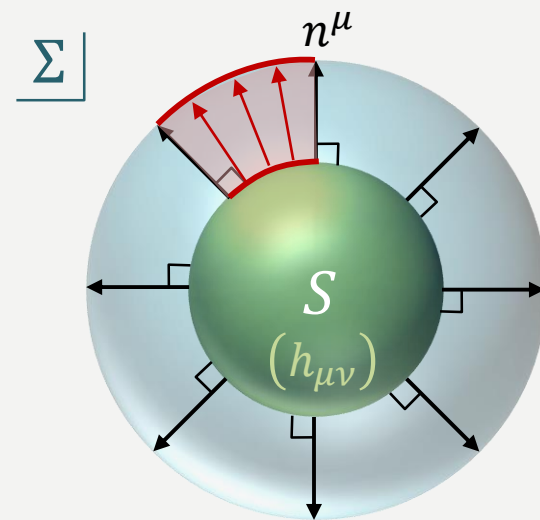
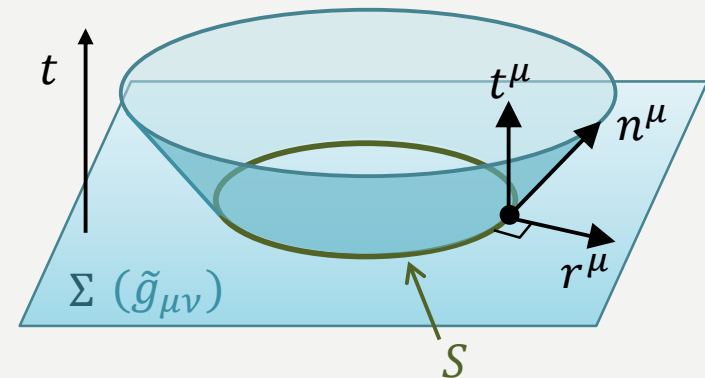
● AHの性質

- ✓ AHが存在するとき、その外側に必ずEHが存在
(∴) 光的測地線に沿って

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\hat{t}} = -\frac{1}{2}\hat{\theta}^2 - R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} - (\text{正の項}) < 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}(\hat{t}) \leq 0 \quad \Rightarrow S \text{ の表面積は非増大}$$

$$\Rightarrow S \text{ から出る光は無遠に到達できない} \Rightarrow \text{AH} \subset \text{EH}$$



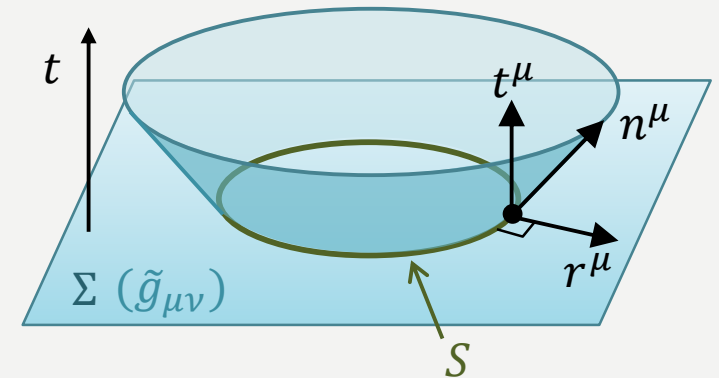
ブラックホール地平面の性質

◆見かけの地平面 (apparent horizon, AH)

- 光的測地線束の膨張率 $\hat{\theta}$ (面積変化率)

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &\equiv h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu} \\ &= \dots = \alpha (K - K_{\mu\nu} r^{\mu} r^{\nu} + k_{\mu}{}^{\mu})\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} K_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\rho} \tilde{g}_{\nu\sigma} \nabla^{\rho} t^{\sigma} : t\text{-一定面 } \Sigma \text{ の外的曲率} \\ k_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma} \nabla^{\rho} r^{\sigma} : \text{閉曲面 } S \text{ の外的曲率} \end{array} \right]$$



- 閉曲面 S 上全体で膨張率がゼロ ($\hat{\theta} = 0$) となる
とき、 S を見かけの地平面 (AH) と呼ぶ。

● AHの性質

- ✓ AHが存在するとき、その外側に必ずEHが存在 / 定常時空では AH = EH
- ✓ Σ が時空の時間反転対称面 のとき、AHは Σ 上の極小曲面

$$(\because) \Sigma \text{ が時空の時間反転対称面} \Leftrightarrow K_{\mu\nu} \simeq \partial_t \tilde{g}_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \text{AHの定義式 } \hat{\theta} = 0 \Leftrightarrow k_{\mu}{}^{\mu} = 0 \quad (S \text{ の膨張率がゼロ})$$

ブラックホール地平面の性質

● AHの性質

- ✓ AHが存在するとき、その外側に必ずEHが存在 / 定常時空では AH = EH
- ✓ Σ が時空の時間反転対称面のとき、AHは Σ 上の極小曲面

例) シュバルツシルト時空

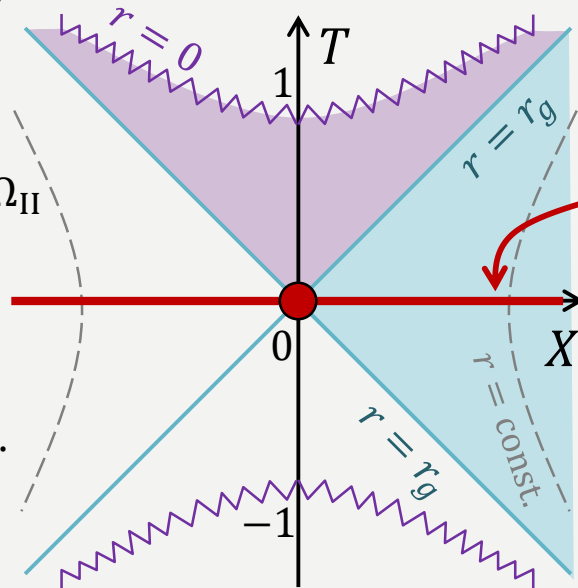
$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} &= X^2 - T^2, \quad \frac{t}{r_g} = \ln \left(\frac{X+T}{X-T} \right) \end{aligned} \right. \quad \equiv d\Omega_{II}$$

- $T = 0$ 面は時間反転対称面の一つ
- $T = 0$ 面上の誘導計量は

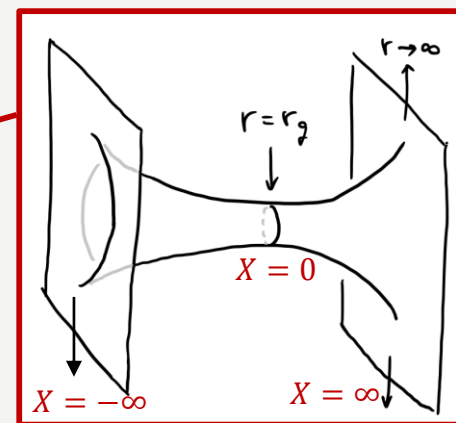
$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{4r_g^3 e^{-r(X)/r_g}}{r(X)} dX^2 + r(X)^2 d\Omega_{II} \\ \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} &= X^2 \end{aligned} \right.$$

X 一定面は半径 $r(X)$ の球面 (S^2).

- $T = 0$ 面上の極小曲面は $r = r_g$.
 \Rightarrow AH (= EH) は $r = r_g$ 面



$T = 0$ 面の形状



目次

1. 特殊・一般相対性理論
2. ブラックホール時空
3. ブラックホール地平面の性質
 - 事象の地平面 (event horizon)
 - 見かけの地平面 (apparent horizon) \simeq 極小曲面
4. ブラックホール地平面の流体的記述
 - 一般相対性理論の Large D 極限

The Large D limit of General Relativity

Ref:

Emparan, Suzuki, Tanabe “The large D limit of General Relativity” arXiv:1302.0382

Emparan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka “Effective theory of Black Holes in the $1/D$ expansion” arXiv:1504.06489

Emparan, Izumi, Luna, Suzuki, Tanabe “Hydro-elastic Complementarity in Black Branes at large D ” arXiv:1602.05752

田邊、鈴木「一般相対性理論における次元無限大極限」日本物理学会誌 2016年10月号

Emparan, Herzog “Large D limit of Einstein’s equations” arXiv:2003.11394

The Large D limit of GR

- D = number of dimensions
- Apply $1/D$ expansion to the Einstein equation
- Drastic simplifications in various problems:
 - Static solution construction
 - Perturbation of black objects (quasinormal modes, stability)
 - Dynamical solution construction
- Elastic and hydrodynamic description of BH horizon

The Large D limit of GR

1. Motivation
2. How it works
 - a. Idea
 - b. Effective theory of black holes
3. Application
4. Summary

The Large D limit of GR

- General relativity in 4 dim.
 - BH uniqueness theorem \rightarrow Stationary BH in vacuum is (charged) Kerr BH



- General relativity in $D \geq 5$ dim.
 - No BH uniqueness theorem \rightarrow Various stationary black objects exist



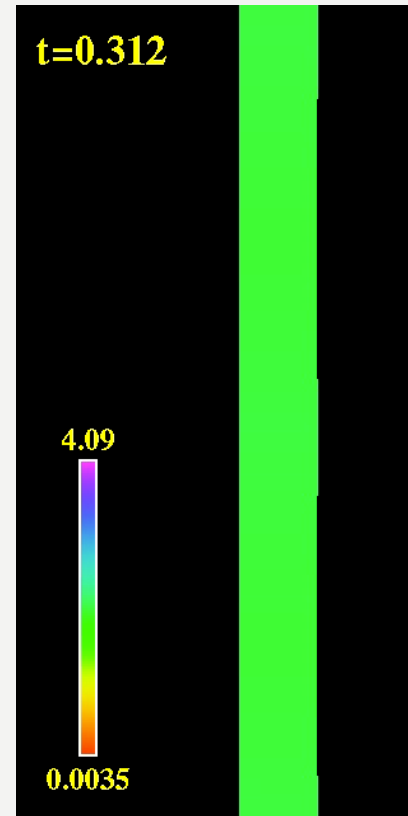
...

- Need intensive analytic/numerical calculations to study them

The Large D limit of GR

ex.) Gregory-Laflamme instability of black string [Gregory-Laflamme 1993]

cf.) Plateau-Rayleigh instability of fluid column



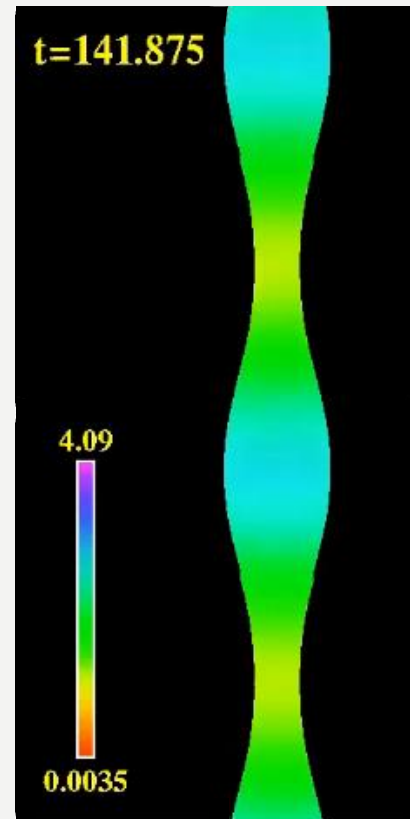
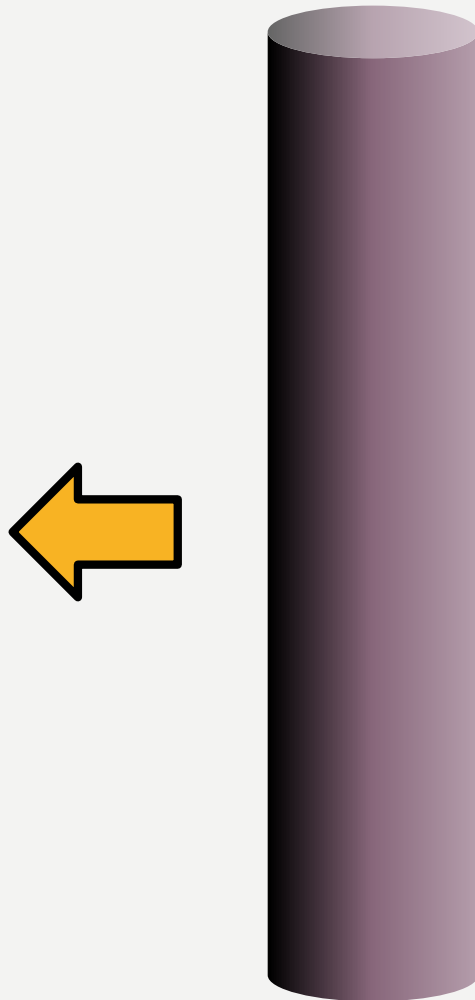
[Lehner-Pretorius 2010]

- ✓ Full numerical relativity calculations
- ✓ **100,000 CPU hours** over 2 months

The Large D limit of GR

ex.) Gregory-Laflamme instability of black string [Gregory-Laflamme 1993]

cf.) Plateau-Rayleigh instability of fluid column



[Lehner-Pretorius 2010]

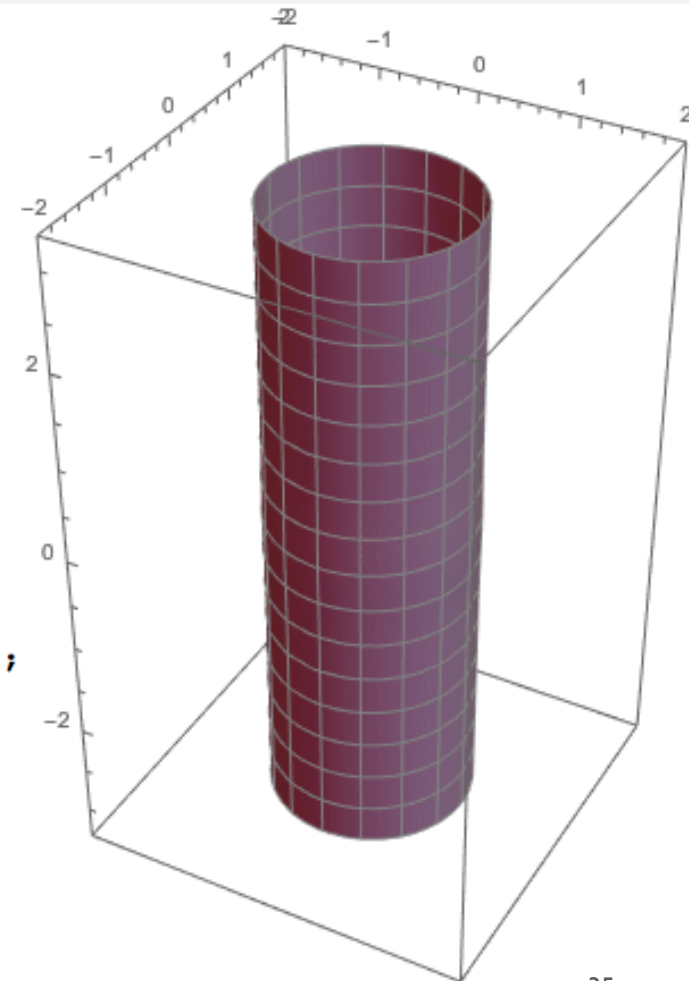
- ✓ Full numerical relativity calculations
- ✓ **100,000 CPU hours** over 2 months

The Large D limit of GR

- Using the large D limit, it is **one second on a laptop**.

[Empanan, Suzuki, Tanabe 2015]

```
eq1 =  $\partial_t m[t, z] - \partial_{z,z} m[t, z] + \partial_z p[t, z];$   
eq2 =  $\partial_t p[t, z] - \partial_{z,z} p[t, z] - \partial_z m[t, z] + \partial_z \frac{p[t, z]^2}{m[t, z]};$   
pde = {eq1 == 0, eq2 == 0}; tmax = 600; k = .98; L =  $\frac{2 \pi}{k};$   
 $\delta m = 0.01 \text{Exp}[-4 z^2]; \delta p = 0;$   
icbc = {m[0, z] == 1 +  $\delta m$ , p[0, z] ==  $\delta p$ ,  
m[t, - $\frac{L}{2}$ ] == m[t,  $\frac{L}{2}$ ], p[t, - $\frac{L}{2}$ ] == p[t,  $\frac{L}{2}$ ]};  
sol = NDSolve[{pde, icbc}, {m, p}, {t, 0, tmax}, {z, - $\frac{L}{2}$ ,  $\frac{L}{2}$ }];
```

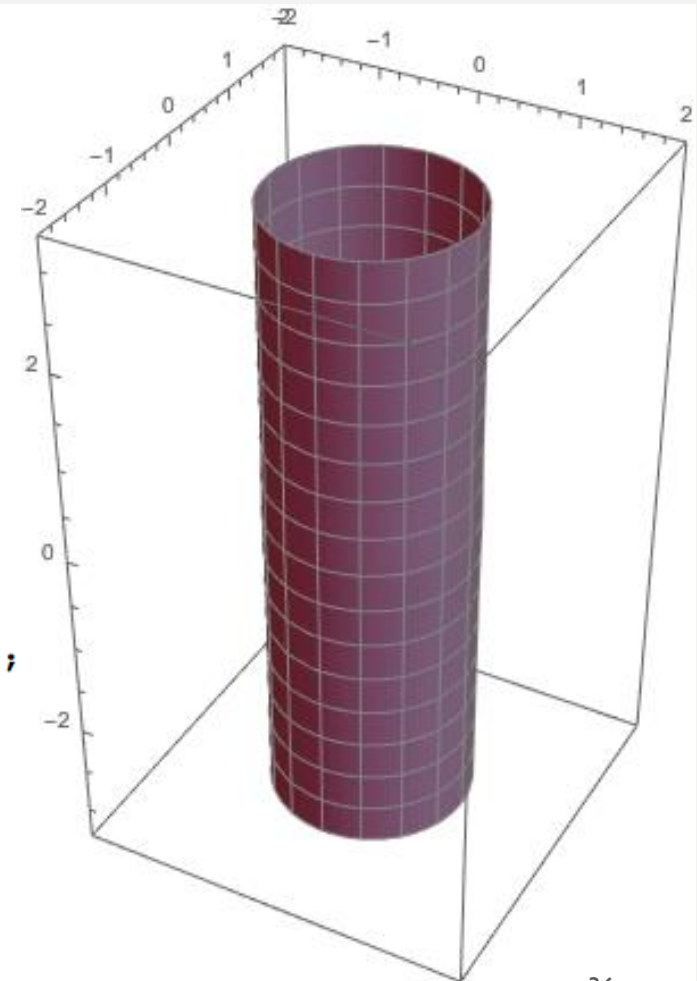


The Large D limit of GR

- Using the large D limit, it is **one second on a laptop**.

[Empanan, Suzuki, Tanabe 2015]

```
eq1 =  $\partial_t m[t, z] - \partial_{z,z} m[t, z] + \partial_z p[t, z];$   
eq2 =  $\partial_t p[t, z] - \partial_{z,z} p[t, z] - \partial_z m[t, z] + \partial_z \frac{p[t, z]^2}{m[t, z]};$   
pde = {eq1 == 0, eq2 == 0}; tmax = 600; k = .98; L =  $\frac{2 \pi}{k};$   
 $\delta m = 0.01 \text{Exp}[-4 z^2]; \delta p = 0;$   
icbc = {m[0, z] == 1 +  $\delta m$ , p[0, z] ==  $\delta p$ ,  
m[t, - $\frac{L}{2}$ ] == m[t,  $\frac{L}{2}$ ], p[t, - $\frac{L}{2}$ ] == p[t,  $\frac{L}{2}$ ]};  
sol = NDSolve[{pde, icbc}, {m, p}, {t, 0, tmax}, {z, - $\frac{L}{2}$ ,  $\frac{L}{2}$ }];
```



The Large D limit of GR

1. Motivation
2. How it works
 - a. Idea
 - b. Effective theory of black holes
3. Application
4. Summary

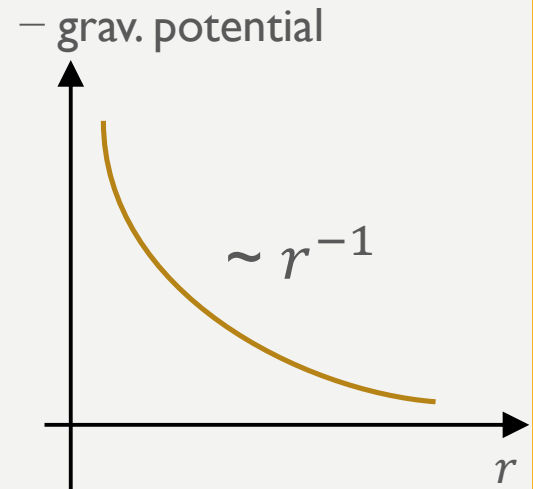
How it works

[Empanan, Suzuki, Tanabe 2013]

- Schwarzschild BH in 4 dim.

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2$$

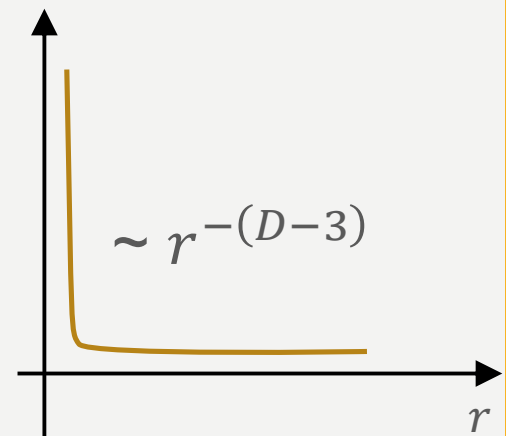
$$f(r) = 1 - \frac{r_0}{r}$$



- Schwarzschild BH in D dim.

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2$$

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{D-3}$$



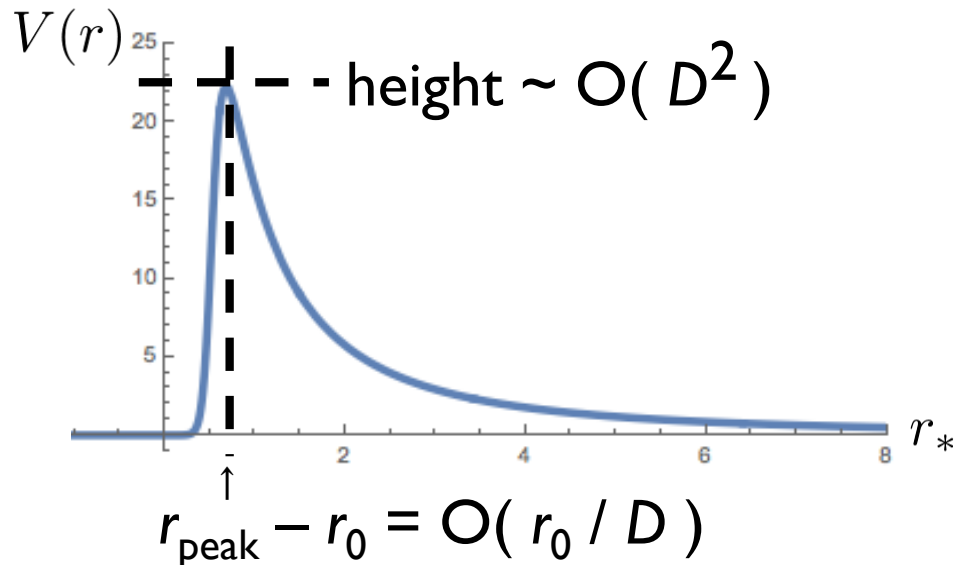
How it works

[Empanan, Suzuki, Tanabe 2013]

- Scalar field around BH in $D = n+3$ dim.

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \Psi = 0 \quad \text{with} \quad \Psi = e^{-i\omega t} \psi(r) \mathbf{Y}^{\ell}(\theta)$$

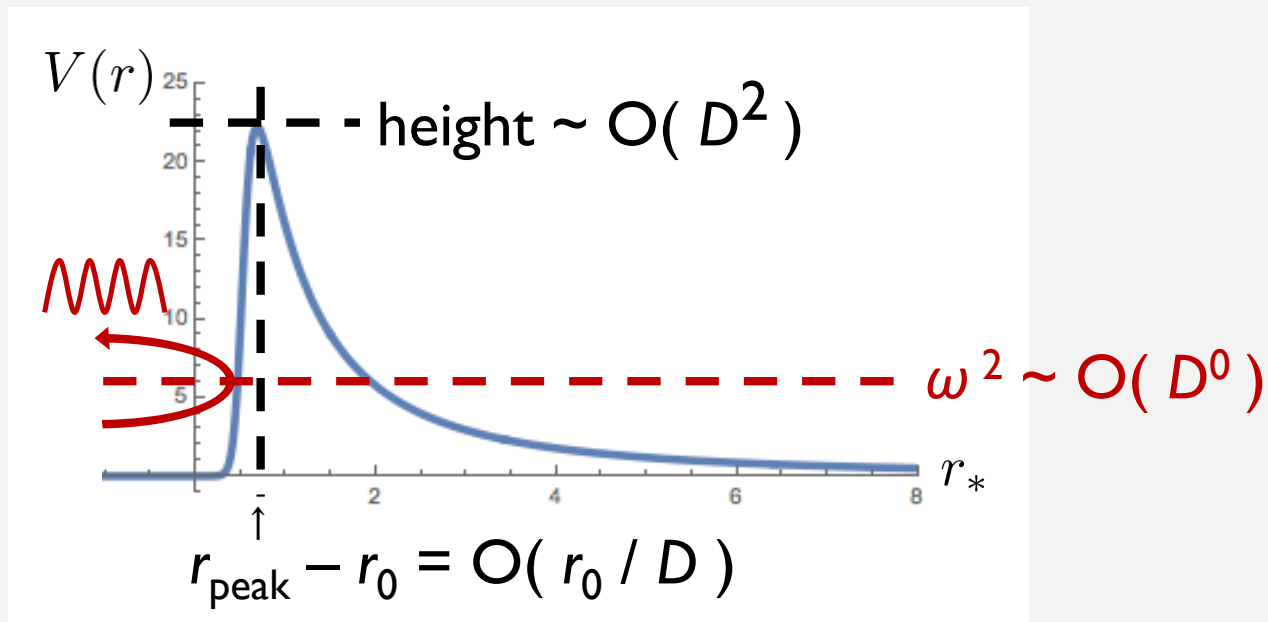
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d^2}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r)) \right] \left(r^{\frac{n+1}{2}} \psi(r) \right) = 0 \\ V(r) = \frac{f^2(r)}{4r^2} \left[(2\ell + n)^2 - 1 + (n+1)^2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right] \end{array} \right. \quad \left(r_* \equiv \int \frac{dr}{f(r)} \right)$$



How it works

[Empanan, Suzuki, Tanabe 2013]

- Scalar field around BH in $D = n+3$ dim.



- ✓ For waves with $\omega = O(D^0)$, the inner and outer regions decouples:
 - Outer region : \sim flat space
 - Inner region : waves on curved background in $r - r_0 \sim O(r_0 / D)$
- ✓ Similar decoupling occurs for gravitational perturbations
- ✓ Horizon dynamics is governed by waves in the inner region

The Large D limit of GR

1. Motivation
2. How it works
 - a. Idea
 - b. Effective theory of black holes
3. Application
4. Summary

Effective theory of black holes

Derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

→ BH horizon is given by a surface obeying

$$\sqrt{-g_{tt}} K = 2\kappa \quad : \text{Young-Laplace equation}$$

in the background spacetime.

Extension to **dynamics of black hole horizon**

[Empanan, Izumi, Luna, Suzuki, Tanabe 2016]

→ Deformation of BH horizon obeys

(almost) EoMs of viscous compressible fluid

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0 \\ \partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = 0 \end{array} \right.$$

Effective theory of black holes

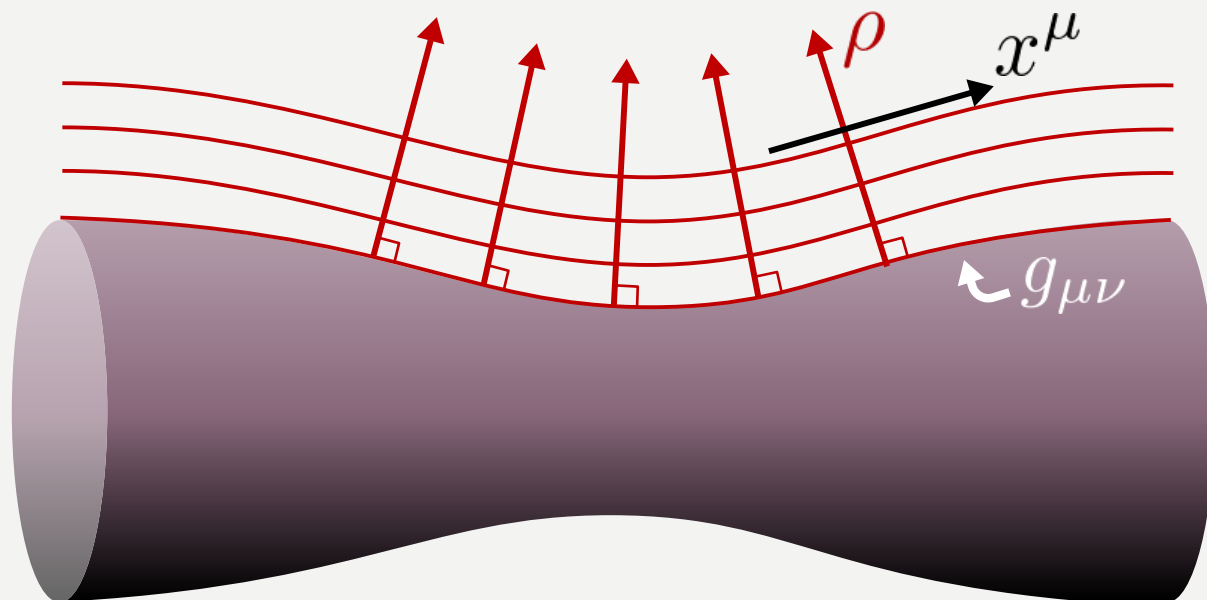
[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

We derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

I. Large gradient near BH \rightarrow Use ρ coordinate zooming up the BH horizon

$$ds^2 = N^2(\rho, x) \frac{d\rho^2}{(D-1)^2} + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$



Effective theory of black holes

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

We derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

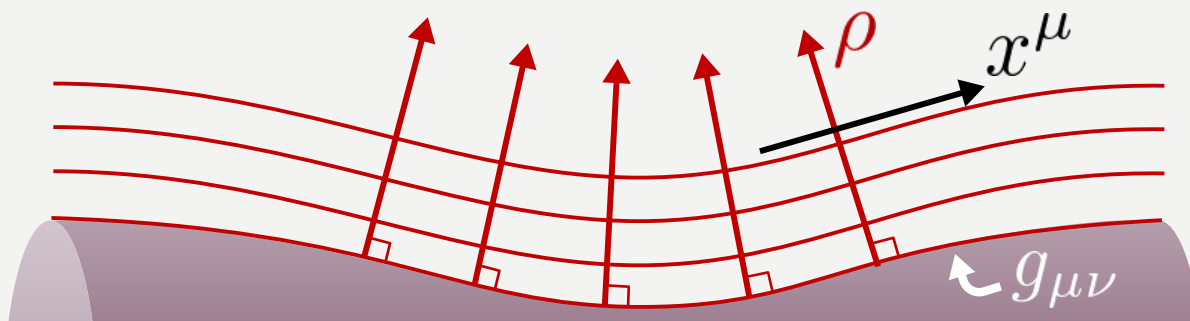
1. Large gradient near BH \rightarrow Use ρ coordinate zooming up the BH horizon
2. Decompose Einstein equations

Basic variables: $g_{\mu\nu}$, $K_{\mu\nu} \equiv \frac{D-1}{2N} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \rho}$ (extrinsic curvature of $\rho = \text{const.}$)

$$\rho\rho: K^2 - K^\mu_\nu K^\nu_\mu = R + \frac{(D-1)(D-2)}{\ell^2} \quad \left[\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2\ell^2} \right]$$

$$\rho\mu: \nabla_\nu K^\nu_\mu - \nabla_\mu K = 0$$

$$\mu\nu: \frac{D-1}{N} \partial_\rho K^\mu_\nu + K K^\mu_\nu = R^\mu_\nu + \frac{D-1}{\ell^2} \delta^\mu_\nu - \frac{1}{N} \nabla^\mu \nabla_\nu N$$



Effective theory of black holes

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

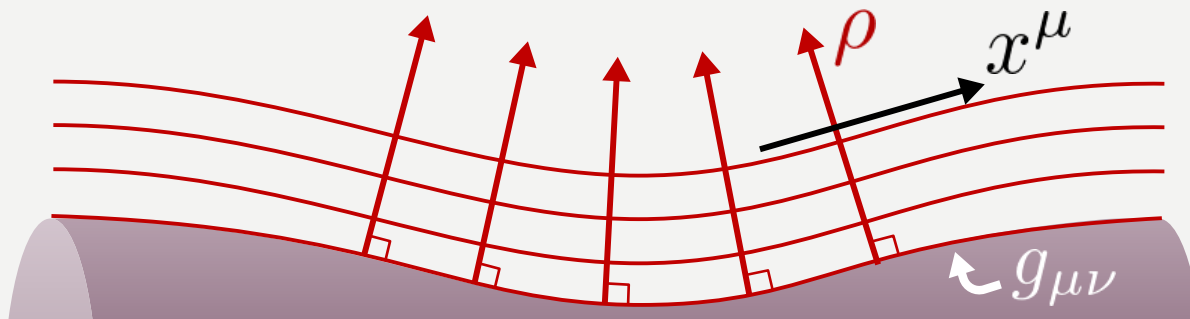
We derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

1. Large gradient near BH \rightarrow Use ρ coordinate zooming up the BH horizon
2. Decompose Einstein equations
3. **Apply I/D expansion**, and **integrate in ρ** to get $K_{\mu\nu}$, then $g_{\mu\nu}$

$$\mu\nu : \frac{D-1}{N} \partial_\rho K^\mu{}_\nu + K K^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu + \frac{D-1}{\ell^2} \delta^\mu{}_\nu - \frac{1}{N} \nabla^\mu \nabla_\nu N$$

$$K \text{ def.: } K_{\mu\nu} \equiv \frac{D-1}{2N} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \rho}$$



Effective theory of black holes

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

We derive **equations for static black hole horizon**,

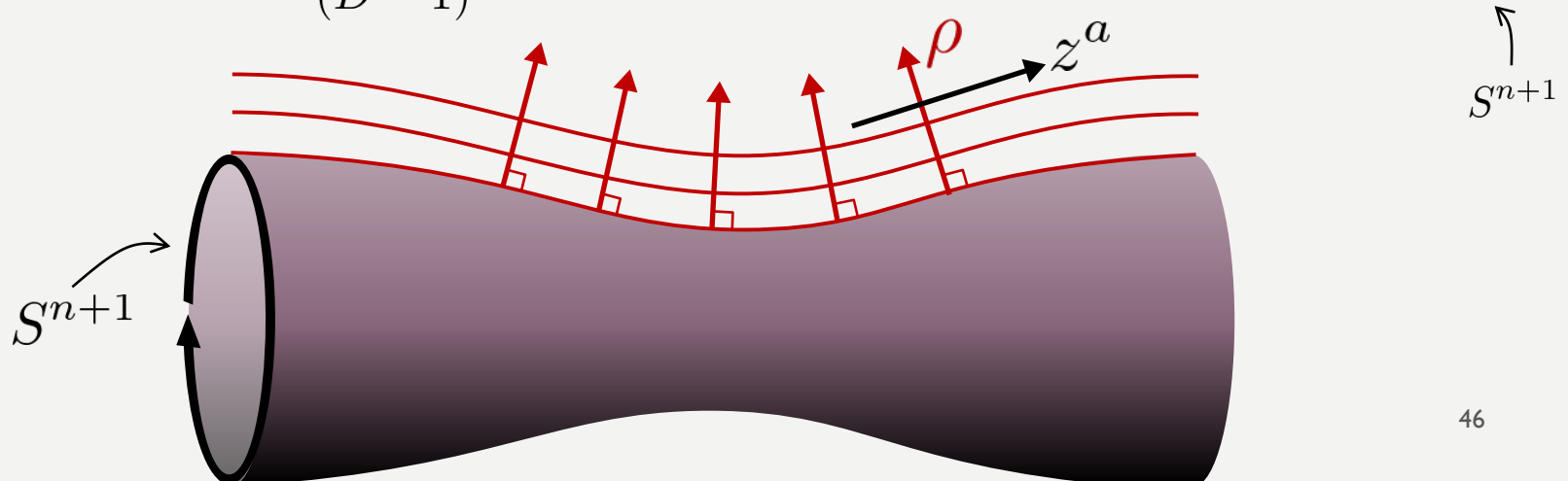
that can describe deformed BH horizon.

1. Large gradient near BH \rightarrow Use ρ coordinate zooming up the BH horizon
2. Decompose Einstein equations
3. **Apply I/D expansion**, and **integrate in ρ** to get $K_{\mu\nu}$, then $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = N^2(\rho, x) \frac{d\rho^2}{(D-1)^2} + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$= N^2(\rho, x) \frac{d\rho^2}{(D-1)^2} - V^2(\rho, x) dt^2 + g_{ab}(\rho, z) dz^a dz^b + R^2(\rho, z) d\Omega_{n+1}^2$$

Brane direction (p -dim)



Effective theory of black holes

[Emparan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

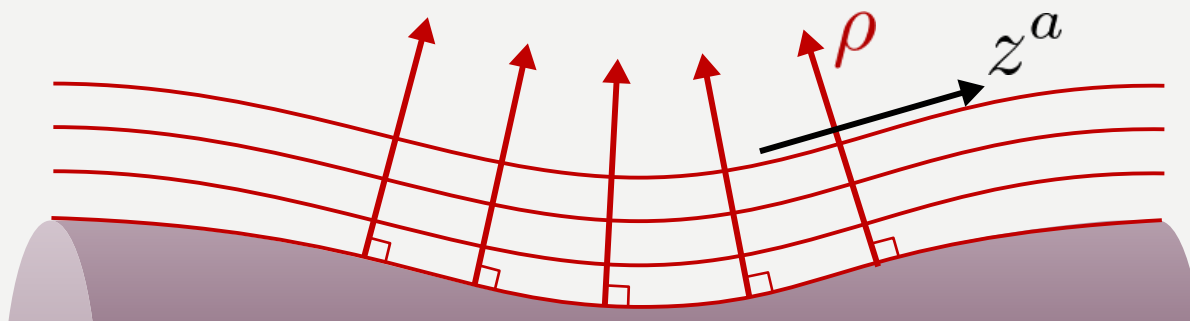
We derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

1. Large gradient near BH \rightarrow Use ρ coordinate zooming up the BH horizon
2. Decompose Einstein equations
3. **Apply I/D expansion**, and **integrate in ρ** to get $K_{\mu\nu}$, then $g_{\mu\nu}$

Solution: Black p -brane with \mathcal{Z} -dependence

$$ds^2 = r_0^2(z) \left(-4\tilde{\kappa}^2 \tanh^2(\rho/2) dt^2 + \frac{d\rho^2}{n^2} \right) + (\gamma_{ab}(z) + \mathcal{O}(D^{-1})) dz^a dz^b + \mathcal{R}^2(z) \cosh^{\frac{4}{n}}(\rho/2) d\Omega_{n+1}^2$$



Effective theory of black holes

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

We derive **equations for static black hole horizon**,

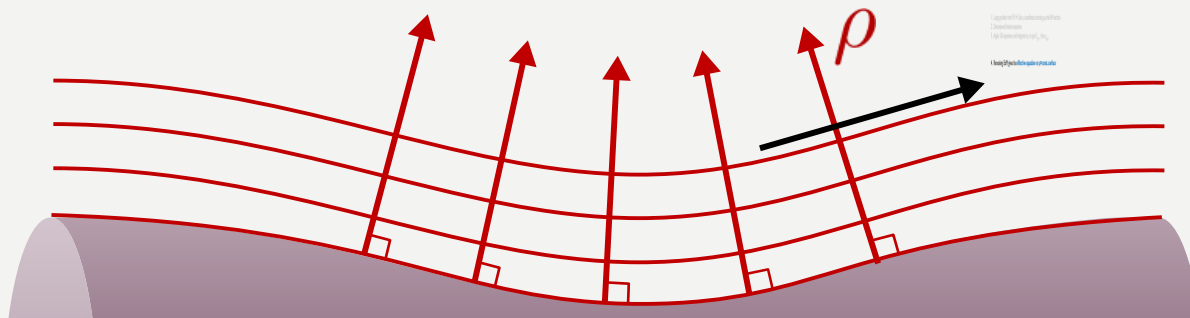
that can describe deformed BH horizon.

1. Large gradient near BH \rightarrow Use ρ coordinate zooming up the BH horizon
2. Decompose Einstein equations
3. Apply I/D expansion, and integrate in ρ to get $K_{\mu\nu}$, then $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = r_0^2(z) \left(-4\tilde{\kappa}^2 \tanh^2(\rho/2) dt^2 + \frac{d\rho^2}{n^2} \right) + (\gamma_{ab}(z) + \mathcal{O}(D^{-1})) dz^a dz^b + \mathcal{R}^2(z) \cosh^{\frac{4}{n}}(\rho/2) d\Omega_{n+1}^2$$

4. Remaining EoM gives the **effective equation on $\rho=\text{const.}$ surface**

$$\rho\mu : \quad \nabla_\nu K^\nu_\mu - \nabla_\mu K = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g_{tt}} K = 2\kappa$$



Effective theory of black holes

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

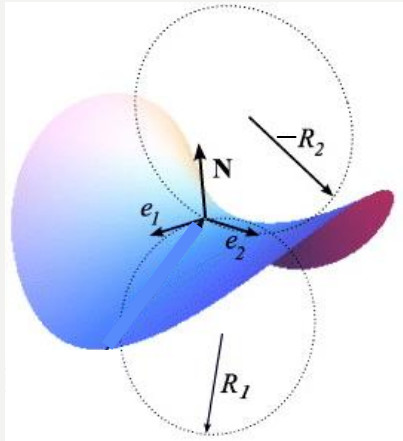
We derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

$$\sqrt{-g_{tt}} K = 2\kappa \quad : \quad \text{Young-Laplace equation for soap bubbles}$$

Mean curvature

Surface gravity of BH horizon

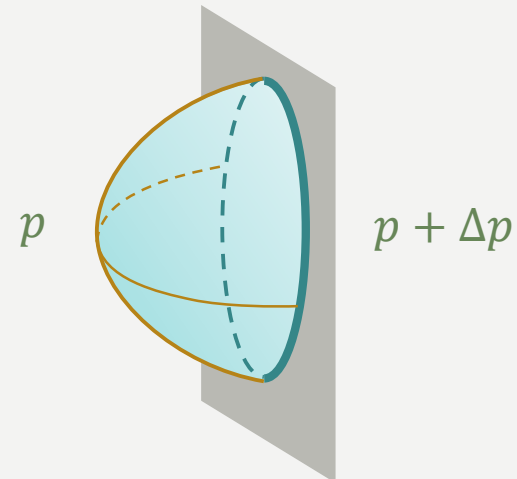


$$K \sim \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \Delta p$$

Surface tension

Pressure difference



Effective theory of black holes

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

We derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

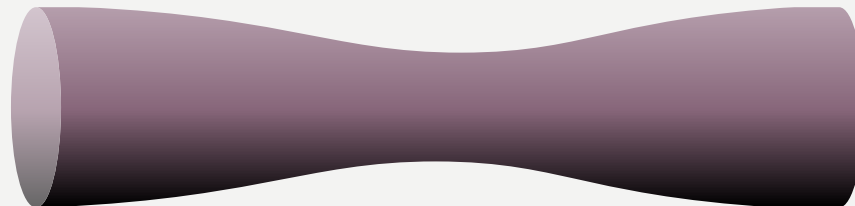
$$\sqrt{-g_{tt}} K = 2\kappa \quad : \quad \text{Young-Laplace equation}$$

◆ Procedure to construct a static black object in large D limit:

1. Find a surface satisfying the Young-Laplace equation
2. Replace the interior of the surface with the large- D BH solution:

$$ds^2 = r_0^2(z) \left(-4\tilde{\kappa}^2 \tanh^2(\rho/2) dt^2 + \frac{d\rho^2}{n^2} \right) + (\gamma_{ab}(z) + \mathcal{O}(D^{-1})) dz^a dz^b + \mathcal{R}^2(z) \cosh^{\frac{4}{n}}(\rho/2) d\Omega_{n+1}^2$$

ex.) Schwarzschild, (non-uniform) black string, ...



Effective theory of black holes

[Emparan, Izumi, Luna, Suzuki, Tanabe 2016]

Extension to **dynamical black p -brane**

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\rho(t, z)}{R} \right) dt^2 + 2dt dr - \frac{2}{n} \frac{p_i(t, z)}{R} dz^i dt + \frac{1}{n} \left(\delta_{ij} + \frac{1}{n} \frac{p_i p_j}{\rho R} \right) dz^i dz^j + r^2 d\Omega_{n+1}^2$$

($R \equiv r^n$)

where ρ and p_i obeys

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0 \\ \partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \rho v_i + \partial_i \rho \\ \tau_{ij} = P \delta_{ij} - 2\eta \left(\partial_{(i} v_{j)} - \frac{1}{p} \delta_{ij} \partial^k v_k \right) - \zeta \partial^k v_k \delta_{ij} - \rho \partial_i \partial_j \ln \rho \\ P = -\epsilon \rho, \quad \eta = \rho, \quad \zeta = (1 + \epsilon) \eta / \rho \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \epsilon = +1: \text{Asymptotically flat} \\ \epsilon = -1: \text{Asymptotically AdS} \end{array} \right)$$

(almost) EoMs of viscous compressible fluid

The Large D limit of GR

1. Motivation
2. How it works
 - a. Idea
 - b. Effective theory of black holes
3. Application
4. Summary

Applications

- Uniform black string is unstable

→ evolves into a non-uniform black string

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0 \\ \partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = 0 \end{cases}$$

```
eq1 =  $\partial_t m[t, z] - \partial_{z,z} m[t, z] + \partial_z p[t, z];$ 
```

```
eq2 =  $\partial_t p[t, z] - \partial_{z,z} p[t, z] - \partial_z m[t, z] + \partial_z \frac{p[t, z]^2}{m[t, z]};$ 
```

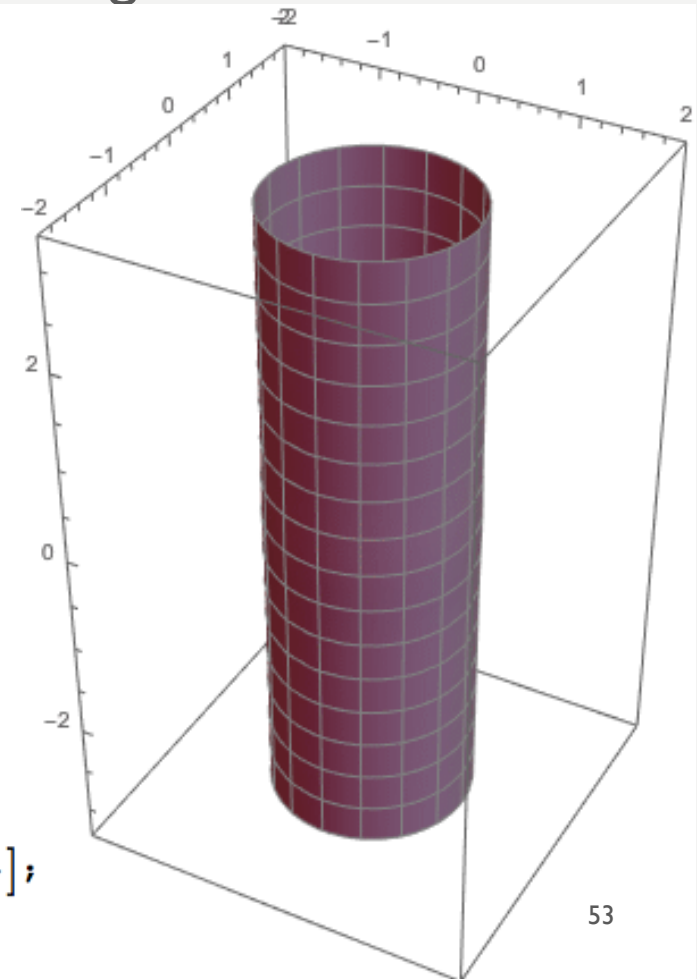
```
pde = {eq1 == 0, eq2 == 0}; tmax = 600; k = .98; L =  $\frac{2\pi}{k};$ 
```

```
 $\delta m = 0.01 \text{Exp}[-4 z^2]; \delta p = 0;$ 
```

```
icbc = {m[0, z] == 1 +  $\delta m$ , p[0, z] ==  $\delta p$ ,
```

```
  m[t,  $-\frac{L}{2}$ ] == m[t,  $\frac{L}{2}$ ], p[t,  $-\frac{L}{2}$ ] == p[t,  $\frac{L}{2}$ ]};
```

```
sol = NDSolve[{pde, icbc}, {m, p}, {t, 0, tmax}, {z,  $-\frac{L}{2}$ ,  $\frac{L}{2}$ }];
```



Applications

- Uniform black string is unstable

→ evolves into a non-uniform black string

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0 \\ \partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{eq1} = \partial_t m[t, z] - \partial_{z,z} m[t, z] + \partial_z p[t, z];$$

$$\text{eq2} = \partial_t p[t, z] - \partial_{z,z} p[t, z] - \partial_z m[t, z] + \partial_z \frac{p[t, z]^2}{m[t, z]};$$

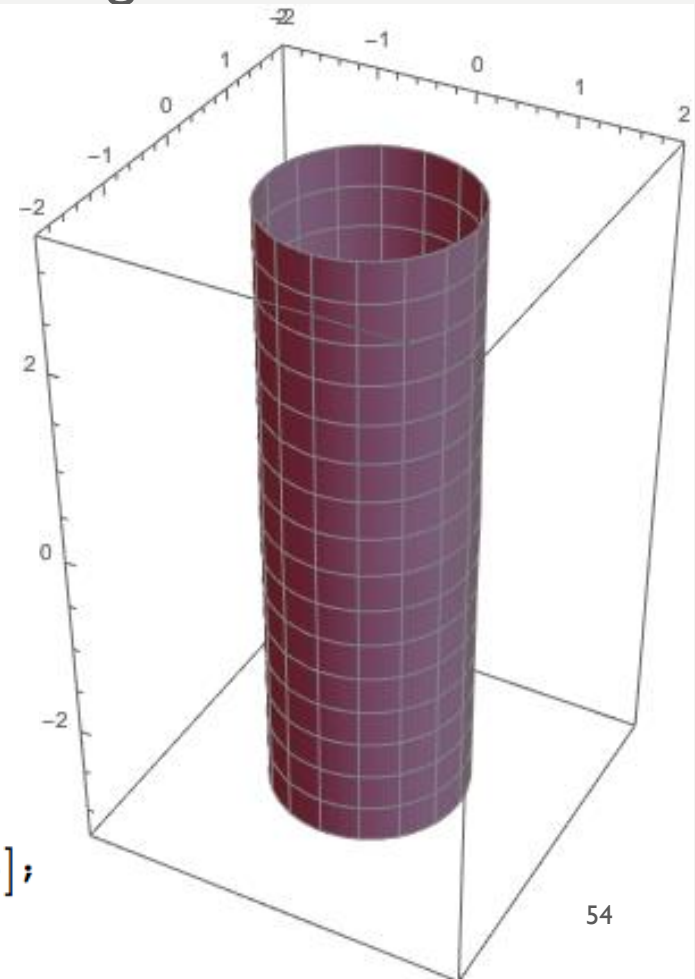
$$\text{pde} = \{\text{eq1} == 0, \text{eq2} == 0\}; \text{tmax} = 600; \text{k} = .98; \text{L} = \frac{2\pi}{\text{k}};$$

$$\delta m = 0.01 \text{Exp}[-4 z^2]; \delta p = 0;$$

$$\text{icbc} = \{m[0, z] == 1 + \delta m, p[0, z] == \delta p,$$

$$m[t, -\frac{L}{2}] == m[t, \frac{L}{2}], p[t, -\frac{L}{2}] == p[t, \frac{L}{2}]\};$$

$$\text{sol} = \text{NDSolve}[\{\text{pde}, \text{icbc}\}, \{m, p\}, \{t, 0, \text{tmax}\}, \{z, -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\}];$$

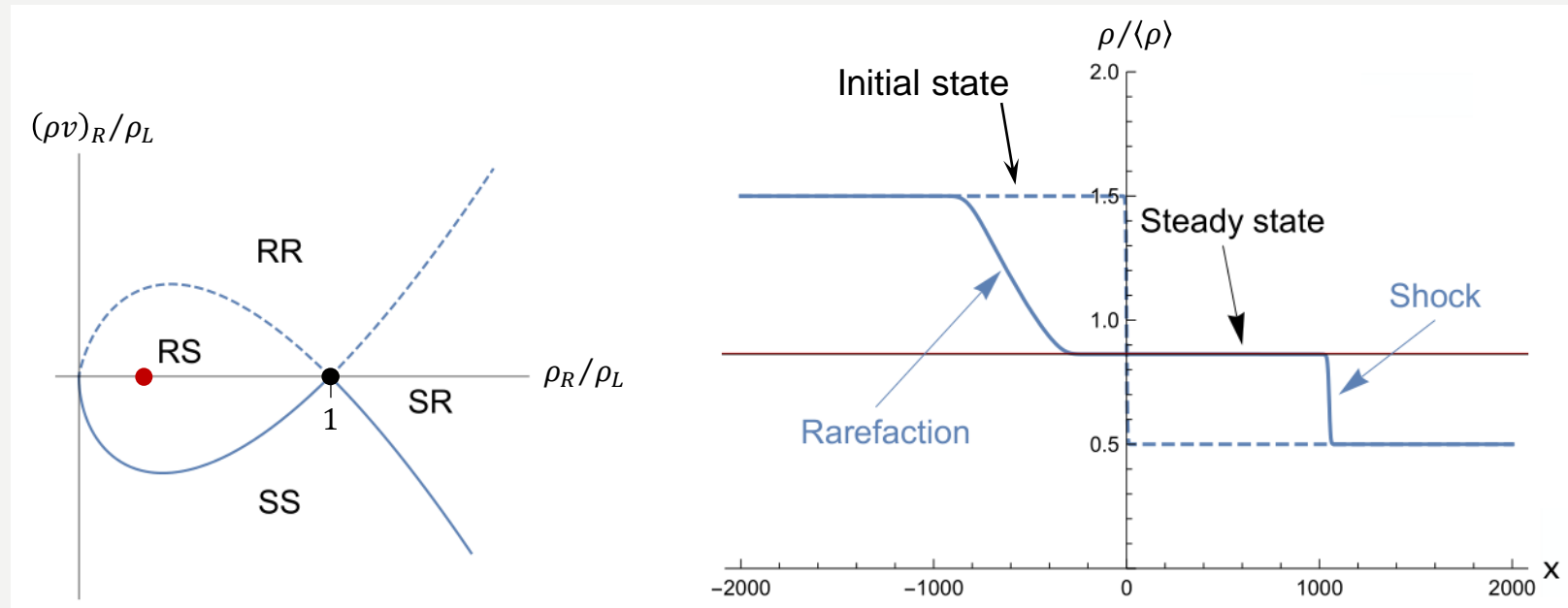


Applications

- Riemann problem in large D limit [Herzog, Spillane, Yarom 2016]

Shock waves / rarefaction waves based on

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0 \\ \partial_t(\rho v^i) + \partial_j(\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = 0 \end{cases}$$

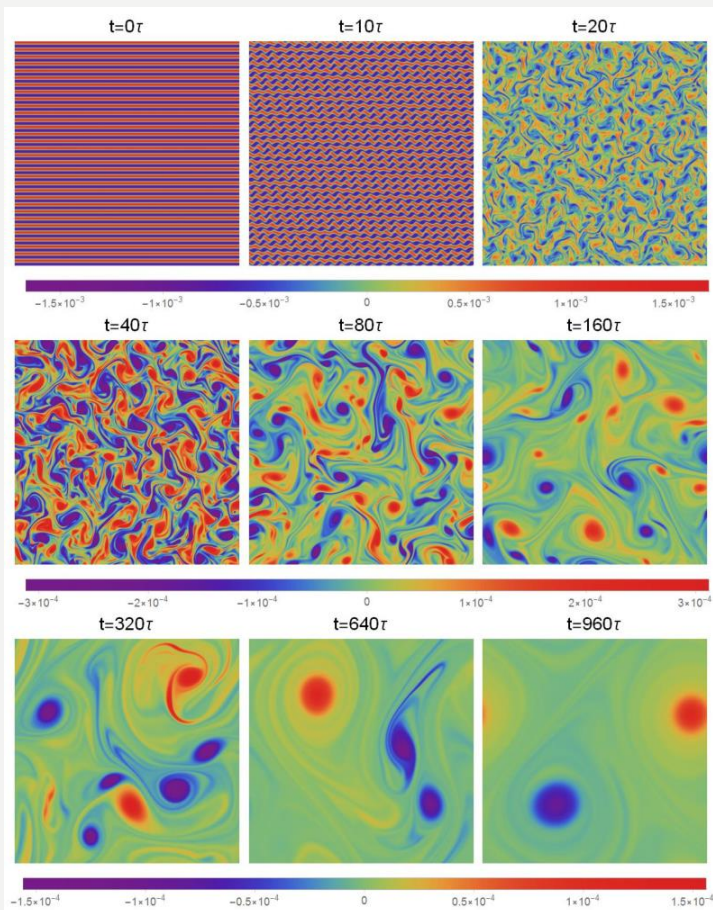


Applications

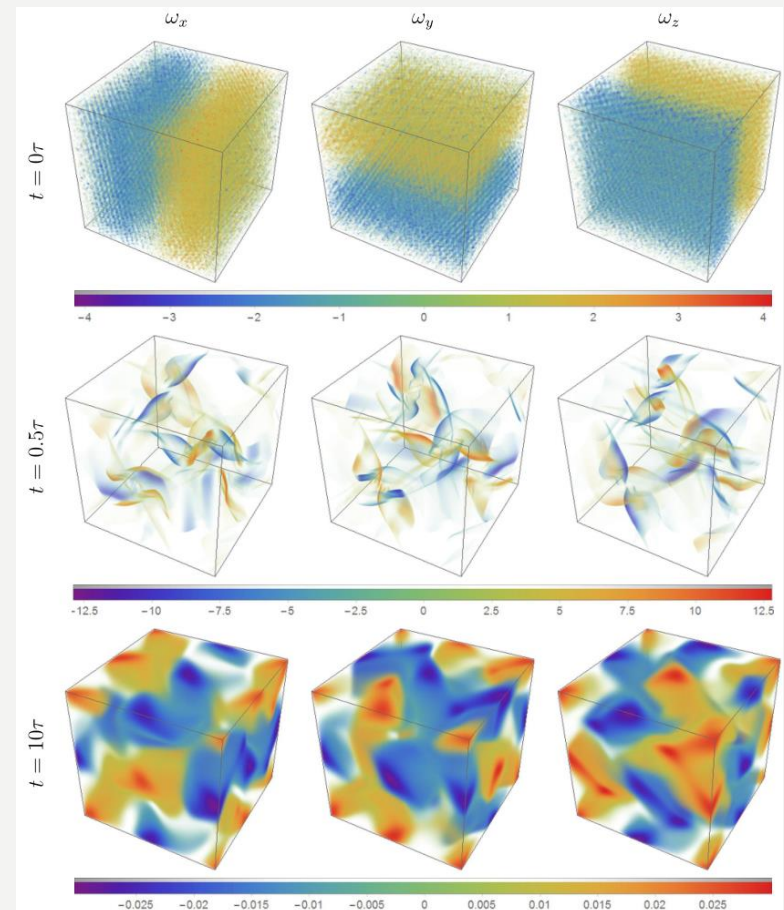
- Turbulence on the black hole horizon in large D limit

[Rozali, Sabag, Yarom 2017]

Vorticity of 2-dim. fluid



Vorticity of 3-dim. fluid

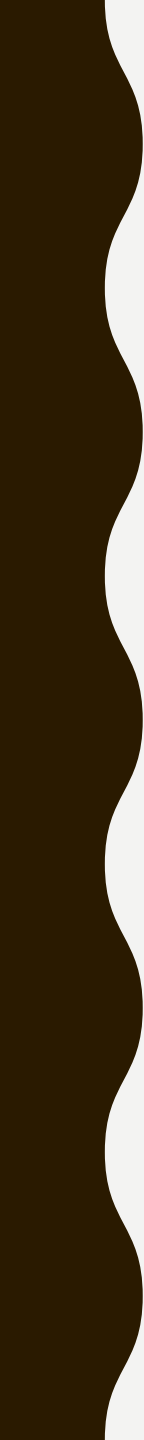


Summary: Large D limit in GR

- ✓ $1/D$ expansion of the Einstein equation
- ✓ Powerful tool for various problems in GR
 - Static solution construction
 - Perturbation of black objects (quasinormal modes, stability)
 - Dynamical solution construction
- ✓ Elastic and hydrodynamic description of BH horizon
- ◆ Applications to gauge/gravity correspondence, condensed matter physics, ...
- ◆ Any other interesting dynamics of black objects?

ブラックホール時空の 幾何学と流体的記述

1. 特殊・一般相対性理論
2. ブラックホール時空
3. ブラックホール地平面の性質
 - 事象の地平面 (event horizon)
 - 見かけの地平面 (apparent horizon) \simeq 極小曲面
4. ブラックホール地平面の流体的記述
 - 一般相対性理論の Large D 極限



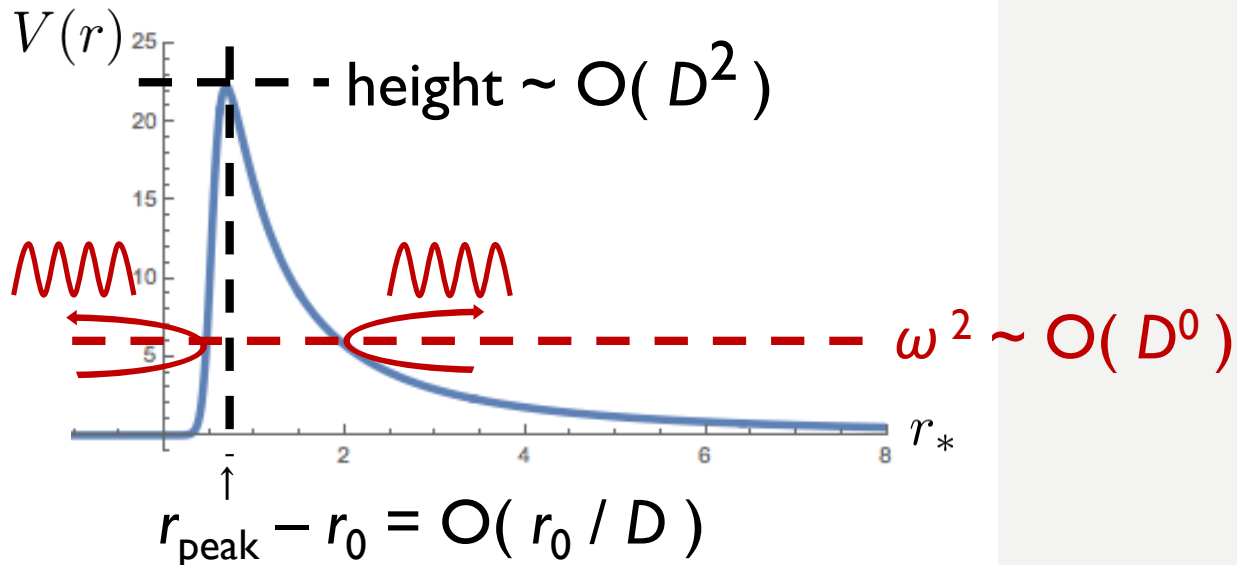
How it works

[Emparan, Suzuki, Tanabe 2013]

- Scalar field around BH in $D = n+3$ dim.

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \Psi = 0 \quad \text{with} \quad \Psi = e^{-i\omega t} \psi(r) \mathbf{Y}^{\ell}(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d^2}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r)) \right] \left(r^{\frac{n+1}{2}} \psi(r) \right) = 0 \\ V(r) = \frac{f^2(r)}{4r^2} \left[(2\ell + n)^2 - 1 + (n+1)^2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right] \end{array} \right. \quad \left(r_* \equiv \int \frac{dr}{f(r)} \right)$$



Effective theory of black holes

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

We derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

1. Large gradient near BH \rightarrow Use ρ coordinate zooming up the BH horizon
2. Decompose Einstein equations
3. **Apply I/D expansion**, and **integrate in ρ** to get $K_{\mu\nu}$, then $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= N^2(\rho, x) \frac{d\rho^2}{(D-1)^2} + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
 &= N^2(\rho, x) \frac{d\rho^2}{(D-1)^2} - V^2(\rho, x) dt^2 + g_{ab}(\rho, z) dz^a dz^b + \mathcal{R}^2(\rho, z) d\Omega_{n+1}^2
 \end{aligned}$$

\swarrow Brane direction (p -dim)

Compare with black p -brane ($n = D - p - 3$):

$$ds^2 = r_0^2 \left(-4\tilde{\kappa}^2 \tanh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) dt^2 + \frac{d\rho^2}{n^2} \right) + \delta_{ab} dz^a dz^b + \mathcal{R}_0 \cosh^{\frac{4}{n+1}}\left(\frac{\rho}{2}\right) d\Omega_{n+1}$$

Assume the same behavior as the black p -brane:

$$N, V, \mathcal{R}, K^a_b, K^i_j = \mathcal{O}(D^0), \quad K^t_t, K = \mathcal{O}(D^1)$$

Effective theory of black holes

[Empanan, Shiromizu, Suzuki, Tanabe, Tanaka 2015]

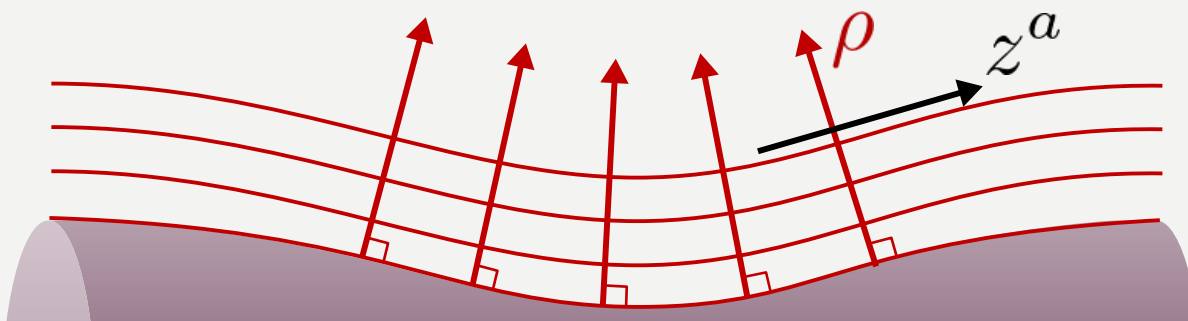
We derive **equations for static black hole horizon**,

that can describe deformed BH horizon.

1. Large gradient \perp BH horizon \rightarrow Use adapted coordinates
2. Decompose Einstein equations
3. **Apply I/D expansion**, and **integrate in ρ** to get $K_{\mu\nu}$, then $g_{\mu\nu}$

$$\mu\nu : \frac{D-1}{N} \partial_\rho K^\mu{}_\nu + K K^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu + \frac{D-1}{\ell^2} \delta^\mu{}_\nu - \frac{1}{N} \nabla^\mu \nabla_\nu N$$

$$K \text{ def.: } K_{\mu\nu} \equiv \frac{D-1}{2N} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \rho}$$



Effective theory of black holes

[Emparan, Izumi, Luna, Suzuki, Tanabe 2016]

- Extension to **dynamical black p -brane**
- Correspondence between elastic and hydrodynamic eqs.:
(hydrodynamic) effective equations are equivalent to

$$\sqrt{-g_{tt}}K = n + 1 - \left(\ln \rho + \frac{\partial_j \partial^j \rho}{\rho} - \frac{\partial_j \rho \partial^j \rho}{2\rho^2} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho \partial_i (\sqrt{-g_{tt}}K) = \partial_t (\rho v_i) + \partial^j (\rho v_i v_j - 2\rho \partial_{(i} v_{j)}) \\ \rho \partial_t (\sqrt{-g_{tt}}K) = \partial_i \left(\rho v^i + \rho \partial^i \frac{\partial_j (\rho v^j)}{\rho} \right) \end{array} \right.$$

For static solutions, they reduces to the elastic effective equation.

Applications

- Extension to charged black hole horizons

[Emparan et al. 2016]

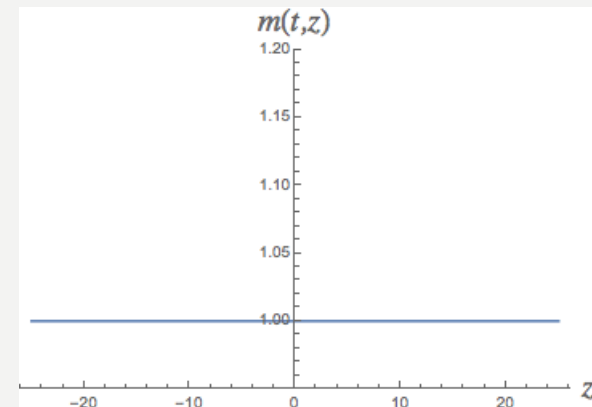
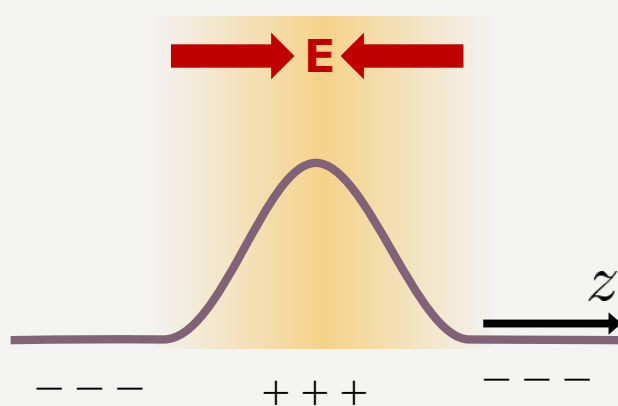
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0 \\ \partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = q \partial^i V \\ \partial_t q + \partial_i j^i + \partial_i (\rho \partial^i V) = 0 \end{array} \right.$$

where $A_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(V(t, z) - \frac{q(t, z)}{R} \right)$, $j_i = q v_i - \rho \partial_i (q/\rho)$

- Polarizing brane in AdS spacetime:

[Iizuka, Ishibashi, Maeda, Tanabe, NT, in progress]

Apply an external field $V(z) = \frac{a}{1+z^2}$ to charged BH horizon



Applications

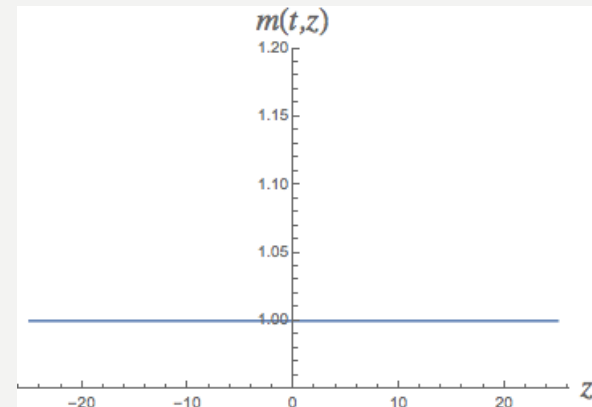
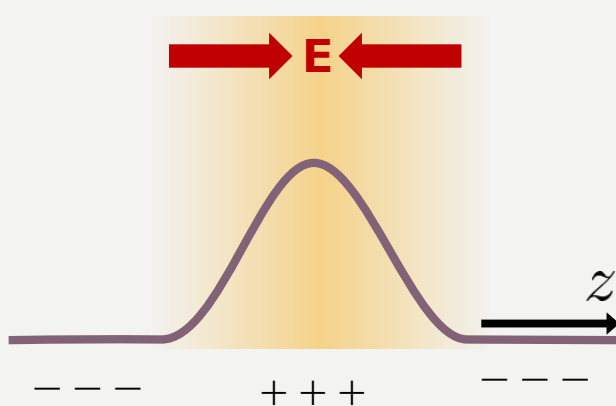
- Extension to charged black hole horizons: [Emparan et al. 2016]

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0 \\ \partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\rho v^i v^j + \tau^{ij}) = q \partial^i V \\ \partial_t q + \partial_i j^i + \partial_i (\rho \partial^i V) = 0 \end{array} \right.$$

where $A_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(V(t, z) - \frac{q(t, z)}{R} \right)$, $j_i = q v_i - \rho \partial_i (q/\rho)$

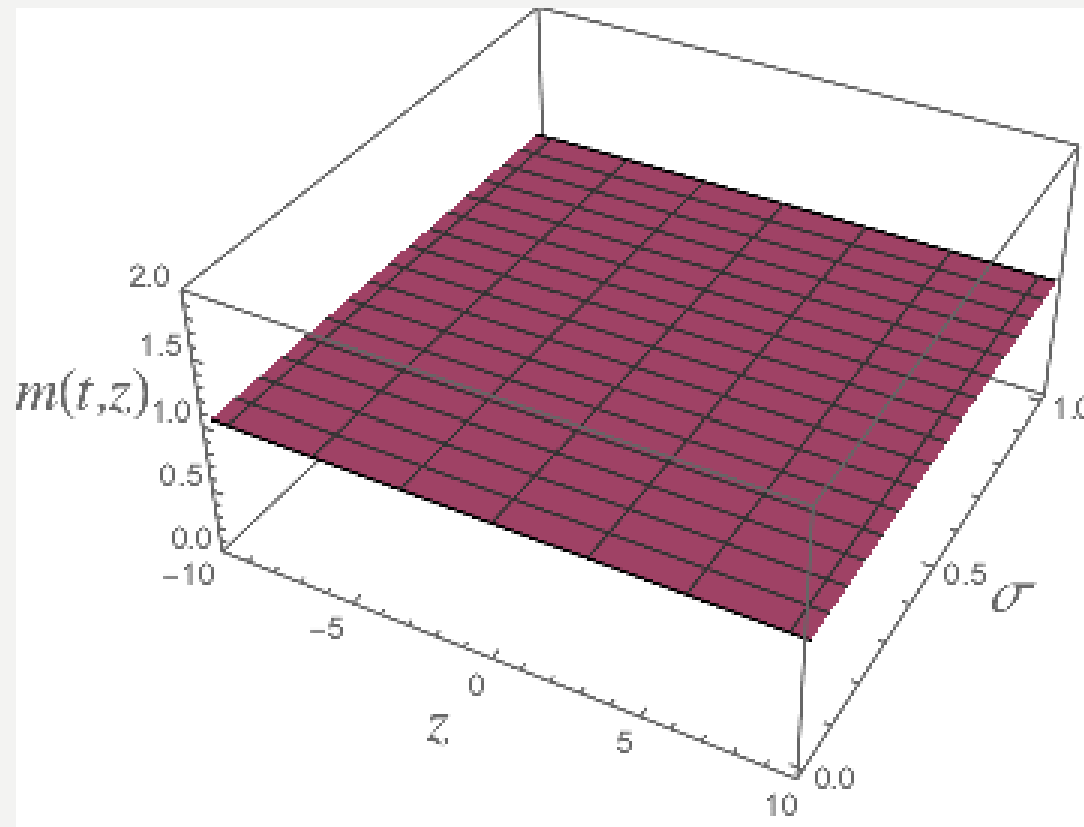
- Polarizing brane in AdS spacetime: [Iizuka, Ishibashi, Maeda, Tanabe, NT, in progress]

Apply an external field $V(z) = \frac{a}{1+z^2}$ to charged BH horizon



- Polarizing brane in AdS spacetime:

[Iizuka, Ishibashi, Maeda, Tanabe, NT, in progress]



- Polarizing brane in AdS spacetime:

[Iizuka, Ishibashi, Maeda, Tanabe, NT, in progress]

