

常微分方程式 講義ノート

棚橋典大

2019 年度後期 月曜 1 限

第 1 回 導入、一階常微分方程式の解法

[教科書 1.1 ~ 1.3]

1.1 常微分方程式とは

- 常微分方程式：未知関数 $y(x)$ とその微分 $y'(x) \equiv \frac{dy}{dx}$, $y''(x) \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$, ... を含む方程式。関数の引数 x は独立変数と言う。(t など、他の独立変数を用いることもある。)

(偏微分方程式: 複数の独立変数に依存する関数 $f(x, y, \dots)$ とその偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots$ を含む方程式)

- 常微分方程式の例

– 指数関数

$y(x) = Ce^{Ax}$ (C, A : 定数) は、微分方程式 $y' = Ay$ の一般解である。

指数関数がこの微分方程式の解になっていることは、指数関数を微分方程式に代入して確認してもよいし、以下のように微分方程式を直接解くことで示してもよい。

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log y(x) \quad (1.1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \log y(x) = \int \left[\frac{d}{dx} \log y(x) \right] dx = \int A dx = Ax + B \quad (B: \text{積分定数}) \quad (1.2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = e^{Ax+B} = e^B e^{Ax} = C e^{Ax} \quad (C \equiv e^B) \quad (1.3)$$

– 質点の運動

質量 m の粒子の時刻 t における位置を $x(t)$ とする。この粒子に一定の力 F がかかるとき、粒子の運動は運動方程式 $ma(t) = F$ ($a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ は粒子の加速度) で定まる。 $x(t)$ は、運動方程式を微分方程式として解くことで求められる。

$$F = ma(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \int \left[\frac{d^2x}{dt^2} \right] dt = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + C_1$$
$$\Leftrightarrow \quad x(t) = \int \left[\frac{dx}{dt} \right] dt = \int \left(\frac{F}{m} t + C_1 \right) dt = \frac{F}{2m} t^2 + C_1 t + C_2 .$$

ただし、 C_1, C_2 は積分定数。

$t = 0$ のとき $x(t = 0) = C_2$ となることから、 C_2 は初期位置に相当する。

同様に、 $\frac{dx}{dt}(t = 0) = C_1$ となることから、 C_1 は初期速度に相当する。

– 単振動

ばね定数 k のばねに質量 m の質点がついているとき、質点の位置を $y(t)$ とすると

$$my'' + ky = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = C_1 \sin\left(\frac{k}{m}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{k}{m}t\right).$$

ただし、 C_1, C_2 は定数。

ばねの振動に限らず、微小振幅の振動（振り子、音叉）の多くはこの単振動（調和振動）をすることが知られている。

上記の例に限らず、様々な自然現象は微分方程式で記述される（自然現象のモデル化）ため、微分方程式の解法も重要となっている。

● ラプラス変換

ある関数 $f(t)$ について、この関数のラプラス変換 $\mathcal{L}(f)$ を

$$\mathcal{L}(f) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.4)$$

と定義する。

関数の微分をラプラス変換したものは、微分する前の関数をラプラス変換したもので表わせる。

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

この性質を活用して、微分方程式を代数方程式に書き直して解くことが可能となる。複雑な常微分方程式を機械的に解くためのツールの一つとなっている。

1.2 この講義の目標と進め方

常微分方程式の解法と応用法をマスターすることが主な目標。そのために下記項目を学ぶ。

- 1 階常微分方程式
- 2 階線形常微分方程式
- 高階常微分方程式、連立微分方程式
- ラプラス変換

1.3 定義と用語

● 微分方程式の階数

微分方程式に現れる最高階の微分項の階数をその微分方程式の階数と呼ぶ。

$$\text{一階微分方程式の例)} \quad y' + ay = b \quad \text{二階微分方程式の例)} \quad y'' + ay' + by = c \quad (1.5)$$

● 線形・非線形

未知関数 y とその微分 y', y'', \dots の一次の項だけが方程式に現れるとき、その微分方程式を線形微分方程式と呼ぶ。それ以外のものを非線形微分方程式と呼ぶ。

式 (1.5) の例はどちらも線形微分方程式である。 $y' + ay^2 = b$ は非線形微分方程式の例。線形微分方程式の方がシンプルで、場合によっては一般的な解法が存在する。非線形微分方程式を解くためには特殊な手法が必要になるのが通例。

- 一般解・特殊解 (特解)

一階微分方程式 $y'(x) = Ay(x)$ の全ての解は、任意定数 C を用いて

$$y' = Ay \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{Ax}$$

と表せる。このように、任意定数を含む微分方程式の解を一般解と呼ぶ。

C は任意でよいので、この微分方程式には無数に解が存在することになる。式 (1.3) で見たように、この任意定数の起源は積分定数である。

初期条件など何らかの条件を課すと、任意定数が特定の値にセットされた解が得られる。これらは特殊解 (もしくは特解) と呼ばれる。

- 初期値問題

一階微分方程式の解は、ある一点における関数の値を指定することで一意に定まる。

$$\text{例) } Y'(x) = Ay(x), \quad y(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3e^{Ax} \quad (1.6)$$

この例では、初期地点 $x = 0$ における関数の値 $y(0)$ を 3 に固定することで、任意定数 C を 3 に固定している。このように、関数の初期値を指定して微分方程式を解く問題のことを初期値問題と呼ぶ。

(この授業の後半で、ある領域の両端で境界条件を課して微分方程式を解く境界値問題を学ぶ。)

1.4 微分方程式の幾何学的意味

一階微分方程式を、以下の標準形に書き直す。

$$y'(x) = f(y(x), x) \quad (1.7)$$

f は未知関数 $y(x)$ と独立変数 x の関数。

$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$ は、地点 x における関数 $y = y(x)$ の接線の傾きそのものである。微分方程式 (1.7) によって、 (x, y) 平面上の傾きの方が先に決められており、微分方程式の解はその向きに沿った解曲線 (もしくは積分曲線) として得られる。

1.5 変数分離形の微分方程式

準備が済んだところで、微分方程式の具体的な解法の説明に移る。

微分方程式が次の形

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g(y(x)) \quad (1.8)$$

をとるとき、変数分離形の方程式と呼ぶ。この式を、左辺に y , 右辺に x だけが現れるように変形すると

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx \quad (1.9)$$

とでき、この両辺をそのまま積分することで

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C \quad (1.10)$$

とできる。あとは、この両辺の積分を実行できれば微分方程式 (1.8) の解が得られる。右辺の C は、両辺から発生する積分定数を一つにまとめたもの。

変数分離形の微分方程式の例

$$9yy' + x = 0 \quad (1.11)$$

$y' = dy/dx$ であることに注意して式を書き換えると

$$9ydy = -xdx \quad (1.12)$$

とできる。この両辺を不定積分すると

$$\int 9ydy = -\int xdx \Leftrightarrow \frac{9}{2}y^2 + C_1 = -\frac{1}{2}x^2 + C_2 \Leftrightarrow x^2 + (3y)^2 = C. \quad (1.13)$$

ここで、両辺の積分定数をまとめて $C \equiv 2(-C_1 + C_2)$ とした。式 (1.13) は、原点を中心とし、半径が任意定数 C で定まる楕円の族を表す。

指数関数を解として持つ式 (1.1) も、変数分離形の微分方程式の例である。この節で説明した方法でこれを解いてみると

$$\frac{dy}{dx} = Ay \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = Adx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int Adx \Leftrightarrow \log y = Ax + B. \quad (1.14)$$

ただし B は任意定数。この解を y について表しなおして $y = e^{Ax+B} = e^B e^{Ax} = C e^{Ax}$ ($C \equiv e^B$ は任意定数) を得る。

変数分離形に変換できる例

- $y' = f(y/x)$ の形の微分方程式

方程式 $y' = f(y/x)$ はそのままでは変数分離できないが、新変数 $u(x) \equiv \frac{y(x)}{x}$ を導入し、 $y(x)$ を消去することで変数分離できる。まず、左辺の $y' = dy/dx$ は

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[xu(x)] = u(x) + x\frac{du}{dx}(x) \quad (1.15)$$

と書き換えられる。これをもとの微分方程式に代入すると

$$u + x\frac{du}{dx} = f(y/x) = f(u) \Leftrightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C \quad (1.16)$$

と、変数分離法を適用して解ける。

例) $2xyy' = y^2 - x^2$:

この式の両辺を xy で割ると

$$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \Leftrightarrow 2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}. \quad (1.17)$$

ここで $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ と置くと、式 (1.15) を使って

$$2\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = u - \frac{1}{u} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2du}{u + \frac{1}{u}} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2du}{u + \frac{1}{u}} + C. \quad (1.18)$$

左辺は $\int \frac{dx}{x} = \log x$ となる。右辺は

$$-\int \frac{2du}{u + \frac{1}{u}} = -\int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{d(u^2)}{u^2 + 1} = -\log(u^2 + 1). \quad (1.19)$$

したがって、式 (1.18) から

$$\log x = -\log(u^2 + 1) + C \Leftrightarrow \log x + \log(u^2 + 1) = \log[x(u^2 + 1)] = C \quad (1.20)$$

$$\Leftrightarrow x(u^2 + 1) = \tilde{C} \quad (1.21)$$

$$\Leftrightarrow x \left[\frac{y^2}{x^2} + 1 \right] = \tilde{C}. \quad (1.22)$$

ただし \tilde{C} は任意定数。この表式を $y(x)$ について解けば

$$y = \pm x \sqrt{\frac{\tilde{C}}{x} - 1} \quad (1.23)$$

と解が得られる。式 (1.22) を変形して

$$x \left[\frac{y^2}{x^2} + 1 \right] = \tilde{C} \Leftrightarrow \left(x - \frac{\tilde{C}}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{\tilde{C}^2}{4} \quad (1.24)$$

とすることで、中心 $(x, y) = (\frac{\tilde{C}}{2}, 0)$ 、半径 $\frac{\tilde{C}}{2}$ の円が解曲線であるとわかる。

● 変数 $u = ay + bx + c$ を含む微分方程式

例)

$$[2x - 4y(x) + 5]y'(x) + x - 2y(x) + 3 = 0 \quad (1.25)$$

この微分方程式には $x - 2y$ という式が見えるので、これを新変数 $u(x) = x - 2y(x)$ と置く。すると

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{x - u(x)}{2} = \frac{1 - u'(x)}{2}. \quad (1.26)$$

これを式 (1.25) に使うと

$$[2u(x) + 5] \frac{1 - u'(x)}{2} + u(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{4u + 11}{2u + 5}. \quad (1.27)$$

これは変数分離法で解ける。実際、

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u + 11}{2u + 5} \Leftrightarrow dx = \frac{2u + 5}{4u + 11} du = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4u + 11} \right) du \quad (1.28)$$

と変形してから、両辺を積分すると

$$x = \frac{1}{2} \left[u - \frac{1}{4} \log(4u + 11) \right] + C \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left[x - 2y - \frac{1}{4} \log(4x - 8y + 11) \right] + C. \quad (1.29)$$

この式はこれ以上 y について解くことはできない。未知関数 $y(x)$ を陰的に与える解となっている。